Dottorato di Ricerca in Filologia Classica, cristiana e medioevale-umanistica,
greca e latina
XVI ciclo

Il **Liber Abaci** *di Leonardo Pisano detto il Fibonacci,*
edizione critica, traduzione e commento dei libri V-VII

Tutor: Prof. Giuseppe Germano **Dottoranda:** Concetta Carotenuto

Indice

Introduzione.

Il fatto che un'opera d'importanza capitale per la storia della matematica occidentale, cui si deve l'introduzione sistematica del sistema di numerazione indo-arabo in Europa, non abbia ancora avuto un'edizione critica e solo di recente, parliamo del 2002, sia stata tradotta per la prima volta in una lingua moderna di cultura, non smette di stupire chi si approcci allo studio del *Liber Abaci* di quel Leonardo il Pisano meglio noto come il *Fibonacci*. Stupisce ancora di più la costatazione che la maggior parte dei risultati scientifici, anche se in parte opinabili, in questo senso siano stati ottenuti fuori dall'Italia, che fu invece patria del grande matematico medievale, e da studiosi e ricercatori non italiani.

La prima traduzione completa del *Liber Abaci* in una lingua moderna è infatti opera dell'americano Sigler e ha visto la luce nel 2002 per tipi della Springer[1]. Più recente è, sempre pubblicata da Springer e sempre in lingua inglese, la traduzione della *Practica geometriae*[2]. Al latinista Richard Grimm, professore emerito dell'Università della California, si deve un tentativo accurato di edizione critica almeno del *Prologo* del *Liber Abaci*[3], basato sulla collazione di ben 6 manoscritti e a uno studio del *Prologo* aveva lavorato già nel 1838 Guglielmo Libri[4]. La vitalità degli studi fibonacciani all'estero, anche di stampo divulgativo ma non privi di scientificità e poggianti su una solida bibliografia è testimoniata anche dalla recente sintesi biografica del 2012 tradotta in italiano con il titolo *I numeri magici di Fibonacci*[5].

In realtà, superato lo stupore iniziale, il motivo della resistenza dei filologi nei confronti del *Liber Abaci* si rivela rapidamente a chi si addentri più specificamente in questi studi, e la necessità di disporre di competenze matematiche o storico-matematiche c'entra ben poco. La difficoltà fondamentale sta nella mole dell'opera, più di duecento, talora più di trecento, carte per ognuno dei manoscritti completi o quasi completi, che sono almeno otto. Ne consegue un lavoro di collazione spropositato, a cui bisogna aggiungere l'esame dei testimoni che hanno conservato solo alcuni capitoli dell'opera. Il tutto è reso più noioso dal fatto che, poiché l'oggetto di studio è un trattato matematico, solo raramente il lavoro del filologo ha un qualche risvolto pratico. In un testo poetico o narrativo, ogni intervento del filologo - sia che

---

1 L. Sigler, *Fibonacci's Liber Abaci. A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, New York-Berlin-Heidelberg 2002.

2 Il testo cui si fa riferimento è Hughues Barnabas, *Fibonacci's De Practica Geometrie*, New York 2008.

3 R. E. Grimm, *The autobiography of Leonardo Pisano*, in «Fibonacci Quaterley» 11 (1973), pp. 99-104. Grimm si è concentrato sulla cosiddetta "nota biografica" del Pisano, vale a dire su quella parte del *Prologo* da cui si possono ricavare alcune delle poche notizie certe sulla vita del Fibonacci

4 G. Libri, *Historie des Sciences Mathématiques en Italie, dépuis la renaissance des lettres, jusq'à la fin du dixseptième siècle*, Parigi 1838.

5 L'opera cui si fa riferimento è K. Devlin, *I numeri magici di Fibonacci*, Bergamo 2012.

si tratti di un'emendazione suggerita dalla collazione sia che invece sia una congettura dovuta all'ingegno dello studioso ormai compenetrato nella lingua e nel pensiero dell'autore - muta, perfeziona o addirittura stravolge la precedente lettura del brano emendato, suscitando non di rado uno stimolante dialogo con gli altri studiosi alcuni senz'altro entusiasti della novità e pronti a supportarla con inedite interpretazioni, altri ostili ma, di solito, costruttivi nelle eventuali critiche. Da un tale dibattito il lavoro dello studioso è ulteriormente stimolato: i suggerimenti e le critiche portano a successivi approfondimenti delle questioni da parte da chi le ha sollevate, approfondimenti sovente forieri di nuovi interessanti risultati. I filologi che si occupano di testi di argomento tecnico e di 'nicchia', invece, lavorano in solitudine e, pur dovendo affrontare difficoltà non trascurabili dovute alla peculiarità dell'argomento oggetto di studio - delle peculiarità del lavoro filologico da svolgere su un trattato di matematica si darà conto nel capitolo dedicato - sa bene che anche ripristinare per esempio la lezione corretta *probatio* in luogo di *portio* che compariva nell'edizione a stampa di Baldassarre Boncompagni e nel solo manoscritto da lui utilizzato per questa edizione, non è indispensabile per capire il significato di *pensa*, reso lampante dalla logica interna del testo e dalla lettura delle pagine successive[6].

