

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II



FACOLTÀ DI INGEGNERIA

TESI DI DOTTORATO DI RICERCA IN  
INGEGNERIA AEROSPAZIALE, NAVALE E  
DELLA QUALITÀ  
(XXV° CICLO)

DINAMICHE INSTAZIONARIE ED INSTABILITÀ  
LINEARE GLOBALE DI GETTI LIQUIDI

Tutor:  
Prof. Ing. Gennaro Coppola  
Coordinatore:  
Prof. Ing. Luigi de Luca

Dottorando:  
Fortunato De Rosa

MARZO 2013

## Sommario

Nel presente lavoro sono analizzate le dinamiche globali, sia stazionarie che instazionarie, ed il comportamento di stabilità di flussi di lamine liquide bidimensionali gravitazionali ad interfaccia libera; le dinamiche essendo definite globali perchè relative all'intero sistema fluido spazialmente evolvente. A differenza dei getti circolari assialsimmetrici, tale tipologia di flussi spazialmente evolventi sono altamente sensibili alle perturbazioni di pressione indotte dall'ambiente. Questa caratteristica, dovuta principalmente ad una maggiore superficie libera nelle lamine bidimensionali sottili rispetto ai getti circolari, rende cruciale lo studio del comportamento globale del sistema e delle caratteristiche delle varie strutture d'onda che esso può sostenere.

Dopo un preliminare inquadramento del presente lavoro nello stato dell'arte e della tecnica numerica usata per l'analisi di stabilità, viene inizialmente descritto il formale sviluppo di un appropriato modello monodimensionale non lineare, ricavato per l'analisi di stabilità globale: il problema, intrinsecamente bidimensionale, è riformulato matematicamente mediante un'espansione in serie di potenze nella direzione laterale delle variabili coinvolte. Si ottiene una formulazione 1D nella direzione del flusso, non viscosa e dipendente dalla tensione superficiale.

Attraverso la formulazione monodimensionale sviluppata, viene successivamente ricavata la soluzione stazionaria della lamina liquida in gravità, per diversi valori del numero di Weber e del parametro di *slenderness* del flusso: tale soluzione servirà come moto base per una successiva analisi di stabilità del modello evolutivo. Una soluzione approssimata del moto base, coincidente con la velocità di efflusso torricelliana, è inoltre ricavata attraverso un approccio perturbativo nei parametri che governano il modello.

Infine è studiato il comportamento di stabilità globale del sistema perturbato. Attraverso la linearizzazione del sistema di equazioni di governo e l'introduzione dei modi normali temporali si ricavano gli operatori di evoluzione disaccoppiati per i disturbi sinuosi e varicosi, equipaggiati con due differenti modelli per il campo di pressione esterno, interagente mutuamente con la lamina attraverso l'interfaccia libera. L'analisi spettrale lineare, condotta relativamente ai soli modi sinuosi della soluzione *slender*, mostra l'effetto sostanzialmente stabilizzante della tensione superficiale, insieme con la presenza di due rami dello spettro relativi alle due curve caratteristiche dell'equazione di governo. Uno studio di tali caratteristiche è condotto attraverso la simulazione numerica diretta dell'evoluzione spazio-temporale di un disturbo interfacciale iniziale di tipo Gaussiano, mentre un'analisi non modale condotta sull'intero spettro di soluzioni mostra una robusta caratteristica di instabilità connessa alla non ortogonalità dei due rami dello spettro.

Parte del lavoro della presente tesi è stato oggetto di pubblicazione scientifica ed è stato presentato a conferenze internazionali, come di seguito elencato:

Coppola G., De Rosa F., de Luca L. *Surface tension effects on the motion of a free-falling liquid sheet*, Phys. Fluids, in stampa.

De Rosa F., Coppola G., de Luca L. *Modeling of the dynamics of unsteady free-falling liquid curtain flow*, 64TH ANNUAL MEETING OF THE APS DIVISION OF FLUID DYNAMICS, Bulletin of the American Physical Society Vol. 56, No.18, 284, ISSN 0003-0503, Baltimora, 20-22 Novembre, 2011.

de Luca L., De Rosa F., Coppola G. *Dynamics of free-falling liquid sheet*, QIRT 2012, Symposium in honor of Giovanni M. Carlomagno, Napoli, 11-14 Giugno, 2012.

Girfoglio M., De Rosa F., Coppola G., de Luca L. *Global eigenmodes in free-interface vertical liquid sheet flows*, 7TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL AND EXPERIMENTAL METHODS IN MULTIPHASE AND COMPLEX FLOW, A Corua, Spagna, 3-5 Luglio, 2013.

De Rosa F., Girfoglio M., Coppola G., de Luca L. *Global Dynamics of Gravitational Liquid Sheet Flows*, 43RD AIAA FLUID DYNAMICS CONFERENCE, San Diego, USA, 24-27 Giugno, 2013.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Motivazioni . . . . .	1
1.2	Stabilità idrodinamica . . . . .	3
1.2.1	Biforcazione e instabilità . . . . .	5
1.2.2	Esperimento di Reynolds . . . . .	6
1.3	Stabilità globale . . . . .	7
1.4	Dinamica e stabilità delle lamine liquide . . . . .	8
1.4.1	Dinamica stazionaria . . . . .	9
1.4.2	Analisi di stabilità . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Metodi spettrali per problemi di stabilità</b>	<b>14</b>
2.1	Approccio pseudospettrale . . . . .	14
2.2	Il metodo pseudospettrale alla Chebyshev . . . . .	15
2.3	Implementazione spettrale . . . . .	20
2.4	Scalatura degli operatori . . . . .	21
2.5	Pulizia dello spettro . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Modello unidimensionale</b>	<b>24</b>
3.1	Modello bidimensionale . . . . .	24
3.2	Condizioni di interfaccia . . . . .	26
3.2.1	Condizione cinematica . . . . .	26
3.2.2	Condizione dinamica . . . . .	27
3.3	Approccio perturbativo . . . . .	28
3.3.1	Equazione di continuità . . . . .	30
3.3.2	Equazione di quantità di moto assiale . . . . .	31
3.3.3	Equazione di quantità di moto laterale . . . . .	33
3.3.4	Condizione cinematica . . . . .	34
3.3.5	Condizione dinamica . . . . .	35
3.4	Modello unidimensionale instazionario . . . . .	37

<b>4</b>	<b>Moto base</b>	<b>40</b>
4.1	Modello unidimensionale stazionario . . . . .	40
4.2	Configurazione non simmetrica . . . . .	42
4.3	Configurazione simmetrica . . . . .	44
4.3.1	Derivazione fisica delle equazioni di governo . . . . .	46
4.4	Equazioni adimensionalizzate ed approssimazioni asintotiche . . . . .	47
4.4.1	Approssimazione <i>slender</i> della lamina . . . . .	48
4.4.2	Approssimazione a piccoli numeri di Weber . . . . .	50
4.5	Approccio numerico e risultati . . . . .	51
4.6	Conclusioni . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Campo perturbato</b>	<b>67</b>
5.1	Modello unidimensionale linearizzato . . . . .	67
5.2	Derivazione fisica delle equazioni di governo dei disturbi sinuosi e varicosi . . . . .	69
5.3	Modello di pressione esterna . . . . .	72
5.3.1	Modello non confinato . . . . .	72
5.3.2	Modello del cuscino d'aria . . . . .	75
5.4	Equazioni adimensionalizzate ed approssimazioni asintotiche . . . . .	78
5.4.1	Approssimazione <i>slender</i> del sistema linearizzato . . . . .	79
5.4.2	Approssimazione a piccoli numeri di Weber . . . . .	80
5.5	Propagazione dei disturbi in configurazioni <i>slender</i> . . . . .	81
5.6	Energia della perturbazione . . . . .	85
5.7	Approccio numerico . . . . .	87
5.7.1	Analisi non modale . . . . .	87
5.8	Analisi di stabilità dei disturbi sinuosi . . . . .	91
5.9	Conclusioni . . . . .	100
<b>A</b>	<b>Approccio perturbativo in <math>\varepsilon^2</math></b>	<b>102</b>
<b>B</b>	<b>Formulazione matriciale</b>	<b>108</b>
B.0.1	Modello di pressione semiconfinato . . . . .	109
B.0.2	Sistema <i>slender</i> con modello di pressione non confinato . . . . .	110

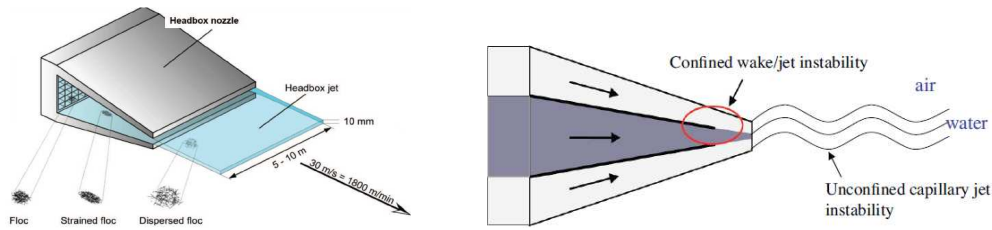
# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Motivazioni

Lo studio delle dinamiche associate all'evoluzione di lamine liquide, soggette all'azione del campo gravitazionale, e la relativa modellistica riveste una considerevole importanza scientifica e pratica in molte applicazioni dell'ingegneria ed, in tal senso, non è un caso se la letteratura disponibile è ampia e notevolmente variegata per argomenti trattati. È ben noto come il controllo della rottura di getti liquidi (sia piani che anulari) giochi un ruolo fondamentale in diversi processi industriali, quali ad esempio i processi di atomizzazione e di spray in cui flussi ad alta velocità vengono vaporizzati per aumentare l'efficienza dei combustori. I dispositivi di atomizzazione, tuttavia, vanno ben oltre i soli processi di combustione: spray di liquidi sono utilizzati oltre che in tali processi (per iniettare il combustibile in bruciatori di fornaci, turbine, motori a combustione interna, razzi, ecc.) anche in agricoltura, medicina, verniciatura, sistemi di raffreddamento, ecc...

A basse velocità di efflusso, quando l'effetto della gravità è considerevole, differenti processi tecnologici richiedono il controllo delle dinamiche di evoluzione di tali getti liquidi. Sono emblematici, in tal senso, i molteplici processi di coating che fanno uso di acqua per la deposizione ed il rivestimento di vernici o materiali isolanti su substrati di materiale diverso, per migliorarne le proprietà anticorrosive e di resistenza alle abrasioni (water-based coatings). Più specificamente, lamine liquide bidimensionali in caduta per effetto della gravità sono usate nei processi di deposizione per rivestire un substrato solido in movimento con un sottile ed uniforme film di rivestimento [18]. Ancora, getti liquidi vengono usati nei processi di paper-making per rendere omogeneo il multistrato di fibre di cellulosa di cui è formata la carta da stampa. Al fine di separare gli strati di fibra di diversa qualità il fluido non omogeneo viene



(a) Schema di efflusso della cellulosa liquida attraverso l'ugello della macchina da stampa.

(b) Sezione trasversale dell'ugello.

Figura 1.1: Instabilità idrodinamiche in prossimità dell'ugello di una macchina da stampa. Si generano sia vortici di scia dietro le piastre di separazione che onde di superficie in corrispondenza dell'interfaccia con l'aria stagnante della lamina di liquido fuori dall'ugello.

separato, in linea di principio, mediante l'applicazione di piastre all'interno dell'headbox, come mostrato in Fig. 1.1. La scia prodotta nel composto fluido sul bordo di tali piastre introduce delle oscillazioni indotte dal gradiente di velocità locale nella scia. Tali oscillazioni, insieme alle onde di superficie che si ingenerano all'uscita dell'ugello, quando la lamina di liquido attraversa l'aria, può causare il mescolamento dei diversi strati di cellulosa deteriorando in tal modo la qualità del prodotto finale.

Vale la pena sottolineare che questo problema trova uno spazio di applicazione anche in altri settori dell'ingegneria, ad esempio spaziale, in cui lo studio delle dinamiche associate a tali flussi trova un possibile interesse applicativo nel loro utilizzo come superfici radianti di piccola massa in impianti di raffreddamento aerospaziale [10].

A questi aspetti, strettamente legati all'ambito ingegneristico, si affiancano le notevoli implicazioni scientifiche legate alla comprensione dei meccanismi fisici alla base della fenomenologia del break-up delle lamine liquide piane in gravità, che sperimentalmente si realizza quando la portata è ridotta al di sotto di un certo valore di soglia. Anche se i concetti fondamentali che spiegano i meccanismi fisici responsabili della rottura del getto sembrano ben definiti, il tentativo di ricondurre tale livello di conoscenza nel quadro di un moderno approccio di instabilità fluidodinamica è ancora attuale oggetto di ricerca. A tal proposito basti osservare che lo stato dell'arte difetta di una teoria capace di predire il valore esatto del numero di Weber critico in corrispondenza del quale si verifica la rottura del getto piano, sperimentalmente osservata per  $We < 1$  [16]. D'altro canto, tuttavia, recenti indagini sperimentali, [32], hanno mostrato che la rottura del getto sembra non es-

sere causata dall'amplificazione modale di singoli disturbi, precludendo in tal modo ad una stabilità modale globale delle lamine liquide piane in gravità .

L'incapacità della analisi di stabilità modale globale di predire la rottura dei getti liquidi bidimensionali, sperimentalmente osservata a determinate portate, ha spinto di recente la ricerca a considerare meccanismi non lineari capaci di portare in conto l'effetto prodotto dall'assottigliamento molecolare locale della lamina. I processi non lineari indotti dall'accoppiamento dei modi sinuosi e varicosi così come la presenza stessa della viscosità possono avere un effetto stabilizzante capace di sopprimere la crescita algebrica prevista dall'analisi locale, ritardando in tal modo l'insorgenza del break-up. A tal fine, un approccio alternativo che consente di restare nell'ambito di un'analisi lineare resta quello di studiare i meccanismi di crescita transitoria, legati alla non-normalità dell'operatore di evoluzione linearizzato. D'altro canto, l'analisi di stabilità lineare non-modale, basata sulla sovrapposizione di molti modi spaziali globali dello spettro dell'operatore linearizzato, si è già dimostrata efficace nell'analisi delle dinamiche di separazione a bolle in flussi di stato limite, [2], e, in un contesto più prossimo, nell'individuazione di una robusta caratteristica di instabilità in lamine liquide in gravità schermanti un camera d'aria di dimensioni finite, [34].

La presente tesi si propone di estendere l'analisi di stabilità lineare non-modale, in un approccio globale, ad una vasta classe di flussi di lamine liquide in gravità, che includa gli effetti di tensione superficiale e modelli l'interazione con l'ambiente esterno mediante due differenti modelli che considerano la mutua interazione liquido-gas all'interfaccia sia attraverso un meccanismo locale di aerodinamica instazionaria sia mediante un meccanismo globale di reazione analogo a quello proposto in [34]. Quest'ultimo permetterà di comprendere l'effetto prodotto dalla tensione superficiale sui disturbi a ad elevata frequenza ed il loro contributo nella genesi di una instabilità di tipo globale.

## 1.2 Stabilità idrodinamica

Osservando sgorgare acqua da un rubinetto, un qualunque osservatore ha potuto notare sia getti in flusso laminare che turbolento. Quando la velocità del flusso è bassa il getto d'acqua è chiaro e ben definito (laminare), ma aumentando la velocità di efflusso si assiste ad un forte mescolamento di acqua con l'aria, dovuto all'instaurarsi di un regime di moto turbolento. Questa semplice osservazione sperimentale è in sé rappresentativa del concetto di instabilità fluidodinamica come di un fenomeno fisico che porta una determinata configurazione ad allontanarsi dal suo stato iniziale, se quest'ul-



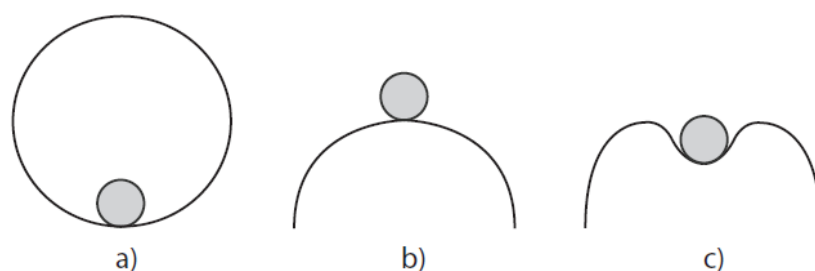


Figura 1.2: Illustrazione dei concetti di stabilità . Lo stato della palla nelle figure è : *a)* stabile; *b)* instabile linearmente; *c)* instabile non linearmente

timo non è stabile. Lo studio delle proprietà di stabilità dei flussi consente di predire, per assegnate condizioni operative, le configurazioni “sperimentalmente osservabili”. Un flusso instabile, infatti, è “rapidamente” soggetto a rottura ed evolve verso un’altra configurazione, ovvero verso un flusso con altre caratteristiche spazio-temporali. Per un’ampia classe di flussi in regime laminare l’instaurarsi di una instabilità conduce al regime turbolento, caratterizzato come è noto da un campo di vorticità tridimensionale fortemente variabile nel tempo, con un ampio spettro di scale spaziali e temporali. L’obiettivo centrale di un’analisi di stabilità è, dunque, stabilire se un dato flusso laminare è stabile o instabile e, nel secondo caso, analizzare come esso è soggetto a rottura evolvendo verso uno stato turbolento o un altro (spesso più complesso) stato laminare.

Sebbene i concetti di base della stabilità fluidodinamica siano stati fissati a partire dalla seconda metà del diciannovesimo secolo grazie ai contributi di Helmholtz, Kelvin, Rayleigh, Osborne Reynolds, il concetto della stabilità dello stato di un sistema fisico era già stato formalizzato in precedenza, in particolare in meccanica, allo scopo di analizzare il comportamento dinamico (stabilità e/od oscillazioni) di masse. Una definizione di stato stabile di un sistema, tanto qualitativa quanto incisiva, è attribuita a Maxwell: “Considerata una condizione iniziale di un sistema, se una qualunque piccola variazione di essa modificherà quello stato in istanti successivi solo per una qualunque piccola entità, allora la condizione iniziale stessa è detta stabile; se invece, una qualunque piccola variazione dello stato iniziale (attuale) può produrre uno scostamento finito dello stato del sistema in un tempo finito, la condizione del sistema è detta instabile”. L’esempio classico della palla sopra una collina (Fig. 1.2b) o sul fondo di una valle (Fig. 1.2a) illustra perfettamente questo fenomeno: tutte e due sono posizioni di equilibrio, ma nel primo caso un lieve spostamento fa precipitare la palla per effetto della gravità,

nel secondo caso la palla ritorna nella sua posizione anche se spostata. A seconda del caso, quindi, la gravità agisce in questo contesto come una forza stabilizzante o destabilizzante. Lo stesso si produce in una configurazione fluida quando soggetta a perturbazioni: se in risposta alla perturbazione, il fluido ritorna nella configurazione iniziale, la configurazione è stabile; nel caso in cui se ne allontani definitivamente assumendo altre configurazioni, lo stato iniziale non era stabile. Le perturbazioni che possono causare l'instabilità possono essere variazioni di velocità, di pressione, di densità o di altre grandezze geometriche e dinamiche della configurazione, in dipendenza delle caratteristiche del flusso investigato.

Naturalmente quanto detto vale in relazione alla teoria di stabilità lineare dei flussi, ovvero la teoria che studia la risposta di un flusso laminare a disturbi di piccola o moderatamente piccola ampiezza. Nella maggior parte dei casi, infatti, si studia la stabilità rispetto alle piccole perturbazioni, vale a dire perturbazioni che sono un ordine di grandezza più piccole rispetto alle grandezze della configurazione di base (ovviamente nel caso in cui questa grandezza non sia nulla). Tuttavia possono sussistere particolari stati del flusso che, sebbene insensibili a piccoli disturbi, possono risultare instabili per disturbi di ampiezza finita, come è il caso rappresentato dalla palla sul fondo di una valle di altezza finita (Fig. 1.2c) che potrebbe rotolare al di là della collina se le venisse applicato un impulso sufficientemente forte. In tal caso il sistema si troverebbe in uno stato instabile *non linearmente* e non sarebbe possibile conoscere la nuova configurazione verso cui evolve il flusso attraverso un problema di stabilità lineare, ovvero senza considerare anche gli effetti non lineari. Nel presente lavoro di tesi ci si focalizzerà sulla stabilità lineare di flussi.

### 1.2.1 Biforcazione e instabilità

Il moto di un qualsiasi fluido newtoniano è governato in condizioni normali dalle equazioni di Navier-Stokes. Tuttavia, in dipendenza della particolare geometria del flusso e delle condizioni iniziali tali equazioni possono portare a soluzioni molto differenti tra loro, non solo in carattere ma anche in numero. Alcune di tali soluzioni sono stabili rispetto ad una qualsiasi piccola deviazione dalla soluzione introdotta e dunque governano configurazioni di flusso sperimentalmente osservabili; altre invece sono soluzioni di configurazioni che non potranno mai essere osservate in natura, essendo altamente instabili ad ogni forma di disturbo introdotto dall'ambiente esterno: basti pensare al flusso laminare di un getto d'acqua effluente da un rubinetto ad alta velocità, una soluzione sempre possibile in teoria. Come dimostrato in [Serrin], in flussi governati dal numero di  $Re$ , solo in regimi stokesiani e/o per

flussi confinati la soluzione è unica e stazionaria, e dunque stabile. Naturalmente, a seconda della natura del problema in esame, il parametro di governo può essere un altro numero adimensionale, quale il numero di Rayleigh, il numero di Taylor o altri ancora, ed in tal caso la soluzione delle equazioni di Navier-Stokes potrà dipendere fortemente dal valore di tali parametri.

In termini matematici, se per un determinato valore del parametro di governo si ha più di una soluzione di carattere diverso (ad esempio si passa da una soluzione stazionaria ad una o più soluzioni periodiche nel tempo) si dice che l'equazione presenta una biforcazione. La determinazione delle caratteristiche di biforcazione delle soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes al variare delle condizioni del flusso non è questione banale da un punto di vista matematico, dal momento che coinvolge proprietà delle equazioni non lineari. D'altra parte essa conduce a risultati fisicamente importanti in quanto, come mostrato euristicamente da [Landau], il processo di transizione verso il regime turbolento può essere interpretato come una sequenza di successive biforcazioni della soluzione delle equazioni di Navier-Stokes. Occorre, inoltre, esplicitamente osservare che alcune delle soluzioni a valle di una biforcazione possono essere non stabili, da cui si può trarre la conclusione che laddove un flusso presenta una instabilità si è in presenza di una biforcazione della soluzione analitica.

## 1.2.2 Esperimento di Reynolds

Un esempio classico di instabilità del regime laminare che conduce alla transizione al regime turbolento è la celebrata esperienza di Reynolds (1883) riguardante un'indagine sperimentale sull'instabilità di flussi (il liquido impiegato era acqua) in condotti, o, in altri termini, l'osservazione della transizione dal regime laminare a quello turbolento quando una opportuna combinazione dei parametri di governo del fenomeno (velocità media del flusso  $U$ , diametro del condotto  $d$ , coefficiente di viscosità cinematica  $\nu$ ), oggi denominata numero di Reynolds  $Re = Ud/\nu$ , supera un certo valore critico. Qui l'equilibrio è garantito dal bilancio di due meccanismi fisici concorrenti: l'inerzia delle particelle di fluido, che tende a portare la configurazione verso uno stato più disordinato, e le forze di attrito interne al fluido che, al contrario, agiscono come collante per il campo di velocità delle particelle del fluido. Finché la velocità ed il diametro del condotto sono sufficientemente piccoli le forze di attrito dovute alla viscosità prevalgono, il vincolo imposto dalla presenza delle pareti si trasmette al fluido lungo tutto il diametro del condotto e le variazioni di velocità del moto medio sono tanto più grandi delle fluttuazioni stocastiche di velocità delle singole particelle che queste sono destinate ad esaurirsi senza indurre cambiamenti nella configurazione del moto base.

Tuttavia, quando l'inerzia delle particelle raggiunge livelli elevati, gli sforzi viscosi non saranno più in grado di garantire una distribuzione continua del campo di velocità e la natura del flusso raggiungerà una condizione di maggiore entropia, promuovendo in tal modo la turbolenza, ovvero uno stato in cui è presente una distribuzione stocastica di velocità del flusso con la contemporanea presenza di molte scale differenti. La transizione da regime laminare a turbolento, in un flusso in condotti, si realizza quando il numero di Reynolds risulta di ordine 1000. Dunque, aumentare la velocità del flusso e/o il diametro del condotto promuove la transizione ad uno stato turbolento del flusso.

Per quanto l'esperimento di Reynolds sia forse il più datato sistematico esperimento sulla instabilità in fluidodinamica, e nel corso degli anni sia stato oggetto di successive approfondite indagini effettuate con tecniche sperimentali sempre più sofisticate, paradossalmente dal punto di vista teorico esso non appare a tutto oggi ancora completamente chiarito. In effetti, proprio nel caso dell'esperimento di Reynolds la definizione di stabilità (o di instabilità) posta da Maxwell non è applicabile in quanto si dimostra che il moto in condotti con profilo di velocità parabolico (moto alla Poiseuille) è stabile per tutte le perturbazioni infinitesime, a tutti i numeri di Reynolds. Si è ipotizzato, quindi, che al crescere del numero di Reynolds il flusso diventa instabile a causa dell'amplificazione di disturbi di ampiezza finita o ancora, secondo una teoria più recente, che i disturbi infinitesimi si amplificano in modo significativo durante la fase iniziale transitoria.

### 1.3 Stabilità globale

In natura esistono diversi flussi instazionari che si comportano come amplificatori di rumore, ovvero flussi la cui evoluzione è strettamente correlata al livello di disturbo dell'ambiente. Applicando all'ingresso del campo un impulso con una certa frequenza, l'intero flusso inizierà ad oscillare con quella frequenza e con un'ampiezza che cresce sempre più nella direzione di efflusso. Se tuttavia la sorgente di rumore cessa, il flusso ritorna nel suo stato indisturbato. Lo strato limite su lastra piana, ad esempio, è un tipico amplificatore di rumore.

Al contrario, molti altri flussi sono suscettibili di un differente comportamento in risposta ad una perturbazione esterna. Si pensi alla tipica distribuzione di vortici a valle di un cilindro, che è il risultato di un diverso tipo di instabilità. In tal caso, la frequenza di oscillazione del flusso è la stessa per differenti configurazioni sperimentali, e non scompare neanche abbassando il livello di disturbo introdotto dall'ambiente. La soluzione stazionaria a monte

della biforcazione è fortemente instabile ad ogni possibile disturbo introdotto dall'ambiente e non potrà mai realizzarsi sperimentalmente. Il campo di moto stazionario, alla base del flusso instazionario sperimentalmente osservato, possiede una frequenza di risonanza che una volta eccitata continuerà ad autoalimentarsi estraendo energia dallo stesso flusso. Tale frequenza, insieme con la modalità di oscillazione del flusso, è definita *modo globale* e l'analisi di tali oscillazioni è uno degli scopi della presente tesi.

## 1.4 Dinamica e stabilità delle lamine liquide

La stabilità temporale di superfici interfacciali liquido-gas è stata studiata per lungo tempo, con un prioritario interesse verso getti liquidi in configurazioni assialsimmetriche. I primi studi furono condotti da Rayleigh (1878) per una configurazione non viscosa di un cilindro liquido circondato da un gas, anch'esso non viscoso. Nella sua analisi Rayleigh mostrò che il getto era instabile per tutte le lunghezze d'onda maggiori della circonferenza del getto stesso. Ciò ha portato a concludere che un qualsiasi getto liquido assialsimmetrico sufficientemente lungo alla fine si rompe in gocce, per effetto dell'azione della tensione superficiale. A sua volta, Weber (1931) studiò, da un punto di vista teorico, l'influenza di una differenza di velocità tra il liquido ed il gas sull'evoluzione del getto (differenza di velocità sempre esistente in getti che evolvono all'interno di un gas in quiete). Egli ricavò un numero caratteristico adimensionale, oggi definito numero di Weber  $We$ , che misura l'importanza relativa dell'inerzia rispetto alle forze capillari, oggi largamente usato nello studio di flussi a superficie libera. I risultati di tali studi hanno portato a concludere che esistono due differenti meccanismi di instabilità che si ingenerano in getti liquidi in configurazione cilindrica: una instabilità *capillare*, indotta dall'assottigliamento del diametro del getto; ed una instabilità *aerodinamica*, legata alla differenza di velocità attraverso l'interfaccia liquido-gas.

Lo studio delle dinamiche interfacciali liquido-gas è stato considerato anche da prospettive differenti rispetto alla configurazione cilindrica. Si pensi, in particolare, all'analisi dei flussi di lamine liquide piane in cui la lamina è considerata sottile rispetto ad una dimensione o parametro caratteristici (ad es. la sua estensione trasversale è molto maggiore dello spessore verticale), così da poterla considerare bidimensionale in un sistema di riferimento Cartesiano. In tal senso, una lamina liquida è fondamentalmente differente da un getto cilindrico. Infatti, l'effetto introdotto da una perturbazione è quello di incrementare la superficie di interfaccia rispetto ad un getto cilindrico, per cui non sussistono instabilità bidimensionali prodotte esclusivamente dalla

tensione superficiale, come mostrato da [35] nelle analisi condotte formulando le stesse ipotesi di Rayleigh per il cilindro liquido. Tuttavia, appena l'interfaccia è perturbata, ad es. da una differenza di velocità tra liquido ed aria, la stabilità o meno della stessa sarà il risultato di una complessa interazione tra l'inerzia, le forze capillari e le forze viscosive.

Nel contesto più generale di influenza degli effetti gravitazionali il problema rappresenta una configurazione prototipale di sistema spazialmente evolvente capace di sostenere una varietà di strutture d'onda. Sono indicativi, in tal senso, gli studi condotti da [27] che osservò sperimentalmente la classe di flussi ad interfaccia libera che si genera versando del liquido dall'orlo di una piastra piana in un serbatoio posto sotto la stessa. Pritchard osservò centinaia di differenti regimi di flusso, alcuni dei quali erano stazionari, altri presentavano un comportamento quasi periodico nel tempo, altri ancora mostravano una caratteristica di evoluzione temporale quasi caotica. Sempre nel contesto di un'indagine sperimentale, l'effetto di agenti surfattanti aggiunti al liquido di lavoro fu studiato nel dettaglio da [13], che quantificò tali effetti in termini della pressione di superficie anzicchè del classico coefficiente di tensione superficiale.

### 1.4.1 Dinamica stazionaria

Per quanto concerne lo studio dell'evoluzione stazionaria di tale classe di flussi bidimensionali gravitazionali, la prima indagine condotta, sia sperimentalmente che teoricamente, per la determinazione del campo di velocità fu dovuta a [7], che correlò la velocità di efflusso misurata sperimentalmente con quella di caduta libera di un grave (velocità Torricelliana). Egli trovò che, ad una distanza sufficientemente grande dall'orifizio di ingresso, la velocità di efflusso coincide con una legge di caduta libera modificata, in cui il quadrato della velocità di ingresso è ridotto di un fattore proporzionale a  $\nu^{2/3}$ , dove  $\nu$  è la viscosità cinematica. In un'appendice del lavoro di Brown, inoltre, G.I. Taylor ricavò empiricamente un'equazione differenziale governante la velocità di efflusso nella lamina. L'approccio di Taylor presuppone che la velocità *streamwise* del flusso e la pressione nella lamina siano indipendenti dalla coordinata laterale e pone l'attenzione sugli effetti prodotti dagli sforzi viscosi sul flusso, trascurando la tensione superficiale. L'equazione di Taylor fu successivamente ricavata anche da [11] come equazione all'ordine più basso di un'espansione a bassi numeri di Reynolds nella direzione del flusso. Nel contesto di tale lavoro si trovò anche una soluzione analitica all'equazione di Taylor in termini delle funzioni di Airy.

Gli effetti della tensione superficiale sulla configurazione di una lamina liquida in gravità sono stati investigati solo in indagini successive, principal-

mente come effetto correttivo alla viscosità. Attraverso l'uso di un approccio perturbativo in [1] si è derivata un'equazione per la velocità di efflusso della lamina che include entrambi gli effetti della viscosità e della tensione superficiale. Sempre nel contesto dell'utilizzo di schemi perturbativi, una varietà di equazioni non stazionarie all'ordine più basso del problema più generale includente gli effetti di tensione superficiale e viscosità, sono state ottenute in [28] per bassi numeri di Reynolds. Nella sua analisi Ramos si basa su un approccio asintotico nel quale il fattore di *slenderness* (rapporto tra lo spessore della lamina all'ingresso ed una caratteristica lunghezza assiale) è considerato come un piccolo parametro. Infine, in [18] è stata studiata la configurazione stazionaria di una lamina liquida bidimensionale in gravità in una configurazione asimmetrica in cui una differenza di pressione è applicata alle due facce della lamina. In tale contesto, gli effetti della tensione superficiale sulla dinamica stazionaria di una lamina non viscosa sono stati pienamente considerati, nella sola ipotesi di flusso localmente di tipo *plug*.

Ulteriori soluzioni stazionarie, che considerassero gli effetti della tensione superficiale, sono state successivamente proposte nel differente contesto dello studio delle proprietà di stabilità delle lamine liquide bidimensionali in gravità. In particolare, una soluzione potenziale bidimensionale fu sviluppata in [15] attraverso un approccio basato sull'introduzione di scale multiple e sull'espansione in serie di potenze in termini del parametro di *slenderness* del flusso. È stato in tal modo possibile ottenere una correzione al secondo ordine della soluzione gravitazionale stazionaria non viscosa che portasse in conto sia gli effetti della tensione superficiale che la curvatura delle linee di corrente. La stessa ipotesi di flusso potenziale è stata proposta da [39] nella derivazione di equazioni approssimate governanti l'evoluzione instazionaria di perturbazioni in una lamina liquida gravitazionale soggetta a disturbi di pressione. Seguendo un approccio perturbativo valido per lamine bidimensionali *slender*, includenti gli effetti della tensione superficiale, è stata in primo luogo determinata la soluzione stazionaria nella quale, analogamente a [15], le modifiche alla soluzione di *free-fall* sono state espresse come termini correttivi di ordine superiore nell'espansione asintotica nel parametro di *slenderness*.

Oltre alla letteratura citata, vale appena la pena sottolineare il numero so contributo fornito dalla comunità scientifica nello studio delle dinamiche stazionarie dei flussi di lamine liquide bidimensionali attraverso l'ausilio della Simulazione Numerica Diretta. Dal momento che le finalità del presente lavoro esulano da tale contesto, affrontando il problema da una differente prospettiva, non si entrerà nel merito dei più significativi lavori numerici prodotti al riguardo. Ci si limita qui a suggerire al lettore interessato i contributi forniti da [31] e [14], in cui vengono implementate differenti tecniche, e la letteratura citata in essi.

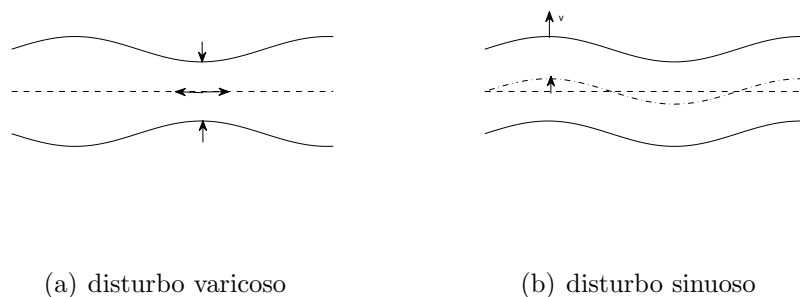


Figura 1.3: Rappresentazione dei due differenti modi di oscillazione lineare di una lamina liquida.

### 1.4.2 Analisi di stabilità

Spostandoci nel contesto più generale dell'analisi di stabilità delle lamine liquide piane è prototipale, in tal senso, insieme con [35], il contributo fornito da [19]. Considerando il problema di una lamina liquida immersa in un gas esterno stazionario non viscoso furono individuati i due soli modi di oscillazione possibili in un lamina liquida piana: un modo di oscillazione simmetrico (varicoso) ed un modo di oscillazione antisimmetrica (sinuoso), mostrati in Fig. 1.3. Inoltre essi scoprirono che l'instabilità presente era di natura aerodinamica, ovvero generata da una differenza di velocità tra liquido ed aria, e che la tensione superficiale agiva sempre nel senso di una forza stabilizzante per le dinamiche di evoluzione della lamina.

Tale analisi di stabilità temporale fu estesa successivamente al caso di una lamina liquida viscosa da [22]. In tal contesto furono trovati due meccanismi differenti di instabilità: una instabilità aerodinamica di natura non viscosa, indipendente dal numero di Reynolds del flusso, ed un modo di instabilità di tipo viscoso, che cresceva con la viscosità. Quest'ultimo modo mostrava una significativa dipendenza dal numero di Reynolds, diventando il meccanismo dominante per bassi numeri di Weber del flusso ( $We \approx 0.1$ ). Al contrario, per alti numeri di Weber ( $We \gg 1$ ), laddove l'instabilità aerodinamica diventa rilevante, si è trovato che la viscosità aveva un effetto stabilizzante sul flusso, spostando l'insorgenza dell'instabilità a lunghezze d'onda maggiori.

La prima analisi di instabilità assoluta per una lamina liquida viscosa immersa in un gas non viscoso fu condotta da [25]. Essi trovarono un'instabilità di tipo *pseudo-assoluto* per il modo sinuoso, in corrispondenza di numeri di Weber al di sotto dell'unità. Questo implica che la risposta all'impulso non svanisce nel tempo ovunque nella direzione del flusso, ma resta sempre li-



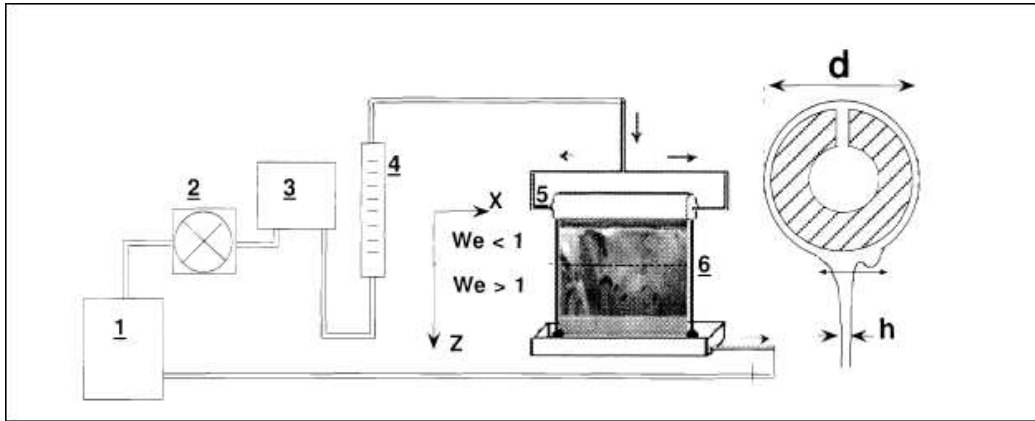


Figura 1.4: Apparato sperimentale usato in [21] per la visualizzazione di strutture d'onda da comportamento globale.

mitata. Un analogo comportamento fu trovato da [14] studiando la risposta all'impulso per una lamina liquida gravitazionale non viscosa, ottenendo al contempo il medesimo  $We$  critico. In sostanza, i risultati di tali studi hanno portato a concludere che la lamina presenta una instabilità *pseudo-assoluta* per  $We < 1$ , mentre è convettivamente instabile altrimenti; per disturbi di tipo varicoso la viscosità ha sempre l'effetto di ridurre sia il fattore di amplificazione spaziale che il numero d'onda del modo instabile; e nel limite dei  $We \gg 1$  l'instabilità convettiva è sinusosa per  $\rho We \ll 1$  e la viscosità smorza i disturbi spostando l'insorgenza dell'instabilità verso lunghezza d'onda maggiori, mentre per  $\rho We \gg 1$  le instabilità sinuose e varicose sono dello stesso ordine di grandezza. Ad ogni modo, l'analisi spaziale non ha confermato l'esistenza dei due differenti picchi scoperti per bassi  $We$ , con un'analisi temporale, da [22], dal momento che il modo viscoso possedeva un tasso di amplificazione spaziale troppo basso.

Successivamente, il problema del break-up di una lamina liquida gravitazionale, con un profilo di velocità uniforme in ingresso, fu studiato sperimentalmente in [16]. Fu sperimentalmente osservato che la rottura della lamina d'acqua avveniva sempre in corrispondenza di un valore del numero di Weber del flusso minore dell'unità, con un valore variabile in dipendenza del grado di non parallelismo del flusso. Questo suggerì l'ipotesi che la fenomenologia del break-up fosse connessa con una instabilità di tipo globale, mai considerata in precedenza.

Sulla base di tali congetture il problema della stabilità globale di una lamina liquida piana gravitazionale fu affrontato in [34] attraverso un approccio perturbativo basato sul concetto di lamina *slender*, applicato ad un modello matematico sviluppato in precedenza da [26]. Trascurando gli effet-

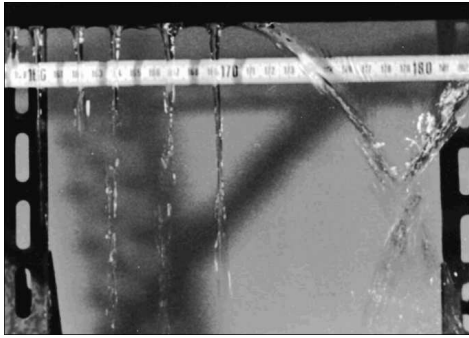
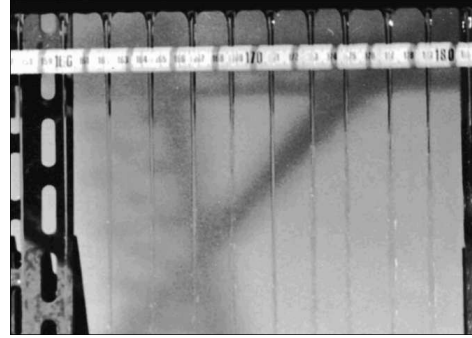
(a) Break-up parziale alla portata  $Q_1$ (b) Break-up totale alla portata  $Q_2$ 

Figura 1.5: Visualizzazione sperimentale del break-up in ligamenti equispaziati di una lamina liquida piana al ridursi della portata di efflusso  $Q$  ( $Q_1 > Q_2$ ).

ti della viscosità e della tensione superficiale si considerò il problema della mutua interazione con un cuscinio d'aria, posizionato da un lato della lamina e schermato dalla stessa, attraverso l'assunzione di condizioni isoentropiche per lo stato del gas nel cuscinio. Mediante un'analisi non modale proiettata sui soli modi a bassa frequenza dello spettro si riuscì ad individuare una robusta caratteristica di instabilità, in buon accordo con le misure sperimentali. Tuttavia restava aperta la questione del ruolo giocato dai contributi di tensione superficiale e viscosità, non considerati nella presente analisi.

Oltre ai contributi sopra citati, diverse indagini sperimentali sono state condotte nel corso degli anni per la visualizzazione delle dinamiche interfaciali di tale classe di flussi bidimensionali, allo scopo di chiarire i meccanismi fisici connessi con il processo di rottura di tali lamine liquide. In Fig. 1.4 è mostrato un apparato sperimentale recentemente usato per la visualizzazione delle differenti strutture d'onda che si ingenerano in una lamina liquida, per il probabile instaurarsi di un meccanismo globale di selezione. La questione è più complicata per le lamine piane rispetto ai getti cilindrici, dal momento che le lamine liquide si rompono prima in filamenti discreti, come mostrato in Fig. 1.5, che successivamente si rompono in gocce, con dimensioni imprevedibili. Il meccanismo è di interesse per diverse applicazioni industriali, principalmente per processi di atomizzazione e spray, e non è ancora stato del tutto compreso. Il modo più instabile è generalmente il modo di tipo sinuoso, ma non è chiaro in che modalità esso agisca portando al break-up della lamina, dal momento che le superfici interfacciali oscillano in fase mantenendo una distanza costante tra di esse.

## Capitolo 2

# Metodi spettrali per problemi di stabilità

Gli operatori di evoluzione alla base di problemi di stabilità sono generalmente rappresentati da sistemi di equazioni alle derivate parziali a coefficienti variabili. I metodi spettrali rappresentano una delle tre differenti famiglie di metodi numerici sviluppate per la soluzione di sistemi di EDP, e risultano particolarmente attraenti nello studio di modelli di stabilità sia per la loro elevata accuratezza che per il minor costo computazionale richiesto a parità della stessa, rispetto alle tecniche alternative. Per determinare una generica variabile incognita del problema, da un punto di vista numerico, occorre individuare una procedura di discretizzazione degli operatori differenziali o integrali che compaiono nelle equazioni di governo. Questa forma operatoriale discretizzata è rappresentata da una matrice che avrà caratteristiche specifiche a seconda dell'approccio numerico adottato.

### 2.1 Approccio pseudospettrale

Per approssimare numericamente le derivate spaziali di diverso ordine che compaiono nel problema di stabilità di un getto liquido si farà ricorso ad un metodo pseudospettrale. Questo metodo numerico appartiene ad una classe più ampia di metodi spettrali ben conosciuta e documentata. Essi sono metodi di discretizzazione differenziali o integrali, che si aggiungono ai metodi classici (differenze finite, volumi di controllo, elementi finiti, etc...) sviluppati per la risoluzione dei problemi PDE, particolarmente indicati nella risoluzione di problemi agli autovalori per la loro grande accuratezza.

Non essendo possibile, in generale, trovare analiticamente la soluzione di un problema alle derivate parziali, l'idea alla base dei metodi spetra-

li è quella di approssimare, nella sua rappresentazione finito-dimensionale, una funzione incognita  $u(x)$  mediante l'espansione troncata di funzioni *test* opportunamente scelte:

$$u(x) = \sum_{k=1}^N c_k \phi_k(x) \quad (x \in [-1, 1]) \quad (2.1)$$

dove le funzioni note  $\phi_k$  (funzioni trigonometriche, polinomi di Hermite o di Chebyshev) rappresentano una base per lo spazio funzionale, mentre  $c_k$  sono i coefficienti incogniti attraverso i quali è possibile ricostruire l'approssimazione. La conoscenza delle derivate delle funzioni  $\phi_k$  consente di trovare facilmente l'espressione dei coefficienti  $b_k$  tali che

$$u'(x) = \sum_{k=1}^N b_k \phi_k(x) \quad (2.2)$$

Questo porta a delle differenze sostanziali rispetto ad altri metodi di approssimazione. Nei metodi alle differenze finite, ad esempio, si ricerca la  $u(x)$  mediante l'utilizzo di funzioni *locali* che approssimano la funzione incognita attraverso i valori che essa assume in corrispondenza dei nodi di una griglia computazionale (grazie a formule numeriche derivanti dalla combinazione di opportuni sviluppi in serie di Taylor); mentre nei metodi pseudospettrali la funzione  $u(x)$  sarà direttamente ricercata come combinazione lineare di funzioni *globali*  $\phi_k(x)$  che si estendono su tutto il dominio computazionale. Inoltre, nei metodi alle differenze finite viene utilizzato soltanto un certo numero di punti per costruire la derivata in un punto, cosa questa esatta nella misura in cui la derivata ha nozione locale; mentre nell'approccio pseudospettrale sono tutti i punti che partecipano alla costruzione della derivata. Questa estensione dell'interpolante a tutti i nodi del mesh si riflette sull'accuratezza dei risultati: nelle differenze finite l'errore commesso decresce tipicamente con il numero  $N$  di punti secondo una legge algebrica del tipo  $N^{-\alpha}$ , mentre in uno schema pseudospettrale questo errore decresce esponenzialmente con  $N$ . Caratteristica questa che definisce la *precisione spettrale*. Oltre alla precisione questo approccio è quasi esente da errori di dissipazione e dispersione numerica nell'ipotesi in cui la funzione ricercata sia dotata di sufficienti proprietà di *smoothness* [36].

## 2.2 Il metodo pseudospettrale alla Chebyshev

L'approccio pseudospettrale seguito nel presente lavoro ci consente di operare nello spazio fisico piuttosto che nello spazio spettrale dei  $c_k$ . In pratica, una

volta definita la griglia di calcolo  $\{x_j\}$  ed una base di funzioni associate si è in grado di dedurre il valore della derivata della funzione  $u(x)$  dalla conoscenza del suo valore in ciascun punto della griglia tramite la costruzione di una *matrice delle derivate*  $\mathbf{D}_N$  tale che l'operazione di derivazione si risolve in una moltiplicazione matrice-vettore

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_k = D_{N_{kj}} u_j \quad (2.3)$$

La polinomiale di grado  $N$  che ci consente di ricostruire la funzione incognita è ottenuta con l'utilizzo di polinomi di Chebyshev

$$\phi_k(x) = \cos(k \cos^{-1}(x))$$

La scelta di questi polinomi risiede in alcune proprietà che li rende particolarmente adatti a fungere da base per lo spazio funzionale quali la buona approssimazione della funzione  $u(x)$  (veloce tendenza a zero dei coefficienti  $c_k$ ), la semplicità di implementazione algoritmica nel passaggio dal polinomio di ordine  $k$  al polinomio di ordine  $k + 1$  oltre al fatto che costituiscono un sistema ortogonale di funzioni. L'espansione troncata si effettua in funzione di

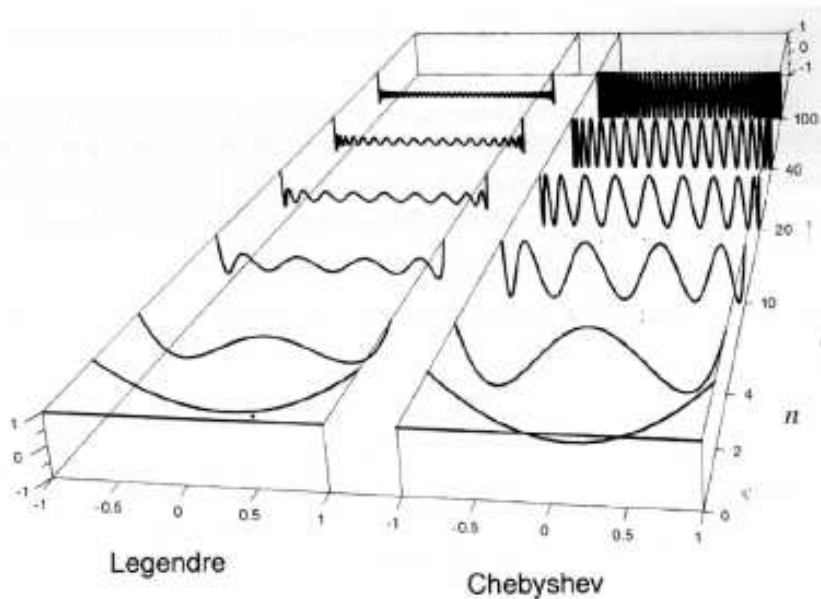
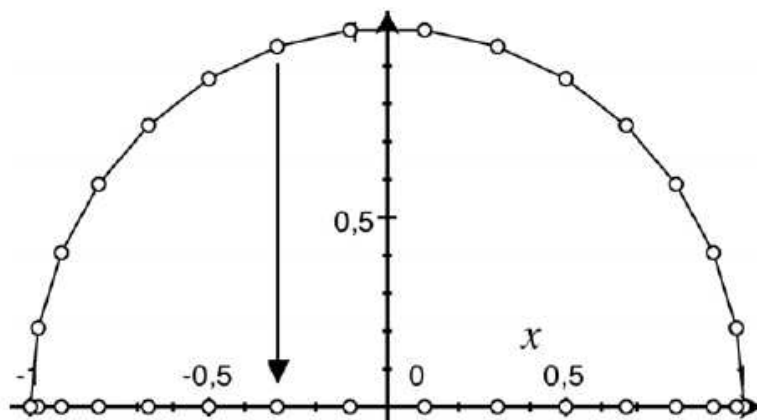


Figura 2.1: Polinomi di Chebyshev

una variabile ridotta  $x \in [-1, 1]$ , legata alla variabile fisica da un'opportuna

Figura 2.2: Distribuzione alla *Gauss-Lobatto*

trasformazione  $\hat{x} = \varphi(x)$ , che fornisce la distribuzione dei punti di collocazione necessari per interpolare la (2.1). La griglia di collocazione deve essere definita in modo opportuno, per evitare l'insorgere di un fenomeno noto come *Runge phenomenon* visibile in Fig. 2.1. Esso si manifesta sotto forma di forti oscillazioni del polinomio interpolante alle estremità dell'intervallo di definizione del problema qualora si consideri una griglia di calcolo uniforme e tende ad amplificarsi all'aumentare del numero di nodi, poichè l'ampiezza delle oscillazioni cresce con l'ordine dell'interpolante.

In base a considerazioni basate sulla minimizzazione del residuo si dimostra che, in un problema finito, la soluzione ottimale è quella di usare l'interpolazione polinomiale su una griglia con distribuzione di punti alla Chebyshev

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right) \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (2.4)$$

Tali punti di Chebyshev rappresentano le proiezioni sull'asse  $x$  dei nodi derivanti da un'equispaziatura dell'anomalia sulla circonferenza unitaria; complessivamente la distribuzione di punti presenta un maggior infittimento all'estremità mentre nella zona centrale dell'intervallo considerato essi sono più diradati, come mostrato nella costruzione geometrica di Fig. 2.2, da cui è evidente la proprietà suddetta di accumulo ai bordi.

La generale complessificazione che è richiesta nella costruzione di un mesh non equispaziato è evidente anche nella configurazione che assume la matrice delle derivate, essendo il metodo pseudospettrale nient'altro che un metodo alle differenze finite di ordine massimo possibile su un mesh non uniforme. In tal caso, infatti, i coefficienti delle matrici  $\mathbf{D}_N$  di diverso ordine andran-

$$D_N = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{2N^2 + 1}{6} & & \frac{1}{2}(-1)^N \\ \hline & \frac{(-1)^j}{1 - x_j} & \\ \hline & & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i - x_j} \\ \hline -\frac{1}{2} \frac{(-1)^i}{1 - x_i} & \frac{-x_j}{2(1 - x_j^2)} & \frac{1}{2} \frac{(-1)^{N+i}}{1 + x_i} \\ \hline & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i - x_j} & \\ \hline -\frac{1}{2}(-1)^N & -2 \frac{(-1)^{N+j}}{1 + x_j} & -\frac{2N^2 + 1}{6} \\ \hline \end{array}$$

Figura 2.3: Schema della matrice di differenziazione spettrale alla Chebyshev.

no calcolati a partire da polinomi *globali*, ovvero dipendenti da tutti i dati assegnati sul mesh, cosa questa che conduce a matrici *piene*, ovvero con in generale tutti gli elementi diversi da zero. Sussiste, in particolare, il seguente teorema per la matrice di differenziazione alla Chebyshev, riportato in [36]:

**Teorema 1**

Per ogni  $N \geq 1$ , data la matrice di differenziazione spettrale  $D_N$ , di ordine  $(N + 1) \times (N + 1)$ , siano gli indici delle righe e delle colonne numerati tra 0 ed  $N$ . I termini della matrice saranno

$$D_N = \begin{cases} (D_N)_{00} = \frac{2N^2 + 1}{6} \\ (D_N)_{jj} = \frac{-x_j}{2(1 - x_j^2)}, & j = 1, \dots, N - 1 \\ (D_N)_{ij} = \frac{c_i}{c_j} \frac{(-1)^{i+j}}{(x_i - x_j)}, & i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N - 1 \\ (D_N)_{NN} = -\frac{2N^2 + 1}{6} \end{cases}$$

dove

$$c_i = \begin{cases} 2 & i = 0, N \\ 1 & i = 1, \dots, N - 1 \end{cases}$$

Questo teorema fornisce uno schema per la costruzione della matrice delle derivate che così assume la struttura di Fig. 2.3.

Naturalmente la struttura caratteristica degli operatori di differenziazione si riflette anche sulla modalità di assegnazione delle condizioni al contorno. L'applicazione di condizioni al contorno omogenee alla Dirichlet si ottiene imponendo l'eliminazione delle colonne esterne della matrice corrispondenti ai nodi in cui il valore è nullo e delle corrispondenti righe esterne relative alle equazioni identicamente soddisfatte da tale condizione. In altre parole, condizioni di omogeneità del flusso alle estremità del dominio computazionale si ottengono operando su un prodotto matrice-vettore estratto dalla (2.3) privandola dei nodi estremali, come mostrato in Fig. 2.4.

$$\begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ w_N \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c|c} \text{shaded} & D_N & \text{shaded} \\ \hline & & \hline \end{array} \right) \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{N-1} \\ v_N \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{zero} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{zero} \end{array} \end{array}$$

Figura 2.4: Applicazione delle condizioni al contorno alla Dirichlet.

Questa tecnica classica d'implementazione delle condizioni di tipo Dirichlet omogenee può essere adattata per trattare condizioni di tipo Neumann omogenee a mezzo di qualche modifica. Seguendo le indicazioni riportate in [36] le condizioni alla Neumann possono essere imposte individuando nella matrice del problema studiato la riga relativa alla condizione al contorno e sostituendo ad essa una riga dell'operatore differenziale precedentemente introdotto. Le condizioni miste, infine, possono essere imposte sostituendovi la relazione rappresentativa all'interno della matrice.



## 2.3 Implementazione spettrale

Esistono diverse *routine* che forniscono la  $\mathbf{D}_N$  per il caso di un metodo spettrale su di un mesh opportunamente scelto differenziandosi per la scelta dei punti di collocazione  $\{x_j\}$ , della trasformazione  $\hat{x} = \varphi(x)$ , e del trattamento delle condizioni ai limiti. Nel presente lavoro di tesi il codice di risoluzione spettrale è stato scritto in MATLAB, e la discretizzazione alla Chebyshev è stata implementata mediante l'adozione delle routine contenute nella DM-Suite, (cfr. [38]). In particolare, mediante la routine `chebdif.m` sono stati costruiti gli operatori differenziali di primo, secondo e terzo ordine, con i quali si sono discretizzate le derivate spaziali presenti nel modello sviluppato. Nella routine i nodi di collocazione sono ottenuti mediante la formulazione di secondo tipo

$$x_k = \cos\left(\frac{(k-1)\pi}{N-1}\right), \quad k = 1, \dots, N \quad (2.5)$$

con intervallo di definizione  $[-1, 1]$ . Detto intervallo canonico può essere opportunamente trasformato mediante l'adozione di un apposito *mapping* che consente di ridefinire il dominio computazionale. Rimandando per una più approfondita discussione al paragrafo successivo, si osserva, infatti, che l'adozione di una trasformazione lineare del tipo

$$x \longleftrightarrow \frac{1}{2} \left[ \frac{(b-a)x}{b+a} \right] \quad (2.6)$$

consente di passare dal dominio generico  $[a, b]$  al dominio standard  $[-1, 1]$ .

Le matrici di differenziazione sono ricavate mediante una formulazione diversa da quella teorica, esposta nel paragrafo precedente, a causa della diversa indicizzazione delle matrici sfruttata in ambiente MATLAB. La formulazione adottata è la seguente

$$D_{k,j}^{(1)} = \begin{cases} \frac{c_k (-1)^{j+k}}{c_j (x_k - x_j)} & j \neq k \\ -\frac{1}{2} \frac{x_k}{(1-x_k^2)} & j = k \neq 1, N \\ \frac{2(N-1)^2 + 1}{6} & j = k = 1 \\ -\frac{2(N-1)^2 + 1}{6} & j = k = N \end{cases}$$

$$D^{(1)} = (D^{(1)})^l, \quad l = 1, 2, \dots$$

Alcuni aspetti critici sottolineati dagli autori della DMSuite in [38] hanno suggerito una diversa implementazione delle formule appena citate. Innanzitutto la distribuzione cosinusoidale dei nodi di collocazione: sfruttando l'identità che lega la funzione seno alla funzione coseno, è infatti possibile scrivere i nodi alla Chebyshev come

$$x_k = \sin \left( \frac{(N+1-2k)\pi}{2(N-1)} \right), \quad k = 1, \dots, N \quad (2.7)$$

Questa modifica consente un miglioramento nell'aritmetica del *floating-point* dal momento che si sfrutta la simmetria rispetto all'origine della funzione adottata. Una seconda modifica è invece legata ai binomi del tipo  $x_k - x_j$  presenti nella formulazione matriciale. Questi binomi per  $N$  grandi possono essere soggetti ai cosiddetti errori di *floating-point cancellation*. Mediante l'applicazione delle formule trigonometriche di duplicazione, è possibile ottenere la relazione

$$\cos \left[ \frac{(k-1)\pi}{N-1} \right] - \cos \left[ \frac{(j-1)\pi}{N-1} \right] = 2 \sin \left[ \frac{(k+j)\pi}{2(N-1)} \right] \sin \left[ \frac{(k-j)\pi}{2(N-1)} \right] \quad (2.8)$$

che consente di evitare questo tipo di errore [38]. Per concludere, anche nel caso di  $\theta \approx 0$  si può incorrere in problemi di natura numerica nella rappresentazione della funzione seno, soprattutto in casi quali  $\sin(\pi - \theta)$ . La metodologia adottata, detta *flipping trick*, consiste nello scrivere solo la metà superiore della matrice di differenziazione e sfruttare le relazioni di simmetria per la restante porzione.

## 2.4 Scalatura degli operatori

Dal momento che la griglia di *Gauss-Lobatto*, definita in  $[-1, 1]$ , sulla quale si ricostruisce la funzione incognita non è rappresentativa del dominio fisico, si pone il problema della scalatura del dominio computazionale sul dominio fisico di definizione del problema. Assegnata la trasformazione  $\hat{x} = \varphi(x)$  che lega la variabile fisica a quella ridotta, la (2.3) può essere derivata rispetto alla variabile fisica  $\hat{x}$  nel seguente modo

$$\left. \frac{du}{d\hat{x}} \right|_k = \frac{1}{\varphi'(x_k)} D_{N_{kj}} u_j \quad (2.9)$$

Iterando questa espressione è possibile ricavare le diverse formulazioni per le derivate di ordine superiore.

In generale l'approccio al problema prevede due diverse tipologie di soluzione così sintetizzabili:

1. Ridefinire una nuova griglia, e quindi una nuova serie di funzioni base, che copra l'intervallo desiderato.
2. Effettuare un cambio di coordinate o *mapping* del dominio, che permetta di operare sulla griglia di *Gauss-Lobatto* definita in precedenza.

Nel contesto di questo studio si è scelto di seguire la seconda strada per ragioni legate ad una maggiore precisione numerica. In sintesi, la scelta di una nuova base condurrebbe essenzialmente a delle matrici mal condizionate a prezzo di una peggiore sensibilità della soluzione a variazioni dei dati rispetto ad un approccio alla Chebyshev, che permette di avere delle matrici di differenziazione meglio condizionate, una precisione spettrale (caratteristica del metodo) conservata ed una evidente facilità di calcolo.

L'approccio scelto ha suggerito l'utilizzo di una mappatura algebrica lineare del dominio che consente di scalare semplicemente il dominio computazionale mantenendo inalterata la distribuzione dei nodi di collocazione spettrale. In altre parole, per un assegnato valore del dominio  $L$  di definizione del problema, la trasformazione algebrica suddetta comporta l'utilizzo di polinomi di Chebyshev che avranno argomento  $\frac{1}{2}(1+x)$ , da cui la formulazione adottata

$$\hat{x} = \frac{L}{2}(1+x) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2\hat{x}}{L} - 1 \quad (2.10)$$

La scalatura del dominio implica una conseguente scalatura degli operatori differenziali effettuata mediante differenziazione della (2.10)

$$d\hat{x} = \frac{L}{2}dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2}{L}d\hat{x}$$

Tale metodo, pur garantendo una precisione di calcolo spettrale, presenta alcune complicazioni in primo luogo connesse con la distribuzione dei punti di collocazione. In effetti, la distribuzione alla *Gauss-Lobatto* comporta un accumulo di punti agli estremi dell'intervallo, cioè in  $\hat{x} = 0$  e  $\hat{x} = L$ , in cui la soluzione del problema fisico è regolare, per cui per ottenere una buona precisione in tutto il dominio di calcolo si deve disporre di un numero sufficientemente grande di punti di collocazione. Tuttavia infittire l'intervallo peggiora l'approssimazione perchè l'errore commesso all'aumentare di  $N \rightarrow \infty$ , fissato  $L$ , decresce geometricamente con  $N$  (*series error*).

## 2.5 Pulizia dello spettro

Oltre ai modi che hanno senso fisico, un metodo spettrale fornisce generalmente un grande numero di autovalori *spuri*, ovvero calcolati numericamente

ma non accettabili perchè legati alla presenza di errori di rappresentazione della fisica del problema. Al fine di identificare i modi fisicamente significativi è necessario, dunque, disporre di un'opportuno criterio di convergenza che permetta di pulire lo spettro da quegli autovalori che non risultano convergenti entro determinati limiti di tolleranza scelti.

La tecnica di pulizia implementata è una tecnica iterativa basata su un criterio di convergenza classico, valido per molti problemi spettrali; il grado di rispondenza degli autovalori alla tolleranza desiderata è valutato a mezzo della *differenza ordinale*, definita dal seguente rapporto

$$\delta_j \equiv |\lambda_j(N_1) - \lambda_j(N_2)|/\sigma_j \quad (2.11)$$

che valuta la differenza tra il valore assunto dagli autovalori, opportunamente riordinati, in due iterazioni successive, condotte variando il numero  $N$  di punti di collocazione. Il parametro  $\sigma_j$  al denominatore rappresenta la distanza intermodale, necessaria per poter scalare adeguatamente gli autovalori dal momento che non è sempre possibile farlo con la norma, e si calcola, secondo l'ordine modale  $j$ , nel seguente modo

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\equiv |\lambda_1 - \lambda_2| \\ \sigma_j &\equiv \frac{1}{2} (|\lambda_j - \lambda_{j-1}| + |\lambda_{j+1} - \lambda_j|), \quad j > 1 \end{aligned}$$

Una volta determinato il  $\delta_j$ , la selezione degli autovalori è fatta imponendo una tolleranza: i soli valori che presentano parametro  $1/\delta_j > \tau$ , con  $\tau$  parametro di tolleranza, sono ritenuti convergenti, mentre i restanti vengono scartati. La scelta di questo valore è legata strettamente al problema analizzato: in generale, uno stesso valore può non essere valido anche al solo variare dei numeri d'onda di uno stesso problema; tuttavia, per la maggior parte dei casi trattati, relativamente al modello in esame, si è visto che un valore di  $\tau = 10^4$  ha permesso di risolvere adeguatamente i primi modi dello spettro.

# Capitolo 3

## Modello unidimensionale

Il presente capitolo è incentrato sullo sviluppo di un modello unidimensionale che governi l'evoluzione spazio-temporale di una lamina di liquido in caduta per effetto della gravità e soggetta a tensione superficiale che ne condiziona il bilancio delle forze all'interfaccia. Il modello è incomprimibile, non viscoso ed interagente con un gas esterno. In condizioni generali il liquido fluisce verso il basso soggetto ad un campo di pressione esterna non necessariamente simmetrico alle interfacce. Il problema, intrinsecamente bidimensionale, è riformulato matematicamente in modo da ottenere un sistema di PDE funzione dalla sola coordinata spaziale nella direzione del flusso.

### 3.1 Modello bidimensionale

Il set di equazioni, in forma dimensionale, che governano il modello, per la sola fase liquida della lamina, si ottiene formulando il bilancio di massa e quantità di moto su un volume di controllo infinitesimo, in presenza di forze di massa (equazioni di Eulero):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (3.3)$$

in cui  $g$  è l'accelerazione di gravità. Tali equazioni coinvolgono come variabili dipendenti le componenti di velocità verticale e laterale ( $u, v$ ) lungo le direzioni  $(x, y)$  e la pressione  $p$ , mentre la densità  $\rho$  del liquido è considerata

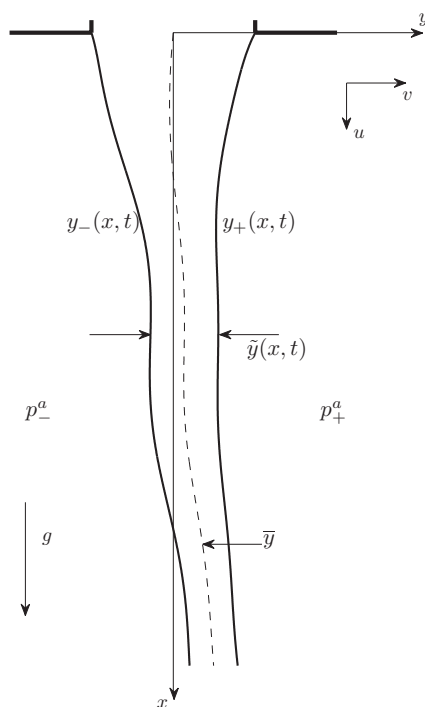


Figura 3.1: Schema dell'evoluzione instazionaria di una lamina liquida in gravità nel caso generale di pressione esterna non simmetrica alle interfacce.

costante. Ciascuna delle variabili coinvolte risulta naturalmente funzione di  $(x, y, t)$ , per la bidimensionalità ed instazionarietà del campo di moto.

Poichè inoltre il dominio di integrazione non è noto a priori le equazioni di governo presentano ulteriori due incognite, date dalle posizioni delle due interfacce. Indicando con  $y_{\pm}$  la coordinata laterale che individua la posizione delle due interfacce (destra e sinistra) della lamina liquida, in condizioni imperturbate essa risulta funzione solo della coordinata verticale  $x$  ma, in generale, dipende anche dal tempo:  $y_{\pm}(x, t)$ . In corrispondenza di queste ultime due variabili le equazioni di Eulero andranno equipaggiate con opportune equazioni di interfaccia, date dalla condizione cinematica e dall'equilibrio degli sforzi normali, che costituiscono condizioni al contorno non viscoso per il campo di velocità.

Lo schema di figura (3.1) mostra la geometria del modello con le variabili coinvolte. Le variabili di interfaccia  $y_{\pm}$  sono calcolate in segno e quindi, in riferimento alla figura, risulta:  $y_+(x, t) > 0$  e  $y_-(x, t) < 0$ . Questo consente di definire rigorosamente i concetti di linea media e spessore della lamina di

liquido, come segue:

$$\tilde{y}(x, t) = y_+(x, t) - y_-(x, t) \quad (\text{spessore}) \quad (3.4)$$

$$\bar{y}(x, t) = \frac{y_+(x, t) + y_-(x, t)}{2} \quad (\text{linea media}). \quad (3.5)$$

Le (3.5) e (3.4) restano coerenti nel caso in cui ambo le interfacce abbiano lo stesso segno, sotto l'ipotesi in cui valga la seguente disuguaglianza:

$$y_+(x, t) \geq y_-(x, t) \quad \forall(x, t).$$

## 3.2 Condizioni di interfaccia

Al fine di ottenere un sistema chiuso di equazioni di governo, alle equazioni di Eulero vanno aggiunte due ulteriori equazioni da imporre sulla superficie di separazione liquido-gas, per garantire sia l'assenza di flusso di massa attraverso l'interfaccia che la continuità del tensore degli sforzi.

### 3.2.1 Condizione cinematica

La condizione cinematica esprime il fatto che la superficie di interfaccia è una superficie materiale. Tale caratterizzazione è indispensabile per garantire che l'interfaccia non sia attraversata da massa. Senza tale condizione la superficie di interfaccia potrebbe essere una qualunque superficie ideale nel fluido, e potrebbe eventualmente anche essere attraversata da massa. In conseguenza di ciò, tale condizione dovrà dunque garantire che la velocità euleriana locale di un punto sulla superficie di interfaccia coincide con la velocità (lagrangiana) del punto materiale che si trova allo stesso istante di tempo nello stesso punto dell'interfaccia.

Dal momento che la superficie di separazione è individuata, in generale, da una superficie isovalore di una generica funzione dello spazio-tempo, seguendo l'approccio contenuto in [3] si ricava la condizione cinematica da imporre all'interfaccia liquido-gas:

$$v_{\pm}(x, t) = \frac{\partial y_{\pm}(x, t)}{\partial t} + u_{\pm}(x, t) \frac{\partial y_{\pm}(x, t)}{\partial x} \quad (3.6)$$

dove, evidentemente, ciascun segno al pedice si riferisce alla corrispondente interfaccia di equazione  $y_{\pm}(x, t)$  e le variabili di interfaccia che compaiono nella (3.6) sono definite dai seguenti limiti:

$$\varphi_{\pm}(x, t) = \lim_{y \rightarrow y_{\pm}(x, t)} \varphi(x, y, t) \quad (3.7)$$

in cui  $\varphi_{\pm} = [u_{\pm}, v_{\pm}]$ .

### 3.2.2 Condizione dinamica

La condizione dinamica traduce la necessità di imporre una condizione di equilibrio dinamico tra gli sforzi che due fluidi si scambiano lungo l'interfaccia. Tale condizione di continuità si traduce in una condizione di salto delle tensioni laddove sia presente tensione superficiale  $\sigma$ . Tale tensione rappresenta una forza per unità di lunghezza che agisce tangenzialmente a qualsiasi interfaccia, dando luogo ad una tensione normale all'interfaccia  $\mathbf{t}_\sigma$  secondo la legge di Laplace

$$\mathbf{t}_\sigma = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \mathbf{n} \quad (3.8)$$

dove  $R_1$  ed  $R_2$  rappresentano i raggi di curvatura dell'interfaccia superficiale ed  $\mathbf{n}$  è la normale all'interfaccia nel punto considerato. Seguendo l'espressione dell'equilibrio degli sforzi normali data in [3] la (3.8) si può riscrivere come

$$(\underline{\underline{\tau}}_2 - \underline{\underline{\tau}}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = -\sigma K \mathbf{n}_{12} \quad (3.9)$$

in cui  $\underline{\underline{\tau}}_1$  e  $\underline{\underline{\tau}}_2$  rappresentano il tensore degli sforzi  $\underline{\underline{\tau}}$  stimato come limite sull'interfaccia del fluido 1 e del fluido 2, rispettivamente;  $\mathbf{n}_{12}$  è la normale alla superficie che punta da 1 a 2 e  $K$  è la curvatura determinata con la convenzione che essa è presa positiva se il centro di curvatura giace nel fluido verso cui  $\mathbf{n}_{12}$  punta e negativa viceversa.

Nelle ipotesi alla base del modello in questione sia la lamina liquida che il gas esterno che l'avvolge sono entrambi non viscosi, per cui il tensore degli sforzi non porta in conto il termine dissipativo. Assumendo dunque la lamina presente nella regione 1 ed il gas nella regione 2 la (3.9) si particolarizza come segue

$$\begin{aligned} (-p_+^a + p_+) \cdot \mathbf{n}_+ &= \sigma K_+ \mathbf{n}_+ \\ (-p_-^a + p_-) \cdot \mathbf{n}_- &= \sigma K_- \mathbf{n}_- \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{n}_+$  ed  $\mathbf{n}_-$  sono le normali alla lamina, in corrispondenza delle due interfacce, che puntano verso l'esterno. Tenendo conto inoltre della espressione della curvatura come divergenza della normale locale all'interfaccia  $\mathbf{n}(x, y)$  si ottiene in definitiva la condizione dinamica da imporre all'interfaccia liquido-gas

$$p_\pm = p_\pm^a \mp \sigma \frac{\frac{\partial^2 y_\pm}{\partial x^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial y_\pm}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (3.10)$$



dove anche per le pressioni vale la posizione fatta in (3.7) per le altre variabili. La (3.10) traduce il principio fisico che la pressione nel liquido all'interfaccia è tale da bilanciare la risultante della pressione esterna e della tensione superficiale agenti sull'interfaccia stessa.