Non stupisce allora se all'estero - non certo in Italia dove nonostante tutto le scuole di filologia e gli studi classici sono più rigorosi - si sia deciso di trascurare il lavoro filologico sui testi di Fibonacci e di approntare, saltando a pié pari la collazione dei manoscritti, le prime traduzioni in lingua moderna di opere che pure interessavano agli storici della matematica, tanto è vero che è su pressione di questo settore di studi se oggi anche in Italia la filologia si sta impegnando seriamente per mettere a punto un'edizione critica delle opere del grande studioso Pisano sulla quale possa basarsi, finalmente, una traduzione scientificamente valida delle stesse.

Non tale, cioè non scientificamente valida, può ritenersi la traduzione inglese del *Liber Abaci* che si fonda sull'edizione a stampa del trattato pubblicata nel 1858 da Baldassarre Boncompagni, il quale si limitò a trascrivere diplomaticamente un manoscritto che aveva a disposizione, il Conv. Soppr. C. 1. 2616[7], casualmente tra i più antichi testimoni dell'opera, ma non per questo, sfortunatamente, tra i più attendibili. Eppure, anche per quel che riguarda la traduzione del Sigler, atteggiamenti snobbistici dello studioso rigoroso che mai si approccerebbe a un tentativo di traduzione non basato su un'edizione critica del testo, si ridimensionano quando si guarda più praticamente all'opera specifica: le accuse di

[6] Carotenuto 2012, p.98s.
[7] Firenze, Biblioteca Nazionale Centrale, Conv. Soppr. C. 1. 2616, ff. 1-214.

superficialità e faciloneria che verrebbe spontaneo rivolgere allo studioso d'oltremanica cadono immediatamente quando si esamina l'immenso sforzo da questi compiuto. Il *Liber Abaci* è, onestamente, un testo dalla lettura tediosa: ripetitivo e ridondante nelle esemplificazioni può facilmente mettere in crisi la concentrazione del più attento lettore. Non a caso i testimoni dell'opera - ma di questo si darà conto a suo tempo - presentano numerose varianti motivate dalla necessità di compendiare espressioni eccessivamente pleonastiche, prassi che rende tra l'altro impervio stabilire il reale rapporto tra i testimoni superstiti. E, non a caso, se pure Fibonacci era riconosciuto già ai suoi tempi come il padre della matematica occidentale e il suo *Liber Abaci* un'opera d'importanza capitale per questa disciplina, di essa poi si composero compendi e volgarizzamenti più sintetici e più pratici anche dal punto di vista didattico. Immaginiamo quindi quali devono essere state le difficoltà del traduttore, anche se sicuramente nell'opera di Sigler si possono ravvisare svarioni dovuti a stanchezza, distrazione e all'impossibilità di rivedere il proprio lavoro per l'improvvisa dipartita che lo ha colto subito dopo il compimento dell'immane fatica. Ma se notiamo pecche e scivolate, dobbiamo rilevare come Sigler non di rado corregga autonomamente, senza segnalarlo, più o meno evidenti errori presenti nell'edizione del Boncompagni, errori che certamente saltano facilmente all'occhio dalla lettura del testo, ma che implicano un lavoro tutt'altro che sciatto e superficiale.

Io stessa, stanca dei rallentamenti che la collazione portava alla traduzione che da più parti mi veniva richiesta dagli storici della matematica e curiosa di leggere le porzioni dell'opera più interessanti - quelle che riguardano i problemi di matematica - mi sono cimentata in un tentativo di traduzione non scientificamente valido di alcuni capitoli del *Liber* che riporto in appendice, e che permettono di rilevare come Fibonacci, pur risolvendo nella maggior parte dei casi i suoi quesiti matematici con procedimenti ancora medievali, introduca cautamente le equazioni. Interessante è, infatti, l'indicazione di risolvere alcuni problemi anche con 'il *metodo diretto*, quello degli Arabi', un metodo in base al quale 'chiamiamo *cosa*, *res*, la parte sconosciuta, l'incognita, sapendo che se si aggiungono quantità uguali a quantità tra loro uguali, si ottengono ancora quantità uguali'[8].

Il presente lavoro riguarda i capitoli V, VI, VII del *Liber Abaci*, che ho trascritto a partire dall'edizione di Boncompagni: sulla base della collazione degli 8 testimoni integrali dell'opera, per essi ho stabilito un testo critico, per quanto provvisorio, e ne ho effettuato una traduzione corredata di un commento filologico linguistico. I primi quattro capitoli dell'opera, sebbene non ancora o solo in parte pubblicati, sono stati da me studiati prima dell'inizio

[8] Geronimi 2010, p. XLI.

dell'attività di ricerca collegata al dottorato e per questo non sono inseriti in questa trattazione. L'esposizione del mio lavoro sui suddetti capitoli è preceduta da un inquadramento storico sull'autore del *Liber*, da riflessioni sulla lingua dell'opera e sulle peculiarità della sua tradizione testuale.