### 3.3 Approccio perturbativo

Le equazioni di Eulero (3.1-3.3) insieme con le condizioni cinematica (3.6) e dinamica (3.10) rappresentano il sistema di equazioni che governa l'evoluzione instazionaria di una lamina liquida bidimensionale, sotto le ipotesi fatte per il modello. Tale sistema coinvolge sia equazioni che governano l'evoluzione di variabili interne  $(u, v, p)$  sia equazioni per valori all'interfaccia  $(v_{\pm}, p_{\pm})$ : questo rende il sistema stesso non chiuso in un problema ai valori propri, comportando la necessità di riformularlo matematicamente. Al fine di giungere ad un sistema chiuso di equazioni non lineari nelle variabili del problema, nel seguito del capitolo sarà sviluppato un approccio perturbativo alle equazioni (3.1-3.3, 3.6, 3.10) che consentirà di ottenere un sistema di equazioni di governo più gestibile matematicamente ed, al tempo stesso, fisicamente significativo.

In effetti, principalmente nel contesto di una analisi di stabilità lineare, diversi modelli basati su schemi perturbativi sono stati sviluppati in letteratura allo scopo di derivare modelli semplificati che descrivessero l'evoluzione streamwise della shape di una lamina di liquido in caduta e delle relative variabili fluidodinamiche coinvolte. Prototipali di tali modelli sono, a titolo di esempio, gli approcci seguiti in [15] [28], [29] e [39]. In molti di essi l'approccio perturbativo seguito consiste sostanzialmente in espansioni in termini di parametro delle variabili del problema, in cui le variabili stesse sono sviluppate in serie di Maclaurin rispetto ad un parametro, considerato piccolo, presente nelle equazioni del moto adimensionalizzate. In tal senso le stesse equazioni (3.1-3.3, 3.6, 3.10), se adimensionalizzate, suggerirebbero un approccio perturbativo nel parametro di *slenderness*, valido per lamine sottili<sup>1</sup>. Nel contesto del presente lavoro, tuttavia, si è scelto di trattare il problema da un altro punto di vista, basandosi su un differente sviluppo asintotico delle equazioni del moto che considera la coordinata laterale  $y$  come piccolo parametro. Questo tipo di approccio asintotico, meglio noto come espansione in coordinate, si differenzia dalla già descritta espansione in termini di parametro per peculiari aspetti di carattere matematico. Come ampiamente

---

<sup>1</sup>In appendice l'approccio perturbativo in termini di parametro è sviluppato nel dettaglio per le equazioni di governo fino al primo ordine nel parametro di *slenderness*, ottenendo risultati in accordo con quelli forniti in [39] e [15], ottenuti per flussi potenziali.

discusso in [9] e [37], la differenza sostanziale tra l'espansione in parametro o coordinata consiste nella differente struttura matematica delle equazioni perturbate risultanti, dovuta alla circostanza che nelle equazioni del moto tutti gli operatori di derivata presenti sono relativi alle variabili spazio-temporali e non rispetto ai parametri coinvolti nelle equazioni. Ciò traduce la potenzialità del metodo asintotico di espansione in coordinate di portare in conto l'espressione completa della curvatura, espressa in (3.10), già nella soluzione all'ordine più basso laddove in un'espansione in termini di parametro tale contributo sarebbe stato inglobato in termini correttivi di ordine superiore.

L'approccio asintotico è condotto seguendo una procedura simile a quella sviluppata in [26] per la descrizione dell'evoluzione lineare e non lineare di una lamina di liquido piana, incompressibile ed in assenza di gravità. Un simile approccio, tra l'altro, è stato seguito anche in [17] per il problema più generale di un getto anulare instazionario in presenza di viscosità. A tale scopo è necessario fare una prima ipotesi sulla geometria della lamina che consenta di individuare un parametro piccolo rispetto al quale sviluppare le variabili del problema. Ipotizzando che la lamina sia sottile rispetto alla sua estensione laterale considereremo come parametro piccolo lo spessore della lamina, dato dalla (3.4). La necessità di tale ipotesi, tuttavia, impone un vincolo fisico al modello, nel senso che si considereranno solo lamine di liquido il cui spessore è piccolo rispetto alla lunghezza d'onda dei disturbi che in essa si possono generare.

Il fatto di considerare la lamina sottile permette di espandere in serie di potenze, nella direzione laterale, le variabili del problema. Tale espansione polinomiale è sempre possibile se le variabili stesse sono funzioni analitiche in  $(x, y, t)$ : l'analiticità, infatti, permette di esprimerle localmente mediante una serie di potenze convergente<sup>2</sup>. Indicando quindi con  $\varphi \equiv \varphi(x, y, t)$  la generica variabile fluidodinamica del problema, sviluppiamo in serie di Taylor (considerando  $x, t$  come parametri) intorno al valore  $y \equiv \bar{y}(x, t)$ <sup>3</sup>:

$$\varphi(x, y, t) = \varphi_0(x, y) + \varphi_1(x, t)[y - \bar{y}(x, t)] + \varphi_2(x, t)[y - \bar{y}(x, t)]^2 + \dots \quad (3.11)$$

<sup>2</sup>Una funzione  $f$  definita in  $\mathbb{R}$  è analitica su un sottoinsieme  $I \subseteq \mathbb{R}$  se e solo se  $\forall x_0 \in I, \exists$  un aperto  $J \subseteq I$  di  $x_0$  nel quale la funzione può essere espressa mediante una serie di potenze convergente di centro  $x_0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

con  $a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}$

<sup>3</sup>La sviluppabilità di  $\varphi$  intorno ad  $\bar{y}(x, t)$  è garantita dalla analiticità di  $\varphi$  rispetto a  $(x, y - \bar{y}, t)$ , se  $\bar{y}$  è anch'essa analitica in  $(x, t)$ .

dove  $\varphi_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n \varphi}{\partial y} \Big|_{y=\bar{y}}}{n!}$ . La scelta della linea media, come centro rispetto al quale effettuare lo sviluppo, garantisce che l'intervallo nel quale è localmente approssimata la generica variabile  $\varphi$  è sempre quello fisico individuato dalla posizione delle due interfacce,  $y \in [y_-, y_+]$ , dovendo inoltre valere la seguente disuguaglianza

$$|y - \bar{y}(x, t)| \leq |y_{\pm} - \bar{y}(x, t)| = \frac{\tilde{y}}{2}. \quad (3.12)$$

Sotto l'ipotesi fatta di  $\tilde{y}$  piccolo, quindi, la (3.11) suggerisce che in un approccio perturbativo in  $\tilde{y}/2$  i termini  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  ecc sono di ordine via via più piccolo, perchè coefficienti di quantità maggiorate da  $\tilde{y}/2, \tilde{y}^2/4, \dots$  ecc.

Per costruire un approccio perturbativo, che consenta di riformulare le equazioni di governo in termini di nuove variabili fisiche meglio gestibili, bisogna sostituire la (3.11) in ciascuna delle equazioni (3.1-3.3, 3.6, 3.10) e ricavare in tal modo i sistemi di equazioni ai vari ordini di approssimazione. Naturalmente l'ipotesi fatta di lamina sottile garantisce che il sistema all'ordine più basso nello sviluppo fornisca una buona approssimazione delle variabili coinvolte, consentendo di trattare il problema con un approccio monodimensionale instazionario in cui le variabili interne sono pensate valutate sulla linea media e le variabili di interfaccia riformulate in termini di linea media e spessore.

Al fine di ottenere il sistema all'ordine più basso dello sviluppo, che rappresenti il set di equazioni di partenza per l'analisi di un problema ai valori propri del modello oggetto di studio, nel seguito si ricavano le espressioni ai primi due ordini di approssimazione, nel parametro piccolo  $\tilde{y}$ , delle equazioni di governo.

### 3.3.1 Equazione di continuità

Sostituendo la (3.11), arrestata al II° ordine nello sviluppo, nella (3.1) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [u_0(x, t) + u_1(x, t) (y - \bar{y}(x, y)) + u_2(x, t) (y - \bar{y}(x, y))^2] + \dots \\ + \frac{\partial}{\partial y} [v_0(x, t) + v_1(x, t) (y - \bar{y}(x, y)) + v_2(x, t) (y - \bar{y}(x, y))^2] = 0 \end{aligned}$$

da cui sviluppando

$$\underbrace{\frac{\partial u_0}{\partial x}}_{O(0)} + \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial x} (y - \bar{y})}_{O(\bar{y})} - \underbrace{u_1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}}_{O(0)} + \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial x} (y - \bar{y})^2}_{O(\bar{y}^2)} - \underbrace{2u_2 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} (y - \bar{y})}_{O(\bar{y})} + \underbrace{v_1}_{O(0)} + \dots + \underbrace{2v_2 (y - \bar{y})}_{O(\bar{y})} = 0$$

in cui le considerazioni sugli ordini di grandezza seguono dalla (3.12). Pertanto, l'equazione di continuità all'ordine zero in  $\tilde{y}$  è data da

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} - u_1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + v_1 = 0 \quad (3.13)$$

mentre al primo ordine in  $\tilde{y}$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - 2u_2 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + 2v_2 = 0. \quad (3.14)$$

### 3.3.2 Equazione di quantità di moto assiale

Sostituendo la (3.11), sempre fino al II° ordine nello sviluppo in serie di potenze, nella (3.2)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [u_0(x, t) + u_1(x, t) (y - \bar{y}(x, y)) + u_2(x, t) (y - \bar{y}(x, y))^2] + \dots \\ & + (u_0 + u_1(y - \bar{y}) + u_2(y - \bar{y})^2) \frac{\partial}{\partial x} [u_0 + u_1(y - \bar{y}) + u_2(y - \bar{y})^2] + \dots \\ & + (v_0 + v_1(y - \bar{y}) + v_2(y - \bar{y})^2) \frac{\partial}{\partial y} [u_0 + u_1(y - \bar{y}) + u_2(y - \bar{y})^2] = \dots \\ & g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} [p_0 + p_1(y - \bar{y}) + p_2(y - \bar{y})^2] = 0 \end{aligned}$$

e, sempre dalla (3.12), sviluppando singolarmente i diversi contributi, si hanno le seguenti risultanze sugli ordini di grandezza dei vari termini:

1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial u_0}{\partial t}}_{O(0)} + \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial t} (y - \bar{y})}_{O(\bar{y})} - \underbrace{u_1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial t}}_{O(0)} + \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial t} (y - \bar{y})^2}_{O(\bar{y}^2)} - \underbrace{2u_2 \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} (y - \bar{y})}_{O(\bar{y})}$$

2.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial p_0}{\partial x}}_{O(0)} + \underbrace{\frac{\partial p_1}{\partial x}(y - \bar{y}) - p_1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}}_{O(\bar{y})} + \underbrace{\frac{\partial p_2}{\partial x}(y - \bar{y})^2 - 2p_2 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(y - \bar{y})}_{O(\bar{y}^2)}$$

3.

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} &= u_0 \left[ \underbrace{\frac{\partial u_0}{\partial x}}_{O(0)} + \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial x}(y - \bar{y}) - u_1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}}_{O(\bar{y})} + \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial x}(y - \bar{y})^2 - 2u_2 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(y - \bar{y})}_{O(\bar{y}^2)} \right] + \dots \\ u_1 &\left[ \underbrace{\frac{\partial u_0}{\partial x}(y - \bar{y}) + \frac{\partial u_1}{\partial x}(y - \bar{y})^2 - u_1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(y - \bar{y})}_{O(\bar{y}^2)} + \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial x}(y - \bar{y})^3 - 2u_2 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(y - \bar{y})^2}_{O(\bar{y}^3)} \right] + \dots \\ u_2 &\left[ \underbrace{\frac{\partial u_0}{\partial x}(y - \bar{y})^2 + \frac{\partial u_1}{\partial x}(y - \bar{y})^3 - u_1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(y - \bar{y})^2}_{O(\bar{y}^3)} + \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial x}(y - \bar{y})^4 - 2u_2 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(y - \bar{y})^3}_{O(\bar{y}^4)} \right] \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} v \frac{\partial u}{\partial y} &= (v_0 + v_1(y - \bar{y}) + v_2(y - \bar{y})^2)(u_1 + 2u_2(y - \bar{y})) = \dots \\ &\dots = \underbrace{v_0 u_1}_{O(0)} + \underbrace{2v_0 u_2(y - \bar{y})}_{O(\bar{y})} + \underbrace{u_1 v_1(y - \bar{y})}_{O(\bar{y})} + \underbrace{2v_1 u_2(y - \bar{y})^2}_{O(\bar{y}^2)} + \dots \\ &\qquad\qquad\qquad \underbrace{u_1 v_2(y - \bar{y})^2}_{O(\bar{y}^2)} + \underbrace{2u_2 v_2(y - \bar{y})^3}_{O(\bar{y}^3)} \end{aligned}$$

Raggruppando tutti i termini all'ordine zero in  $\tilde{y}$  dai diversi contributi si ottiene l'espressione all'ordine zero dell'equazione di q.d.m. lungo  $x$ :

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} - u_1 \left( \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} - v_0 \right) = g - \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p_0}{\partial x} - p_1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right] \quad (3.15)$$

Analogamente, raggruppando tutti i termini al primo ordine in  $\tilde{y}$  si ricava l'espressione all'ordine uno della q.d.m. lungo  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} - 2u_2 \left( \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} - v_0 \right) + u_1 \left( v_1 + \frac{\partial u_0}{\partial x} - u_1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right) &= \dots \\ \dots &= -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p_1}{\partial x} - 2p_2 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right] \quad (3.16) \end{aligned}$$

### 3.3.3 Equazione di quantità di moto laterale

Ripetendo pedissequamente quanto fatto, per l'equazione di q.d.m. laterale (3.3) si ottiene (con analogo riferimento agli ordini di grandezza):

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\frac{\partial v_0}{\partial t}}_{O(0)} + \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial t}(y - \bar{y})}_{O(\bar{y})} - \underbrace{v_1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial t}}_{O(0)} + \underbrace{\frac{\partial v_2}{\partial t}(y - \bar{y})^2}_{O(\bar{y}^2)} - \underbrace{2v_2 \frac{\partial \bar{y}}{\partial t}(y - \bar{y})}_{O(\bar{y})} + \dots \\
& u_0 \left[ \underbrace{\frac{\partial v_0}{\partial x}}_{O(0)} + \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial x}(y - \bar{y})}_{O(\bar{y})} - \underbrace{v_1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}}_{O(0)} + \underbrace{\frac{\partial v_2}{\partial x}(y - \bar{y})^2}_{O(\bar{y}^2)} - \underbrace{2v_2 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(y - \bar{y})}_{O(\bar{y})} \right] + \dots \\
& u_1 \left[ \underbrace{\frac{\partial v_0}{\partial x}(y - \bar{y})}_{O(\bar{y})} + \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial x}(y - \bar{y})^2}_{O(\bar{y}^2)} - \underbrace{v_1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(y - \bar{y})}_{O(\bar{y})} + \underbrace{\frac{\partial v_2}{\partial x}(y - \bar{y})^3}_{O(\bar{y}^3)} - \underbrace{2v_2 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(y - \bar{y})^2}_{O(\bar{y}^2)} \right] + \dots \\
& u_2 \left[ \underbrace{\frac{\partial v_0}{\partial x}(y - \bar{y})^2}_{O(\bar{y}^2)} + \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial x}(y - \bar{y})^3}_{O(\bar{y}^3)} - \underbrace{v_1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(y - \bar{y})^2}_{O(\bar{y}^2)} + \underbrace{\frac{\partial v_2}{\partial x}(y - \bar{y})^4}_{O(\bar{y}^4)} - \underbrace{2v_2 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(y - \bar{y})^3}_{O(\bar{y}^3)} \right] + \dots \\
& \underbrace{v_0 v_1}_{O(0)} + \underbrace{2v_0 v_2 (y - \bar{y})}_{O(\bar{y})} + \underbrace{v_1^2 (y - \bar{y})}_{O(\bar{y})} + \underbrace{2v_1 v_2 (y - \bar{y})^2}_{O(\bar{y}^2)} + \underbrace{v_1 v_2 (y - \bar{y})^2}_{O(\bar{y}^2)} + \dots \\
& \underbrace{2v_2^2 (y - \bar{y})^3}_{O(\bar{y}^3)} = -\frac{1}{\rho} \left[ \underbrace{p_1}_{O(0)} + \underbrace{2p_2 (y - \bar{y})}_{O(\bar{y})} \right]
\end{aligned}$$

da cui raggruppando al solito ai diversi ordini si ottiene:

- All'ordine zero in  $\tilde{y}$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} - v_1 \left( \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} - v_0 \right) = -\frac{1}{\rho} p_1 \quad (3.17)$$

- Al primo ordine in  $\tilde{y}$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2v_2 \left( \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} - v_0 \right) - v_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{2}{\rho} p_2 \quad (3.18)$$

dove si è tenuto conto, dalla (3.13), dell'uguaglianza:

$$v_1 - u_1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} = -\frac{\partial u_0}{\partial x}.$$

### 3.3.4 Condizione cinematica

Analogamente a quanto fatto per le equazioni di Eulero è possibile ottenere anche per le condizioni di interfaccia le espressioni ai primi due ordini di grandezza, nel piccolo parametro  $\tilde{y}$ , dello sviluppo in serie di potenze (3.11).

Per quanto concerne la condizione cinematica (3.6), si osserva che per le (3.11) e (3.12) vale la seguente relazione, per una qualsiasi variabile di interfaccia  $\varphi$ :

$$\varphi_{\pm} = \varphi_0 \pm \varphi_1 \frac{\tilde{y}}{2} + \varphi_2 \frac{\tilde{y}^2}{4} + \dots O(\tilde{y}^3)$$

Sostituendo quest'ultima espansione, fino al II° ordine, nella (3.6) si ha

$$\underbrace{v_0}_{O(0)} \pm \underbrace{v_1 \frac{\tilde{y}}{2}}_{O(\tilde{y})} + \underbrace{v_2 \frac{\tilde{y}^2}{4}}_{O(\tilde{y}^2)} = \underbrace{\frac{\partial y_{\pm}}{\partial t}}_{O(0)} + \underbrace{u_0 \frac{\partial y_{\pm}}{\partial x}}_{O(0)} \pm \underbrace{u_1 \frac{\tilde{y}}{2} \frac{\partial y_{\pm}}{\partial x}}_{O(\tilde{y})} + \underbrace{u_2 \frac{\tilde{y}^2}{4} \frac{\partial y_{\pm}}{\partial x}}_{O(\tilde{y}^2)} \quad (3.19)$$

da cui segue che all'ordine zero in  $\tilde{y}$  risulta

$$v_0 = \frac{\partial y_{\pm}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial y_{\pm}}{\partial x} \quad (3.20)$$

mentre al primo ordine si ha

$$\pm v_1 \frac{\tilde{y}}{2} = \pm u_1 \frac{\tilde{y}}{2} \frac{\partial y_{\pm}}{\partial x}. \quad (3.21)$$

Al solito, nel ricavare la (3.21) si è implicitamente supposto, come già fatto per le equazioni di Eulero, che fosse soddisfatta la corrispondente equazione all'ordine zero (3.20), in modo da considerare i coefficienti all'ordine zero come variabili note soddisfacenti la (3.20).

Le (3.20) e (3.21) possono essere opportunamente riformulate in modo da esprimerle in termini di linea media (3.5) e spessore (3.4). Sommando e sottraendo ciascuna delle (3.20) si ottengono le seguenti relazioni, in termini di linea media e spessore:

- All'ordine zero in  $\tilde{y}$

$$v_0 = \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \quad (3.22)$$

- Al primo ordine in  $\tilde{y}$

$$0 = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \quad (3.23)$$

Analogamente, sommando e sottraendo ciascuna delle (3.21) si ottengono le relazioni:

- Al secondo ordine in  $\tilde{y}$

$$0 = u_1 \frac{\tilde{y}}{2} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \quad (3.24)$$

- Al primo ordine in  $\tilde{y}$

$$v_1 \tilde{y} = u_1 \tilde{y} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \quad (3.25)$$

Le (3.22-3.24) mostrano che la soluzione all'ordine zero in  $\tilde{y}$ , per la condizione cinematica, è data dalla (3.22), mentre la soluzione al primo ordine si ottiene sommando membro a membro le (3.23) e (3.25), ovvero

$$v_1 \tilde{y} = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} + u_1 \tilde{y} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \quad (3.26)$$

Quanto detto suggerisce un'interpretazione fisica dei coefficienti  $v_0, v_1$ . Dal momento che le (3.22-3.24) sono state ricavate dalla (3.19) come media e differenza dei valori di  $v$  all'interfaccia, è possibile dedurne che  $v_0$ , coefficiente di ordine zero dello sviluppo in serie di potenze (3.11), rappresenti il valore di  $v$  sulla linea media mentre  $v_1$ , coefficiente di primo ordine dello stesso sviluppo, rappresenti il salto di  $v$  all'interfaccia.

### 3.3.5 Condizione dinamica

Al solito, bisogna introdurre l'espansione in serie (3.11) per  $p$  nella (3.10). Analogamente a quanto fatto per le velocità, si può scrivere:

$$p_{\pm} = p_0 \pm p_1 \frac{\tilde{y}}{2} + p_2 \frac{\tilde{y}^2}{4} + \dots O(\tilde{y}^3)$$

che sostituita nella (3.10)

$$\underbrace{p_0}_{O(0)} \pm \underbrace{p_1 \frac{\tilde{y}}{2}}_{O(\tilde{y})} + \underbrace{p_2 \frac{\tilde{y}^2}{4}}_{O(\tilde{y}^2)} = \underbrace{p_{\pm}^a}_{O(0)} \mp \underbrace{\sigma f \pm \frac{\partial^2 y_{\pm}}{\partial x^2}}_{O(0)}$$

in cui si è indicato simbolicamente con  $f_{\pm}$  il termine  $\left[1 + \left(\frac{\partial y_{\pm}}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}$ .

Analogamente a quanto già fatto per la condizione cinematica, all'ordine zero in  $\tilde{y}$  risulta

$$p_0 = p_{\pm}^a \mp \sigma f_{\pm} \frac{\partial^2 y_{\pm}}{\partial x^2} \quad (3.27)$$



mentre al primo ordine si ha

$$\pm p_1 \frac{\tilde{y}}{2} = 0 \quad (3.28)$$

avendo, come sempre, ipotizzato soddisfatta la soluzione all'ordine zero (3.27). Al fine di eliminare dalle (3.27) e (3.28) la dipendenza esplicita dalla posizione dell'interfaccia, queste ultime possono essere ancora una volta riarrangiate in un insieme equivalente di relazioni espresse in termini di linea media e spessore. All'uopo, una prima utile relazione, che permette di esprimere  $f_{\pm}$  in termini di  $\bar{y}$  e  $\tilde{y}$ , è facilmente ricavabile dalla relazione seguente

$$y_{\pm} = \bar{y} \pm \frac{\tilde{y}}{2}$$

che segue immediatamente dalle (3.5) e (3.4). Sviluppando il termine  $\left(\frac{\partial y_{\pm}}{\partial x}\right)^2$  si ottiene

$$f_{\pm} = \left[ 1 + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\right)^2 \pm \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}\right)^2 \right]^{-3/2} \quad (3.29)$$

Sommando membro a membro ciascuna delle (3.27) si ha

$$2p_0 = (p_+^a + p_-^a) - \underbrace{\sigma \left( f_+ \frac{\partial^2 y_+}{\partial x^2} - f_- \frac{\partial^2 y_-}{\partial x^2} \right)}_{\mathbf{1}}$$

da cui manipolando opportunamente il raggruppamento **1** si ottiene

$$p_0 = \frac{p_+^a + p_-^a}{2} - \frac{\sigma}{2} \left[ \left( \frac{f_+ + f_-}{2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} + (f_+ - f_-) \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} \right] \quad (3.30)$$

Allo stesso modo, sottraendo membro a membro ciascuna delle (3.27) si ha in definitiva

$$0 = (p_+^a - p_-^a) - \sigma \left[ (f_+ + f_-) \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} + \left( \frac{f_+ - f_-}{2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} \right] \quad (3.31)$$

Le (3.30) e (3.31) sono al primo ordine in  $\tilde{y}$ ; all'ordine zero si riducono a

$$p_0 = \frac{p_+^a + p_-^a}{2} - \frac{\sigma}{2} (f_+ - f_-) \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} \quad (3.32)$$

$$0 = (p_+^a - p_-^a) - \sigma (f_+ + f_-) \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} \quad (3.33)$$

$$\text{con } f_{\pm} = \left[ 1 + \left( \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right)^2 \right]^{(-3/2)}.$$

Le condizioni dinamiche al primo ordine in  $\tilde{y}$ , tuttavia, non si riducono alle (3.30) e (3.31). Per ottenere le condizioni dinamiche complete al primo ordine bisogna portare in conto anche il contributo della (3.28), riformulata in termini di linea media e spessore. Sommando e sottraendo ciascuna delle (3.28) si ottiene la sola relazione

$$p_1 \tilde{y} = 0 \quad (3.34)$$

dal momento che l'equazione ottenuta sommando membro a membro ciascuna delle (3.28) risulta identicamente soddisfatta. Come per la condizione cinematica, le soluzioni al primo ordine in  $\tilde{y}$  si ottengono dalla (3.30) e sommando membro a membro le (3.31) e (3.34), ovvero

$$p_1 \tilde{y} = (p_+^a - p_-^a) - \sigma \left[ (f_+ + f_-) \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} + \left( \frac{f_+ - f_-}{2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} \right] \quad (3.35)$$

Anche in tal caso è possibile osservare come i coefficienti di ordine zero,  $p_0$ , e uno,  $p_1$ , dello sviluppo in serie (3.11) della  $p(y)$  intorno alla linea media altro non sono che il valore di  $p$  valutato sulla linea media e come salto all'interfaccia, rispettivamente. Infatti la (3.30) è stata calcolata dalla (3.10) facendone la media dei valori all'interfaccia ed, in tal senso, è espressa come somma delle risultanti di pressione esterna e tensione superficiale valutate sulla linea media; allo stesso modo la (3.31), essendo stata ricavata dalla (3.10) come differenza delle pressioni all'interfaccia, risulta espressa mediante la somma dei differenziali dei due differenti contributi valutati sulle due interfacce.

### 3.4 Modello unidimensionale instazionario

L'ipotesi di sottigliezza della lamina, alla base dell'approccio perturbativo adottato, ha consentito di abbassare formalmente l'ordine dimensionale del problema, eliminando la dipendenza delle variabili dalla coordinata laterale  $y$ . Ciò comporta, d'altro canto, la riformulazione del sistema di equazioni originale (3.1-3.3,3.6,3.10) in termini di nuove variabili, date dai coefficienti incogniti dello sviluppo in serie (3.11). Nella logica di un approccio perturbativo i coefficienti incogniti ai vari ordini andrebbero determinati risolvendo in sequenza i sistemi ai diversi ordini di grandezza assumendo, di volta in volta, note le variabili soddisfacenti alle equazioni già risolte agli ordini più bassi. Tale procedura, in definitiva, consentirebbe di ricostruire la generica variabile  $\varphi$  ricavando i coefficienti ai vari ordini mediante la risoluzione del

corrispondente sistema chiuso. Tuttavia l'ipotesi fatta di piccolo spessore garantisce che il valore assunto dalle variabili interne sulla linea media non si discosti di molto dal valore medio delle stesse,  $\forall(x, t)$ , cosa questa che consente di riformulare le equazioni di governo, nel contesto di una sufficiente approssimazione, arrestandole all'ordine zero dello sviluppo nel parametro  $\tilde{y}$ . Semplificando opportunamente le (3.15) e (3.17), tenuto conto della (3.22), il sistema completo all'ordine zero è dato da

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} - u_1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + v_1 = 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p_0}{\partial x} - p_1 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right] = g \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho} p_1 = 0 \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} - v_0 = 0 \\ \frac{p_+^a + p_-^a}{2} - \frac{\sigma}{2} (f_+ - f_-) \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} - p_0 = 0 \end{array} \right.$$

Il sistema all'ordine zero è chiaramente sottodimensionato dal momento che in esso compaiono anche i coefficienti di primo ordine dello sviluppo in serie (3.11), dovuti alla presenza nelle equazioni di Eulero di operatori di derivata nella direzione laterale. Per chiudere il sistema è necessario dunque considerare le condizioni di interfaccia fino al primo ordine, ovvero le condizioni cinematiche (3.22) e (3.26) e quelle dinamiche (3.30) e (3.35).

Sebbene un approccio ibrido sull'ordine di approssimazione delle equazioni possa apparire non consistente, l'idea di considerare un ordine misto per il nuovo sistema di equazioni di governo non è, a ben guardare, così peregrina. Esso è consistente con il sistema originario (3.1-3.3, 3.6, 3.10), in cui sono presenti sia valori medi che valori di interfaccia per le variabili  $(u, v, p)$ . In effetti, proprio la necessità di applicare le condizioni di interfaccia ad una distanza  $\tilde{y}/2$  dalla linea media richiede l'utilizzo di una espansione fino al primo ordine in  $\tilde{y}$  per tali equazioni. Sulla base di ciò è possibile concludere che il sistema chiuso, all'ordine più basso, che governa l'evoluzione instazionaria monodimensionale di una lamina di liquido non viscosa in gravità si ottiene considerando le equazioni interne all'ordine zero (3.13, 3.15, 3.17) e quelle di interfaccia fino al primo ordine in  $\tilde{y}$  (3.22, 3.26, 3.30, 3.35).

Sostituendo le (3.22, 3.30, 3.35) nelle (3.15, 3.17) e la (3.26) nella (3.13) si ottiene, in definitiva, il nuovo sistema di equazioni nelle incognite  $u_0, v_0, \tilde{y}, \bar{y}$ ,

governante l'evoluzione instazionaria monodimensionale di una lamina di liquido sotto le ipotesi fatte per il modello:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_0 \tilde{y}) = 0 \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} - v_0 = 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{p_+^a + p_-^a}{2} - \frac{\sigma}{2} \left[ \frac{f_+ + f_-}{2} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} + (f_+ - f_-) \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} \right] \right\} + \dots \\ \dots - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \left\{ \frac{p_+^a - p_-^a}{\tilde{y}} - \frac{\sigma}{\tilde{y}} \left[ (f_+ + f_-) \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} + \frac{f_+ - f_-}{2} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} \right] \right\} = g \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\sigma}{\rho \tilde{y}} \left[ (f_+ + f_-) \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} + \frac{f_+ - f_-}{2} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} \right] + \frac{1}{\rho \tilde{y}} (p_+^a - p_-^a) = 0 \end{array} \right. \quad (3.36)$$

con  $f_{\pm}$  dato dalla (3.29).

Una volta risolto il sistema (3.36) nelle incognite  $[u_0, v_0, \bar{y}, \tilde{y}] (x, t)$  la pressione sulla linea media,  $p_0$ , sarà data dalla (3.32), noto naturalmente il contributo di pressione esterna alle interfacce (in funzione di linea media e spessore).

# Capitolo 4

## Moto base

Nel presente capitolo viene studiata l'evoluzione stazionaria di una lamina di liquido in gravità, in presenza di forze d'inerzia e tensione superficiale all'interfaccia liquido-gas. Sotto le ipotesi fatte per la geometria del modello, in condizioni imperturbate il sistema di equazioni approssimate all'ordine più basso (3.36) si riduce ad una singola ODE non lineare, che governa la distribuzione stazionaria di velocità e spessore nella direzione del flusso. Soluzioni analitiche approssimate di tale equazione sono ottenute attraverso un approccio perturbativo, arrestato ai primi due ordini di grandezza, nei parametri di governo dell'equazione adimensionale, ovvero il numero di Weber ed il parametro di *slenderness*  $\varepsilon$ . L'equazione non lineare è integrata numericamente mediante due differenti tecniche numeriche ed uno studio parametrico della soluzione esatta è condotto per differenti valori del numero di Weber ed  $\varepsilon$ . Tale soluzione è infine confrontata con le soluzioni asintotiche approssimate valide per piccoli valori dei parametri  $\varepsilon$  e  $We$ .

### 4.1 Modello unidimensionale stazionario

Il sistema (3.36) governa l'evoluzione unidimensionale, all'ordine più basso dello sviluppo (3.11), di una lamina di liquido in gravità nel caso più generale in cui vengono considerati anche gli effetti instazionari. Dal momento che il campo di moto medio deve soddisfare al sistema (3.36), di cui è soluzione stazionaria, il sistema di equazioni di governo all'ordine più basso per un problema stazionario risulta, in prima battuta, dal (3.36), semplicemente eliminando il contributo dato dai termini instazionari. Tuttavia, poichè per le ipotesi alla base del nostro modello la lamina fluisce verso il basso in un ambiente in cui il gas è supposto in quiete, è lecito supporre che in condizioni stazionarie gli effetti dell'azione delle forze di massa sul gas esterno che cir-

conda la lamina siano trascurabili. Supponendo inoltre che il fluido esterno sia non viscoso è naturale assumere che la pressione esterna imperturbata risulti ovunque uniforme e pari al valore della pressione termodinamica del fluido in quiete. Questa ipotesi permette di trascurare nella (3.36) la variazione, per effetto della gravità, lungo la lamina della pressione dell'ambiente esterno  $\left(\frac{\partial p_{\pm}^a}{\partial x} = 0\right)$ .

Ridefinendo, per chiarezza di esposizione, le nuove variabili stazionarie con i seguenti simboli

$$U_0 = u_0(x); \quad V_0 = v_0(x); \quad \bar{Y} = \bar{y}(x); \quad H = \tilde{y}(x); \quad P_{\pm}^a = p_{\pm}^a$$

e riscrivendo di conseguenza la (3.29) nella nuova notazione

$$F_{\pm} = \left[ 1 + \left( \frac{d\bar{Y}}{dx} \right)^2 \pm \frac{d\bar{Y}}{dx} \frac{dH}{dx} + \frac{1}{4} \left( \frac{dH}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} \quad (4.1)$$

il sistema chiuso di equazioni differenziali ordinarie non lineari alla base dell'evoluzione stazionaria di una lamina di liquido non viscosa, in gravità e soggetta all'azione di una tensione superficiale costante alle interfacce risulta essere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d(U_0 H)}{dx} = 0 \\ U_0 \frac{d\bar{Y}}{dx} - V_0 = 0 \\ U_0 \frac{dU_0}{dx} - \frac{\sigma}{2\rho} \frac{d}{dx} \left[ \bar{F} \frac{d^2 H}{dx^2} + \tilde{F} \frac{d^2 \bar{Y}}{dx^2} \right] + \frac{\sigma}{\rho H} \frac{d\bar{Y}}{dx} \left[ 2\bar{F} \frac{d^2 \bar{Y}}{dx^2} + \frac{\tilde{F}}{2} \frac{d^2 H}{dx^2} \right] + \dots \\ \dots - \frac{1}{\rho H} \frac{d\bar{Y}}{dx} \tilde{P}^a = g \\ U_0 \frac{dV_0}{dx} - \frac{\sigma}{\rho H} \left[ 2\bar{F} \frac{d^2 \bar{Y}}{dx^2} + \frac{\tilde{F}}{2} \frac{d^2 H}{dx^2} \right] + \frac{\tilde{P}^a}{\rho H} = 0 \end{array} \right. \quad (4.2)$$

in cui la pressione esterna, ipotizzata nota e costante ai due lati della lamina, è stata considerata al momento non necessariamente simmetrica alle interfacce, influenzando la dinamica (stazionaria) del modello proprio attraverso il salto  $\tilde{P}^a$  che essa subisce in corrispondenza delle interfacce stesse.

Si noti che, per chiarezza di sintesi, le variabili  $F_{\pm}$  e  $P_{\pm}^a$  sono state trattate simbolicamente secondo le definizioni date in (3.5) e (3.4).

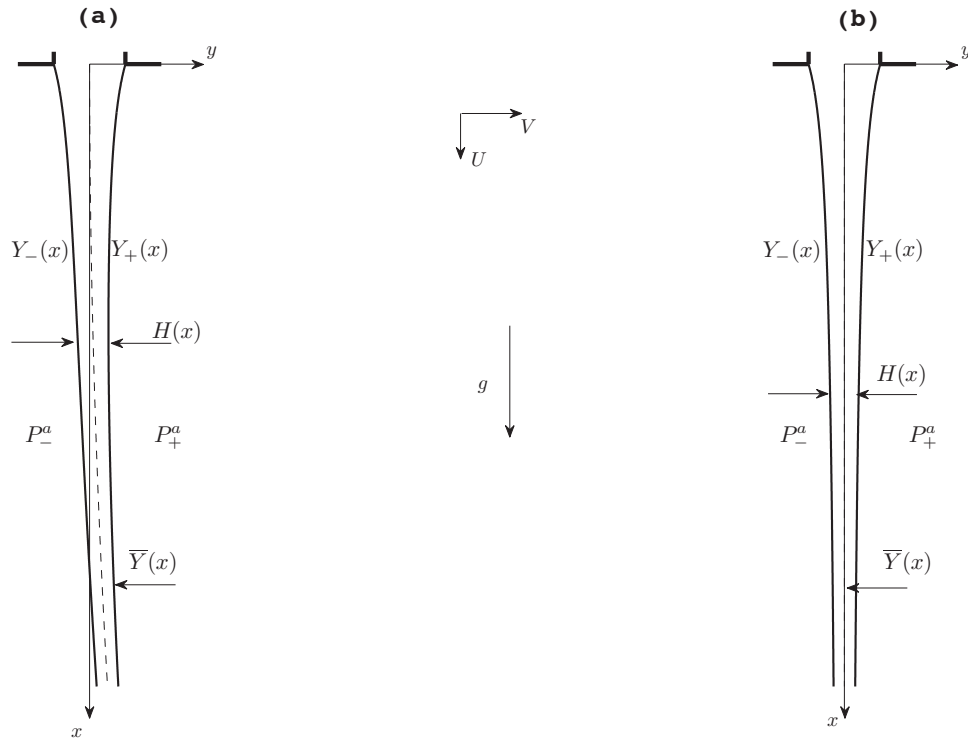


Figura 4.1: Schema dell'evoluzione stazionaria di una lamina liquida in gravità nei casi di pressione esterna non simmetrica **(a)** e simmetrica **(b)** alle interfacce.