Parte prima

Capitolo I

Fibonacci, vita e opere

I.1. Fibonacci, il primo mediatore culturale della storia occidentale.

Le notizie biografiche sull'autore del *Liber Abaci* non sono molte, e ciò stupisce se pensiamo che l'importanza di quest'opera per la cultura occidentale non fu sottovalutata dai suoi stessi contemporanei tant'è che la trattatistica d'abaco in volgare dichiarava la sua dipendenza dal libro del Fibonacci anche quando non aveva avuto contatti con esso. Dobbiamo perlopiù al prologo del *Liber Abaci* tutto quanto sappiamo della vita del suo autore, mentre le dediche premesse alle altre opere del Pisano ci permettono di ricostruire la rete di relazioni che egli intrecciò alla corte di Federico II. Due documenti pisani, infine, arricchiscono ulteriormente la sua biografia: da un contratto stipulato da un fratello di Leonardo, risulta che il padre si chiamava Guglielmo e il nonno Bonaccio[9]. Un altro documento[10], quello[11] con cui il comune di Pisa, nel 1241, assegnava a Fibonacci un compenso di 20 lire all'anno per un incarico di contabile tramanda il suo vero nome come Leonardo Bigollo[12].

Proprio il nome, innanzitutto, non è di facilissima ricostruzione. Fra i contemporanei e nei secoli successivi era noto come Leonardo il Pisano, mentre oggi l'autore del *Liber Abaci* è noto come Leonardo Fibonacci. In realtà il nome "Fibonacci" è un volgarizzamento dell'espressione *filius Bonacii*. Gino Loria riassume la controversa questione se Bonaccio sia stato padre del matematico: le parole *filio Bonacci* (codice magliabechiano), *filius Bonaccii* (codice napoletano VIII C18), *filiorum Bonaccii* (codice riccardiano) che leggiamo in testa ai manoscritti possono indurci a concludere che egli sia stato figlio, o uno dei figli di Bonaccio. Baldassarre Boncompagni, in seguito a profondi studi intorno a documenti medioevali, rilevò che frequentemente le famiglie prendevano il nome dal più illustre dei membri, per cui Leonardo può semplicemente essere uno dei discendenti di Bonaccio. Fatto sta che tale

[9] Milanesi 1867.
[10] Consultabile in F. Bonaini, *Memoria unica sincrona di Leonardo Fibonacci, nuovamente scoperta* in «Giornale storico degli Archivi toscani» I, 1857, p. 239s
[11] Loria 1921, p.6.
[12] *Considerantes nostre civitatis et civium honorem atque profectum, qui eis, tam per doctrinam quam per sedula obsequia discreti et sapientis viri magistri Leonardi Bigolli, in abbacandis estimationibus et rationibus civitatis eiusque officialium et aliis quoties expedit, conferunter; ut eidem Leonardo, merito dilectionis et gratie, atque scientie sue prerogativa, in recompensationem laboris sui quem substinet in audiendis et consolidandis estimationibus et rationibus supradictis, a Comuni et camerariis publicis, de Comuni et pro Comuni, mercede sive salario suo, annis singulis, libre xx denariorum et amisceria consueta dari debeant (ipseque pisano Comuni et eius officialibus in abbacatione de cetero more solito serviat), presenti constitutione firmamus*. Eva Caianiello (Caianiello 2011, p.60) nel ricordando gli studi del Bonaini chiarisce che "La questione del soprannome 'Bigollo', poi, appellativo che compare accanto al cognome di Fibonacci in vari documenti e che risulta usato anche da lui stesso negli *incipit* di alcune sue opere, è stata chiarita da Gaetano Milanesi e da Francesco Bonaini12: tale appellativo doveva significare «viaggiatore» e non «sciocco», o «scimunito», come si era a lungo creduto". La Caianiello nota anche come a Leonardo sia attribuito in tale documento l'appellativo di magister, titolo che in epoca medievale si attribuiva di solito a chi trasmetteva il suo insegnamento tramite una scuola: ciò potrebbe farci ipotizzare che egli si sia dedicato all'insegnamento.

designazione gli è poi valsa l'appellativo di Fibonacci, soprannome coniato nell'800 dallo studioso Guglielmo Libri.