## 4.2 Configurazione non simmetrica

Il sistema (4.2) governa la dinamica dell'evoluzione stazionaria di una lamina di liquido (nei limiti delle approssimazioni fatte per il modello) nel caso più generale in cui una pressione esterna, non simmetrica, sia applicata alle interfacce. Il modello dunque è intrinsecamente non simmetrico ed è possibile ricondursi ad una configurazione simmetrica come soluzione particolare del più generale sistema (4.2), semplicemente introducendo delle ulteriori ipotesi semplificative.

Sebbene l'analisi di configurazioni non simmetriche, per le quali è considerata una differenza di pressione esterna applicata alle interfacce, non sia argomento del presente lavoro di tesi, al fine di verificare la generalità del sistema di equazioni alla base del modello sviluppato, si osserva come la semplice ipotesi di lenta variazione nella direzione di evoluzione del flusso

dello spessore della lamina consenta di ottenere, dal sistema (4.2), la medesima legge di evoluzione stazionaria ricavata in [18] sulla base di considerazioni legate al bilancio di forze su un concio infinitesimo ed assumendo un flusso nella lamina, localmente, di tipo plug.

All'uopo si osservi che la (4.1), nell'ipotesi di trascurabilità dei termini di derivata prima e seconda dello spessore nella direzione del flusso, si riduce a

$$F_{\pm} = \left[ 1 + \left( \frac{d\bar{Y}}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2}$$

da cui ne consegue che  $\bar{F} = \left[ 1 + (d\bar{Y}/dx)^2 \right]^{-3/2}$  e  $\tilde{F} = 0$ . Analogamente, per la medesima ipotesi, le equazioni di q.d.m. in (4.2) si riducono a

$$\rho H \left( \frac{1}{2} \frac{dU_0^2}{dx} \right) = \rho H g - 2\sigma \bar{F} \frac{d\bar{Y}}{dx} \frac{d^2\bar{Y}}{dx^2} + \frac{d\bar{Y}}{dx} \tilde{P}^a \quad (4.3)$$

$$\rho H \left( \frac{1}{2} \frac{dV_0^2}{dx} \right) = 2\sigma \bar{F} \frac{d\bar{Y}}{dx} \frac{d^2\bar{Y}}{dx^2} - \frac{d\bar{Y}}{dx} \tilde{P}^a \quad (4.4)$$

in cui la (4.4) si ottiene banalmente dalla seconda equazione del sistema (4.2). Sommando membro a membro le (4.3) e (4.4) ed osservando che in termini di velocità del flusso si può scrivere  $V_s^2 = U_0^2 + V_0^2$  si ottiene

$$V_s \frac{dV_s}{dx} = g. \quad (4.5)$$

Allo stesso tempo, tenuto conto della seguente equivalenza

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{d\bar{Y}/dx}{\left[ 1 + (d\bar{Y}/dx)^2 \right]^{1/2}} \right] = \frac{d^2\bar{Y}/dx^2}{\left[ 1 + (d\bar{Y}/dx)^2 \right]^{3/2}}$$

la (4.4) può risciversi come

$$\frac{d}{dx} \left[ \rho H_i U_{0i}^2 \frac{d\bar{Y}}{dx} - 2\sigma \frac{d\bar{Y}/dx}{\left[ 1 + (d\bar{Y}/dx)^2 \right]^{1/2}} \right] = -\tilde{P}^a$$

in cui si è tenuto conto della costanza della portata,  $Q = U_0 H$ , garantita dalla  $I^a$  eq. in (4.2). Esprimendo ancora la velocità verticale in termini della



velocità del flusso,  $U_0 = V_s \left(1 + (d\bar{Y}/dx)^2\right)^{-1/2}$ , in definitiva si ottiene

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{d\bar{Y}/dx}{\left[1 + (d\bar{Y}/dx)^2\right]^{1/2}} (\rho Q V_s - 2\sigma) \right] = -\tilde{P}^a$$

che è esattamente l'eq. (7) in [18]. Accoppiata alla soluzione *torricelliana* per la velocità del flusso (4.5), questa porta ad una equazione nella sola incognita data dalla deflessione della linea media della lamina. Questa equazione presenta una singolarità alla stazione  $x$  dove il numero di Weber locale  $We_x = \sigma/\rho U_{0i} H_i V_s(x) = 1/2$  (naturalmente la singolarità scompare per regimi di moto in cui  $We_{x_0} < 1/2$  in corrispondenza dello slot ( $x_0$ ) da cui il flusso si origina). Le proprietà di tale singolarità sono state ampiamente studiate, sia teoricamente che sperimentalmente, in [18] ed è stato trovato che essa può essere rimossa (fisicamente la singolarità non si realizza) se la linea media della lamina liquida assume una caratteristica pendenza, non nulla, in corrispondenza dell'ingresso da cui la lamina si origina.

### 4.3 Configurazione simmetrica

Diversamente dal caso più generale di asimmetria del campo di forze esterne, il sistema (4.2) è suscettibile di forti semplificazioni nei casi di configurazioni simmetriche della lamina, come da Fig. (4.1b). Nell'ipotesi che sia simmetrico il condotto dal quale emerge la lamina e che, contestualmente, la velocità trasversale all'ingresso sia nulla, un campo di pressione uniforme e simmetrico ai due lati della lamina implica, come conseguenza, che la soluzione stazionaria imperturbata presenti una distribuzione simmetrica rispetto all'asse delle  $x$  e quindi, conseguentemente, la linea media risulterà identicamente nulla,  $\bar{Y}(x) = 0$ , perchè rettilinea ed allineata con l'asse delle  $x$ . Allo stesso tempo anche la velocità trasversale risulterà nulla,  $V_0(x) = 0$ , lungo tutta la lamina per ragioni di simmetria. Infatti, dal momento che  $V_0$  è lo sviluppo all'ordine più basso della velocità trasversale rispetto alla linea media (ovvero, come già osservato, il valore di tale velocità sulla linea media stessa) è evidente che, nel caso di linea media rettilinea con lamina simmetrica rispetto ad essa, la  $V_0(x)$  deve necessariamente essere nulla per conservare la simmetria del problema<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Più banalmente, dal momento che la soluzione stazionaria deve soddisfare alla condizione cinematica del sistema (4.2)

$$U_0 \frac{d\bar{Y}}{dx} = V_0,$$

Naturalmente ciò non implica che la componente di velocità trasversale sia,  $\forall x$ , ovunque nulla nella lamina di liquido (dal momento che, a causa della contrazione che subisce il flusso per effetto del campo gravitazionale, una tale circostanza violerebbe la continuità) ma solo che è nullo il suo valore medio che, in condizioni stazionarie, coincide proprio con il termine all'ordine zero dello sviluppo (3.11) delle variabili del problema.

In base alle considerazioni fin qui fatte, le variabili di flusso stazionarie, in condizioni di configurazione simmetrica per il modello, si riducono alla forma seguente:

$$U_0 = U_0(x), \quad H = H(x), \quad (4.6)$$

$$V_0 = 0, \quad \bar{Y} = 0, \quad \tilde{P}^a = 0, \quad (4.7)$$

$$\tilde{F} = 0, \quad \bar{F} = F = \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \quad (4.8)$$

dal momento che ora risulta:  $F_{\pm} = \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2}$ . Sostituendo le posizioni fatte per le variabili nel sistema non lineare (4.2), quest'ultimo si riduce ad una singola ODE non lineare nelle variabili linearmente dipendenti  $U_0$  e  $H$ . Infatti la condizione di interfaccia (II° eq.) e la q.d.m. trasversale (IV° eq.) del sistema (4.2) risultano identicamente soddisfatte per le (4.7) e (4.8), mentre la continuità (I° eq.) e la q.d.m. longitudinale (III° eq.) si riducono a

$$\begin{cases} U_0 H = U_{0i} H_i \\ U_0 \frac{dU_0}{dx} = g + \frac{\sigma}{2\rho} \frac{d}{dx} \left[ F \frac{d^2 H}{dx^2} \right] \end{cases} \quad (4.9)$$

in cui  $U_{0i}, H_i$  indicano velocità e spessore in corrispondenza della sezione di ingresso ( $x = 0$ ). Il sistema (4.9), una volta integrato numericamente con opportune condizioni al contorno, permette di risolvere la dinamica stazionaria di una lamina liquida in gravità, in presenza di tensione superficiale, attraverso la distribuzione lungo la direzione del flusso delle sole variabili non nulle in configurazione simmetrica,  $U_0(x)$  e  $H(x)$ .

Una prima soluzione analitica può essere facilmente ottenuta dal sistema (4.9) nel caso in cui  $\sigma = 0$ . In tal caso, infatti, il sistema si riduce ad una

---

nella ipotesi in cui  $\bar{Y}(x) = 0$  evidentemente deve risultare che  $V_0(x) = 0$ .

singola ODE lineare di I° grado che, integrata analiticamente, fornisce la ben nota soluzione *torricelliana* di caduta libera:

$$U_0(x) = \sqrt{U_{0i}^2 + 2gx} \quad (4.10)$$

$$H(x) = \frac{U_{0i}H_i}{\sqrt{U_{0i}^2 + 2gx}}. \quad (4.11)$$

Le (4.10) e (4.11) rappresentano la soluzione esatta del modello, approssimato all'ordine più basso dello sviluppo (3.11), nel caso di assenza di tensione superficiale; pertanto le soluzioni del sistema (4.9) per  $\sigma \neq 0$  possono essere considerate come una correzione del modello di caduta libera quando si considera anche il contributo dovuto all'azione della tensione superficiale.

### 4.3.1 Derivazione fisica delle equazioni di governo

Seguendo un approccio simile a quanto fatto in [18] nel differente contesto di una configurazione asimmetrica del modello, è possibile, in alternativa, ricavare direttamente il sistema (4.9) sulla base di considerazioni fisiche, attraverso una banale applicazione del bilancio integrale della massa e della q.d.m. longitudinale su una porzione infinitesima della lamina di lunghezza  $dx$ . All'uopo, assumendo un profilo di velocità e pressione localmente uniforme in direzione trasversale, a ciascuna stazione  $x$  nella direzione del flusso, la conservazione della massa integrale

$$\rho \int_{dx} \int_h \nabla \cdot \mathbf{u}_0 dx dh = 0$$

immediatamente restituisce la I° eq. del sistema (4.9). Allo stesso modo, la conservazione della q.d.m. longitudinale garantisce che l'inerzia è bilanciata dalla forze di massa e dalla pressione e può essere espressa, per profili di velocità e pressione costanti, dall'equazione di Bernuolli come

$$\frac{d}{dx} \left( P + \rho \frac{U_0^2}{2} - \rho gx \right) = 0. \quad (4.12)$$

La pressione  $P$  nel liquido si ottiene dall'equilibrio con la risultante dei contributi di pressione esterna e di tensione superficiale, ovvero

$$P = P^a - \sigma \kappa$$

dove  $\kappa$  è la curvatura dell'interfaccia della lamina. Quest'ultima può essere espressa come la divergenza del versore della normale locale  $\mathbf{n}$  dato da:

$$\mathbf{n} = \mp \left( \frac{dY/dx}{(1 + (dY/dx)^2)^{1/2}} \right) \mathbf{i} \pm \left( \frac{1}{(1 + (dY/dx)^2)^{1/2}} \right) \mathbf{j}$$

in cui  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  sono i versori lungo le direzioni  $x$  e  $y$ , rispettivamente, e  $Y = H/2$ . Facendone la divergenza e risostituendolo esplicitamente nel termine di curvatura si ottiene:

$$P = P^a \mp \sigma \left( \frac{d^2 Y_{\pm}/dx^2}{(1 + (dY_{\pm}/dx)^2)^{3/2}} \right).$$

Sostituendo infine quest'ultima equazione nella (4.12), nell'ipotesi valida di pressione esterna costante, in definitiva si ottiene

$$\rho U \frac{dU}{dx} - \sigma \frac{d}{dx} \left[ \frac{\frac{1}{2} \frac{d^2 H}{dx^2}}{\left( 1 + \left( \frac{1}{2} \frac{dH}{dx} \right)^2 \right)^{3/2}} \right] - \rho g = 0$$

che è esattamente la II° eq. del sistema (4.9).

## 4.4 Equazioni adimensionalizzate ed approssimazioni asintotiche

Il sistema (4.9) di equazioni del moto può essere riscritto convenientemente in forma adimensionale utilizzando le seguenti grandezze caratteristiche per scalare le variabili del problema

$$\begin{aligned} x_r &= U_{0_i}^2/g, & y_r &= H_i, & p_r &= \rho U_{0_i}^2, \\ u_r &= x_r/t_r = U_{0_i}, & v_r &= y_r/t_r = \varepsilon U_{0_i} \end{aligned}$$

dove, al solito,  $U_{0_i}$  e  $H_i$  rappresentano velocità e spessore iniziali del campo di moto base della lamina, mentre  $\varepsilon = H_i/x_r = H_i g/U_{0_i}^2$  è il parametro di *slenderness*. Conseguentemente, il sistema (4.9), in forma adimensionale, si scrive

$$UH = 1 \tag{4.13}$$

$$U \frac{dU}{dx} = 1 + \frac{We \varepsilon^2}{2} \frac{d}{dx} \left[ F \frac{d^2 H}{dx^2} \right] \tag{4.14}$$

dove  $U$  sta ad indicare la componente adimensionale all'ordine zero dello sviluppo (3.11) della velocità longitudinale. Inoltre, nella (4.14)  $We = \sigma/\rho U_{0_i}^2 H_i$

è il numero di Weber<sup>2</sup> del flusso all'ingresso dello slot, mentre  $F$  in termini di variabili adimensionali è espresso come

$$F = \left[ 1 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2}. \quad (4.15)$$

#### 4.4.1 Approssimazione *slender* della lamina

La forma delle equazioni adimensionali (4.13-4.14) suggerisce, alternativamente all'integrazione diretta, l'utilizzo di un approccio perturbativo nel piccolo parametro  $\varepsilon^2$ , che può essere sviluppato in modo da ottenere soluzioni analitiche ai vari ordini che descrivono l'evoluzione stazionaria di lamine sottili<sup>3</sup>.

Assumendo un'espansione in serie di potenze nel piccolo parametro  $\varepsilon^2$  per le variabili del flusso:

$$\begin{aligned} U &= U_0^\varepsilon + \varepsilon^2 U_1^\varepsilon + \varepsilon^4 U_2^\varepsilon + \dots \\ H &= H_0^\varepsilon + \varepsilon^2 H_1^\varepsilon + \varepsilon^4 H_2^\varepsilon + \dots \end{aligned}$$

è possibile ottenere, a cascata, sistemi di equazioni di governo ai differenti ordini raggruppando i termini nella stessa potenza di  $\varepsilon^2$ . Sostituendo le espansioni, arrestate all'ordine  $\varepsilon^2$ , nelle (4.13-4.14) ed osservato che per piccoli  $\varepsilon^2$  vale la relazione (per generici parametri  $x, \alpha$ )

$$(1 + \varepsilon^2 x)^\alpha \approx 1 + \alpha \varepsilon^2 x + \dots O(\varepsilon^4)$$

si ottiene il seguente sistema di equazioni (fino all'ordine  $\varepsilon^2$  dello sviluppo):

$$U_0^\varepsilon H_0^\varepsilon + \varepsilon^2 (U_0^\varepsilon H_1^\varepsilon + U_1^\varepsilon H_0^\varepsilon) + \dots O(\varepsilon^4) = 1$$

$$U_0^\varepsilon \frac{dU_0^\varepsilon}{dx} + \varepsilon^2 \left( U_1^\varepsilon \frac{dU_0^\varepsilon}{dx} + U_0^\varepsilon \frac{dU_1^\varepsilon}{dx} \right) + \dots O(\varepsilon^4) = 1 + \frac{\varepsilon^2 We}{2} \frac{d^3 H_0^\varepsilon}{dx^3} + \dots O(\varepsilon^4)$$

da cui all'ordine di approssimazione più basso risulta:

$$\begin{cases} U_0^\varepsilon H_0^\varepsilon = 1 \\ U_0^\varepsilon \frac{dU_0^\varepsilon}{dx} = 1 \end{cases} \quad (4.16)$$

<sup>2</sup>La presente definizione del numero di Weber differisce dalla definizione classica che considera il rapporto tra il termine inerziale rispetto al contributo di tensione superficiale. La definizione inversa qui adottata consente di escludere agevolmente il contributo della tensione superficiale semplicemente ponendo  $We = 0$  nelle equazioni di governo, ed è consistente con quella adottata in [39].

<sup>3</sup>La lamina sarà considerata *slender* per  $\varepsilon^2 \ll 1$ .

che è la forma adimensionale del sistema (4.9) per  $\sigma = 0$ . Dunque la (4.16) suggerisce che la soluzione *torricelliana* di caduta libera, che si è visto essere una soluzione “esatta” del presente modello nel caso di assenza di tensione superficiale, risulta anche essere la soluzione all’ordine più basso in un approccio perturbativo nel piccolo parametro  $\varepsilon^2$ ; ovvero, in altre parole, è la soluzione asintotica valida per lamine *slender*.

Allo stesso modo, considerando i termini di ordine  $\varepsilon^2$  nell’espansione di  $U$  e  $H$  si ottiene il sistema al primo ordine seguente:

$$\begin{cases} U_0^\varepsilon H_1^\varepsilon + U_1^\varepsilon H_0^\varepsilon = 0 \\ U_1^\varepsilon \frac{dU_0^\varepsilon}{dx} + U_0^\varepsilon \frac{dU_1^\varepsilon}{dx} = \frac{We}{2} \frac{d^3 H_0^\varepsilon}{dx^3} \end{cases} \quad (4.17)$$

dove ora  $U_0^\varepsilon$  e  $H_0^\varepsilon$  sono funzioni note, dalla soluzione del problema all’ordine zero (4.16), di  $x$ :

$$U_0^\varepsilon = \sqrt{1 + 2x} \quad (4.18)$$

$$H_0^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + 2x}}. \quad (4.19)$$

Sostituendo le (4.18) e (4.19) nella seconda del sistema (4.17) si ottiene la seguente equazione differenziale ordinaria di I° ordine, lineare e non omogenea

$$(1 + 2x) \frac{dU_1^\varepsilon}{dx} + U_1^\varepsilon = -\frac{15}{2} We (1 + 2x)^{-3} \quad (4.20)$$

che integrata analiticamente con metodi classici<sup>4</sup> ammette la soluzione

$$U_1^\varepsilon = \frac{3 We}{2 U_0^{\varepsilon 6}} - \frac{3 We}{2 U_0^\varepsilon} \quad (4.21)$$

che rappresenta quindi la correzione al primo ordine per la velocità  $U$ . La corrispondente correzione per lo spessore  $H$  della lamina si ottiene sostituendo la (4.21) nella prima del sistema (4.17), ottenendo

$$H_1^\varepsilon = -\frac{3 We}{2 U_0^{\varepsilon 8}} + \frac{3 We}{2 U_0^{\varepsilon 3}}. \quad (4.22)$$

Le (4.21) e (4.22) sono consistenti con le (13c) e (13e) in [39] (riderivate nell’appendice A del presente lavoro di tesi), che nella notazione presente si

<sup>4</sup>La procedura standard per ottenere l’integrale generale della (4.20) è ampiamente discussa in [4].

riscrivono:

$$H \sim \frac{1}{U_0^\varepsilon} + \varepsilon^2 \left( \frac{5}{24U_0^{\varepsilon 7}} - \frac{3We}{2U_0^{\varepsilon 8}} - \frac{5 - 36We}{24U_0^{\varepsilon 3}} \right) + O(\varepsilon^4) \quad (4.23)$$

$$U \sim U_0^\varepsilon + \varepsilon^2 \left( \frac{y^2}{2U_0^{\varepsilon 3}} + \frac{3We}{2U_0^{\varepsilon 6}} - \frac{1}{4U_0^{\varepsilon 5}} + \frac{5 - 36We}{24U_0^\varepsilon} \right) + O(\varepsilon^4). \quad (4.24)$$

Un confronto della (4.24) con la corrispondente espressione per la velocità  $U$ , eq. (4.21), immediatamente suggerisce che la soluzione generale ricavata in [39] include ulteriori termini che non dipendono dal numero di Weber. Tali contributi derivano dalle ipotesi più generali sulle quali è stato sviluppato il modello in [39], includenti sia la dipendenza dalla coordinata laterale delle variabili del flusso sia la curvatura delle linee di corrente dovuta alla contrazione subita dalla lamina per effetto del campo gravitazionale. In particolare, il termine  $y^2/2U_0^{\varepsilon 3}$  nella (4.24) ora scompare per l'indipendenza delle variabili del flusso dalla direzione laterale  $y$  conseguente all'espansione in coordinata (3.11) qui adottata. Per la stessa ragione, i termini  $-1/4U_0^{\varepsilon 5}$  e  $5/24U_0^\varepsilon$ , legati alla curvatura delle linee di corrente nella lamina, non possono generarsi nel presente modello che, sebbene includa gli effetti di tensione superficiale, assume un profilo uniforme (*plug-type*) in  $y$  per le variabili del flusso ovvero, in altre parole, linee di corrente dritte.

#### 4.4.2 Approssimazione a piccoli numeri di Weber

Ulteriori soluzioni analitiche, ai diversi ordini, che approssimano la soluzione stazionaria delle equazioni del modello possono essere ottenute, analogamente, assumendo un'espansione in serie di potenze delle variabili del flusso nel "piccolo" parametro  $We$ :

$$\begin{aligned} U &= U_0^w + WeU_1^w + We^2U_2^w + \dots O(We^3) \\ H &= H_0^w + WeH_1^w + We^2H_2^w + \dots O(We^3) \end{aligned}$$

che permette di nuovo di generare una successione di sistemi di equazioni di governo ai differenti ordini in  $We$  (assumendo questa volta  $\varepsilon^2$  come parametro libero). Procedendo analogamente a quanto fatto in precedenza il sistema di equazioni fino al primo ordine in  $We$  risulta ora essere:

$$U_0^w H_0^w + We(U_0^w H_1^w + U_1^w H_0^w) + \dots O(We^2) = 1$$

$$\begin{aligned} U_0^w \frac{dU_0^w}{dx} + We \left( U_1^w \frac{dU_0^w}{dx} + U_0^w \frac{dU_1^w}{dx} \right) + \dots O(We^2) &= 1 + \dots \\ \dots + \frac{\varepsilon^2 We}{2} \frac{d}{dx} \left[ F_0 \frac{d^2 H_0^w}{dx^2} \right] + \dots O(We^2) & \end{aligned}$$

con  $F_0 = [1 + 0.25\varepsilon^2 (dH_0^w/dx)^2]^{-3/2}$ . Si ritrova pertanto che la soluzione all'ordine più basso è ancora la soluzione *torricelliana* di caduta libera

$$\begin{cases} U_0^w H_0^w = 1 \\ U_0^w \frac{dU_0^w}{dx} = 1 \end{cases} \quad (4.25)$$

mentre al primo ordine si ottiene

$$\begin{cases} U_1^w H_0^w + U_0^w H_1^w = 0 \\ U_1^w \frac{dU_0^w}{dx} + U_0^w \frac{dU_1^w}{dx} = \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{d}{dx} \left[ \frac{d^2 H_0^w}{dx^2} \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \left( \frac{dH_0^w}{dx} \right)^2 \right)^{-3/2} \right] \end{cases} \quad (4.26)$$

dove  $U_0^w$  e  $H_0^w$  sono nuovamente date dalle (4.18) e (4.19). Dal momento che  $U_0^w$  e  $H_0^w$  sono funzioni note in un problema al primo ordine, per il sistema (4.25) la q.d.m. in (4.26) si può riscrivere nel seguente modo:

$$\frac{dU_1^w}{dx} + \frac{U_1^w}{U_0^{w2}} = \frac{1}{U_0^w} \frac{dG}{dx}$$

dove

$$G = \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{1}{U_0^{w6}} \right)^{-3/2} \frac{3}{U_0^{w5}} \right]$$

che integrata analiticamente fornisce la seguente soluzione per  $U_1$ :

$$U_1^w = \frac{3\varepsilon^2}{2U_0} \left[ \frac{1}{U_0^{w5}} \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{1}{U_0^{w6}} \right)^{-3/2} - \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \right)^{-3/2} \right] \quad (4.27)$$

da cui, per la continuità, si ottiene la corrispondente espressione per  $H_1$ :

$$H_1^w = \frac{3\varepsilon^2}{2U_0^3} \left[ \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \right)^{-3/2} - \frac{1}{U_0^{w5}} \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{1}{U_0^{w6}} \right)^{-3/2} \right]. \quad (4.28)$$

Le (4.27) e (4.28) rappresentano la correzione alla soluzione *torricelliana* nel caso in cui sia piccolo il contributo dovuto alla tensione superficiale. Si osserva inoltre che in questo caso la soluzione di *free-fall* è proprio la soluzione esatta già ottenuta, in forma dimensionale, dal sistema (4.9) per  $\sigma = 0$ .

## 4.5 Approccio numerico e risultati

Le equazioni (4.13-4.14) governano l'evoluzione stazionaria di una lamina di liquido, sotto le ipotesi fatte per il modello, nel caso generale in cui i



parametri  $We$  e  $\varepsilon$  non siano necessariamente piccoli<sup>5</sup>. Dal momento che la velocità del flusso  $U$ , per la continuità (4.13), è in relazione inversa con lo spessore  $H$  della lamina, la (4.14) può essere riformulata in termini della sola variabile  $H(x)$ , ovvero

$$\frac{1}{H^3} \frac{dH}{dx} + \frac{We\varepsilon^2}{2} \frac{d}{dx} \left[ F \frac{d^2 H}{dx^2} \right] + 1 = 0. \quad (4.29)$$

Questa è un'equazione differenziale ordinaria non lineare del terzo ordine che necessita dell'assegnazione di tre condizioni al contorno per essere risolta numericamente. Per l'integrazione numerica la (4.29) necessita di essere riformulata in termini di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, come segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dH}{dx} = t \\ \frac{dt}{dx} = s \\ \frac{ds}{dx} = \frac{3\varepsilon^2 t s^2}{4 + \varepsilon^2 t^2} - \frac{2}{We\varepsilon^2} \left( 1 + \frac{t}{H^3} \right) \left( 1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 t^2 \right)^{3/2}. \end{array} \right. \quad (4.30)$$

All'ingresso del dominio computazionale lo spessore della lamina è fissato dalla condizione  $H(0) = 1$ , conseguente alla scala di riferimento adottata. Le ulteriori condizioni da dare per la chiusura del problema non possono essere imposte all'ingresso, dal momento che non è nota *a priori* la curvatura che assume la lamina di liquido appena lascia l'orifizio dal quale si genera<sup>6</sup>. A tal riguardo basti osservare che un'interpretazione fisica della (4.14) permette di individuare la pressione adimensionale nella lamina come

$$P = -\frac{We\varepsilon^2}{2} \left( F \frac{d^2 H}{dx^2} \right) \quad (4.31)$$

dove  $F$  è, al solito, dato dalla (4.15). Pertanto, la conoscenza di pendenza e curvatura dello spessore  $H$  in  $x = 0$  implicherebbe, per la (4.31), specificare completamente il valore della pressione nel flusso all'ingresso dello slot che, al contrario, non può essere nota in partenza risultando dall'equilibrio tra

<sup>5</sup>Naturalmente resta inteso che il parametro  $\varepsilon$  non può essere arbitrariamente grande dovendo garantire comunque la condizione di piccolo spessore della lamina alla base dello sviluppo in coordinate (3.11) per le variabili del flusso.

<sup>6</sup>In buona sostanza è noto solo il valore di  $H(x)$  all'ingresso ma non quello delle sue derivate  $H^n(x)$  rispetto alla direzione del flusso  $x$ .

le forze di inerzia e di tensione superficiale, come fisicamente suggerito dalla (4.14) stessa.

Le due condizioni aggiuntive andranno pertanto assegnate all'*outflow* del dominio computazionale in modo tale da soddisfare il previsto comportamento asintotico per  $x \rightarrow \infty$ , dove sia  $H$  che le sue derivate si annullano. Naturalmente, la necessità di dover troncare il dominio computazionale a valori finiti di  $L^7$  implica, da un punto di vista numerico, che il dominio computazionale debba essere sufficientemente grande da garantire che l'*outlet* stesso si trovi ad una stazione finita  $x_f$ , nella direzione del flusso, tale da generare risultati indipendenti dall'estensione stessa del dominio, affinché le condizioni al contorno asintotiche risultino correttamente assegnate. L'individuazione della lunghezza fisica della lamina, necessaria ad una corretta assegnazione delle BCs di *outflow*, va determinata assegnando  $\varepsilon$  e variando corrispondentemente  $L$  fino alla convergenza della soluzione, valutata su parametri globali della lamina. Una prima naturale scelta della condizione da imporre in uscita è quella di asintotica evanescenza per le derivate di  $H$  ( $H' = H'' = 0$ ). Tale condizione, tuttavia, genera soluzioni non fisiche per valori non sufficientemente grandi di  $L$  ed una lenta convergenza al crescere di  $L$  stesso. Al contrario, una diversa scelta delle BCs di *outflow*, che tenga conto del comportamento asintotico di  $H'$  e  $H''$  per  $x \gg 1$ , permette di aumentare la *slenderness* geometrica  $\varepsilon/L$  della lamina, migliorando al contempo la convergenza della soluzione al crescere di  $L$ . In tal senso, si osservi che gli effetti dell'azione delle forze di tensione superficiale sono confinati nelle vicinanze dell'orifizio di uscita da cui si forma la lamina (dove le forze gravitazionali impongono la maggiore contrazione al flusso uniformemente accelerato) mentre, al crescere di  $x$ , la curvatura della lamina si riduce velocemente a valori per i quali le forze di tensione superficiali sono trascurabili, assumendo una configurazione sempre più vicina a quella di caduta libera *torricelliana*. In altre parole, la lamina è essenzialmente in *free-fall* e le correzioni di curvatura, legate al valore finito del numero di Weber, sono confinate nella regione iniziale, prossima allo slot di ingresso. Di conseguenza, BCs di uscita equivalenti al corrispondente valore di caduta libera dato dalle (4.10-4.11) permette una più fisica assegnazione delle condizioni di *far-field* in un intervallo più ampio di valori della *slenderness* geometrica, migliorando notevolmente la convergenza della soluzione al crescere di  $L$ . In conclusione, quindi, le condizioni al

---

<sup>7</sup>Si ricorda che, sulla base dell'adimensionalizzazione adottata, la lunghezza adimensionale del dominio computazionale è espressa in unità di lunghezza della scala lenta gravitazionale  $L_r = U_i^2/g$ . Pertanto  $L$  misura l'entità degli effetti gravitazionali ovvero, in altre parole, la velocità con cui la lamina effluisce dallo slot di ingresso.

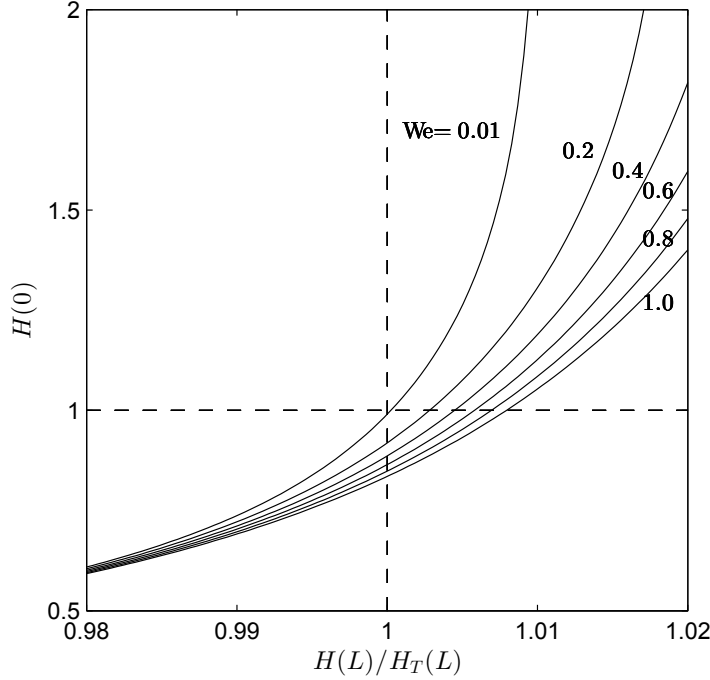


Figura 4.2: Valori di  $H(0)$  in funzione del valore di tentativo  $H(L)$  per diversi numeri di  $We$ .  $\varepsilon^2 = 0.25$ ,  $L = 20$

contorno da assegnare per la chiusura del sistema (4.30) sono:

$$H(0) = 1, \quad H'(L) = H'_T(L), \quad H''(L) = H''_T(L), \quad (4.32)$$

dove il pedice T indica la soluzione *torricelliana*  $H_T(x) = (1 + 2x)^{-1/2}$ .

Il sistema (4.30), insieme alle BCs (4.32), costituisce un problema non lineare ai valori al contorno che può essere integrato con diverse tecniche numeriche. Nel contesto del presente lavoro, la soluzione stazionaria della (4.29) è stata ottenuta mediante l'implementazione di due differenti procedure numeriche, così da ottenere una mutua validazione dei risultati conseguiti. In un primo momento il sistema (4.30) è stato integrato implementando una classica procedura di *shooting*, che consiste nell'imporre un valore di tentativo per  $H(L)$ , insieme con i due valori di *free-fall*  $H'(L)$  e  $H''(L)$  dati dalla (4.32). Successivamente la procedura di integrazione è iterata correggendo, a ciascuna iterazione, il valore di  $H(L)$  in modo tale da ottenere, integrando il sistema *backward* nello spazio, il valore esatto  $H(0) = 1$  in ingresso. Attraverso l'utilizzo di una procedura di bisezione per la correzione del valore

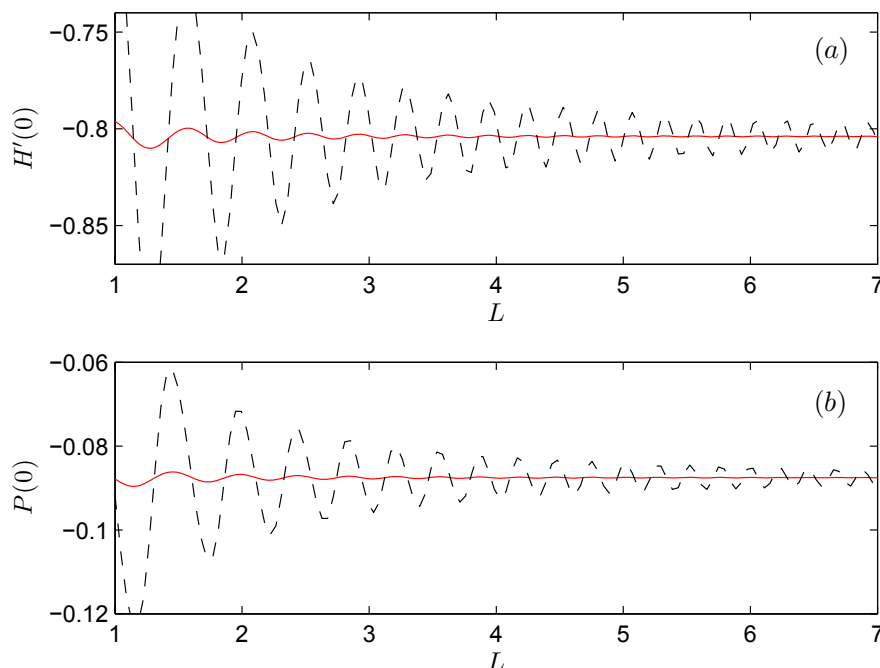


Figura 4.3: Storia di convergenza per  $\varepsilon^2 = 0.25$ ,  $We = 0.5$ . Le linee continue corrispondono alle BCs assegnate in Eq. (4.32), le linee tratteggiate alla condizione di evanescenza asintotica  $H'(L) = H''(L) = 0$ .

di tentativo si ottiene che un valore tipico di 30 iterazioni è necessario per ottenere un errore assoluto dell'ordine di  $10^{-10}$  sulla soluzione esatta in  $H(0)$ , assumendo come condizione di tentativo iniziale il valore di *free-fall*  $H_T(L)$ . Ottenuta la soluzione ad un fissato  $L$ , mediante una procedura di *marching* in  $L$ , l'iterazione è ripetuta ad un nuovo  $L$  fino alla convergenza della nuova soluzione.