Il fatto che fosse chiamato 'il Pisano' lascerebbe supporre Leonardo che sia nato a Pisa. In realtà non siamo del tutto sicuri del luogo di nascita, ma neppure dell'anno che deve situarsi intorno al 1170[13]. In ogni caso se non nacque a Pisa, anche se questa è l'ipotesi più probabile, in questa città trascorse la maggior parte della sua infanzia e in fatto di essere vissuto in una città commerciale e dagli orizzonti cosmopoliti sarà di non poco peso nell'impostazione dei suoi studi. Nascere a Pisa nel XII secolo significava ritrovarsi nel fulcro del mondo occidentale[14]: alla nascita di Leonardo, l'Italia era un centro degli scambi internazionali fra i paesi che si affacciavano sul Mediterraneo, Pisa - insieme a Genova e Venezia - dominava i commerci e le sue navi erano sempre in viaggio da un porto all'altro del Mediterraneo. In queste tre città, i mercanti furono le figure chiave che plasmarono lo sviluppo di un nuovo mondo più cosmopolita. Nel XII secolo il commercio fra le nazioni europee che si affacciavano sulle sponde settentrionali del Mediterraneo e i Paesi arabi a sud era fiorente: i mercanti europei vendevano lana, tessuti, legnami, ferro e altri metalli agli arabi, mentre questi ultimi facevano arrivare in Europa spezie, medicamenti, unguenti, cosmetici, tinture, sostanze per la conciatura e altri beni. Sebbene all'epoca, la maggior parte dell'Italia si trovasse sotto il potere dell'imperatore del Sacro Romano Impero, re di Sicilia, o del Papa, queste tre grandi città marinare - assieme a Firenze e Milano nell'entroterra - funzionavano sotto molti aspetti come dei veri e propri Stati nazionali. Con i loro forti eserciti e le loro potenti flotte, le città-stato italiane non solo erano in grado di respingere gli attacchi portati da terra e dal mare, ma controllavano anche delle roccaforti in regioni remote, tra cui alcuni porti chiave sulle coste nord-africane. Verso la metà del XII secolo, Pisa aveva colonie, privilegi portuali o rappresentanti consolari lungo tutte le sponde del Mediterraneo: uno di essi era il padre di Leonardo. Guglielmo era, infatti, un mercante diventato funzionario doganale a Béjaja, nel nord Africa[15]. Il padre di Leonardo aveva lasciato Pisa per assumere la sua carica

---

[13] Una recente sintesi complessiva sulla biografia di Leonardo il Pisano si deve a Eva Caianiello (Caianiello 2012). Una trattazione di più ampio respiro, sebbene di carattere divulgativo, è quella di Keith Devlin (Devlin 2012).

[14] Keith Devlin, I numeri magici di Fibonacci, Bergamo 2012, p.42s.

[15] Fibonacci, nel Prologo al Liber Abaci, ci parla di suo padre come publicus scriba a Béjaja. L'espressione latina *publicus scriba* è piuttosto vaga come già nota R. E. Grimm (*The Autobiography of Leonardo Pisano* in «The Fibonacci Quaterley» II 1973, p.101) che la traduce *state official*. Noi non conosciamo la precisa natura del ruolo ricoperto dal padre di Leonardo, ma possiamo immaginare comunque che fosse un punto di riferimento per i mercanti pisani che arrivavano a Béjaia (la "dogana di Bugia" corrisponde all'attuale città algerina Béjaia). Ad interrogarsi più puntualmente sulla funzione di "pubblico scriba pisano" nel XII secolo è M. Tangheroni (M. Tangheroni, *Fibonacci, Pisa e il Mediterraneo* in "Il tempo, le opere, l'eredità scientifica" a cura di M. Morelli e M. Tangheroni, Pisa 1994 p. 16). Tangheroni rileva che nei testi della seconda metà del XIII secolo il *publicus scriba* è il notaio che affianca il console e ne redige gli atti. Di grande interesse, a questo proposito, è il *Breve*

diplomatica a Béjaja fra il 1180 e il 1185 ed è presumibile che i sia fatto raggiungere dal figlio più o meno un anno dopo il suo arrivo, quando il ragazzo aveva intorno ai quattordici anni. Prima di allora, Leonardo deve aver seguito un *curriculum* scolastico simile a quello degli altri figli di mercante. Si può, quindi, presumere che abbia frequentato la scuola della cattedrale di Pisa fra i dieci e i dodici anni e qui gli saranno state insegnate le procedure di calcolo con i numeri romani. Una volta terminato il periodo di istruzione preliminare, è probabile che Leonardo abbia proseguito i suoi studi in campo matematico in un 'fondaco'[16] diretto da qualche amico di suo padre: qui si insegnavano le misure, il sistema monetario e l'uso dell'abaco. Il viaggio a Béjaja, infine, avrebbe completato la sua istruzione e formato per la futura carriera. La città in cui giunse Leonardo era infatti uno dei porti più importanti dell'Africa settentrionale[17], verso la metà del XII secolo i Pisani avevano soppiantato i loro