In Fig. 4.2 è rappresentato un insieme di curve caratteristiche (su cui è stata applicata la procedura di bisezione) che mostra il valore di  $H(0)$  in funzione del valore di tentativo  $H(L)$ . Le curve sono state calcolate integrando il sistema (4.30) (con condizioni asintotiche *torricelliane*) a partire da differenti condizioni iniziali per  $H(L)$  e salvando il corrispondente valore  $H(0)$ , per una assegnata *slenderness* geometrica  $\varepsilon/L = 0.025$  e per diversi numeri di Weber. Per un assegnato  $We$  la procedura di bisezione inizia a partire dall'intersezione tra la corrispondente curva e l'asse verticale ad  $H(L)/H_T(L) = 1$  e prosegue fino alla determinazione del valore esatto di

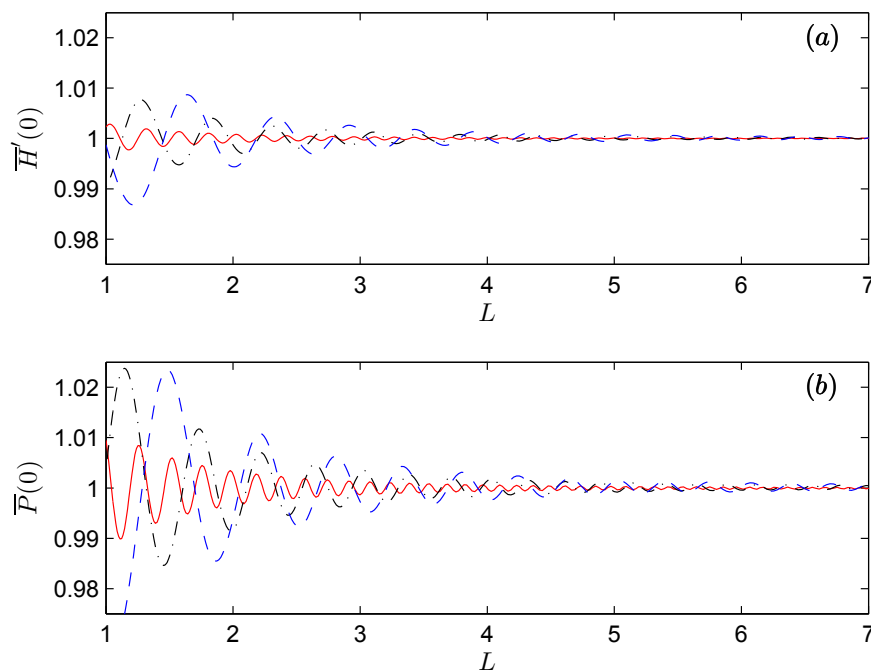


Figura 4.4: Derivata normalizzata dello spessore  $\bar{H}'$ , (a), e pressione normalizzata  $\bar{P}$ , (b), in  $x = 0$  per diversi valori della *slenderness* geometrica  $\varepsilon/L$  con  $\varepsilon^2 = 0.25$ , ottenuti con BCs “torricelliane” ad  $x = L$ .  $We = 0.1$  (linea continua)  $We = 0.5$  (linea a tratto-punto),  $We = 1$  (linea tratteggiata).

$H(L)$ , dato dall’intersezione della curva con l’asse orizzontale passante per  $H(0) = 1$ .

Allo scopo di fornire un confronto qualitativo sulla differente efficacia delle condizioni di *free-fall* in uscita rispetto ai valori asintotici, in Fig. 4.3 è riportata la storia di convergenza al crescere di  $L$  per un caso tipico corrispondente a  $\varepsilon^2 = 0.25$  e  $We = 0.5$ . I parametri globali scelti per lo studio di convergenza sono i valori di  $H'$  e  $P$  ad  $x = 0$ . La pressione  $P$  è ricostruita dalla (4.31) a partire dal valore calcolato di  $H$ . È possibile osservare come i valori ad  $x = 0$  di entrambi i parametri globali investigati siano fortemente sensibili al valore di  $L$  in corrispondenza del quale sono imposte le BCs di uscita, almeno per valori bassi della *slenderness* geometrica  $\varepsilon/L$ . Tuttavia appare comunque evidente che l’imposizione delle condizioni di uscita (4.32) migliora notevolmente la convergenza della soluzione, al crescere di  $L$ , già per valori intermedi della *slenderness* geometrica.

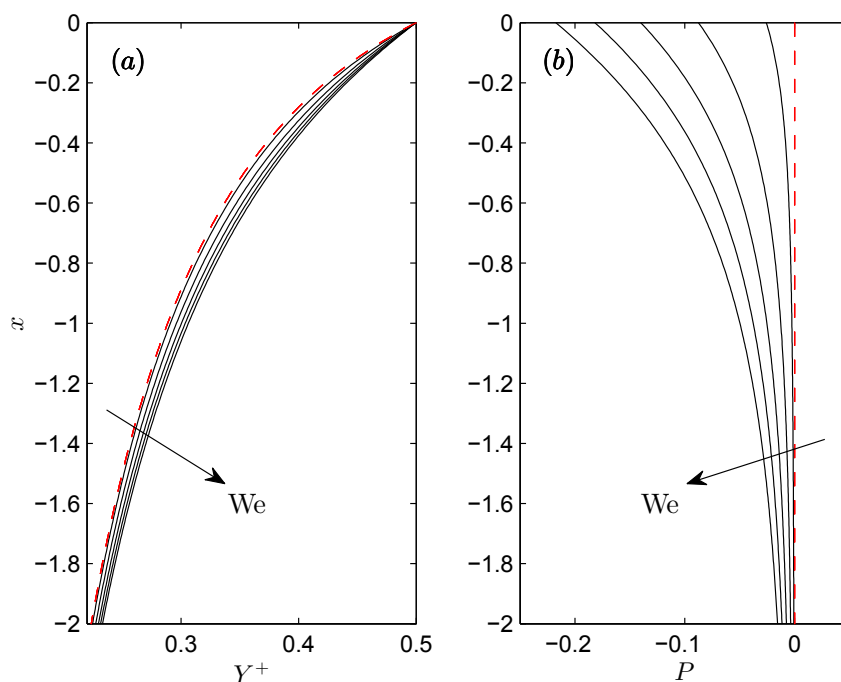


Figura 4.5: Profilo di interfaccia (a) e distribuzione di pressione longitudinale (b) per  $\varepsilon^2 = 0.25$  e  $We = 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2$ . La linea rossa tratteggiata rappresenta la soluzione di *free-fall*.

Per lo stesso valore del parametro di *slenderness*  $\varepsilon$ , in Fig. 4.4 è riportato un confronto delle storie di convergenza, ad  $x = 0$ , ottenute per differenti valori del numero di Weber per i medesimi parametri globali di Fig. 4.3. Al fine di un miglior confronto tra le curve corrispondenti ai diversi  $We$ , i parametri stessi sono normalizzati rispetto ai rispettivi valori asintotici,  $\overline{H}'(0)$  e  $\overline{P}(0)$ , che essi assumono a grandi  $x$ . I risultati confermano l'indipendenza dal valore del Weber assegnato, della sensibilità della soluzione rispetto al valore della *slenderness* geometrica a cui le condizioni (4.32) sono imposte ed, al contempo, mostrano che la convergenza ai valori asintotici è sempre non monotona. D'altra parte l'ampiezza delle oscillazioni dipende dal valore del numero di Weber ed aumenta a valori più grandi di  $We$ . Un simile comportamento è riscontrabile anche variando, inversamente, il parametro  $\varepsilon$  a  $We$  fissato ed è in qualche modo un risultato atteso, dal momento che la soluzione di caduta libera *torricelliana* è, come visto, la soluzione all'ordine zero in entrambi gli sviluppi asintotici nei piccoli parametri  $We$  o  $\varepsilon$ , rispetti-

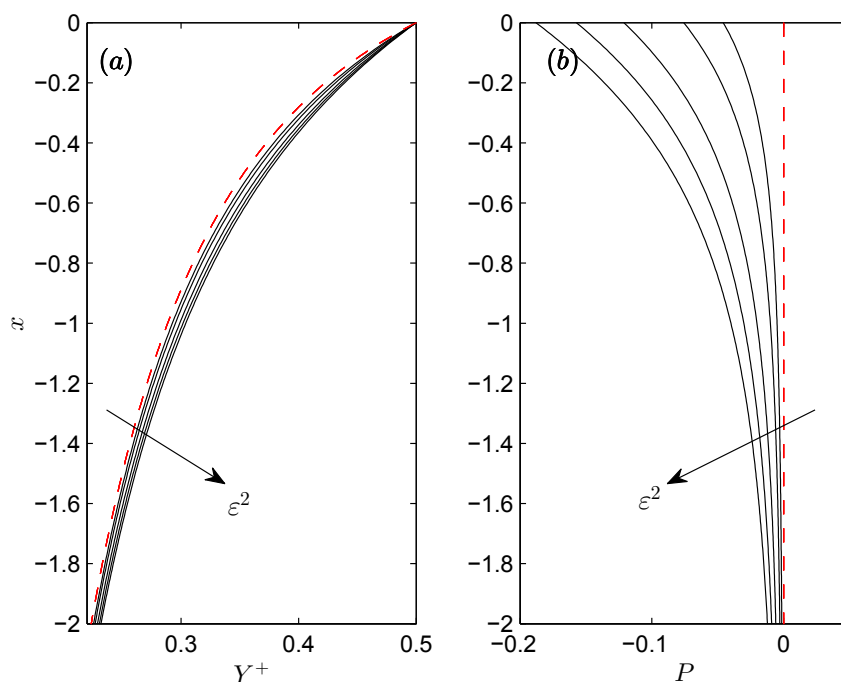


Figura 4.6: Profilo di interfaccia **(a)** e distribuzione di pressione longitudinale **(b)** per  $We = 1$  e  $\varepsilon^2 = 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ . La linea rossa tratteggiata rappresenta la soluzione di *free-fall*.

vamente. Dunque le BCs di *free-fall* in uscita risultano sempre più accurate al diminuire di questi due parametri. Per questo caso l'ampiezza relativa delle oscillazioni, valutata sui parametri globali qui mostrati, si riduce a valori dell'ordine di  $10^{-4}$  per  $L = 20$ , con le condizioni di uscita (4.32) imposte. Più in generale, si è riscontrato che un valore della *slenderness* geometrica  $\varepsilon/L = 0.025$  produce uno smorzamento delle oscillazioni almeno dell'ordine di  $10^{-4}$  per tutti i casi investigati nello spazio dei parametri  $We, \varepsilon, L$ . Si è dunque convenuto, per lo studio parametrico di configurazioni non *slender*, di adottare tale valore come limite superiore per la *slenderness* geometrica per tutte le simulazioni numeriche della (4.29), condotte con l'imposizione delle condizioni al contorno in *outflow* (4.32).

L'analisi di configurazioni non *slender* della lamina è stata dunque condotta analizzando, in un ampio spettro di parametri  $We, \varepsilon, L$  (nel solo limite di  $\varepsilon/L \leq 0.025$ ), sia la pendenza dei profili di interfaccia che la distribuzione di pressione all'interno della lamina di liquido. Alcune configurazioni tipiche

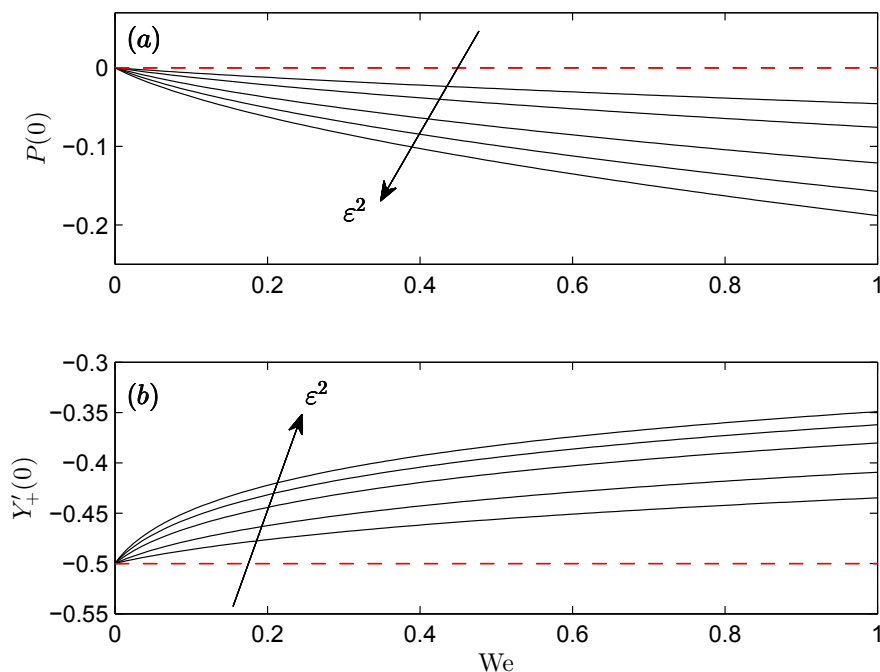


Figura 4.7: Variazione con  $We$  di pressione  $P$  (a) e  $dY_+/dx$  (b) all'ingresso  $x = 0$  per  $\varepsilon^2 = 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ . La linea rossa tratteggiata rappresenta la soluzione di *free-fall*.

sono rappresentate in Fig. 4.5, per differenti valori di Weber a  $\varepsilon^2$  fissato, e in Fig. 4.6, per differenti valori di  $\varepsilon^2$  a fissato  $We$ , insieme con la soluzione analitica *torricelliana*. Come atteso, sia la distribuzione di pressione nella lamina che il profilo di interfaccia convergono alle corrispondenti soluzioni di *free-fall* al diminuire del valore della grandezza,  $We$  o  $\varepsilon^2$ , parametrizzata. In particolare, l'effetto della tensione superficiale sulla curvatura dell'interfaccia è sempre tale da incrementare lo spessore locale della lamina, ovvero di ridurre la velocità locale del flusso rispetto alla corrispondente configurazione *torricelliana*. L'azione della tensione superficiale, in altre parole, provoca uno stiramento dell'interfaccia della lamina che riduce la porzione di superficie di interfaccia della lamina tra l'*inlet* ed una generica stazione  $x$ , rispetto alla corrispondente configurazione di caduta libera in assenza di tensione superficiale. Al tempo stesso, la pressione nella lamina di liquido risulta sempre ridotta, per  $We \neq 0$ , rispetto alla soluzione isobara di *free-fall* per effetto dell'equilibrio delle forze all'interfaccia liquido-gas dato dalla (3.10).



L'effetto della tensione sulla curvatura dell'interfaccia può essere diversamente osservato valutando localmente il comportamento delle variabili per diversi valori dei parametri del flusso. In tal senso, si riporta un'analisi parametrica della variazione di pendenza e pressione della lamina in corrispondenza della sezione di ingresso al variare della tensione superficiale e/o della *slenderness* geometrica. La variazione di  $We$  per assegnati  $\varepsilon^2$ , riportata in Fig. 4.7, mostra che l'azione della tensione superficiale sui valori di  $P$  e  $Y'_+$  all'ingresso del flusso è sempre più pronunciata al crescere di  $\varepsilon^2$ . Inoltre, la pendenza di tali curve non è nulla in corrispondenza di  $We = 0$ , chiaramente suggerendo che per lamine non *slender* anche un piccolo valore della tensione superficiale produce significativi cambiamenti nel comportamento globale della lamina, rispetto alla soluzione di caduta libera *torricelliana*. Gli effetti di una variazione di  $\varepsilon^2$  per valori selezionati di  $We$ , riportata in Fig. 4.8, nuovamente mostrano che i cambiamenti nelle proprietà globali della lamina, rispetto alla soluzione di *free-fall*, crescono monotonicamente con  $\varepsilon^2$ , mostrandosi sempre più pronunciati all'aumentare della tensione superficiale. Anche questo è in qualche modo un risultato atteso dal momento che la diminuzione della *slenderness* geometrica comporta una riduzione della curvatura e, conseguentemente, una minore influenza della tensione di superficie.

I risultati ottenuti dall'integrazione numerica della (4.29) mostrano che, per lamine non *slender*, la soluzione stazionaria dell'evoluzione di una lamina liquida in gravità si discosta dalla legge di caduta libera in maniera sempre più marcata al crescere dei parametri  $We$  e  $\varepsilon^2$ . Dal momento che la soluzione *torricelliana* è soluzione analitica all'ordine zero della (4.29) in entrambi i limiti asintotici  $(We, \varepsilon^2) \rightarrow 0$ , è lecito chiedersi entro quale limite di variabilità dei parametri  $We, \varepsilon^2$  le correzioni analitiche (4.22) e (4.28) all'ordine superiore siano in grado di approssimare più accuratamente, rispetto alla (4.16) e/o (4.25), la soluzione esatta. All'uopo, un confronto tra la variazione numerica (con  $We$  e  $\varepsilon^2$ , rispettivamente), data dall'integrazione della (4.30), della pressione nella lamina all'ingresso del dominio computazionale e la corrispondente predizione data dalle formule asintotiche ottenute ai diversi ordini di accuratezza è mostrata in Fig. 4.9, per  $\varepsilon^2$  fissati, ed in Fig. 4.10, per assegnati valori di  $We$ . In tutti i casi esaminati la pressione  $P$  risulta dalla (4.31), con le derivate di  $H$  ottenute dalla soluzione numerica del sistema (4.30) o dalla derivazione analitica delle soluzioni ai vari ordini nelle espansioni asintotiche in  $We$  e/o  $\varepsilon^2$ . In particolare, in Fig. 4.9 la soluzione numerica è comparata alle soluzioni approssimate ottenute assumendo una distribuzione di spessori data dalla (4.19) e da  $H = H_0^\varepsilon + \varepsilon^2 H_1^\varepsilon$  (con  $H_1^\varepsilon$  dalla (4.22)), rispettivamente; analogamente, in Fig. 4.10 le soluzioni approssimate sono relative ad una distribuzione di spessori corrispondente alla (4.19) e ad  $H = H_0^w + WeH_1^w$  (con  $H_1^w$  dalla (4.28)). È possibile osservare come l'ap-

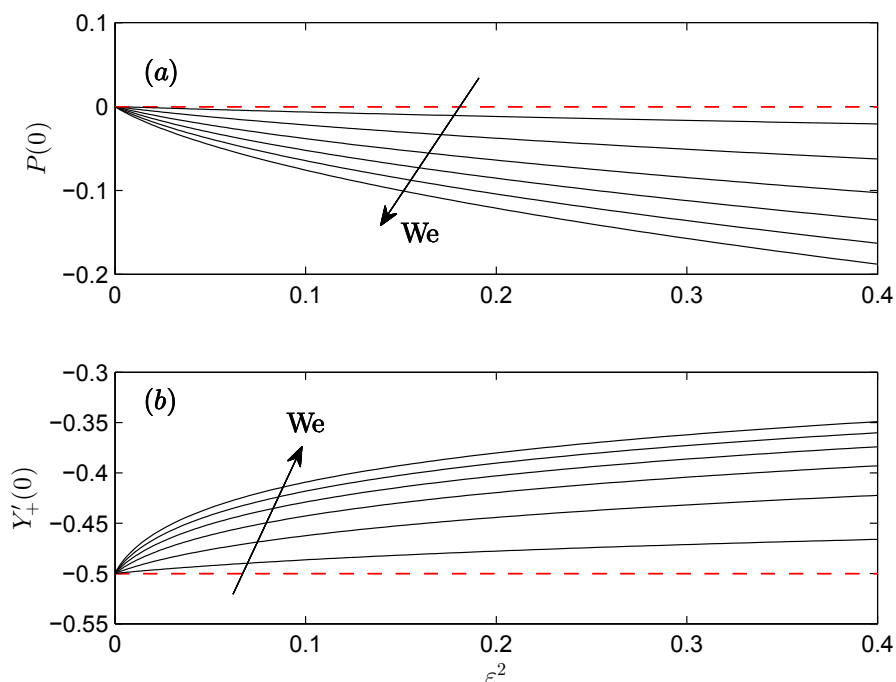


Figura 4.8: Variazione con  $\varepsilon^2$  di pressione  $P$  (a) e  $dY_+/dx$  (b) all'ingresso  $x = 0$  per  $We = 0.05, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ . La linea rossa tratteggiata rappresenta la soluzione di *free-fall*.

prossimazione di considerare una distribuzione di spessori  $H = H_0^\varepsilon + \varepsilon^2 H_1^\varepsilon$ , in Fig. 4.9, sebbene risulti più accurata di una soluzione corrispondente ad un profilo torricelliano per piccoli valori di tensione, al crescere di  $We$  rapidamente perde in accuratezza, generando risultati non fisici (pressione positiva in  $x = 0$ ) per valori di  $We$  tanto più bassi quanto maggiore è il valore di  $\varepsilon^2$  considerato. Un simile andamento è mostrato in Fig. 4.10, in cui insieme con le variazioni di  $P(0)$  con  $\varepsilon^2$  calcolate sia numericamente che analiticamente, si riporta anche la variazione di pressione con  $\varepsilon^2$  come prevista da un'espansione in termini di parametro delle equazioni del moto adimensionali (A.1), riportata in appendice. La curva relativa all'andamento di tale pressione,  $\varepsilon^2 p_1$  con  $p_1$  dato dalla (A.22), in  $x = 0$  è quasi sovrapponibile alla soluzione corrispondente ad una distribuzione *torricelliana* di spessori, a conferma di una maggiore accuratezza ottenibile, a parità di ordine di espansione, con uno sviluppo in coordinate del tipo (3.11).

In alternativa alla procedura di *shooting*, è stata implementata una ulte-

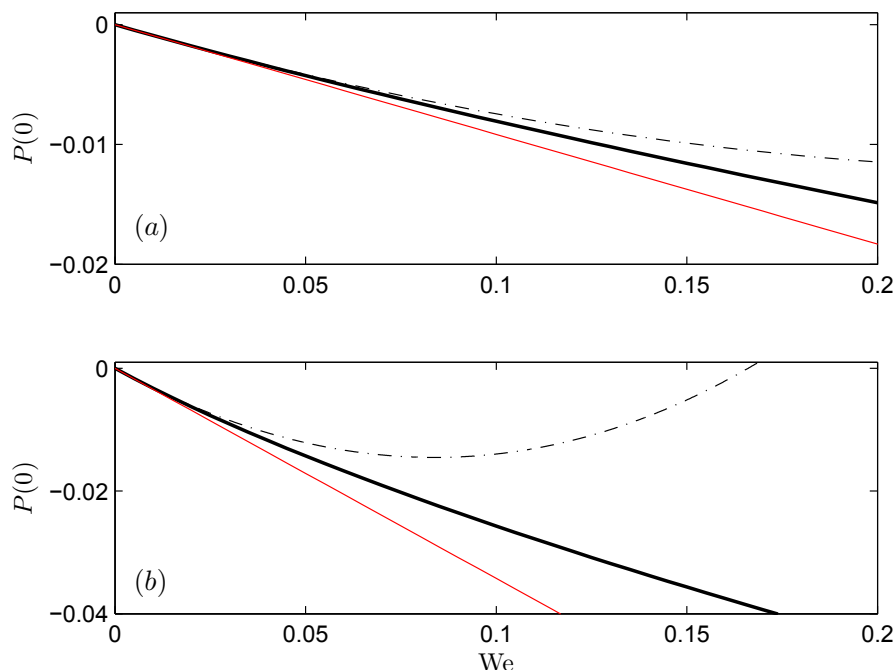


Figura 4.9: Variazione con  $We$  della pressione  $P$  in ingresso per  $\varepsilon^2 = 0.0625$ , (a) e  $\varepsilon^2 = 0.25$ , (b). La linea marcata rappresenta la soluzione numerica, la linea continua corrisponde alla soluzione asintotica all'ordine zero per  $H$ , la linea a tratto-punto corrisponde alla soluzione asintotica al primo ordine per  $H$ .

riore tecnica numerica per l'integrazione della (4.29) basata sull'utilizzo degli schemi semidiscretizzati. Introducendo un operatore temporale fittizio nella (4.29) la stessa si può riscrivere come

$$\frac{dH}{dt} + \frac{1}{H^3} \frac{dH}{dx} + \frac{We\varepsilon^2}{2} \frac{d}{dx} \left[ F \frac{d^2 H}{dx^2} \right] + 1 = 0 \quad (4.33)$$

per cui la soluzione stazionaria del modello, in configurazione simmetrica, può ottenersi come soluzione asintotica della (4.33) quando quest'ultima è integrata numericamente a partire da una assegnata soluzione iniziale di tentativo. Assumendo come condizione di tentativo iniziale la soluzione di caduta libera torricelliana  $H_T(x) = (1 + 2x)^{-1/2}$ , si ottiene che un tempo adimensionale<sup>8</sup>  $t \approx 40$  è sufficiente, per tutti i casi indagati, ad ottenere un errore assoluto

<sup>8</sup>Per l'adimensionalizzazione adottata il tempo di riferimento è dato da  $t_r = U_0/g$ .

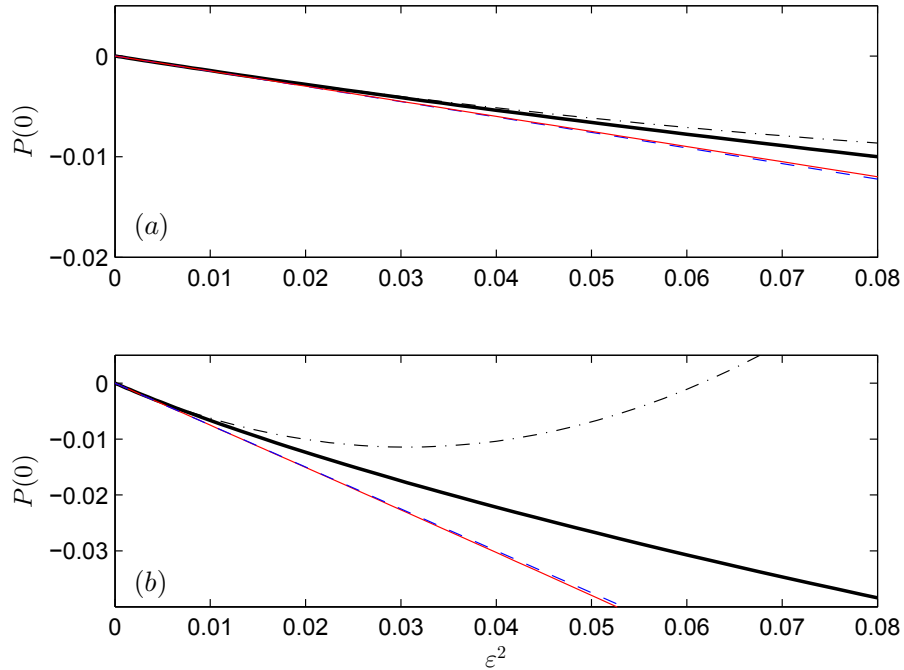


Figura 4.10: Variazione con  $\varepsilon^2$  della pressione  $P$  in ingresso per  $w = 0.1$ , **(a)** e  $w = 0.5$ , **(b)**. La linea marcata rappresenta la soluzione numerica, la linea continua corrisponde alla soluzione asintotica all'ordine zero per  $H$ , la linea a tratto-punto corrisponde alla soluzione asintotica al primo ordine per  $H$ . La linea tratteggiata (quasi sovrapposta alla linea continua) rappresenta la pressione  $\varepsilon^2 p_1$ , con  $p_1$  data dalla (A.22) ricavata in appendice.

dell'ordine di  $10^{-12}$  sulla soluzione esatta. L'integrazione temporale è stata condotta mediante l'utilizzo di un metodo implicito a passo variabile, necessario per le caratteristiche di *stiffness* della ODE (4.33). Infatti, eccetto che per valori molto piccoli del prodotto  $We\varepsilon^2$ , la (4.33), quando inizializzata con la soluzione di *free-fall*, governa l'evoluzione di fenomeni caratterizzati da un transitorio molto veloce, dopo il quale il sistema si stabilizza su una soluzione che varia più lentamente nel tempo. Si è quindi optato per l'utilizzo del solver implicito ODE15s di Matlab, che permette di trattare efficientemente l'evoluzione instazionaria transitoria di problemi *stiff*.

La scelta degli schemi semidiscretizzati per l'integrazione numerica della (4.29) si è dimostrata particolarmente efficace nel ridurre l'onere computazionale necessario per la convergenza della soluzione, al contrario abbastanza

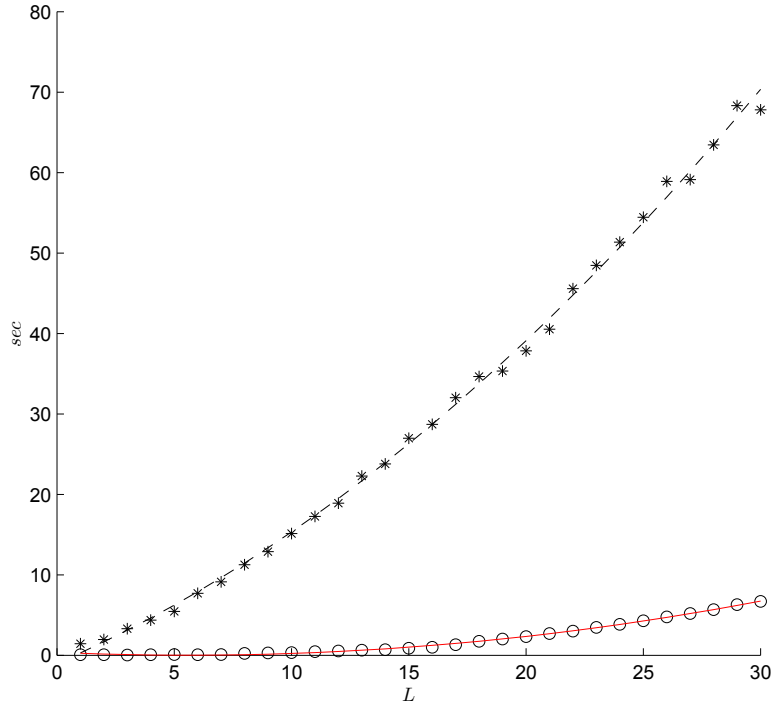


Figura 4.11: Velocità di convergenza alla soluzione esatta al variare della lunghezza adimensionale della lamina  $L$ , per  $We = 1$  e  $\varepsilon^2 = 0.25$ , ottenuta attraverso una procedura di shooting (\*) e con l'implementazione di schemi semidiscretizzati (o). Le curve tratteggiate e continue rappresentano l'interpolazione ai minimi quadrati delle rispettive soluzioni numeriche.

gravoso in una procedura iterativa di tipo *shooting*. Ciò può essere chiaramente compreso dall'andamento delle curve mostrate in Fig. 4.11. Per assegnati valori del parametro di slenderness  $\varepsilon$  e del numero di Weber, sono riportate le curve dei tempi di convergenza della soluzione al variare della lunghezza adimensionale  $L$  della lamina, così come ottenute implementando le due differenti tecniche numeriche descritte. Entrambe le procedure sono state implementate utilizzando lo stesso numero di punti di collocazione del mesh. In particolare, si è usato un numero  $N = 35$  di nodi di collocazione equispaziati per unità di lunghezza  $L$ , in modo tale che all'aumentare di  $L$  corrispondesse un infittimento relativo del dominio computazionale pari a  $N = 35 \cdot L$ . Le curve di integrazione numerica sono state interpolate ai minimi quadrati così da ottenere le leggi analitiche (valide entro il *range* di  $L$

investigato) di incremento del costo computazionale all'aumentare del numero di punti, per i due diversi metodi adottati. Si è in tal modo trovato che il metodo di shooting presenta un incremento del costo computazionale all'aumentare di  $L$  (ovvero del numero di nodi del mesh), rispetto all'integrazione temporale mediante schemi semidiscretizzati, che segue approssimativamente la legge  $\Delta t \approx 0.026 L^2 + 1.387 L - 1.361$ .

## 4.6 Conclusioni

Nel presente capitolo sono stati analizzati gli effetti della tensione superficiale sulle dinamiche di evoluzione stazionaria di una lamina di liquido in caduta per effetto della gravità, nelle ipotesi di flusso potenziale e di trascurabilità dei fenomeni di attrito con il gas esterno all'interfaccia. Attraverso una espansione in serie di Taylor nella coordinata laterale  $y$ , in termini dello spostamento dalla linea media della lamina, si è ottenuto un modello generale di equazioni di governo per le variabili (velocità longitudinale, spessore e pressione della lamina) del flusso che, all'ordine più basso dello sviluppo, risulta più accurato rispetto al comunemente usato sviluppo asintotico nel parametro di *slenderness*  $\varepsilon$ , portando in conto i termini di curvatura già all'ordine più basso dell'espansione troncata in serie di potenze. L'adozione dell'espansione in coordinate (3.11) ha abbassato l'ordine spaziale del problema assumendo una distribuzione di tipo *plug* per la velocità e pressione nella lamina. Il modello monodimensionale risultante presenta il numero di Weber  $We$  ed il rapporto di snellezza  $\varepsilon$  come unici parametri liberi. Il modello ottenuto è stato validato in un primo momento confrontando le equazioni risultanti per una configurazione non simmetrica, corrispondente ad una differenza di pressione esterna applicata ai lati della lamina, con precedenti modelli presenti in letteratura.

L'analisi della configurazione simmetrica è stata successivamente condotta nel dettaglio, ricavando un'originale ODE non lineare di governo del modello. L'equazione ottenuta costituisce un semplice modello in cui gli effetti della tensione superficiale sull'evoluzione stazionaria della lamina sono considerati attraverso l'espressione completa della sua curvatura. Soluzioni analitiche approssimate sono state inoltre ottenute attraverso lo sviluppo di due differenti approcci perturbativi validi nei limiti asintotici di evanescenza dei parametri  $We$  ed  $\varepsilon^2$ , rispettivamente. Infine, l'integrazione numerica della ODE non lineare è stata condotta implementando due differenti tecniche numeriche, discusse in dettaglio insieme alle rispettive proprietà di convergenza. I risultati ottenuti mostrano che la tensione superficiale tende a stirare l'interfaccia liquido-gas riducendo in tal modo la velocità del flusso locale rispetto alla

soluzione di caduta libera *torricelliana*, soluzione esatta della lamina in assenza di tensione superficiale. Come previsto, la lamina si assottiglia con la gravità.

# Capitolo 5

## Campo perturbato

Nel presente capitolo sarà ricavato il modello linearizzato che governa l'evoluzione instazionaria di piccoli disturbi per il modello unidimensionale considerato. Attraverso la linearizzazione del sistema di equazioni di governo (3.36) sarà possibile disaccoppiare i diversi contributi legati ai modi di oscillazione sinuosi e varicosi, ottenendo in tal modo due sistemi indipendenti di equazioni di governo dell'evoluzione instazionaria di tali differenti famiglie di disturbi. Un'analisi asintotica delle equazioni di governo sarà, inoltre, condotta attraverso un approccio perturbativo, arrestato al I° ordine, dei due parametri di governo del modello, ovvero  $We$  ed  $\varepsilon^2$ , ottenendo sistemi semplificati di equazioni di evoluzione dei disturbi, che ammettono come moto base la soluzione analitica *torricelliana* di free-fall. Saranno infine ricavati due differenti modelli che forniscono la fluttuazione del campo di pressione esterna interagente mutuamente con la lamina liquida all'interfaccia.

### 5.1 Modello unidimensionale linearizzato

In presenza di una perturbazione di piccola ampiezza all'interno del moto base è possibile sovrapporre ad esso le componenti dei piccoli disturbi. Il complessivo campo di moto perturbato assume, in tal modo, la seguente formulazione per le variabili (dimensionali) del flusso del problema in esame:

$$\begin{aligned}u_0(x, t) &= U_0(x) + u'_0(x, t) \\v_0(x, t) &= V_0(x) + v'_0(x, t) \\ \bar{y}(x, t) &= \bar{Y}(x) + \bar{y}'(x, t) \\ \tilde{y}(x, t) &= \tilde{Y}(x) + \tilde{y}'(x, t) \\ p_{\pm}^a(x, t) &= P_{\pm}^a(x) + p'_{\pm}^a(x, t)\end{aligned}\tag{5.1}$$



Queste variabili perturbanti, essendo accoppiate a quelle del moto base, saranno anch'esse soluzione delle equazioni del moto. Il sistema (3.36) viene così riscritto sostituendo in esso la nuova posizione per le variabili del flusso. Nella formulazione ottenuta andranno poi eliminate le parti già verificate, relative al moto base, ed elisi i termini non lineari di ordine superiore.

Per le configurazioni simmetriche oggetto di studio valgono, per quanto già detto, le seguenti posizioni per le variabili imperturbate:

$$\bar{P}^a = \text{cost}, \quad \tilde{P}^a = 0, \quad V_0 = 0, \quad \bar{Y} = 0$$

avendo al solito trattato simbolicamente  $P_{\pm}^a$  secondo le definizioni date in (3.4) e (3.5). Facendo delle analoghe posizioni per la (3.29) è possibile scrivere in forma compatta i termini di curvatura del sistema (3.36):

$$\tilde{f} = f_+ - f_- \quad \bar{f} = \frac{f_+ + f_-}{2}.$$

Linearizzando le suscritte espressioni sostituendovi le posizioni (5.1) e tenuto conto della (4.8), manipolando opportunamente i differenti contributi si ottengono le seguenti espressioni (dimensionali) per i contributi linearizzati della curvatura dell'interfaccia:

$$\tilde{f} = -3F^{5/3} \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{y}'}{\partial x} \quad (5.2)$$

$$\bar{f} = F - \frac{3}{4} F^{5/3} \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{y}'}{\partial x} \quad (5.3)$$

Le (5.2) e (5.3) sostituite, insieme con le (5.1), nel sistema (3.36) forniscono un sistema non lineare "ibrido" per il campo perturbato, in cui i termini associati alla curvatura sono già stati linearizzati. Dal momento che siamo interessati allo studio dell'evoluzione di piccoli disturbi la preventiva linearizzazione dei termini di curvatura non è inconsistente e consente di ottenere agevolmente il sistema di equazioni linearizzate di governo del modello perturbato. Trascurando, dunque, sia i termini non lineari di ordine superiore delle fluttuazioni delle variabili fluidodinamiche che i contributi relativi al moto medio, dopo opportune manipolazioni algebriche si giunge al seguente sistema linearizzato, in forma dimensionale, che governa l'evoluzione istazionaria di piccoli disturbi in un getto liquido piano in gravità, sotto le ipotesi

fatte per il modello:

$$\frac{\partial \tilde{y}'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U_0 \tilde{y}' + \tilde{Y} u'_0) = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \bar{y}'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \bar{y}'}{\partial x} - v'_0 = 0 \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial u'_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U_0 u'_0) - \frac{\sigma}{2\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ F \frac{\partial \tilde{y}'}{\partial x} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^a}{\partial x} = 0 \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial v'_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial v'_0}{\partial x} - \frac{2\sigma}{\rho \tilde{Y}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ F \frac{\partial \bar{y}'}{\partial x} \right] + \frac{1}{\rho \tilde{Y}} \tilde{p}^a = 0 \quad (5.7)$$

dove, al solito,  $F$  è data dalla (4.8) e  $\tilde{p}^a, \bar{p}^a$  rappresentano i contributi legati al campo di pressione esterna fluttuante, scritti ancora tenendo conto delle posizioni fatte in (3.4) e (3.5).