---

Curie Maris, cioè *Breve dell'Ordine del Mare*, una raccolta di disposizioni statutarie, sparse e non sistematiche, sui consolati transmarini di Pisa. In questo testo, pervenuto solo in una redazione del 1305, troviamo il capitolo 100 intitolato *De preceptis faciendis consulibus Tunithi e Bugee tempore eorum electione*: ebbene, non vi è menzione di consoli pisani in Magreb fino al 1234. Evidentemente solo verso il 1230 appaiono consoli delle città marittime cristiane nei porti e nelle piazze mercantili africane. In precedenza, dunque, lo scriba di una nazione mercantile operante in una dogana musulmana doveva avere compiti non soltanto notarili, ma anche di rappresentanza poi affidati ai consoli. Lo studio degli archivi documentali pisani, attraverso la ricostruzione della la fitta rete di trattati o anche solo di scambi epistolari (parte in latino e parte in arabo) intercorsi fra autorità pisane e arabe (accordi commerciali, trattative per il rilascio di prigionieri anche illustri o di beni, in seguito ad atti di pirateria reciproca), ha permesso di dimostrare che Pisa era l'interlocutore favorito per il mondo arabo. La presenza pisana nel Nord Africa, specialmente a Tunisi e a Béjaia, ma anche in Marocco, ad Alessandria ed al Cairo, rimase cospicua per tutto il XIII secolo, nonostante la sconfitta alla Meloria (1284) ad opera dei Genovesi; su quelle piazze, avveniva persino che i mercanti fiorentini si dichiarassero pisani per godere dello stesso trattamento favorevole. In Terrasanta, i privilegi già ottenuti a Giaffa, Tiro e Acri nel 1118, crebbero dopo la caduta di Acri: dimostrazione ne è l'ampliamento del quartiere pisano della città dopo la guerra combattuta vittoriosamente contro i Genovesi. Importante doveva essere anche il quartiere pisano a Costantinopoli (N. Ambrosetti, *L'eredità arabo-islamica nelle scienze e nelle arti del calcolo dell'europa medievale*, Milano, 2008 p. 216s. M. Tangheroni, *Fibonacci, Pisa e il Mediterraneo* in "Il tempo, le opere, l'eredità scientifica" a cura di M. Morelli e M. Tangheroni, Pisa 1994, p. 22s).

[16] Il fondaco - nome che deriva dall'arabo *funduq* - era un edificio commerciale nella cui parte anteriore clienti e mercanti si incontravano per discutere di mercanzie, prezzi e politica, mentre nel retro il contabile teneva i registri. Devlin 2012, p. 54.

[17] [17] La città di Bejaia fu fondata nel Maghreb centrale nel 1067 in una posizione strategica, collegata all'entroterra da una valle lungo la quale passavano le carovane transahariane. All'arrivo della corte hammadita (fine XI-inizio XII secolo), furono apportati profondi cambiamenti: il porto venne potenziato e dotato di nuove infrastrutture, che resero la città uno dei punti focali della regione sotto il profilo politico, economico, culturale e religioso. La perdita dell'indipendenza politica dal 1152 non ne ridusse l'influenza: anzi, venne inserita nella realtà politica che andava dall'Andalusia all'attuale Tunisia, lungo il principale asse commerciale e viario dell'impero, e divenne un polo di scienza e di studi, soprattutto matematici. Il quartiere del porto ospitava viaggiatori in larga misura di origine italiana: i trattati commerciali documentano la presenza di mercanti non solo provenienti da Pisa, Genova e Venezia, ma forse anche dalla Sicilia e dall'Italia meridionale, attratti dalle favorevoli condizioni doganali (N. Ambrosetti, *L'eredità arabo-islamica nelle scienze e nelle arti del calcolo dell'europa medievale*, Milano, 2008 p. 217). Nella seconda metà del XII secolo si assistette ad un incremento dei traffici con il Nord del Mediterraneo, che continuò con successo fino ai primi decenni del secolo successivo,

rivali genovesi stabilendovi un proprio porto commerciale: attraverso Béjaja potevano esportare in Nord africa i prodotti europei e far giungere in Europa diversi beni di lusso orientali, tra cui sete, spezie e due oggetti per cui la città era particolarmente rinomata: una straordinaria cera d'api e una pelle di ottima qualità. Gran parte delle nostre informazioni sul periodo qui trascorso da Leonardo ci vengono dal breve prologo con cui si apre il *Liber abaci*, dove il Pisano racconta come sia giunto a imparare questo nuovo, straordinario metodo di calcolo, offrendoci così le uniche notizie autobiografiche che possediamo di lui[18].

Nelle vesti di rappresentante commerciale di Pisa, il padre di Leonardo aveva il compito di mantenere i rapporti con le autorità musulmane, salvaguardare i diritti del fondaco, tener nota dei beni che vi transitavano e vigilare sulla corretta esazione delle tasse, attività che avranno senza dubbio richiesto una buona conoscenza della lingua araba. Questa supposizione è suffragata da un documento del funduq di damasco del 1183 che fa riferimento ai 'funzionari cristiani della dogana' che 'scrivono e parlano in arabo'[19]; è ragionevole supporre che lo stesso valesse anche nelle regioni di lingua araba dove gli italiani facevano affari. Facendo venire Leonardo a Bugia perché completasse la sua formazione professionale, Guglielmo voleva probabilmente che suo figlio apprendesse non solo i nuovi, meravigliosi metodi della matematica indo-arabica, ma anche la stessa lingua araba. Non c'è modo di sapere con certezza se Leonardo abbia di fatto imparato a leggere l'arabo, ma gli indizi suggeriscono di sì, e questa ipotesi è oggi generalmente accettata dagli storici. In particolare, lo storico della matematica contemporaneo Barnabas Hughes ha sviluppato alcune considerazioni su questo punto nell'introduzione alla sua traduzione inglese del *De practica geometrie*, l'opera scritta da Leonardo dopo il *Liber abaci*. Confrontando le citazioni degli *Elementi* fatte da xLeonardo con tutte le versioni latine del testo euclideo ancora esistenti che erano disponibili sul finire dell'XI secolo, ha trovato uno scarso accordo, cosa che lo ha spinto