Il sistema linearizzato (5.4 - 5.7) presenta un disaccoppiamento delle equazioni costituenti rispetto alle variabili fluidodinamiche del flusso. In particolare, le (5.4) e (5.6) risultano mutuamente accoppiate rispetto alle variabili  $u'_0, \tilde{y}'$  mentre le (5.5) e (5.7) risultano accoppiate rispetto alle variabili  $v'_0, \bar{y}'$ . Entrambi i sistemi binari di equazioni governano l'evoluzione instazionaria di una particolare famiglia di disturbi: più specificamente, si conviene di definire disturbi *varicosi* la classe di perturbazioni che coinvolge oscillazioni della lamina di liquido prodotte dalle sole variazioni di  $u'_0, \tilde{y}'$ , ovvero velocità longitudinale e spessore, mentre disturbi *sinuosi* la famiglia di disturbi che introduce oscillazioni nella lamina solo attraverso le variazioni instazionarie  $v'_0, \bar{y}'$  della velocità laterale e della linea media. La linearizzazione ha, dunque, permesso di disaccoppiare<sup>1</sup> i contributi associati alle due differenti famiglie di disturbi, che potranno quindi essere studiate separatamente.

## 5.2 Derivazione fisica delle equazioni di governo dei disturbi sinuosi e varicosi

Analogamente a quanto fatto per la soluzione imperturbata è possibile ricavare, alternativamente, i due sistemi di equazioni di governo dei disturbi sinuosi e varicosi attraverso la semplice applicazione del bilancio delle equazioni di Eulero e delle condizioni di interfaccia linearizzate su un concio infinitesimo

<sup>1</sup>Naturalmente è implicitamente assunto che anche l'espressione esplicita dei due differenti contributi del campo di pressione esterna linearizzato presenti la medesima disaccoppiata dipendenza dalle variabili del flusso.

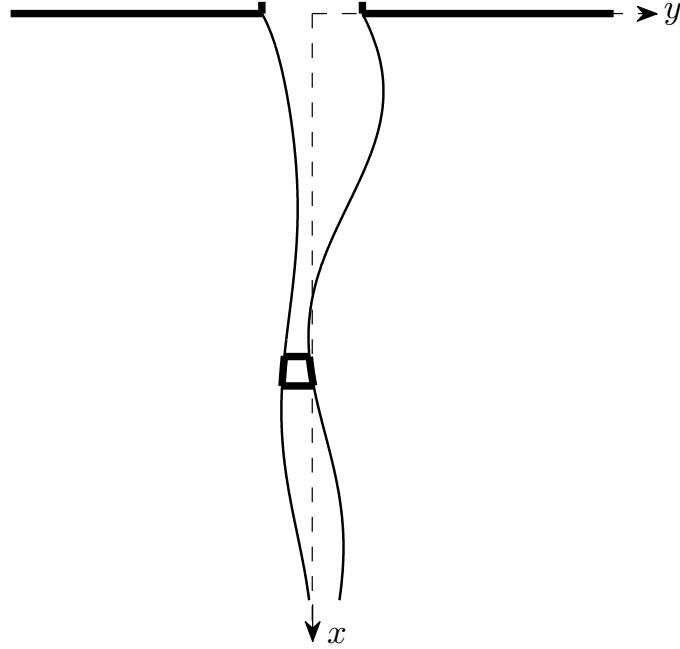


Figura 5.1: Schema di evoluzione in presenza di accoppiamento lineare dei disturbi sinuosi-varicosi.

della lamina, come schematicamente mostrato in Fig. 5.1, nella ipotesi di profilo localmente di tipo *plug* nella direzione laterale  $y$  per tutte le variabili del flusso.

Applicando la conservazione della massa in forma integrale

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

al concio infinitesimo lagrangiano, ed osservando che il flusso di massa attraverso le interfacce è nullo, si ha (con coerenza di simboli)

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{y}u) = 0$$

da cui linearizzando e trascurando i termini del moto medio, immediatamente si ricava la (5.4). Allo stesso tempo, sommando membro a membro i contributi relativi a ciascuna interfaccia nella (3.6), nelle ipotesi prima fatte

di proprietà costanti per le componenti fluttuanti di velocità nella lamina, si ottiene

$$v = \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}$$

da cui linearizzando e trascurando, al solito, il contributo del moto base segue la (5.5). Le (5.6) e (5.7) possono essere ottenute, a loro volta, integrando le (3.2) e (3.3) lungo lo spessore e linearizzando, da cui segue

$$\int_{Y_-}^{Y_+} \frac{\partial u'}{\partial t} dy + \int_{Y_-}^{Y_+} U \frac{\partial u'}{\partial x} dy + \int_{Y_-}^{Y_+} u' \frac{\partial U}{\partial x} dy = -\frac{1}{\rho} \int_{Y_-}^{Y_+} \frac{\partial p'}{\partial x} dy \quad (5.8)$$

$$\int_{Y_-}^{Y_+} \frac{\partial v'}{\partial t} dy + \int_{Y_-}^{Y_+} U \frac{\partial v'}{\partial x} dy = -\frac{1}{\rho} \int_{Y_-}^{Y_+} dp' \quad (5.9)$$

con  $Y_-, Y_+$  posizioni dell'interfaccia imperturbata. Osservando che la (5.8) governa disturbi di tipo varicoso per i quali, per ragioni di simmetria, il contributo di pressione fluttuante nel getto liquido presenta un profilo simmetrico rispetto alla linea media, l'ipotesi di proprietà costanti lungo  $y$  riduce la stessa alla classica equazione di bilancio differenziale di partenza

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}. \quad (5.10)$$

Al contrario, la (5.9) governa l'evoluzione dei disturbi sinuosi, per i quali il contributo di pressione è espresso in termini di differenziale esatto nella direzione  $y$ . Quest'ultima equazione può, dunque, risciversi come

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho \bar{Y}} (p'_+ - p'_-) \quad (5.11)$$

in cui è possibile osservare che, al contrario della  $v'$ , la pressione  $p'$  resta indeterminata nella lamina, risultando significativo il solo valore di salto alle interfacce. I contributi di pressione fluttuante nelle (5.10) e (5.11) si ottengono dalla (3.10), scritta per grandezze perturbate. Linearizzando nell'ipotesi di piccoli disturbi, e trascurando i termini del moto base, la (3.10) si scrive

$$p'_\pm = p'_\pm^a \mp \sigma \left[ 1 + \left( \frac{\partial Y_\pm}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \left\{ \frac{\partial^2 y'_\pm}{\partial x^2} - 3 \frac{\frac{\partial^2 Y_\pm}{\partial x^2} \frac{\partial Y_\pm}{\partial x} \frac{\partial y'_\pm}{\partial x}}{1 + \left( \frac{\partial Y_\pm}{\partial x} \right)^2} \right\} \quad (5.12)$$

da cui, sommando membro a membro i termini relativi alle due interfacce<sup>2</sup> e ricordando l'ipotesi, per i disturbi varicosi, di profilo costante per la

<sup>2</sup>In configurazioni simmetriche la posizione delle interfacce imperturbate può esprimersi mediante la (3.12), con  $\bar{Y} = 0$ .

fluttuazione di pressione nel getto, si ottiene

$$p' = \bar{p}'^a - \frac{\sigma}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ F \frac{\partial \tilde{y}'}{\partial x} \right] \quad (5.13)$$

con  $F$  dato dalla (4.8). Analogamente, sottraendo membro a membro dalla (5.12) i termini sulle due interfacce, si ottiene

$$p'_+ - p'_- = \tilde{p}'^a - 2\sigma \frac{\partial}{\partial x} \left[ F \frac{\partial \tilde{y}'}{\partial x} \right]. \quad (5.14)$$

Infine, sostituendo le (5.13) e (5.14) rispettivamente nelle (5.10) e (5.11), si ottengono immediatamente le (5.6) e (5.7).

## 5.3 Modello di pressione esterna

In conseguenza delle ipotesi fatte di getto liquido in gravità soggetto ad un campo di forze esterno con il quale interagisce mutuamente, nelle (5.6) e (5.7) compaiono termini di fluttuazione del campo di pressione esterna che è necessario esprimere in termini di fluttuazione delle variabili di governo del flusso, più specificamente linea media  $\bar{y}'$  e spessore  $\tilde{y}'$ , per rendere chiuso il sistema (5.4 - 5.7). All'uopo le perturbazioni di pressione dell'ambiente esterno saranno considerate attraverso due differenti modelli che considerano l'interazione liquido-gas all'interfaccia sia attraverso un meccanismo locale di aerodinamica instazionaria in cui l'ambiente esterno è considerato simmetrico ed indefinito sia mediante un modello asimmetrico semiconfinato in cui un diverso meccanismo di interazione, di tipo globale, è indotto da alterazioni dello stato del gas nella camera d'aria confinante da un solo lato con la lamina.

### 5.3.1 Modello non confinato

Ipotizzando che la lamina sia immersa, da entrambi i lati, in un ambiente esterno indefinito costituito da un gas in quiete, l'interazione del getto liquido con l'ambiente esterno è ottenuta mediante un modello di aerodinamica instazionaria che risolve la fluttuazione instazionaria del campo di pressione esterna mediante un problema di Neumann per il potenziale di velocità. Analogamente a quanto fatto per il getto liquido, le ipotesi alla base del modello impongono che il campo esterno sia anch'esso incomprimibile e non viscoso. L'ipotesi di irrotazionalità consente, quindi, di esprimere il campo di velocità esterno come il gradiente del potenziale di velocità scalare  $\Phi^a$ , da

cui l'equazione di continuità per il campo esterno imporrà che il Laplaciano del potenziale sia nullo

$$\nabla^2 \Phi^a = 0. \quad (5.15)$$

Al tempo stesso, il teorema di Crocco, particolarizzato al regime incomprimibile ed irrotazionale, restituisce il teorema di Bernoulli instazionario per il campo di moto esterno alla lamina

$$\nabla \left( \frac{\partial \Phi^a}{\partial t} + \frac{p^a}{\rho^a} + \frac{v^{a2}}{2} + \psi^a \right) = 0 \quad (5.16)$$

in cui l'apice  $a$  indica grandezze relative al campo esterno. Ipotizzando, come fatto per la soluzione stazionaria, che il potenziale gravitazionale sia costante in tutto il campo esterno, è possibile trascurare il suo contributo nella (5.16) che, pertanto, si riduce a

$$\frac{\partial \Phi^a}{\partial t} + \frac{p^a}{\rho^a} + \frac{v^{a2}}{2} = \text{cost.} \quad (5.17)$$

Dal momento che siamo interessati all'analisi di piccoli disturbi, mutuamente indotti tra il getto liquido e l'ambiente esterno, le variabili del flusso possono essere, al solito, decomposte nella somma di un contributo medio ed uno fluttuante, per cui la (5.17) si scrive

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\Phi}^a + \varphi'^a) + \frac{P^a + p'^a}{\rho^a} + \frac{1}{2} (V^a + v'^a)^2 = \text{cost.}$$

Linearizzando e trascurando i termini relativi al moto medio si ottiene, infine, l'equazione di Bernoulli instazionaria per il campo di perturbazioni

$$\frac{\partial \varphi'^a}{\partial t} + \frac{p'^a}{\rho^a} + V^a v'^a = 0$$

che, nell'ipotesi in cui il gas esterno sia in quiete ( $V^a = 0$ ), fornisce la seguente espressione per la fluttuazione di pressione ambiente

$$p'^a = -\rho^a \frac{\partial \varphi'^a}{\partial t} \quad (5.18)$$

valida per il campo esterno da ambo i lati della lamina.

La (5.18) suggerisce che la perturbazione di pressione esterna può essere ricostruita una volta nota, in ogni punto del campo esterno, la fluttuazione del potenziale di velocità  $\varphi'^a$ . Dalla continuità (5.15), scritta per il campo perturbato, si ottiene che la fluttuazione del potenziale di velocità esterno va determinata risolvendo un problema di Laplace con opportune condizioni

alla frontiera. In particolare, la condizione al contorno sull'interfaccia va imposta osservando che essa è linea di corrente, ovvero superficie materiale; per cui dalla (3.6), scritta per grandezze perturbate, linearizzando e tenuto conto che il campo esterno imperturbato è supposto in quiete, si ottiene<sup>3</sup>

$$\frac{\partial \varphi'_{\pm}}{\partial y} = \frac{\partial y'_{\pm}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi'_{\pm}}{\partial x} \frac{\partial Y_{\pm}}{\partial x} \quad (5.19)$$

con  $Y_{\pm}$  posizione delle interfacce indisturbate. L'altra condizione da imporre alla frontiera esterna è, naturalmente, la condizione di evanescenza per il potenziale di velocità fluttuante.

Una soluzione semplificata del potenziale fluttuante del campo di velocità esterna può essere ottenuta nell'ipotesi in cui vengano trascurate le variazioni longitudinali della posizione delle interfacce imperturbate  $Y_{\pm}$ . Come sarà mostrato più chiaramente nel paragrafo successivo, tale soluzione semplificata risulterà la soluzione esatta del campo esterno valida per lamina *slender*, che ammette come moto base la soluzione analitica *torricelliana* di *free-fall*. Nell'ipotesi suddetta, quindi, il campo potenziale di velocità perturbato risulterà soluzione del seguente problema di Laplace:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi'^a}{\partial x} + \frac{\partial \varphi'^a}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \varphi'^a}{\partial y} \Big|_{y=y_{\pm}} = \frac{\partial y'_{\pm}}{\partial t} & \text{per } 0 < x < L \\ \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \varphi'^a = 0 \end{cases} \quad (5.20)$$

dove  $L$  è la lunghezza della lamina di liquido. Seguendo quanto contenuto in [5] e [20], si ottiene che la soluzione al problema di Laplace (5.20) risulta essere

$$\varphi'^a = \frac{L}{2\pi} \int_0^1 \frac{\partial y'_{\pm}}{\partial t} \ln [(x^* - \xi)^2 + (y - Y_{\pm})^2] d\xi \quad (5.21)$$

<sup>3</sup>La condizione cinematica linearizzata (5.19) è stata scritta in termini della fluttuazione del potenziale di velocità tenendo conto che per il vettore di velocità esterna fluttuante vale:

$$\mathbf{v}'^a = \nabla \varphi'^a = \frac{\partial \varphi'^a}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi'^a}{\partial y} \mathbf{j}$$

da cui segue per le componenti di velocità :

$$\begin{cases} u'_{\pm} = \frac{\partial \varphi'_{\pm}}{\partial x} \\ v'_{\pm} = \frac{\partial \varphi'_{\pm}}{\partial y} \end{cases} .$$

con  $0 < x^*, \xi < 1$ . Nella soluzione ottenuta  $\xi$  è una variabile di convoluzione che integrata lungo la lamina fornisce il valore di  $\varphi'^a$  ad ogni assegnata stazione  $x^*$  lungo la lamina, per qualsiasi punto  $y$  del campo esterno. La fluttuazione di pressione esterna in corrispondenza delle due interfacce si ottiene, quindi, sostituendo la (5.21) (con  $y = Y_{\pm}$ ) nella (5.18) ed osservando che, per simmetria,  $p'_{\pm} = p'_{\mp}$  se  $y'_{\pm} = y'_{\mp}$ , ovvero

$$p'_{\pm} = \mp \frac{\rho_a L}{\pi} \int_0^1 \frac{\partial^2 y'_{\pm}}{\partial t^2} \ln |x^* - \xi| d\xi. \quad (5.22)$$

Sommando e sottraendo i contributi relativi alla due interfacce e manipolando opportunamente i termini si ottengono, in definitiva, le espressioni di  $\tilde{p}'^a, \bar{p}'^a$  nelle (5.6 - 5.7) in funzione delle sole fluttuazioni di linea media  $\bar{y}$  e spessore  $\tilde{y}$ :

$$\bar{p}'^a = -\frac{\rho_a L}{2\pi} \int_0^1 \frac{\partial^2 \bar{y}'}{\partial t^2} \ln |x^* - \xi| d\xi \quad (5.23)$$

$$\tilde{p}'^a = -\frac{2\rho_a L}{\pi} \int_0^1 \frac{\partial^2 \tilde{y}'}{\partial t^2} \ln |x^* - \xi| d\xi \quad (5.24)$$

Le (5.23) e (5.24), sostituite nel sistema linearizzato, permettono di studiare le dinamiche instazionarie dei disturbi sinuosi e varicosi, per una lamina liquida effluente in un gas in quiete, in termini delle sole fluttuazioni di velocità, linea media e spessore del getto.

### 5.3.2 Modello del cuscino d'aria

Seguendo l'approccio contenuto in [34], consideriamo il problema della determinazione del campo di pressione esterna fluttuante attraverso un modello di ambiente esterno in cui la lamina liquida interagisce da un lato con una camera d'aria chiusa dal getto stesso. Uno schema della geometria del problema è mostrato in Fig. 5.2.

L'ipotesi alla base del modello è che il gas contenuto nel cuscino, come pure il gas esterno nell'altro dominio seminfinito, sia un gas ideale, ed inoltre che le perturbazioni di pressione indotte nello stesso da instabilità presenti nella lamina siano di un ordine di grandezza tale da poter considerare trasformazioni isoentropiche per lo stato del gas nel cuscino. In tal modo, per il gas esterno, da ciascun lato della lamina, varrà la relazione dell'isoentropica  $p^a v^{a\gamma} = \text{cost}$ , che scritta decomponendo, al solito, le variabili nella somma dei contributi medi e fluttuanti, fornisce

$$p^a v^{a\gamma} = (p^a + p'^a) \left[ v^a \left( 1 + \frac{v'^a}{v^a} \right) \right]^{\gamma}. \quad (5.25)$$



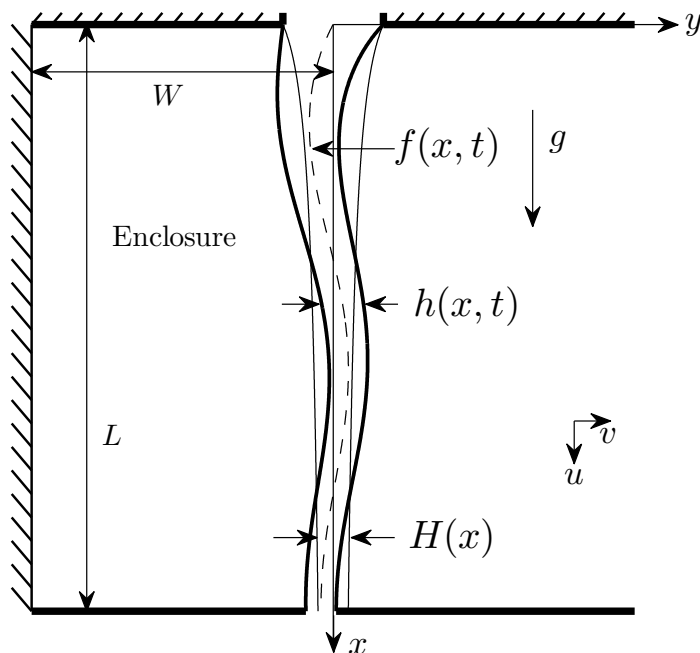


Figura 5.2: Schema della geometria del modello di ambiente esterno semi-confinato. I simboli indicati sono coerenti con le corrispondenti definizioni delle variabili adimensionali.

Espandendo in serie di potenze di piccolo argomento il termine  $(1 + v'^a/v^a)^\gamma$  e trascurando, al solito, sia i termini relativi alle condizioni imperturbate che i termini non lineari, la (5.25) si riduce a

$$p'^a + \gamma \frac{p^a}{v^a} v'^a = 0. \quad (5.26)$$

La (5.26) è valida da ambo i lati della lamina. Pertanto, osservando che il volume del cuscino d'aria in condizioni imperturbate, per unità di profondità, è dato da (con notazione di simboli coerente alla Fig. 5.2)

$$v_-^a = L \cdot B - \int_0^L \frac{\tilde{Y}}{2} dx$$

mentre, come ovvio,  $v_+^a = \infty$ , è possibile scrivere le espressioni della fluttuazione di pressione ambiente ai due lati della lamina per il modello in

questione:

$$\begin{cases} p'_+{}^a = 0 \\ p'_-{}^a = -\gamma \frac{p_-^a}{L \cdot W - \frac{1}{2} \int_0^L \tilde{Y} dx} v'_-{}^a \end{cases} \quad (5.27)$$

La perturbazione di pressione nel cuscinio d'aria si ottiene, dunque, dalla (5.27) una volta nota la variazione di volume infinitesima nello stesso, per effetto delle oscillazioni dell'interfaccia sinistra della lamina. Quest'ultima può essere valutata dall'integrale, esteso a tutta la lunghezza della lamina, della fluttuazione dell'interfaccia sinistra  $y'_-$  del getto, ovvero

$$v'^a = \int_0^L y'_-(x) dx. \quad (5.28)$$

Tenuto conto della (3.12), scritta per grandezze fluttuanti, la (5.28) può esprimersi in termini di perturbazione di linea media e spessore, come segue

$$v'^a = \underbrace{\int_0^L \bar{y}'(x) dx}_1 - \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^L \tilde{y}'(x) dx}_2. \quad (5.29)$$

Da semplici considerazioni relative alle caratteristiche tipiche di oscillazione dei disturbi, è possibile dedurre che i due integrali nella (5.29) rappresentano il contributo, alla variazione di  $v'^a$ , indotto da ciascuno dei due differenti modi di oscillare del modello linearizzato, sinuoso e varicoso rispettivamente. Più specificamente, l'integrale **1** è il contributo associato ai disturbi di tipo sinuoso, mentre l'integrale **2** a quelli di tipo varicoso.

Sulla base di tali considerazioni è possibile particolarizzare la fluttuazione di pressione esterna nel cuscinio d'aria, dalle (5.27) e (5.29), per i casi sinuoso e varicoso, in termini dei soli contributi separati di fluttuazione di linea media e spessore:

$$p'_-{}^a = -\gamma \frac{p_-^a}{L \cdot W - \frac{1}{2} \int_0^L \tilde{Y} dx} \int_0^L \bar{y}'(x) dx \quad (\text{disturbi sinuosi}) \quad (5.30)$$

$$p'_-{}^a = \gamma \frac{p_-^a}{L \cdot W - \frac{1}{2} \int_0^L \tilde{Y} dx} \int_0^L \frac{\tilde{y}'(x)}{2} dx \quad (\text{disturbi varicosi}) \quad (5.31)$$

## 5.4 Equazioni adimensionalizzate ed approssimazioni asintotiche

Il sistema linearizzato (5.4 - 5.7) può essere riscritto convenientemente in forma adimensionale mediante l'adozione di opportune scale di riferimento per le variabili del flusso. Osservando che lo sviluppo in coordinata (3.11), adottato per abbassare l'ordine spaziale del problema, implicitamente assume un diverso ordine di grandezza per la geometria del modello nelle due direzioni laterale e longitudinale, si è convenuto di adottare una doppia scala di lunghezza e velocità per scalare le variabili del problema. In particolare, tutte le variabili geometriche, nelle direzioni longitudinale e laterale, sono state scalate rispetto alla scala lenta gravitazionale  $x_r$  ed allo spessore dell'orifizio di ingresso  $y_r$  rispettivamente, ovvero

$$x_r = U_{0_i}^2/g, \quad y_r = \tilde{Y}_i, \quad t_r = U_{0_i}/g$$

dove, al solito,  $U_{0_i}$  e  $\tilde{Y}_i$  rappresentano velocità e spessore iniziali del campo di moto base della lamina, mentre  $t_r$  è la scala dei tempi adottata. Analogamente per le componenti di velocità, in cui si è adottata una differente scala per il moto medio e le fluttuazioni<sup>4</sup>

$$u_r = x_r/t_r = U_{0_i}, \quad v_r = y_r/t_r = \varepsilon U_{0_i}$$

dove  $\varepsilon = \tilde{Y}_i/x_r = \tilde{Y}_i g/U_{0_i}^2$  è il parametro di *slenderness*.

Ridefinendo le variabili del flusso adimensionali come

$$U = \frac{U_0}{u_r}, \quad H = \frac{\tilde{Y}}{y_r}, \quad u = \frac{u'_0}{v_r}, \quad v = \frac{v'_0}{v_r}, \quad f = \frac{\tilde{y}'}{y_r}, \quad h = \frac{\tilde{y}'}{y_r}, \quad p^a = \frac{p'^a}{p_r}$$

si ottiene il seguente sistema linearizzato adimensionale

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Uh) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (Hu) = 0 \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U \frac{\partial f}{\partial x} - v = 0 \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Uu) - \frac{We\varepsilon}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ F \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \varepsilon \frac{\partial \bar{p}^a}{\partial x} = 0 \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2We}{H} \frac{\partial}{\partial x} \left[ F \frac{\partial f}{\partial x} \right] + \frac{\tilde{p}^a}{H} = 0 \quad (5.35)$$

<sup>4</sup>La pressione di riferimento è scalata coerentemente con  $p_r = \rho v_r^2 = \rho \varepsilon^2 U_{0_i}^2$ .

in cui  $We = \sigma/\rho U_{0i}^2 H_i$  è il numero di Weber ed  $F$  è data ancora dalla (4.15). L'espressione adimensionale dei contributi di pressione ambiente dipende dal modello considerato. Per il modello semiconfinato è possibile darne l'espressione completa (con  $L, W$  scalati con  $x_r$ ):

$$\tilde{p}^a = \gamma \frac{P^a}{L^* \cdot W^* - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{L^*} H dx} \int_0^{L^*} f(x) dx \quad (5.36)$$

$$\bar{p}^a = \frac{\gamma \varepsilon}{4} \frac{P^a}{L^* \cdot W^* - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{L^*} H dx} \int_0^{L^*} h(x) dx \quad (5.37)$$

### 5.4.1 Approssimazione *slender* del sistema linearizzato

I sistemi di equazioni (5.33-5.35) e (5.32-5.34) permettono di studiare l'evoluzione instazionaria delle due famiglie di disturbi, sinuosi e varicosi, al variare dei parametri di governo del modello,  $We$  e  $\varepsilon^2$ , una volta ottenuta la soluzione stazionaria del moto base dall'integrazione numerica della ODE (4.29). Tuttavia, analogamente a quanto fatto per la soluzione stazionaria, è possibile ottenere modelli semplificati delle equazioni di governo linearizzate attraverso uno sviluppo asintotico delle variabili nei parametri che governano il modello.

L'utilizzo di un approccio perturbativo nel piccolo parametro  $\varepsilon$  permette di ottenere, all'ordine zero, una soluzione approssimata valida per lamina *slender*. Espandendo in serie di potenze di  $\varepsilon$  le variabili del flusso

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots$$

si ottengono, a cascata, sistemi di equazioni di governo ai differenti ordini in  $\varepsilon$ . All'ordine più basso immediatamente risulta:

1. Per i disturbi sinuosi

$$\begin{cases} \frac{\partial f_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial f_0}{\partial x} - v_0 = 0 \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{2We}{H_0} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + \frac{\tilde{p}_0^a}{H_0} = 0 \end{cases} \quad (5.38)$$

2. Per i disturbi varicosi

$$\begin{cases} \frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U_0 h_0) = 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U_0 u_0) = 0 \end{cases} \quad (5.39)$$

dove  $U_0, H_0$  sono dati dalla soluzione analitica di *free-fall* (4.18-4.19). L'espressione esplicita di  $\tilde{p}_0^a$  dipende dal modello di pressione esterna:

1. Per modello semiconfinato

$$\tilde{p}_0^a = \gamma \frac{P^a}{L^* \cdot W^*} \int_0^{L^*} f_0(x) dx \quad (5.40)$$

2. Per modello non confinato

$$\tilde{p}_0^a = -\frac{2}{\pi} \frac{\rho_a}{\rho} L^* \int_0^1 \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} \ln |x^* - \xi| d\xi \quad (5.41)$$

### 5.4.2 Approssimazione a piccoli numeri di Weber

Un'ulteriore soluzione approssimata che permette di ottenere modelli semplificati delle equazioni di governo linearizzate per i disturbi sinuosi e varicosi si può ottenere, analogamente, assumendo un'espansione in serie di potenze delle variabili del flusso nel parametro  $We$

$$\varphi = \varphi_0 + We\varphi_1 + We^2\varphi_2 + \dots$$

che permette di nuovo di generare una successione di sistemi di equazioni di governo ai differenti ordini in  $We$  (assumendo  $\varepsilon$  come parametro libero). Procedendo analogamente a quanto fatto in precedenza si ottengono i sistemi di equazioni di governo all'ordine zero in  $We$  per le due differenti classi di disturbi:

1. Per i disturbi sinuosi

$$\begin{cases} \frac{\partial f_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial f_0}{\partial x} - v_0 = 0 \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\tilde{p}_0^a}{H_0} = 0 \end{cases} \quad (5.42)$$

2. Per i disturbi varicosi

$$\begin{cases} \frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U_0 h_0 + \varepsilon H_0 u_0) = 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U_0 u_0) - \varepsilon \frac{\partial \bar{p}_0^a}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (5.43)$$

dove, ancora,  $U_0, H_0$  corrispondono alla soluzione analitica di *free-fall*, coerentemente con la (4.25).

La II° eq. in (5.43) si riduce alla corrispondente equazione per configurazione *slender* del getto, nel caso di modello di gas esterno semiconfinato. In conseguenza del meccanismo globale di interazione liquido-gas, dovuto alla presenza della camera d'aria chiusa con cui la lamina perturbata interagisce mutuamente, il contributo dovuto alla pressione esterna scompare  $(\partial \bar{p}_0^a / \partial x) = 0$  dal momento che la stessa non è funzione di  $x$ . La forzante esterna, dunque, agisce solo sull'evoluzione dei disturbi di tipo sinusoso con un contributo dato dalla seguente espressione:

$$\tilde{p}_0^a = \gamma \frac{P^a}{L^* \cdot W^* - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{L^*} H_0 dx} \int_0^{L^*} f_0(x) dx \quad (5.44)$$

in cui  $\varepsilon$  è un parametro libero vincolato solo dalla necessità di garantire una *slenderness* geometrica sufficientemente piccola, in coerenza con lo sviluppo in coordinata (3.11) adottato.

## 5.5 Propagazione dei disturbi in configurazioni *slender*

I sistemi di equazioni (5.33-5.35) e (5.32-5.34), governanti l'evoluzione instazionaria dei disturbi sinusosi e varicosi, permettono di studiare la risposta di una lamina liquida gravitazionale ad un campo di pressione esterno fluttuante con cui essa interagisce mutuamente, per fissati valori dei parametri di governo  $We, \varepsilon$ . A seconda del particolare modello di pressione esterna considerato, il campo di pressione instazionario applicato rappresenta un termine di reazione (globale) per il modello del cuscino d'aria, ovvero un contributo di massa aggiunta (*added mass*) per il modello non confinato. In generale però, il contributo indotto dalla pressione non altera le caratteristiche di propagazione delle due famiglie di disturbi, che sono influenzate solo dal segno del coefficiente dell'operatore di ordine massimo delle equazioni di governo. Dal momento che l'analisi di stabilità sarà condotta su configurazioni *slender* della lamina liquida, nel prosieguo sarà dato qualche cenno sul carattere delle soluzioni dei modelli semplificati (5.38) e (5.39) di evoluzione dei disturbi sinusosi e varicosi. Tali osservazioni costituiranno il substrato teorico per la corretta assegnazione delle condizioni al contorno di chiusura del problema per le diverse configurazioni di efflusso.

Basandosi sui metodi classici di classificazione delle PDE's lineari si deduce facilmente che il sistema (5.38) di governo dei disturbi sinusosi ha un

carattere iperbolico, nella ovvia condizione in cui  $We \geq 0$ . Nei sistemi iperbolici del II° ordine, tutti i disturbi si propagano attraverso il getto lungo due curve caratteristiche che ne individuano le traiettorie nel dominio dello spazio-tempo  $x - t$ . Le equazioni di governo di tali curve caratteristiche possono essere ottenute, per il modello in questione, direttamente riducendo il sistema (5.38) alla sua forma compatta<sup>5</sup>

$$\frac{D^2 f_0}{Dt^2} - (2WeU_0) \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} = -U_0 \tilde{p}_0^a \quad (5.45)$$

ottenuta sostituendo la condizione cinematica nel bilancio di  $qdm$  laterale e scrivendo l'espressione risultante in termini dell'operatore di derivata sostanziale  $D/Dt$ . Nell'ipotesi in cui il contributo di pressione esterna sia nullo ( $\tilde{p}_0^a = 0$ ), la (5.45) immediatamente restituisce l'equazione delle onde omogenea in un riferimento lagrangiano per la quale, quindi, vale l'equivalenza  $c^2 = 2WeU_0$ , con  $c$  velocità dei disturbi. Ciò permette di ricavare istantaneamente le velocità caratteristiche di propagazione dei disturbi sinuosi come

$$\frac{dx}{dt} = U_0 \pm \sqrt{2WeU_0}. \quad (5.46)$$

Le (5.46) rappresentano le velocità di propagazione delle informazioni nel dominio e corrispondono alle velocità alle quali le onde viaggiano nella lamina. Più specificamente, per il modello in questione, la (5.46) rappresenta la velocità di una coppia di onde che viaggia in un riferimento non inerziale solidale al moto base uniformemente accelerato. L'espressione di tali velocità coincide esattamente con quella predetta in [24] per le onde sinuose, attraverso una analisi ai modi di Fourier condotta con un approccio LST nel solo limite asintotico dei piccoli numeri d'onda. Questo accordo nei risultati ottenuti con due approcci differenti è, in tal caso, un risultato atteso dal momento che l'ipotesi di lamina sottile rispetto alla lunghezza d'onda dei disturbi, alla base del nostro modello, rende l'analisi globale equivalente ad una analisi locale limitata ai soli modi con elevata lunghezza d'onda.

Analogo discorso vale per il sistema (5.39) di equazioni di governo dei disturbi varicosi. In tal caso il sistema

$$\begin{cases} \frac{Dh_0}{Dt} + h_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} = 0 \\ \frac{Du_0}{Dt} + u_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

è del I° ordine, e le informazioni viaggiano lungo una singola curva caratteristica alla velocità di caduta libera  $U_0$ ; ovvero, la velocità delle onde coincide

<sup>5</sup>Si noti che l'equazione di continuità garantisce che  $U_0 = 1/H_0$ .

con la velocità di *free-fall*. Ancora una volta, tale risultato è in accordo con quanto ottenuto in [24] nel caso di trascurabilità degli effetti viscosi e del numero d'onda adimensionale  $\alpha = 2\pi d/\lambda$  risultante dall'analisi ai modi di Fourier. Tale parametro  $\alpha$  corrisponde al parametro di *slenderness*  $\varepsilon$  del presente modello e dunque può essere trascurato nell'ipotesi di lamina *slender*, governata dal sistema (5.39).

Consideriamo ora il problema delle corrette condizioni al contorno da assegnare al sistema (5.38) di evoluzione dei disturbi sinuosi. Nelle equazioni iperboliche il numero di BCs da assegnare deve essere consistente con il numero di curve caratteristiche, e la direzione del flusso di informazioni deve, analogamente, avvenire consistentemente con la direzione di propagazione delle caratteristiche. Per comprendere, dunque, come i disturbi si propagano attraverso la lamina al variare del parametro di governo  $We$ , consideriamo l'espressione esplicita della (5.45)

$$U_0(U_0 - 2We) \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} - \frac{\partial f_0}{\partial x} + 2U_0 \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} = -U_0 \tilde{p}_0^a. \quad (5.47)$$

La (5.47) mostra la presenza di una singolarità nell'equazione di governo, che si realizza quando  $U_0 = 2We$ . Tale singolarità giace nel dominio fisico quando  $We \geq 1/2$ . In particolare, per  $We = 1/2$  la singolarità si realizza in corrispondenza dell'inlet ( $x = 0$ ), e si trasporta via via più a valle al crescere di  $We$ . Per  $We > 1/2$  esiste, quindi, un stazione critica  $x_r$  di singolarità in corrispondenza della quale l'equazione (5.47) cambia struttura, dal momento che cambia il segno del coefficiente dell'operatore spaziale di II° ordine. La posizione  $x_r$  della singolarità coincide sempre con la stazione in corrispondenza della quale il numero di Weber locale del flusso  $We_l = 1/2$ , dovendo valere la seguente equivalenza:

$$U_0 - 2We = \frac{U(x)}{U_{in}} (1 - 2We_l)$$

dove il numero di Weber locale,  $We_l = \sigma/\rho H(x)U^2(x)$ , può essere interpretato come il quadrato del rapporto tra la velocità caratteristica di propagazione delle onde sinuose

$$c_s = \sqrt{\sigma/\rho H(x)}$$

e la velocità (locale) del flusso, come schematicamente mostrato in Fig. 5.3. Dunque la presenza della singolarità individua la transizione da un comportamento di tipo subsonico a uno di tipo supersonico del flusso ed è, per questo, assente dal campo di moto quando la lamina ha un comportamento già di tipo supersonico all'ingresso ( $We < 1/2$ ). Inoltre, la posizione lungo la lamina a cui essa si realizza corrisponde ad un valore del numero di Weber



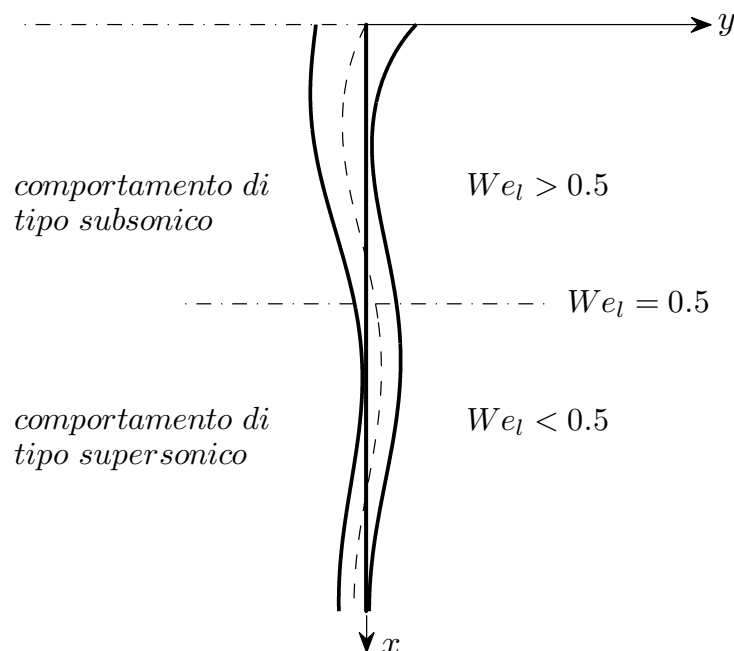


Figura 5.3: Schema della configurazione di evoluzione dei disturbi sinuosi in presenza di singolarità nel dominio ( $We > 1/2$ ).

locale coincidente, nel modello semplificato (5.38), con il valore del numero di Weber del flusso per il quale si realizza un'instabilità di tipo *pinch* in un approccio locale, basato su un metodo LST ai modi di Fourier, [15].