---

grazie alla stabilità politica interna e alla crescita economica europea. Béjaia, grazie agli stimoli intellettuali ed economici, avrebbe poi raggiunto un elevato livello culturale e scientifico, soprattutto nell'ambito matematico, godendo anche della presenza di un valido studioso e docente come al-Qurashi (1204-1282), che semplificò e sintetizzò l'opera algebrica di Abu Kamil, appresa alle scuole di Siviglia. (D. Aïssani *et al.*, *Les mathématiques à Bougie médiéval et Fibonacci*, in *Il tempo, le opere, l'eredità scientifica*, Atti del Congresso internazionale di Pisa, Pisa, 1994 p. 78s).

[18] Cum genitor meus a patria publicus scriba in duana Bugee pro Pisanis mercatoribus ad eam confluentibus constitutus preesset, me in pueritia mea ad se venire faciens, inspecta utilitate et commoditate futura, ibi me studio abbaci per aliquot dies stare voluit et doceri. Ubi ex mirabili magisterio in arte per novem figuras Indorum introductus, scientia artis in tantum mihi pre ceteris placuit et intellexi ad illam, quod quicquid [R, f.1v] studebatur ex ea apud Egyptum, Syriam, Greciam, Siciliam et Provinciam cum suis variis modis, ad que loca negotiationis causa postea peragravi, per multum studium et disputationis didici conflictum (Germano, Carotenuto 2011).

[19] Costable citato in Devilin 2012 p. 63.

a ipotizzare che il pisano abbia tradotto in prima persona le sue citazioni da un testo arabo[20]. La conclusione di Hughes è, senza mezzi termini, che Fibonacci conosceva bene l'arabo. Probabilmente non ci sarebbero stati dubbi in proposito se non fosse stato per una breve osservazione fatta nel 1984 da andré Allard, secondo la quale ' dall'opera di Fibonacci non traspare la sua conoscenza dell'arabo. Secondo alcuni con questa frase Allard avrebbe voluto dire che Leonardo non conosceva l'arabo, ma si tratta senz'altro di un errore di interpretazione. Allard non dice infatti che Fibonacci non conosceva l'arabo, ma che la sua conoscenza non si riflette nei suoi scritti, cosa del resto comprensibile dato che erano rivolti a un pubblico di lettori latini. inoltre in un suo successivo articolo allard ha scritto che Fibonacci sfruttò la sua conoscenza della traduzione araba di Euclide per risolvere i problema posto. In ogni caso una buona padronanza della lingua araba sembra indispensabile perché Leonardo ampliasse le sue conoscenze matematiche al di là delle possibilità offerte dall'ambiente del mercato di Bejaja. Fra gli studiosi, i maestri e gli studenti arabi che viaggiavano fra le città del Maghreb tra la fine dell'XI secolo e l'inizio del XII, c'erano anche diversi matematici.

Dopo il 1228, anno della revisione dell'edizione del *Liber Abaci*, non si sa più niente di lui, salvo la succitata delibera del Comune di Pisa del 1241, e non si sa se morì a Pisa o altrove, né esattamente quando, anche se il *terminus post quem* può essere fissato sulla base di detta delibera proprio al 1241.

I.2. Le opere.

La fama di Fibonacci è legata al *Liber Abaci*, ma a lui si devono anche la *Practica geometriae* (dedicata a Domenico Ispano), il *Liber quadratorum* (dedicato a Federico II), l'*Epistula ad magistrum Theodorum* (l'astrologo di corte di Federico II, ormai unanimemente considerata la dedica del *Liber Abaci* nell'edizione del 1228), il *Flos super solutionibus quarundam questionum ad numerum vel ad geometriam vel ad utrumque pertinentium* (dopo il 1226 – dedicato al cardinale Ranieri Capocci), che contiene la sintesi delle questioni postegli dal matematico della corte federiciana Giovanni da Palermo, durante una visita a Pisa. Una precisa e recente sintesi sulle peculiarità della produzione Fibonacciana si deve, ancora, a Eva Caianiello[21]. Qui mi limiterò a ricordare che la *Practica Geometriae*, composta tra la prima e la seconda stesura del *Liber Abaci*, è permeata dalle stesse istanze pratiche del *Liber*: sono presentati e risolti una enorme mole di problemi tratti dalla vita quotidiana dei mercanti. La fonte principale è Euclide che, come vedremo più avanti, tanta parte ha anche

[20] Hughes 2008, p.xix.
[21] Caianiello 2012, p.72s.

nel *Liber*, nonostante si tenda, per quest'ultimo, a concentrarsi sull'individuazione delle fonti arabe.