Quanto detto sulle caratteristiche di evoluzione dei disturbi all'interno del flusso suggerisce che il posizionamento delle condizioni al contorno per la chiusura del problema dipende dal valore del numero di Weber  $We$ . Per  $We > 1/2$  le due BCs possono essere assegnate entrambe in corrispondenza dell'orifizio di ingresso della lamina e, coerentemente con [34], saranno tali per cui l'*inlet* del modello evolutivo (5.38) non sarà interessato da perturbazioni di tipo sinusoidale ( $f_0 = 0, v_0 = 0$ ). Ciò è consistente con quanto suggerito dalla (5.46), per la quale entrambe le caratteristiche propagheranno sempre nella direzione di evoluzione del flusso, trasportate dal moto medio, dovendo valere la disuguaglianza  $c < U_0$  per entrambe le velocità dei disturbi<sup>6</sup>. Diverso è il caso in cui  $We > 1/2$ , e  $U_0 = 2We$  nel dominio di efflusso consi-

<sup>6</sup> $U_0 \geq 1$  lungo tutta la lamina ed  $U_0$  aumenta al crescere di  $x$ .

derato per la lamina. In tal caso, un solo vincolo può essere ancora applicato all'*inlet* del getto dal momento che la caratteristica col segno positivo nella (5.46) continua a propagare verso valle, trasportata dal moto medio, mentre l'altra, corrispondente al segno negativo, nella regione del flusso in cui  $1 \leq U_0 < We$  risalirà a monte verso l'ingresso, mentre al di là della singolarità, dove  $U_0 > 2We$ , le caratteristiche torneranno a propagare entrambe verso valle. Questo comporta la necessità di applicare l'altra condizione al contorno in corrispondenza della posizione dove  $U_0 = 2We$ , ovvero in corrispondenza della singolarità, coerentemente con quanto fatto in [18] per il problema stazionario descritto al paragrafo 4.2. Consistentemente con [18], quindi, segue che un vincolo debole, dato dalla continuità della soluzione di interfaccia, deve essere imposto sulla locazione della singolarità. La ragione dell'imposizione di una condizione al contorno di un problema stazionario per trattare un problema evolutivo linearizzato, risiede nella considerazione che un qualsiasi problema stazionario può essere visto come un comportamento asintotico di un problema transitorio, nel quale gli effetti transitori sono scomparsi. In quest'ottica è evidente che il tipo e la posizione delle condizioni al contorno di un problema stazionario devono essere consistenti con un comportamento asintotico di un problema evolutivo, altrimenti non si raggiungerà mai la stazionarietà della soluzione.

## 5.6 Energia della perturbazione

In un problema di stabilità può essere utile indagare l'eventuale esistenza di perturbazioni particolari che si amplificano nel corso del tempo. A tal fine occorre, anzitutto, definire un parametro che ci consenta di quantificare oggettivamente l'ampiezza della perturbazione. Una misura naturale dell'intensità di una perturbazione è la sua energia cinetica che, valutata all'istante  $t$  in un volume di estensione trasversale unitaria individuato dall'area della lamina liquida imperturbata, risulta:

$$E'_c(t) = \frac{1}{2}\rho \int_0^L \int_{Y_-}^{Y_+} \left( u'^2(x, t) + v'^2(x, t) \right) dx dy$$

ovvero, per l'indipendenza delle perturbazioni dalla coordinata laterale  $y$ :

$$E'_c(t) = \frac{1}{2}\rho \int_0^L \tilde{Y} u'^2 dx + \frac{1}{2}\rho \int_0^L \tilde{Y} v'^2 dx. \quad (5.48)$$

Oltre all'energia cinetica, per il modello in questione è utile considerare anche un ulteriore contributo di energia, associato al lavoro compiuto dalla tensione

superficiale. Per lamina piana l'interfaccia si riduce ad una curva e l'espressione di tale lavoro, ad un fissato istante di tempo, è dato dalla somma dei contributi relativi alle due interfacce:

$$E_\sigma(t) = E_\sigma^+ + E_\sigma^- = \sigma \int_0^L \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y_+}{\partial x} \right)^2} + \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y_-}{\partial x} \right)^2} \right] dx$$

con  $y_\pm$  posizione delle due interfacce non linearizzate. Decomponendo la posizione dell'interfaccia nella somma di un contributo medio ed uno fluttuante e linearizzando, si ottiene la fluttuazione di energia associata al lavoro di tensione

$$E'_\sigma(t) = \sigma \int_0^L F \left( \frac{\partial \tilde{y}'}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{4} \sigma \int_0^L F \left( \frac{\partial \tilde{y}'}{\partial x} \right)^2 dx \quad (5.49)$$

con  $F = \left[ 1 + 1/4 \left( \partial \tilde{Y} / \partial x \right)^2 \right]^{-3/2}$ .

Normalizzando le (5.48) e (5.49) rispetto all'energia di riferimento<sup>7</sup>  $E_r = 1/2 \rho x_r y_r v_r^2$  ed osservando che per disturbi sinuosi  $\tilde{y}' = 0$ ,  $u' = 0$ , mentre per disturbi varicosi  $\tilde{y}' = 0$ ,  $v' = 0$  è possibile disaccoppiare i contributi di energia per i modi sinuosi e varicosi, così da avere le seguenti differenti espressioni dell'energia adimensionale dei disturbi per le due differenti famiglie di disturbi:

$$\begin{cases} E'_s = \int_0^{L^*} H v'^2 dx + 2We \int_0^{L^*} F \left( \frac{\partial f'}{\partial x} \right)^2 dx & (\text{sinuosi}) \\ E'_v = \int_0^{L^*} H u'^2 dx + \frac{We}{2} \int_0^{L^*} F \left( \frac{\partial h'}{\partial x} \right)^2 dx & (\text{varicosi}) \end{cases} \quad (5.50)$$

con  $L^*$  lunghezza adimensionale della lamina ed  $F$  dato dalla (4.15).

L'energia così definita è una norma dal preciso significato fisico: adimensionalizzandola ad un dato istante  $t$  rispetto al suo valore iniziale fornisce la crescita del disturbo

$$G(t) = \frac{E(t)}{E_0}$$

che permette di quantificare l'evoluzione temporale dell'amplificazione di una data perturbazione, ovvero come essa cresce o si smorza nel tempo.

<sup>7</sup>Per le dimensioni caratteristiche si rimanda al paragrafo 5.4.

## 5.7 Approccio numerico

L'approccio standard per l'analisi del campo dei disturbi, per il modello globale sviluppato, è quello di separare le variabili, assumendo una dipendenza separata delle soluzioni dallo spazio e dal tempo. La rappresentazione mediante modi normali temporali del campo perturbato rende possibile la ricerca delle soluzioni in forma esponenziale nella variabile temporale:

$$\varphi(x, t) = \tilde{\varphi}(x) \cdot e^{-i\omega t} \quad (5.51)$$

dove  $\tilde{\varphi}$  rappresenta l'ampiezza complessa, funzione della sola coordinata *streamwise*  $x$ , della generica variabile del flusso. L'analisi di stabilità è strettamente legata a questa posizione: la frequenza angolare  $\omega$  è complessa e deve essere calcolata. La sua parte reale  $\omega_r$  è rappresentativa della frequenza del disturbo, mentre la parte immaginaria  $\omega_i$  assume un ruolo chiave nell'interpretazione del comportamento asintotico del disturbo stesso. In particolare, se  $\omega_i > 0$ , il disturbo cresce esponenzialmente nel tempo; con  $\omega_i = 0$  il disturbo presenta stabilità neutra; se infine  $\omega_i < 0$ , il disturbo decresce smorzandosi. L'analisi di stabilità modale è condotta, quindi, sostituendo la posizione (5.51), per le variabili del problema, nelle equazioni di governo ed analizzando la risposta del corrispondente problema agli autovalori generalizzato del sistema ai modi normali

$$\omega \underline{\mathcal{M}} \tilde{\varphi} = \underline{\mathcal{A}} \tilde{\varphi}$$

reformulato opportunamente in forma matriciale<sup>8</sup>. Riarrangiato il sistema di partenza in forma matriciale, esso andrà chiuso con le condizioni al contorno per i differenti casi, descritte al paragrafo precedente. Il sistema completo così ottenuto costituisce un problema ai valori propri che ammette soluzione non banale per particolari valori di  $\omega$ , e le soluzioni  $\tilde{\varphi}(x)$  sono i modi propri del flusso. Autovalori ed autofunzioni, per i diversi valori dei parametri di governo, sono calcolati numericamente attraverso l'utilizzazione di un metodo di collocazione spettrale alla Chebyshev ampiamente descritto al capitolo 2. La discretizzazione spaziale degli operatori differenziali ed integrali nelle equazioni di governo avrà, dunque, accuratezza spettrale.

### 5.7.1 Analisi non modale

Nell'ambito dell'analisi di stabilità asintotica l'eventuale smorzamento del modo primario è sufficiente a garantire la stabilità asintotica del moto base,

---

<sup>8</sup>La formulazione matriciale completa per i differenti sistemi di equazioni ai modi normali è riportata in Appendice 2.

tutti i disturbi presenti smorzandosi nel tempo. Tuttavia può accadere che, su una scala temporale più corta, vi siano delle perturbazioni che si discostino sensibilmente da questa predizione modale, a causa del carattere intrinsecamente non ortogonale dei modi dello spettro del problema agli autovalori generalizzato.

L'analisi delle caratteristiche di non normalità dell'operatore di evoluzione linearizzato, alla base del modello sviluppato, è stata condotta calcolando la norma dell'energia dei disturbi attraverso una tecnica classica di trasformazione alla norma spettrale, ampiamente descritta in [33]. In pratica, il sistema di equazioni di governo di una assegnata famiglia di disturbi (sinuosi e/o varicosi), una volta considerato in termini di un problema ai valori iniziali ed al contorno, può essere riformulato in termini di un processo di evoluzione lineare su uno spazio di Hilbert opportunamente definito, ovvero

$$\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial t} = \underline{\mathcal{L}} \underline{\varphi} \quad (5.52)$$

con  $\underline{\mathcal{L}}$  operatore di evoluzione linearizzato. Assumendo un'espansione della soluzione  $\underline{\varphi}$  nelle autofunzioni dell'associato problema agli autovalori lineare, è pratica comune restringere l'analisi al sottospazio  $S^N$  individuato dalle autofunzioni associate ai primi  $N$  autovalori a *growth rate* maggiore. In tal modo, ogni funzione  $\varphi$  appartenente a tale sottospazio può essere espressa nella seguente forma

$$\varphi = \sum_{i=1}^N k_i(t) \tilde{\varphi}_i \quad (5.53)$$

dove  $\{\tilde{\varphi}_i\}$  è la base di autofunzioni dello spazio  $S^N$ . L'evoluzione temporale nel sottospazio  $S^N$  è dunque governata dal sistema

$$\frac{d\underline{k}}{dt} = \underline{\Lambda} \underline{k} \quad (5.54)$$

in cui  $\underline{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  è la matrice diagonale contenente i primi  $N$  autovalori e  $\underline{k}$  è il vettore dei coefficienti di espansione (5.53). La matrice  $\underline{\Lambda}$  rappresenta l'operatore  $\underline{\mathcal{L}}$  proiettato sullo spazio  $S^N$  e l'evoluzione temporale di una soluzione in questo spazio può essere descritta attraverso l'evoluzione dei coefficienti di espansione  $k_i(t)$ . Esprimendo il prodotto scalare euclideo<sup>9</sup>

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_0^L \varphi_1^* \varphi_2 dx$$

---

<sup>9</sup>L'apice \* denota il complesso coniugato.

in termini dei coefficienti di espansione, seguendo [30] si ottiene:

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \underline{k}_1^* \underline{M} \underline{k}_2 = \langle \underline{k}_1, \underline{k}_2 \rangle_M = \langle \underline{F} \underline{k}_1, \underline{F} \underline{k}_2 \rangle_2$$

dove  $\underline{M}$  è la matrice hermitiana  $M_{ij} = \langle \tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_j \rangle$  dei prodotti scalari tra autofunzioni,  $\underline{F}$  è definita dalla sua decomposizione  $\underline{M} = \underline{F}^* \underline{F}$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  denota il prodotto scalare euclideo tra vettori. La norma associata in  $S^N$  è espressa come

$$\|\varphi\| = \|\underline{k}\|_M = \|\underline{F} \underline{k}\|_2. \quad (5.55)$$

Se l'operatore  $\underline{\mathcal{L}}$  è normale, allora ammetterà una base di autofunzioni ortogonali per cui, con un'opportuna normalizzazione, la matrice  $\underline{M}$  è la matrice identica. In questi casi l'evoluzione temporale delle soluzioni  $\varphi$  è completamente determinata dalla evoluzione delle sue componenti sulla base di autofunzioni, e quindi una descrizione accurata del sistema può essere ottenuta dalla semplice analisi del solo spettro del problema. In generale, tuttavia, dal momento che la diagonalizzazione dell'operatore non è unitaria, l'analisi spettrale non descrive accuratamente l'evoluzione transitoria delle soluzioni ed una descrizione più accurata può ottenersi solo portando in conto la struttura geometrica del processo di trasformazione della base di autofunzioni.

Varie tecniche sono state sviluppate nel corso degli anni per studiare il comportamento degli operatori non normali. Tra tutte, la funzione di crescita  $G(t)$  riveste un ruolo preminente per le finalità del presente lavoro di tesi dal momento che consente di investigare gli effetti della non normalità dell'operatore di evoluzione linearizzato sulla crescita massima dei disturbi, a ciascun istante di tempo. In effetti alcune perturbazioni, durante dei transitori più o meno lunghi, possono presentare delle crescite di energia. La massima amplificazione di energia, su tutte le possibili condizioni iniziali, ad un fissato istante di tempo è detta *gain*,  $G(t)$  ed è così definita

$$G(t) = \sup_{\varphi(x,0) \neq 0} \frac{\|\varphi(x,t)\|}{\|\varphi(x,0)\|} = \|e^{t\mathcal{L}}\|.$$

Numericamente, la funzione di crescita può essere calcolata considerando le condizioni iniziali nello spazio  $S^N$ :

$$G(t) \simeq G_N(t) = \sup_{\varphi(x,0) \in S^N} \frac{\|\varphi(x,t)\|}{\|\varphi(x,0)\|} = \|e^{t\mathcal{L}}\|.$$

Dalla (5.55), esplicitando la soluzione formale del sistema (5.54), è possibile ricavare la seguente espressione per la norma dell'energia:

$$G(t) \simeq G_N(t) = \|\underline{F} \exp(-it\underline{\Lambda}) \underline{F}\|_2.$$

La *gain curve*  $G(t)$  rappresenta l'involuppo di tutte le possibili curve di amplificazione di energia in funzione del tempo. Tale involuppo, per flussi asintoticamente stabili, presenta un massimo

$$G_{max} = \max_t G(t)$$

dal momento che tutti i disturbi dopo un certo tempo dovranno smorzarsi per le caratteristiche di stabilità previste dall'analisi modale. Le condizioni iniziali che inducono la più alta crescita di energia corrispondono alla curva di amplificazione il cui massimo coincide col massimo dell'involuppo. Tali condizioni iniziali, che realizzano al meglio questo comportamento di crescita energetica, sono dette *perturbazioni ottimali*. In particolare, la *perturbazione ottimale globale* individua la massima crescita di energia, che si ha per  $t = \tau_{opt}$ , dove  $\tau_{opt}$  rappresenta il valore di ascissa corrispondente al massimo assoluto della funzione  $G(t)$  (non esiste perturbazione con crescita energetica superiore). La norma dell'energia in corrispondenza del valore di picco della *gain curve* per l'incognita perturbazione ottimale sarà, dunque, data da  $\|F \exp(-it_g \Lambda) F^{-1}\|$ , con  $t_g$  istante corrispondente al massimo guadagno di energia. Vale perciò la seguente relazione

$$Bk_0 = \mu k_{t_g}$$

dove  $B = F \exp(-it_g \Lambda) F^{-1}$ ,  $\mu = \|B\|$  e  $k_{t_g}$  denota il vettore dei coefficienti di espansione.

Così come definito,  $\mu$  è uguale al più grande valor singolare di  $B$  dal momento che la norma dell'esponenziale ha il significato, istante per istante, di massima norma al variare della condizione iniziale fra tutte quelle possibili a norma unitaria. Dunque la condizione iniziale di *optimal disturbance*  $k_0$  si ottiene attraverso la *decomposizione a valori singolari* (SVD) della matrice  $B$

$$BV = U\Sigma \quad (5.56)$$

in cui  $V$  ed  $U$  sono matrici unitarie mentre  $\Sigma$  è una matrice diagonale di valori reali non negativi,  $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$ , ordinati in maniera decrescente lungo la diagonale. La norma euclidea di  $B$  è data dal più grande valor singolare  $\sigma_1$ . Focalizzando, quindi, l'attenzione solo sui vettori colonna di  $U$  e  $V$  corrispondenti a  $\sigma_1$ , chiamati rispettivamente principal vector singolare destro e sinistro, si ottiene

$$Bv_1 = \sigma_1 u_1 \quad (5.57)$$

La (5.57) esprime la trasformazione tramite  $B$  di un vettore  $v_1$  in un vettore  $u_1$  che intanto è stato anche espanso nel nuovo riferimento di un fattore  $\sigma_1$  pari alla norma euclidea di  $B$ . Dunque  $v_1$  descrive la condizione iniziale che sarà

amplificata di un fattore  $\sigma_1 = \|B\|_2$  dovuta all'azione di  $F \exp(-it_g \Lambda) F^{-1}$ , con  $t_g$  tempo al quale si raggiunge l'amplificazione in questione. Per estrarre la condizione iniziale ottimale  $q_0$  bisogna esprimerla nella base  $\{q_1, \dots, q_N\}$ , con i coefficienti dati dalle  $N$  componenti del vettore principale  $v_1$ . Il quadrato del più grande valor singolare di  $B$  corrisponde al più grande autovalore della matrice  $B^H B$  ed il principal vettor singolare  $v_1$  di  $B$  corrisponde al principale autovettore di  $B^H B$ .

La funzione di crescita  $G(t)$  è largamente usata nello studio dell'evoluzione degli operatori lineari non normali, dal momento che il suo quadrato è una misura della più grande crescita transitoria di energia rispetto a tutte le possibili condizioni iniziali, a ciascun istante di tempo. Nell'analisi che segue sarà impiegata principalmente per caratterizzare lo schema di evoluzione tempo-periodica dell'energia rispetto a tutte le possibili condizioni iniziali. Anche nei casi in cui l'analisi lineare non modale non predice alcuna crescita di energia essa fornirà indicazioni sulla modulazione del decadimento esponenziale di energia.

## 5.8 Analisi di stabilità dei disturbi sinuosi

Come anticipato al capitolo 1, nell'analisi dei meccanismi che portano al break-up di una lamina liquida bidimensionale è fondamentale comprendere il ruolo giocato dai disturbi di tipo sinuoso, che mostrano una maggior caratteristica di instabilità, sia in indagini teoriche che sperimentali, rispetto alla controparte varicosa. Alla luce di tali considerazioni, l'analisi di stabilità sarà condotta focalizzando l'attenzione sul comportamento di tale famiglia di disturbi (sinuosi), nel caso semplificato di configurazione *slender* per la lamina liquida, rispetto ai quali sarà investigato il doppio effetto prodotto sulla stabilità sia modale che algebrica dei disturbi, dall'azione delle forze gravitazionali e della tensione superficiale, nonché l'effetto introdotto dalla mutua interazione con il campo di pressione esterno instazionario che agisce secondo meccanismi sia locali che globali, a seconda del modello considerato. L'analisi condotta sarà limitata al range di numeri di Weber per i quali non vi è singolarità nel dominio ( $0 \leq We < 1/2$ ), ovvero ad un regime di moto per il quale i disturbi, quale che sia la loro evoluzione temporale, sono convetti *downstream*<sup>10</sup>.

Sostituendo la posizione (5.51) nel sistema (5.38), l'analisi spettrale è condotta, per il modello di pressione esterna confinato, risolvendo il seguente

---

<sup>10</sup>L'intervallo di valori di  $We$  investigati corrisponde ad un regime di instabilità convettiva in un approccio locale [15].



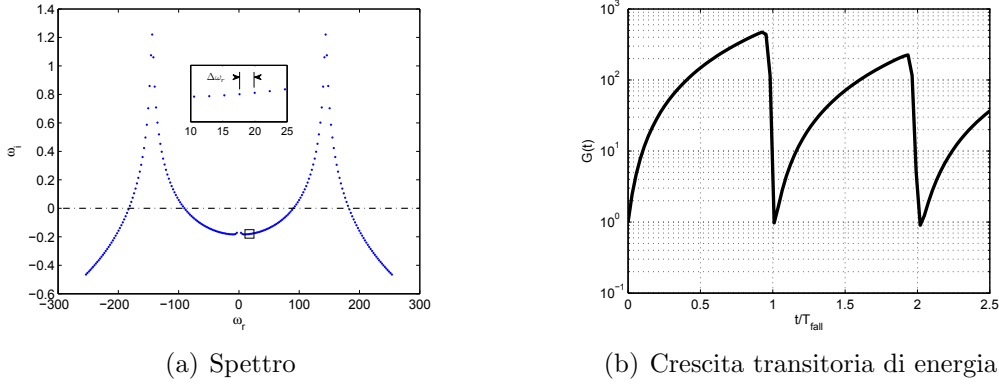


Figura 5.4: Analisi spettrale e multimodale di una lamina in gravità ( $L = 6.25$ ) in assenza di tensione superficiale ( $We = 0$ ), per modello di pressione esterna confinato ( $k = 10^4$ ).

problema agli autovalori<sup>11</sup>

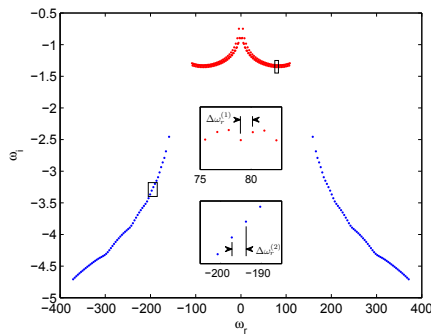
$$\left[ \begin{array}{c} -U_0 D \\ \frac{1}{WeH_0} D^2 - \frac{k}{H_0} \int_0^{L^*} dx \\ I \\ -U_0 D \end{array} \right] \begin{pmatrix} \tilde{f}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} \tilde{f}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

mentre per il modello non confinato, risolvendo un problema agli autovalori generalizzato (cfr. Appendice B.0.2). Il coefficiente di compressibilità  $k = \frac{\gamma P_0}{L^* W^*}$  nella (5.58), per tutti i calcoli condotti nella presente analisi, è stato scelto pari a  $10^4$ .

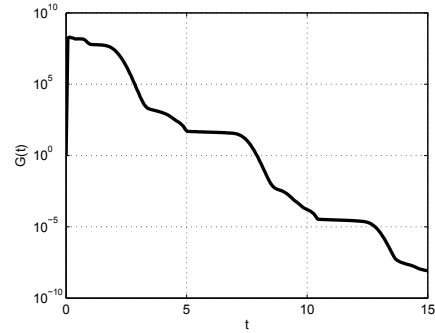
Per la chiusura del problema, coerentemente con quanto osservato in precedenza, si è fatta la posizione  $\varphi(0, t) = 0$  per le variabili del flusso. Tale condizione assicura che non venga introdotto alcun disturbo all'ingresso del dominio computazionale, per cui dopo un certo tempo qualsiasi disturbo introdotto nel flusso, in assenza di forzante esterna sicuramente si estinguerà, venendo espulso dal sistema attraverso il *boundary* di uscita. Ciò può essere visto chiaramente nelle Fig. (5.9-5.11-5.13), in cui è mostrata l'evoluzione spazio-temporale di un disturbo Gaussiano inizialmente localizzato in prossimità dell'ingresso, per differenti valori del numero di  $We$  del flusso. Indipendentemente dal numero e velocità dei disturbi nei diversi casi, si nota la completa quiescenza per lo stato del flusso dopo un tempo sufficiente a che tutti i disturbi introdotti siano stati convetti fuori dal campo di moto.

Diverso è il caso in cui è considerata l'interazione con l'ambiente esterno, in particolar modo quando essa si estrinseca attraverso un meccanismo

<sup>11</sup>Si è indicato con  $D, D^2$  gli operatori spettrali di derivata prima e seconda. Per ulteriori dettagli cfr. Appendice B.



(a) Spettro



(b) Crescita transitoria di energia

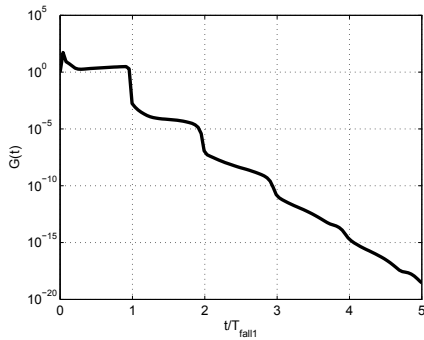
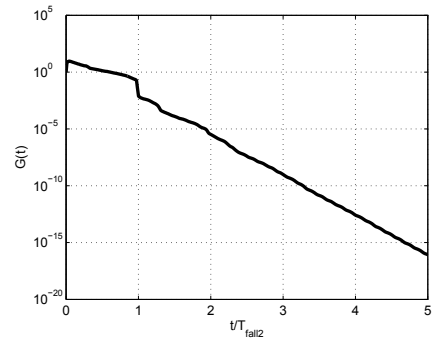

 (c) Crescita transitoria del ramo esterno  
(blu)

 (d) Crescita transitoria del ramo interno  
(rosso)

Figura 5.5: Analisi spettrale e multimodale di una lamina in gravità ( $L = 6.25$ ) in presenza di tensione superficiale ( $We = 0.25$ ), per modello di pressione esterna confinato ( $k = 10^4$ ).

globale indotto attraverso il modello della camera d'aria. In tal caso, la presenza di un termine di reazione, nella forma del contributo integrale nella (5.58), porta l'evoluzione temporale del disturbo introdotto ad autosostenersi anche dopo la completa espulsione del disturbo originario. In questo caso, è fondamentale il ruolo giocato dalla tensione superficiale nella velocità di smorzamento dei disturbi, alimentati dal meccanismo globale di mutua interazione aria-liquido. Come mostrato nelle Fig. (5.4-5.5), la soluzione del problema esibisce caratteristiche che possono portare sia all'instabilità lineare che ad una evoluzione oscillante dell'energia del sistema, in relazione al valore del numero di  $We$  del flusso. Più specificamente, le Fig. (5.4a-5.5a) mostrano dei caratteristici spettri della soluzione ottenuta nei casi di  $We = 0$  e  $We = 0.25$ , rispettivamente. Entrambi gli spettri sono caratterizzati da una assoluta simmetria dei rami rispetto all'asse immaginario, ma presentano un

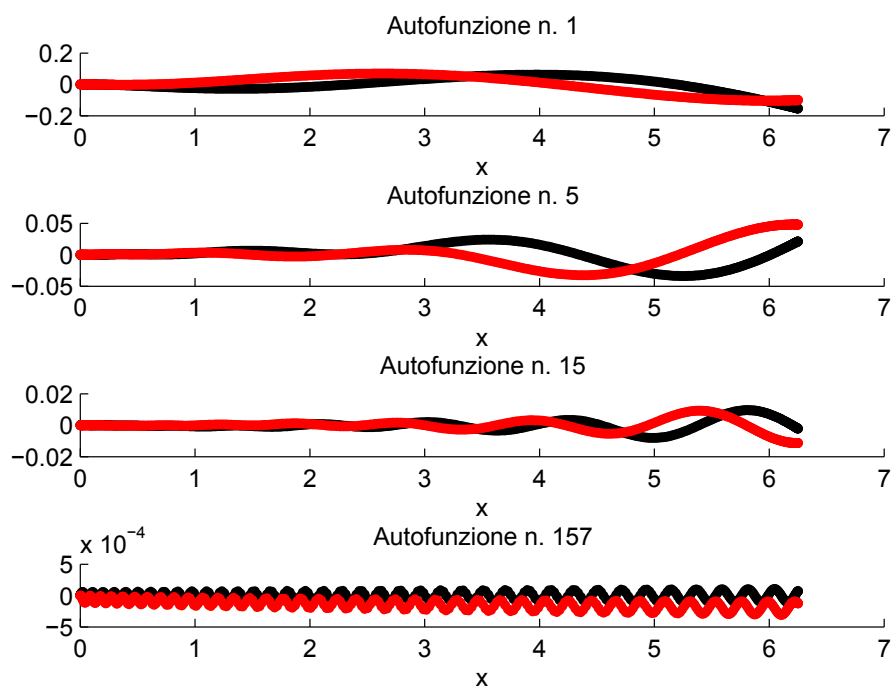


Figura 5.6: Selezione di autofunzioni del problema agli autovalori (5.58), per  $We = 0.4$  ed  $L = 6.25$ . Dall'alto verso il basso:  $1^a$ ,  $5^a$ ,  $15^a$ ,  $157^a$  autofunzione (ordinate a  $|\omega_r|$  crescente). Parte reale (nero), parte immaginaria (rosso).

differente comportamento di stabilità modale. Coerentemente con quanto ottenuto in [34], in assenza di tensione superficiale i modi a frequenza elevata si presentano instabili pur conservando la medesima equispaziatura dello spettro<sup>12</sup>. Ciò è consistente con la circostanza che, per  $We = 0$ , la (5.46) presenta due soluzioni coincidenti, ovvero una sola caratteristica lungo la quale si propagano tutti i disturbi alla velocità di caduta *Torricelliana*. Pertanto lo spettro di Fig. (5.4a) presenta un unico ramo, lungo il quale gli autovalori sono equispaziati di  $\Delta\omega_r = \frac{2\pi}{T_{fall}}$ , con  $T_{fall}$  tempo di caduta nel moto uniformemente accelerato. Al contrario, in presenza di tensione superficiale lo spettro del problema, pur conservando le proprietà di simmetria rispetto all'asse immaginario, presenta la completa stabilizzazione di tutti gli autova-

<sup>12</sup>La caratteristica principale dello spettro dell'operatore di evoluzione dei disturbi sinusoidali è che, indipendentemente dal modello di pressione adottato, ciascun ramo ha autovalori quasi perfettamente equispaziati nella loro parte reale.

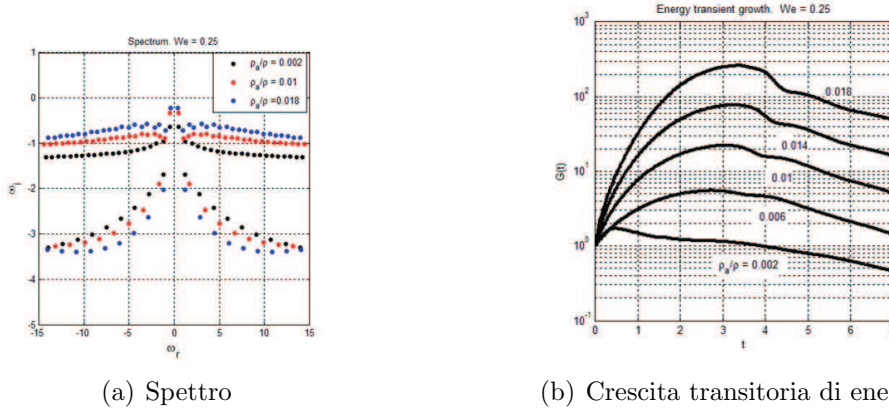


Figura 5.7: Analisi spettrale e multimodale di una lamina in gravità ( $L = 20$ ) al variare del rapporto di densità aria-liquido, per modello di pressione esterna non confinato. Valori corrispondenti a  $We = 0.25$ .

lori ad elevata frequenza responsabili dell'instabilità modale a  $We = 0$ . La stabilizzazione dello spettro in Fig. (5.5a) conferma, dunque, il ruolo della tensione superficiale come agente stabilizzante per il comportamento modale dei disturbi, come già ipotizzato in [34]. Inoltre, sempre in Fig. (5.5a) è possibile notare uno sdoppiamento dell'intero spettro del problema, con la generazione di due differenti rami, entrambi simmetrici rispetto all'asse immaginario, e ciascuno di essi composto da autovalori quasi perfettamente equispaziati nella loro parte reale di  $\Delta\omega_r^{1,2} = \frac{2\pi}{T_{cross}^{1,2}}$ . Tale comportamento, ancora una volta è giustificabile da un'indagine della (5.46) che mostra, per  $We \neq 0$ , la presenza di due velocità caratteristiche alle quali si propagano i disturbi nella lamina. I tempi di attraversamento del dominio,  $T_{cross}^{1,2}$ , responsabili della spaziatura dello spettro, sono dati proprio dall'integrazione su tutta la lamina di tali velocità caratteristiche:

$$T_{cross}^{1,2} = \int_0^{L^*} \frac{dx}{U_0 \pm \sqrt{2WeU_0}}. \quad (5.59)$$

Tali tempi caratteristici, per il caso di Fig. (5.5a) sono stati valutati ( $T_{cross}^1 = 1.8$ ,  $T_{cross}^2 = 5.38$ ) e correlati alla spaziatura tra due qualsiasi autovalori contigui di ciascun ramo, misurata lungo l'asse reale ( $\Delta\omega_r^1, \Delta\omega_r^2$ ). La spaziatura è risultata fortemente in accordo con le due frequenze di caduta  $f_{cross}^{1,2} = \frac{2\pi}{T_{cross}^{1,2}}$ .

Contestualmente all'analisi spettrale, le Fig. (5.4a - 5.5a) mostrano il comportamento evolutivo della funzione di crescita dell'energia dei disturbi, ottenuta dalla sovrapposizione di molti modi stabili non ortogonali dello

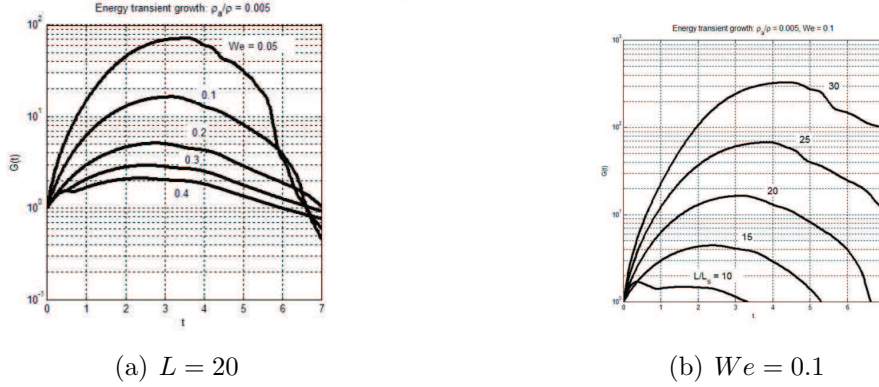


Figura 5.8: Effetti della tensione superficiale (a) e del non parallelismo (b) sulla crescita transitoria di energia, per modello di pressione esterna non confinato. Valori corrispondenti a  $\frac{\rho_a}{\rho} = 0.005$ .

spettro lineare. In tal caso l'energia del sistema è misurata dalla (5.50), particolarizzata per lamina *slender*

$$E'_s = \int_0^{L^*} H v'^2 dx + 2We \int_0^{L^*} \left( \frac{\partial f'}{\partial x} \right)^2 dx.$$

La dimensione  $N$  del sottospazio  $S^N$  è stata scelta verificando il raggiungimento della convergenza della soluzione all'aumentare del numero di automodi utilizzati per il calcolo della crescita, ed è risultata fortemente condizionata della presenza o meno della tensione superficiale. Per  $We = 0$ , un numero di automodi pari a  $N = 100$  è risultato sufficiente al raggiungimento della convergenza sulla curva di crescita dell'energia. In tal caso la funzione di crescita è stata ottenuta attraverso la proiezione sui soli modi a bassa frequenza dello spettro, dal momento che i modi a frequenza maggiore risultavano asintoticamente instabili. La crescita ottenuta è risultata in accordo con quella ricavata in [34], mostrando un comportamento fortemente oscillante con periodo costante pari al tempo di caduta della lamina (la scala dei tempi in Fig. (5.4b) è scalata rispetto a  $T_{fall}$ ). Allo stesso tempo, tuttavia, l'energia totale del sistema diminuisce, venendo espulsa con continuità dal sistema attraverso il boundary di uscita. Qui il meccanismo fisico legato all'andamento oscillante dell'energia nel sistema è dovuto alla reazione globale mutuamente indotta tra la lamina ed il gas contenuto nella camera d'aria. La natura globale della risposta del gas esterno alla deformazione dell'interfaccia fa sì che appena un pacchetto d'onda è convetto fuori dal dominio del flusso subito se ne autogenera un altro, con un effetto complessivo, tuttavia, di riduzione dell'energia

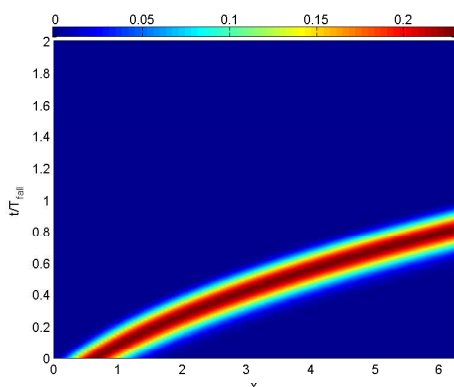


Figura 5.9:  $We = 0$ ,  $L = 6.25$   
e  $\tilde{p}^a = 0$ .