Una nota aggiuntiva, ai fini della ricostruzione della biografia del Fibonacci, merita il *Flos*. Quest'opera raccoglie i quesiti che il maestro Giovanni da Palermo pose a Leonardo quando, durante il soggiorno pisano di Federico II, egli ebbe modo di incontrarlo grazie all'intercessione del maestro Domenico Ispano. Alla stessa udienza si fa riferimento anche nell'introduzione al *Liber Quadratorum* in cui sono riportati una serie di problemi sul trovare i quadrati dei numeri ed eseguire complicate operazioni tra di essi: tali problemi scaturiscono da un simile quesito posto a Fibonacci proprio durente l'udienza con l'imperatore.

I.3. Il *Liber Abaci*: struttura e argomento dell'opera.

L'opera cui Leonardo il Pisano deve la sua fama è il *Liber Abaci*, il trattato di matematica per mezzo del quale, per la prima volta in modo sistematico, sono divulgate in occidente le acquisizioni della matematica indoaraba.

Il *Liber Abaci* ha avuto due stesure: la prima, del 1202, è stata poi rivista dall'autore stesso e pubblicata nel 1228. Non è chiaro se la prima stesura sia stata pubblicata e poi riedita nel 1228, o se l'unica versione effettivamente circolata sia la seconda. L'esame della tradizione manoscritta, sebbene non sia completo e non se ne possa quindi trarre una conclusione definitiva, non sembra però rimandare a due versioni differenti. A riferirsi chiaramente ad una seconda edizione, è l'*incipit* del manoscritto Riccardiano: *Incipit liber abbaci compositus a Leonardo filiorum Bonaccii Pysano in anno MCCII et correctus ab eodem XXVIII*, "Libro dell'Abaco composto da Leonardo Pisano, figlio di Bonaccio, nel 1202 e corretto dall'autore stesso nel 1228". Invece, tra gli altri manoscritti finora esaminati, il magliabechiano segnato come F e il napoletano N riportano solo la data della prima stesura composizione (1202). Eppure, che anche il testo trasmesso dai suddetti manoscritti sia quello della seconda edizione, lo rileviamo dalla lettera di dedica premessa all'opera che allude ad una revisione del testo effettuata prima di farlo trascrivere per Scoto. Inoltre in tale lettera Fibonacci allude ad un'altra sua opera, la *Practica Geometriae* composta nel 1220: se ne deduce che il testo tramandato debba essere posteriore a questa data.

Fibonacci dedica la seconda edizione della sua opera a un personaggio di spicco della corte di Federico II, Michele Scoto (1175 circa – 1235) di origine scozzese o irlandese. Poche le notizie sulla sua biografia e incerte. Per Graf[22], Scoto sarebbe nato verso il 1190, in Belwearie, nella contea di Fife; avrebbe studiato prima in Oxford, poi a Parigi; avrebbe

[22] Graf 1984, pp. 293-320.

soggiornato un tempo a Toledo (1217); si sarebbe recato, dopo il 1240, in Germania, dove sarebbe stato conosciuto e bene accolto da Federico II e avrebbe passato poi qualche tempo in Italia, nella corte di quell'imperatore, e in parecchie altre città. Sarebbe tornato, non si sa quando, in patria dove sarebbe morto verso il 1250. Stando a tradizioni scozzesi, egli sarebbe stato sepolto, o in Holme Coltrame, nel Cumberland, o nell'Abbazia di Melrose. Scoto aveva imparato l'arabo dai traduttori toledani e si era cimentato fin dal 1217 in traduzioni dall'arabo di opere di contenuto astronomico, cui aggiunse anche interessi per l'astrologia, la fisiognomica e la zoografia. A Federico II dedicò la traduzione dell'opera di Avicenna e divenne ben presto il primo traduttore dell'opera di Averroè. Attorno al suo personaggio sono note svariate leggende. Federico II lo interpellava effettivamente sulle questioni più varie di carattere naturalistico, teologico o genericamente soprannaturale. Importante il suo contributo alla diffusione dei testi matematici arabi anche in Spagna. La sua carriera si divise tra Spagna e Italia: nel 1217 era a Toledo a tradurre il *De Motibus celorum* di Al-Bitruji e il *De Animalibus* di Avicenna nel 1215 era stato mandato a Roma per il concilio Lateranense IV dal suo arcivesvoco e patrono Rodrigo Jimenez come suo rappresentante. Questi aspetti della sua produzione scientifica gli valsero l'appellativo di 'mago' e la collocazione nell'Inferno dantesco (*Comedia*, Inferno, XX 115-117: *Quell'altro che ne' fianchi è così poco/ Michele Scotto fu, che veramente/ de le magiche frode seppe il gioco*). Di lui ci sono note le tre parti di un'opera sull'astrologia: *Liber introductorius*, *Liber de particolaribus*, *Physionomia*; oltre a *Divisio Philosophiae*, di cui ci son pervenuti solo frammenti, e *Quaestiones Nicolai Peripatetici*, opera andata perduta[23].