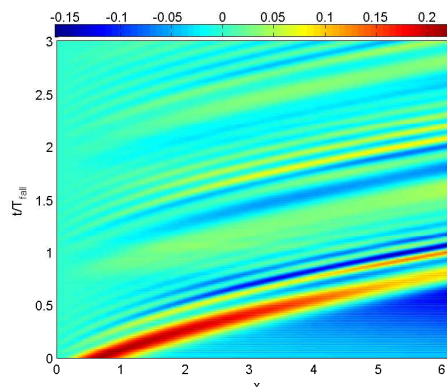


Figura 5.10:  $We = 0$ ,  $L = 6.25$   
e  $\tilde{p}^a \neq 0$ .

globale del sistema. In tal modo, dopo un transitorio sufficientemente lungo ogni disturbo andrà a smorzarsi.

Il calcolo della curva di crescita dell'energia per  $We \neq 0$  è risultato computazionalmente più oneroso. Per il caso di Fig. (5.5) il numero di automodi necessario al calcolo della corretta funzione di crescita  $G(t)$  è risultato pari a  $N = 200$ . La ragione di questo risiede nella presenza del doppio ramo dello spettro di Fig. (5.5a). In tal caso, i modi a frequenza più elevata contribuiscono alla crescita transitoria di energia del sistema e devono essere considerati in numero sufficiente affinché si abbia la convergenza sulla curva di crescita. D'altra parte, i modi di questo ramo sono costituiti da autofunzioni fortemente oscillanti, essendo relative a disturbi a frequenza molto elevata, e ciò comporta la necessità di utilizzare un mesh molto fitto nello spazio per riuscire a risolvere correttamente la struttura fortemente oscillante di tali modi, con conseguente aumento dell'onere computazionale. In Fig. (5.6) è mostrata una selezione di autofunzioni relative ad un tipico spettro a doppio ramo ( $We = 0.4$ ,  $L = 6.25$ ), per il modello di pressione in esame: è possibile osservare la differente struttura dell'ultima autofunzione, relativa al II° ramo, rispetto alle precedenti. Le autofunzioni dei due rami hanno un carattere fortemente non ortogonale. Questo è possibile notarlo dall'analisi delle Fig. (5.5b-c-d), in cui è mostrata la crescita transitoria di energia calcolata considerando il simultaneo effetto di accoppiamento dei due rami (Fig. 5.5b) o il solo contributo di ciascuno dei due, Fig. (5.5c-d). Le curve di crescita ottenute dalla sovrapposizione di solo un ramo dello spettro hanno l'asse dei tempi scalato rispetto ai tempi caratteristici dati dalla (5.59), pari a  $T_{cross}^1 = 1.8$  e  $T_{cross}^2 = 5.38$  per il caso considerato. In tal modo è possibile osservare, dalle Fig. (5.5c-d), che la curva di amplificazione ottimale

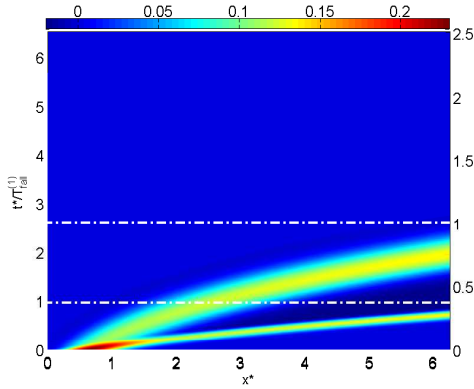


Figura 5.11:  $We = 0.25$ ,  $L = 6.25$   
e  $\tilde{p}^a = 0$ .

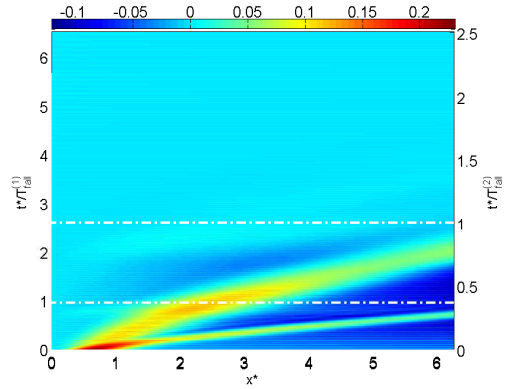


Figura 5.12:  $We = 0.25$ ,  $L = 6.25$   
e  $\tilde{p}^a \neq 0$ .

dell'energia globale del sistema, calcolata considerando i contributi separati delle autofunzioni relative ai due rami dello spettro di Fig. (5.5a), esibisce un'evoluzione temporale caratterizzata da oscillazioni tempo-periodiche, con periodo corrispondente ai  $T_{cross}^{1,2}$ , con un valore di picco della crescita relativamente basso in entrambi i casi. Tuttavia, considerando i contributi accoppiati dei due rami la crescita totale dell'energia del sistema mostra una forte amplificazione transitoria, indotta dalla struttura altamente non normale delle autofunzioni dei due rami. In questo caso, in (Fig. 5.5b) si osserva chiaramente un'evoluzione tempo-periodica dell'energia legata al doppio periodo, con diminuzione nel tempo della stessa molto più veloce del caso di Fig. (5.4b) per l'effetto smorzante della tensione superficiale.

La presenza di un doppio ramo dello spettro, correlato alla presenza di due curve caratteristiche associate al sistema (5.38), per  $We \neq 0$  si conserva naturalmente anche nel modello di pressione esterna non confinato. La Fig. (5.7a) mostra tipici spettri del problema ottenuti variando il rapporto di densità aria-liquido  $\frac{\rho_a}{\rho}$ . In tal caso, gli autovalori di ciascun ramo hanno una frequenza comparabile e la crescita transitoria di energia del sistema, mostrata in Fig. (5.7b) per il caso  $We = 0.25$  ed  $L = 20$ , non presenta più il tipico andamento oscillante del modello del cuscino d'aria. Questo è dovuto ad un diverso meccanismo di interazione aria-liquido, di tipo locale, per il quale il termine integrale (5.24) non è più un termine di reazione ma è interpretabile come un termine di massa aggiunta. L'effetto sulla crescita ottimale di energia  $G(t)$  dato dalla tensione superficiale e dall'accelerazione gravitazionale è mostrato nelle Fig. (5.8a-b). Per assegnati valori del grado di non parallelismo del flusso ( $L = 20$ ) e del rapporto di densità ( $\frac{\rho_a}{\rho} = 0.005$ ), la Fig. (5.8a) suggerisce che la tensione superficiale ha un effetto sostanzial-

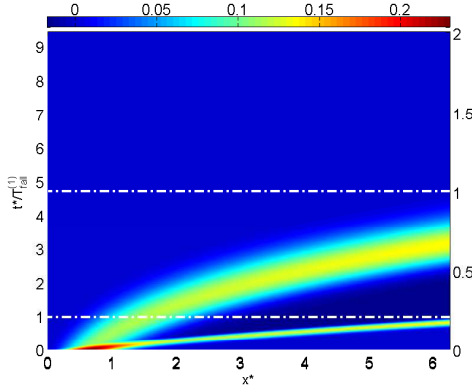


Figura 5.13:  $We = 0.4$ ,  $L = 6.25$   
e  $\tilde{p}^a = 0$ .

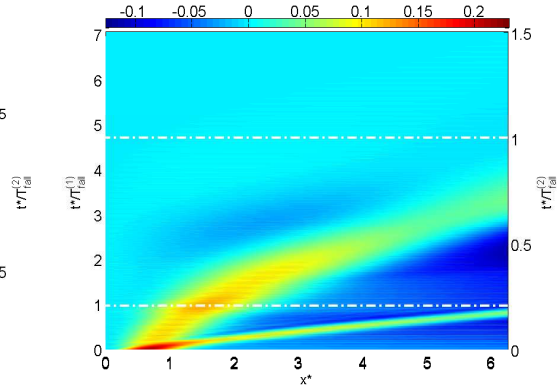


Figura 5.14:  $We = 0.4$ ,  $L = 6.25$   
e  $\tilde{p}^a \neq 0$ .

mente smorzante sulla crescita transitoria. Al contrario, quest'ultima risulta invece essere amplificata dagli effetti del non-parallelismo, come mostrato in Fig. (5.8b) in cui, per assegnati valori di tensione ( $We = 0.1$ ) e rapporto di densità ( $\frac{\rho^a}{\rho} = 0.005$ ), sono raffigurate differenti curve di crescita transitoria all'aumentare ( $\uparrow L$ ) degli effetti del non-parallelismo del flusso.

Allo scopo di rafforzare ulteriormente la comprensione dei risultati ottenuti dall'analisi spettrale e non modale del sistema (5.38), nelle figure restanti (da 5.9 a 5.14) sono mostrate le simulazioni numeriche dirette dell'operatore di evoluzione lineare, per diversi valori della tensione superficiale ed in presenza o meno del termine di pressione esterna<sup>13</sup>. La simulazione numerica è stata condotta implementando un  $\vartheta$ -metodo al I° ordine per l'integrazione temporale

$$[\underline{\mathcal{M}} - \vartheta \Delta t \underline{\mathcal{A}}] \varphi^{n+1} = [\underline{\mathcal{M}} + (1 - \vartheta) \Delta t \underline{\mathcal{A}}] \varphi^n$$

con  $\underline{\mathcal{M}}$  operatore dei termini instazionari,  $\underline{\mathcal{A}}$  operatore spaziale e  $\Delta t$  time step tra le soluzioni a due istanti successivi  $\varphi^n$  e  $\varphi^{n+1}$ . Nelle Fig. (5.9-5.11-5.13) è riportata l'evoluzione spazio-temporale di un disturbo iniziale di forma gaussiana per la sola deformata di interfaccia

$$f_0(x, 0) = cx^2 \cdot e^{(cx)^2}, \quad v_0(x, 0) = 0$$

con  $c$  costante opportuna, per diversi valori del numero di Weber ed in assenza del termine di reazione integrale. Per gli stessi valori di tensione superficiale e lunghezza adimensionale del dominio, le Fig. (5.10-5.12-5.14) mostrano le evoluzioni spazio-temporali in presenza del termine di reazione indotto dalla camera d'aria. Per  $We \neq 0$ , indipendentemente dalla presenza del gas

<sup>13</sup>Quando presente, il termine di pressione si riferisce sempre al contributo fornito dal modello del cuscinio d'aria.



esterno, il disturbo iniziale si scinde in due disturbi che viaggiano lungo le caratteristiche date dalla (5.46). Per chiarire meglio tale dinamica l'asse dei tempi è stato scalato rispetto ai tempi caratteristici ottenuti dalla (5.59). Si nota che il disturbo introdotto esce completamente dal dominio del flusso dopo un tempo pari proprio al tempo caratteristico  $T_{cross}^{1,2}$  di attraversamento della lamina da parte delle due caratteristiche. Inoltre, per  $We = 0$ , in presenza del termine di reazione indotto dal gas ambiente, è chiaramente visibile la formazione del pacchetto d'onda a partire dal disturbo compatto iniziale nel mentre viene trasportato a valle, ed la successiva, ripetuta, formazione di un nuovo pacchetto d'onda, innescato dall'uscita del precedente. Tale effetto risulta fortemente attenuato per  $We \neq 0$ , per lo smorzamento esercitato dalla tensione superficiale.

## 5.9 Conclusioni

Nel presente capitolo è stato sviluppato un modello lineare per l'analisi dell'evoluzione instazionaria e del comportamento di stabilità globale di un flusso liquido verticale ad interfaccia libera. Il comportamento è definito globale perchè relativo all'intero sistema fluido nel suo complesso, ovvero la sua dinamica è governata da una sovrapposizione lineare multipla di automodi del sistema e non esclusivamente dal più significativo. Nella prima parte è descritto lo sviluppo formale del modello matematico monodimensionale alla base delle diverse equazioni di governo per le due famiglie di disturbi presenti. L'interazione con un campo di pressione esterna instazionaria è considerata attraverso lo sviluppo di due differenti modelli che trattano la mutua interazione aria-liquido attraverso l'interfaccia *compliant* mediante due differenti meccanismi, di tipo globale e locale.

L'analisi ha mostrato che gli effetti della tensione superficiale giocano un ruolo cruciale nelle dinamiche dei disturbi di tipo sinuoso. Diversamente dal caso di assenza di tensione superficiale, per il quale il sistema può essere globalmente instabile in presenza di un meccanismo di reazione globale con l'ambiente esterno, si è trovato che il sistema risulta stabilizzato dall'azione della tensione. Inoltre, dal momento che le dinamiche instazionarie sono descritte da una PDE del II° ordine di tipo iperbolico, lo spettro di autovalori è caratterizzato da due rami, ciascuno dei quali corrispondente ad automodi propagantisi lungo le due curve caratteristiche. Ambo i rami dello spettro mostrano una equispaziatura tra la parte reale di autovalori contigui, e tale spaziatura risulta strettamente connessa con i tempi caratteristici di attraversamento dell'intero campo di flusso da parte dei disturbi.

Tale risultato, tipico dei sistemi governati dalla convezione, è ulteriormente confermato dalla simulazione numerica diretta delle equazioni di governo, che ha mostrato come l'evoluzione di un disturbo interfacciale Gaussiano imposto al campo di moto evolva nel dominio dello spazio-tempo, scindendosi in due pacchetti d'onda evolventi alle velocità attese dalle predizioni teoriche. Infine, un'ulteriore conferma dei risultati ottenuti dall'analisi spettrale è stata ottenuta attraverso l'analisi non modale, condotta allo scopo di calcolare l'evoluzione temporale dell'amplificazione ottimale di energia dei disturbi (qui considerata nel duplice contributo di energia cinetica e lavoro di tensione superficiale), ovvero la massima amplificazione di energia rispetto a tutte le perturbazioni iniziali.

# Appendice A

## Approccio perturbativo in $\varepsilon^2$

Usando le scale di riferimento

$$\begin{aligned} x_r &= U_{0_i}^2/g, & y_r &= H_i, & p_r &= \rho U_{0_i}^2, \\ u_r &= x_r/t_r = U_{0_i}, & v_r &= y_r/t_r = \varepsilon U_{0_i} \end{aligned}$$

le equazioni di governo (3.1-3.3), (3.6) e (3.10), nell'ipotesi di moto stazionario, possono essere riscritte in forma adimensionale come

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + 1 \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial p}{\partial y} \\ v_{\pm} &= u_{\pm} \frac{\partial Y_{\pm}}{\partial x} \\ p_{\pm} &= P_{\pm}^a \mp \text{We} \varepsilon^2 \frac{\frac{\partial^2 Y_{\pm}}{\partial x^2}}{\left[ 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial Y_{\pm}}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}} \end{aligned} \right. \quad (\text{A.1})$$

Il sistema (A.1) può essere trattato, nell'ipotesi di lamina *slender* ( $\varepsilon \ll 1$ ), attraverso uno sviluppo perturbativo parametrico nel piccolo parametro  $\varepsilon^2$ . Nella presente appendice saranno derivate le soluzioni asintotiche ai vari ordini in  $\varepsilon^2$  per il caso di lamina simmetrica, ovvero nel caso in cui la pressione

del gas esterno alla lamina sia costante su ciascun lato e sia nullo il salto di pressione esterna alle interfacce. Ciò comporta che  $P_+^a = P_-^a = \text{const}$  e che  $\bar{v} = \bar{Y} = 0$ , dove, al solito, la media tra i valori alle interfacce (3.5) per una generica variabile  $\varphi$  si è indicata con  $\bar{\varphi}$ . Naturalmente l'ipotesi di simmetria per la lamina consente di stabilire una relazione univoca tra la posizione delle interfacce  $Y_{\pm}(x)$  e lo spessore stesso della lamina  $H(x)$ , come segue:  $Y_{\pm}(x) = \pm H(x)/2$ .

Assumendo un'espansione in serie di potenze per le variabili del flusso nel piccolo parametro  $\varepsilon^2$ :

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon^2 \varphi_1 + \varepsilon^4 \varphi_2 + \dots$$

e sostituendo queste posizioni nelle equazioni del sistema (A.1) si ottengono, a cascata, sistemi di equazioni ai differenti ordini raggruppando selettivamente termini con la stessa potenza di  $\varepsilon^2$ . L'approssimazione all'ordine più basso risulta essere:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} = 1 - \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$v_{0\pm} = u_{0\pm} \frac{\partial Y_{0\pm}}{\partial x} \quad (\text{A.5})$$

$$p_{0\pm} = P_{\pm}^a = \text{const.} \quad (\text{A.6})$$

Per rendere il sistema chiuso bisogna imporre la condizione di irrotazionalità, che all'ordine zero risulta essere:

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = 0. \quad (\text{A.7})$$

Le (A.4) e (A.6) immediatamente danno  $p_0 = P_a = \text{const}$ , ovvero che la pressione è isobara all'ordine zero, mentre sostituendo la (A.7) nella (A.3), tenuto conto della costanza di  $p_0$  si ottiene:

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = 1$$

che è la soluzione di caduta libera *torricelliana*. Ancora, integrando in  $y$  la (A.2) si ottiene, in conseguenza della (A.7), la seguente relazione per  $v$ , all'ordine zero:

$$v_0 = -\frac{\partial u_0}{\partial x} y + c(x)$$

dove  $c(x)$  è una opportuna funzione di integrazione da determinare mediante la (A.5). Al riguardo, particularizzando quest'ultima sull'interfaccia, per la (A.5), si ha:

$$u_{0\pm} \frac{\partial Y_{0\pm}}{\partial x} = -\frac{\partial u_{0\pm}}{\partial x} Y_{0\pm} + c(x)$$

da cui, sommando<sup>1</sup> e sottraendo membro a membro, si ottengono le relazioni

$$\begin{cases} u_0 \frac{\partial h_0}{\partial x} = -\frac{\partial u_0}{\partial x} h_0 \\ u_0 \frac{\partial \bar{Y}_0}{\partial x} = -\frac{\partial u_0}{\partial x} \bar{Y}_0 + c(x) \end{cases}$$

da cui si ottiene (dal momento che  $\bar{Y}_0$ )  $c(x) = 0$  and  $u_0 h_0 = 1$ . In conclusione, la soluzione all'ordine zero in  $\varepsilon^2$  per le variabili del problema risulta essere:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sqrt{1+2x} \\ v_0(x, y) &= -\frac{y}{u_0(x)} \\ p_0 &= P_a = \text{const.} \\ h_0(x) &= \frac{1}{u_0(x)}. \end{aligned}$$

Analogamente, al primo ordine in  $\varepsilon^2$  il sistema (A.1) risulta essere:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} \quad (\text{A.9})$$

$$u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{\partial p_1}{\partial y} \quad (\text{A.10})$$

$$v_{1\pm} + \frac{\partial v_0}{\partial y} Y_{1\pm} = u_{0\pm} \frac{\partial Y_{1\pm}}{\partial x} + u_{1\pm} \frac{\partial Y_{0\pm}}{\partial x} \quad (\text{A.11})$$

$$p_{1\pm} = \mp W e \frac{\partial^2 Y_{0\pm}}{\partial x^2} \quad (\text{A.12})$$

dove le condizioni di interfaccia sono state collocate in  $y = Y_{0\pm}^2$ . Al contempo, la condizione di irrotazionalità al primo ordine in  $\varepsilon^2$  risulta:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial x}. \quad (\text{A.13})$$

<sup>1</sup>Per la simmetria si ha che:  $u_{0+}(x) = u_{0-}(x) = u_0(x)$ .

<sup>2</sup>Per scrivere le condizioni all'interfaccia bisogna osservare che vale:

$$\varphi_{\pm} = \varphi_0(x, y_{\pm}) + \varepsilon^2 \varphi_1(x, y_{\pm}) + \dots O(\varepsilon^4)$$

da cui, per quanto già ottenuto all'ordine zero, si ricava la seguente relazione per  $u_1$ :

$$u_1(x, y) = \frac{y^2}{2u_0^3(x)} + a(x) \quad (\text{A.14})$$

ed analogamente per  $p_1$  dalla (A.10):

$$p_1(x, y) = -\frac{y^2}{u_0^2(x)} + b(x) \quad (\text{A.15})$$

dove  $a(x)$  e  $b(x)$  sono opportune funzioni di integrazione. Sostituendo la (A.15) nella (A.12), valutata in  $Y_{0+} = H_0/2$ , si ottiene facilmente l'espressione per  $b(x)$ :

$$b(x) = \frac{1}{4u_0^4} - \frac{3We}{2u_0^5}$$

Per determinare  $a(x)$  bisogna sostituire la (A.14) nella (A.9) e, manipolando opportunamente la variabili, si ottiene la seguente equazione differenziale ordinaria di I° grado a coefficienti variabili

$$u_0^2(x)a'(x) + a(x) = -u_0(x)b'(x)$$

che integrata analiticamente permette di ottenere l'espressione di  $a(x)$ :

$$a(x) = \frac{3We}{2u_0^6(x)} - \frac{1}{4u_0^5(x)} + \frac{k}{u_0(x)}$$

dove  $k$  è una costante di integrazione. Le (A.15) e (A.14) si riscrivono dunque come:

$$p_1(x, y) = -\frac{y^2}{u_0^2(x)} + \frac{1}{4u_0^4} - \frac{3We}{2u_0^5} \quad (\text{A.16})$$

$$u_1(x, y) = \frac{y^2}{2u_0^3(x)} + \frac{3We}{2u_0^6(x)} - \frac{1}{4u_0^5(x)} + \frac{k}{u_0(x)} \quad (\text{A.17})$$

da cui collocandole in  $Y_{0\pm}$  e non in  $y_{\pm}$  bisogna osservare che

$$\varphi_0(x, y_{\pm}) = \varphi_0(x, Y_{0\pm} + \varepsilon^2 Y_{1\pm} + \dots)$$

ovvero, in generale

$$\varphi_0(x, y_{\pm}) = \varphi_0(x, Y_{0\pm}) + \varepsilon^2 \left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right|_{Y_{0\pm}} Y_{1\pm} + \dots O(\varepsilon^4)$$

Per determinare la costante  $k$  bisogna *in primis* ricavare le espressioni parziali di  $v_1$  ed  $H_1$  dalle A.8) e (A.11), rispettivamente. In particolare, dalla A.8), tenuto conto della (A.17), integrando analiticamente in  $y$  si ottiene

$$v_1(x, y) = \frac{y^3}{2u_0^5(x)} + \left( \frac{9We}{u_0^8(x)} - \frac{5}{4u_0^7(x)} + \frac{k}{u_0^3(x)} \right) y \quad (\text{A.18})$$

che sostituita, insieme con la (A.17), nella (A.11) permette di ottenere, dopo opportune manipolazioni, una equazione per  $H_1 = 2Y_{1+}$ :

$$\frac{d u_0 H_1}{d x} = \frac{21We}{2u_0^9} - \frac{5}{4u_0^8} + \frac{2k}{u_0^4}.$$

Integrandola analiticamente con la condizione al contorno  $H_1(x) = 0$ , si ottiene:

$$H_1(x) = -\frac{3We}{2u_0^8} + \frac{5}{24u_0^7} - \frac{k}{u_0^3} + \frac{\bar{k}}{u_0} \quad (\text{A.19})$$

dove

$$\bar{k} = \frac{3}{2}We - \frac{5}{24} + k.$$

Pertanto, tutte le variabili  $u, v, p$  ed  $H$  sono state espresse al primo ordine e resta solo da determinare la costante  $k$ . Tale costante viene determinata imponendo il vincolo integrale

$$\int_0^{H/2} u(x, y) y = \frac{1}{2}$$

risultante dall'ipotesi di conservazione globale della massa nella lamina, che all'ordine  $\varepsilon^2$  si scrive

$$\int_0^{H_0/2} u_1(x, y) y + u_0(x) \frac{h_1(x)}{2} = 0.$$

Sostituendovi le (A.17) e (A.19) risulta  $\bar{k} = 0$ , ovvero

$$k = \frac{5 - 36We}{24}$$

da cui la soluzione completa all'ordine  $\varepsilon^2$  risulta essere:

$$u_1(x, y) = \frac{y^2}{2u_0^3(x)} + \frac{3We}{2u_0^6(x)} - \frac{1}{4u_0^5(x)} + \frac{5 - 36We}{24u_0(x)} \quad (\text{A.20})$$

$$v_1(x, y) = \frac{y^3}{2u_0^5(x)} + \left( \frac{9We}{u_0^8(x)} - \frac{5}{4u_0^7(x)} + \frac{5 - 36We}{24u_0^3(x)} \right) y \quad (\text{A.21})$$

$$p_1(x, y) = -\frac{y^2}{u_0^2(x)} + \frac{1}{4u_0^4} - \frac{3We}{2u_0^5} \quad (\text{A.22})$$

$$H_1(x) = -\frac{3We}{2u_0^8} + \frac{5}{24u_0^7} - \frac{5 - 36We}{24u_0^3} \quad (\text{A.23})$$

Le espressioni ottenute per le variabili fino al primo ordine in  $\varepsilon^2$  sono identiche a quelle ottenute in [39], eccetto per il fatto che la soluzione all'ordine zero per la componente di velocità laterale  $v_0$  ottenuta nel presente sviluppo corrisponde alla soluzione al primo ordine in  $\varepsilon^2$  in [39]. Tale discrepanza è dovuta alla differente adimensionalizzazione scelta della variabile  $v$ , che nel presente sviluppo differisce da quella adottata in [39] di un fattore  $\varepsilon^2$ .



# Appendice B

## Formulazione matriciale

Introdotta la rappresentazione mediante modi normali del campo perturbato:

$$\varphi = \tilde{\varphi}(x)e^{i\omega t} \quad (\text{B.1})$$

dove  $\varphi$  la generica variabile del disturbo, i sistemi di equazioni di governo ricavati al capitolo 5 (completo, all'ordine zero in  $\varepsilon$ , all'ordine zero in  $We$ , rispettivamente) andranno opportunamente riarrangiati in forma matriciale allo scopo di ottenere una formulazione più adatta all'analisi spettrale numerica. Dal momento che l'ordine massimo dell'operatore temporale, nel sistema di equazioni di governo, dipende dal modello scelto per trattare la pressione ambiente, nella riscrittura matriciale delle equazioni si scelto di operare, in tutti casi, su un sistema  $2 \times 2$ , riducendo, laddove necessario, il grado dell'operatore temporale mediante l'introduzione di una variabile di comodo.

Il sistema di equazioni di governo pu essere riformulato, simbolicamente, nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \end{pmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

dove per il modello del cuscino d'aria le incognite  $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$  coincidono con le variabili del flusso  $\tilde{f}, \tilde{v}$ , mentre per il modello di pressione esterna non confinato si è usufruito della posizione

$$\tilde{\varphi}_2 = \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial t}$$

con  $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{f}$ , allo scopo di ottenere un sistema evolutivo del primo ordine. Gli operatori matriciali  $\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{12}, \mathcal{A}_{21}, \mathcal{A}_{22}, \mathcal{M}_{11}, \mathcal{M}_{12}, \mathcal{M}_{21}, \mathcal{M}_{22}$  saranno espressi esplicitamente caso per caso.

Nel prosieguo con i simboli  $\mathbf{O}$  e  $\mathbf{I}$  si indicheranno rispettivamente l'operatore nullo e l'operatore identità.

**B.0.1 Modello di pressione semiconfinato****Sistema completo**

Il sistema (5.33-5.35) pu essere riformulato nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{11} &= -U \frac{\partial}{\partial x} (\cdot) & \mathcal{A}_{12} &= \mathbf{I} \\
\mathcal{A}_{21} &= \frac{2We}{H} \frac{\partial}{\partial x} \left[ F \frac{\partial}{\partial x} (\cdot) \right] - \frac{\gamma}{H} \frac{Pa}{L^* W^* - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{L^*} H dx} \int_0^{L^*} (\cdot) dx & \mathcal{A}_{22} &= -U \frac{\partial}{\partial x} (\cdot) \\
\mathcal{M}_{11} &= \mathbf{I} & \mathcal{M}_{12} &= \mathbf{O} \\
\mathcal{M}_{21} &= \mathbf{O} & \mathcal{M}_{22} &= \mathbf{I}
\end{aligned}$$

**Sistema slender**

Il sistema (5.38) pu essere riformulato nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{11} &= -U_0 \frac{\partial}{\partial x} (\cdot) & \mathcal{A}_{12} &= \mathbf{I} \\
\mathcal{A}_{21} &= \frac{2We}{H_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\cdot) - \frac{\gamma Pa}{L^* W^* H_0} \int_0^{L^*} (\cdot) dx & \mathcal{A}_{22} &= -U_0 \frac{\partial}{\partial x} (\cdot) \\
\mathcal{M}_{11} &= \mathbf{I} & \mathcal{M}_{12} &= \mathbf{O} \\
\mathcal{M}_{21} &= \mathbf{O} & \mathcal{M}_{22} &= \mathbf{I}
\end{aligned}$$

**Sistema approssimato a piccoli numeri di Weber**

Il sistema (5.42) pu essere riformulato nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{11} &= -U_0 \frac{\partial}{\partial x} (\cdot) & \mathcal{A}_{12} &= \mathbf{I} \\
\mathcal{A}_{21} &= -\frac{\gamma}{H_0} \frac{Pa}{L^* W^* - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{L^*} H_0 dx} \int_0^{L^*} (\cdot) dx & \mathcal{A}_{22} &= -U_0 \frac{\partial}{\partial x} (\cdot) \\
\mathcal{M}_{11} &= \mathbf{I} & \mathcal{M}_{12} &= \mathbf{O} \\
\mathcal{M}_{21} &= \mathbf{O} & \mathcal{M}_{22} &= \mathbf{I}
\end{aligned}$$

### B.0.2 Sistema *slender* con modello di pressione non confinato

Ponendo  $g = \partial f / \partial t$  allo scopo di ottenere un sistema evolutivo del primo ordine, il sistema (5.38) pu essere riformulato nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{11} &= \mathbf{O} & \mathcal{A}_{12} &= \mathbf{I} \\
 \mathcal{A}_{21} &= -U_0(U_0 - 2We) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\cdot) - \frac{\partial}{\partial x} (\cdot) & \mathcal{A}_{22} &= -2U_0 \frac{\partial}{\partial x} (\cdot) \\
 \mathcal{M}_{11} &= \mathbf{I} & \mathcal{M}_{12} &= \mathbf{O} \\
 \mathcal{M}_{21} &= \mathbf{O} & \mathcal{M}_{22} &= \mathbf{I} - \frac{2\rho_a L^*}{\rho\pi H} \int_0^1 (\cdot) \ln|x^* - \xi| d\xi
 \end{aligned}$$

Tali operatori, all'atto dell'implementazione numerica, sono stati ulteriormente ridotti alla forma piú semplice, evitando il piú possibile la presenza di prodotti operatoriali indesiderabili ai fini della precisione numerica.

# Bibliografia

- [1] C. K. Aidun *Mechanics of a free-surface liquid film flow*. Trans. ASME J. Appl. Mech. **54**, 951 (1987).
- [2] E. Akervik, J. Hoepffner, U. Ehrenstein and D. S. Henningson *Optimal growth, model reduction and control in a separated boundary-layer flow using global eigenmodes*. J. Fluid Mech. **579**, 305 (2007).
- [3] G.K. Batchelor *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press (1967).
- [4] C. M. Bender, S. A. Orszag *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. Springer (1999).
- [5] R. L. Bisplinghoff, H. Ashley and R. L. Halfman *Aeroelasticity*. Dover Publications (1957).
- [6] J.P. Boyd, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Springer (1989).
- [7] D. R. Brown *A study of the behaviour of a thin sheet of moving liquid*. J. Fluid Mech. **10**, 297 (1961).
- [8] P. Brunet, C. Clanet, and L. Limat *Transonic liquid bells*. Phys. Fluids **16**, 2668 (2004).
- [9] I. D. Chang *Navier-Stokes solutions at large distance from a finite body*. J. Math. Mech. **10**, 811 (1961).
- [10] D. L. Chubb, F.D. Calfo, M. W. McConley, M. S. McMaster, and A. A. Afjeh *Geometry of thin liquid sheet flows*. AIAA J. **32**, 1325 (1994).
- [11] N. S. Clarke *Two-dimensional flow under gravity in a jet of viscous liquid*. J. Fluid Mech. **31**, 481 (1968).
- [12] G. Coppola and L. de Luca *On transient growth oscillations in linear models*. Phys. Fluids **18**, 078104 (2006).

- [13] L. de Luca and C. Meola *Surfactant effects on the dynamics of a thin liquid sheet*. J. Fluid Mech. **300**, 71 (1995).
- [14] L. de Luca and M. Costa *Two-dimensional flow of a liquid sheet under gravity*. Comput. Fluids, **24**, 401 (1995).
- [15] L. de Luca and M. Costa *Instability of a spatially developing liquid sheet*. J. Fluid Mech. **331**, 127 (1997).
- [16] L. de Luca *Experimental investigation of the global instability of plane sheet flows*. J. Fluid Mech. **399**, 355 (1999).
- [17] J. Eggers and T. F. Dupont *Drop formation in a one-dimensional approximation of the Navier–Stokes equation*. J. Fluid Mech. **262**, 205 (1994).
- [18] D. S. Finnicum, S. J. Weinstein and K. J. Ruschak *The effect of applied pressure on the shape of a two-dimensional liquid curtain falling under the influence of gravity*. J. Fluid Mech. **255**, 647 (1993).
- [19] W. W. Hagerty, J. F. Shea *A study of the stability of plane liquid sheets*. J. of Appl. Mech. **22**, 509 (1955).
- [20] A. Kornecki, E. H. Dowell, J. O’Brien *On the aeroelastic instability of two-dimensional panels in uniform incompressible flow*. J. of Sound and Vibr. **47**, 163 (1976).
- [21] N. Le Grand-Piteira, P. Brunet, L. Lebon and L. Limat *Propagating wave pattern on a falling liquid curtain*. Phys. Rev. E **74**, 026305 (2006).
- [22] X. Li, R. S. Tankin *On the temporal instability of a two-dimensional viscous liquid sheet*. J. Fluid Mech., **226**, 426 (1991).
- [23] C. C. Lin *The theory of hydrodynamic stability*. Cambridge University Press, (1966).
- [24] S. P. Lin *Stability of a viscous liquid curtain*. J. Fluid Mech. **104**, 111 (1981).
- [25] S. P. Lin, Z. W. Lian and B. J. Creighton *Absolute and convective instability of a liquid sheet*. J. Fluid Mech. **220**, 673 (1990).
- [26] C. Mehring and W. A. Sirignano *Nonlinear capillary wave distortion and disintegration of thin planar liquid sheets*. J. Fluid Mech. **388**, 69 (1999).

- [27] W. G. Pritchard *Instability and chaotic behaviour in a free-surface flow*. J. Fluid Mech. **165**, 1 (1986).
- [28] J. I. Ramos *Planar liquid sheets at low Reynolds numbers*. Int. J. Numer. Methods Fluids **22**, 961 (1996).
- [29] J. I. Ramos *Asymptotic Analysis and Stability of Inviscid Liquid Sheets*. J. Math. Anal. Appl. **250**, 512 (2000).
- [30] S. C. Reddy and D. S. Henningson *Energy growth in viscous channel flows*. J. Fluid Mech., **252**, 209 (1993).
- [31] G. Rocco, G. Coppola and L. de Luca *The VOF method applied to the numerical simulation of a 2D liquid jet under gravity*. in *Advances in Fluid Mechanics VIII*, WIT Transactions on Engineering Sciences, pp. 207-217 (2010).
- [32] J. S. Roche, N. Le Grand, P. Brunet, L. Lebon, and L. Limat *Perturbations on a liquid curtain near break-up: Wakes and free edges*. Phys. Fluids **18**, 082101 (2006).
- [33] P. J. Schmid and D. S. Henningson *Optimal energy growth in Hagen-Poiseuille flow*. J. Fluid Mech., **277**, 197 (1994).
- [34] P. J. Schmid and D. S. Henningson *On the stability of a falling liquid curtain*. J. Fluid Mech., **463**, 163 (2002).
- [35] H. B. Squire *Investigation of the instability of a moving liquid film*. British Journal of Applied Physics, **4**, 167 (1953).
- [36] L.N. Trefethen *Spectral Methods in Matlab*.
- [37] M. Van Dyke *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. (The Parabolic Press, Stanford, CA, 1975).
- [38] J.A.C. Weideman, S.C. Reddy *A MATLAB Differentiation Matrix Suite* (2000).
- [39] S. J. Weinstein, A. Clarke, A. G. Moon and E. A. Simister *Time-dependent equations governing the shape of a two-dimensional liquid curtain, Part 1: Theory*. Phys. Fluids **9**, 3625 (1997).
- [40] S. J. Weinstein and K. J. Ruschak *Coating Flows*. Annu. Rev. Fluid Mech. **36**, 29 (2004).