Ritornando al Liber Abaci, esso, si è detto, era in definitiva un manuale di matematica. Per questo al titolo leggittimo *Il libro dell'Abaco* aggiungo, per chiarezza del lettore moderno, il sottotitolo *ovvero il libro del calcolo*: questo era già presente nel Singler, autore della recente traduzione inglese del *Liber Abaci* (L. E. Singler, *Fibonacci's Liber Abaci, A traslation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, New York Berlin Heidelberg, 2002). Il termine *abacus*, infatti, che designava originariamente uno strumento di calcolo, nel tardo medioevo aveva gradualmente mutato il proprio significato grazie appunto alla diffusione delle cifre indiane ed alle più snelle e precise procedure di calcolo che si basavano sul loro utilizzo, sicché *abacus* passò a significare il calcolo aritmetico. Perso il riferimento materiale allo strumento di calcolo, infatti, all'epoca di Fibonacci l'*abacus*

[23] Pasche 1994.

indicava genericamente l’aritmetica basata sull'uso delle figure indiane[24]. Se si esamina l’opera del Fibonacci da un punto di vista strettamente matematico, essa appare come un insieme di dottrine che riunirono le conoscenze provenienti dal mondo greco e da quello orientale – dall’India, in particolare, per quanto riguarda il calcolo –, arricchite e rielaborate in modo originale attraverso il filtro della scienza araba.

I.4. Il *Liber Abaci*: le fonti.

Come ho già avuto modo di spiegare, Fibonacci dedica il *Liber Abaci* alla trattazione sistematica delle conoscenze aritmetiche dei suoi tempi che includono l'algebra e la geometria. Tali conoscenze le aveva apprese egli stesso nelle sue peregrinazioni per il Mediterraneo, studiando, come si è visto, presso i maggiori maestri del tempo e già si è rilevato come non pochi studi abbiano cercato di indagare su quali siano le fonti dirette del *Liber*. Tentare di identificare delle fonti risalenti a più di otto secoli fa è un lavoro problematico, dato che molti di questi materiali potrebbero essere ormai andati perduti: la maggior parte degli storici devono limitarsi a identificare e studiare le fonti soltanto fra quelle opere che, in una forma o nell'altra, si sono conservate fino a oggi. Hughes[25] suggerisce le seguenti possibili fonti: il Kitab al Bayan wa at-tudhkar, Libro di dimostrazione e ricapitolazione, scritto da al-Hassar attorno al 1175; il Kitab al-kafi fi 'ilm al-hisab, Libro bastevole sulla scienza dell'aritmetica, di al-Karaji; l'al-Urjuza fil-jabr wa-l muqabala, Poema sull'algebra, di Ibn al-Yasamin, che si serviva di versi per richiamare proposizioni e algoritmi; e il Kitab fil-jabr wa-l muqabala, Libro sull'algebra, e il Kitab al-missaha wa'l-handasa, Libro di misurazioni e geometria, di Abu Kamil, che non sono sopravvissuti fino a oggi. All'epoca erano disponibili anche le traduzioni arabe degli Elementi di Euclide di al-Hajjai ibn Matar (786-833) e di Ishaq al-'Ibadi (809-873), riviste da Thabit ibn Qurra (836-901). A volte capita che una particolare fonte possa essere identificata con sicurezza: per esempio, la sua notazione per le frazioni continue ascendenti veniva dalla scuola matematica del Maghreb. Non è inverosimile che alcune delle fonti sull'aritmetica indo-arabiche consultate da Leonardo fossero scritte in latino, la più antica di queste opere che sia sopravvissuta fino a oggi è una copia dell'Aritmetica di al-Khwarizmi. Un altro trattato latino su quel sistema disponibile all'epoca era il Liber ysagogorum alchoarismi, forse scritto da Adelardo di Bath. A differenza della maggior parte dei successivi libri d'abaco italiani, queste vecchie opere erano scritte da e per studiosi.

---

[24] Ambrosetti 2008, p.224.
[25] Hughes 2008 p. xxii

Leonardo basò senza dubbio la propria trattazione dell'algebra nel Liber abaci sull'algebra di Khwarizmi. Probabilmente, però, quest'ultima opera non fu quella da cui il giovane pisano conobbe per la prima volta l'algebra mentre si trovava in Nord Africa, dato che il libro in questione, molto diffuso in Andalusia, non era in circolazione nel Maghreb. Possiamo presumere che la sua prima fonte sia stato invece il Kitab fil-jabr wa'l muqabala, Libro sull'algebra, di Abu Kamil. Ma quando scrisse le sezioni algebriche più avanzate del Liber abaci, Leonardo attinse a piene mani al capolavoro di al-Khwarizmi, basandosi quasi certamente su una traduzione latina alla quale aveva accesso in Italia. L'algebra venne tradotta in latino da Roberto di Chester nel 1145, da Gherardo da Cremona (probabilmente il più grande traduttore del XII secolo, vissuto fra il 1114 e il 1187) attorno al 1150 e da Guglielmo di Lunis attorno al 1250. La traduzione di Gherardo, intitolata Liber maumeti filii moysi alchoarismi de algebra et almuchabala, è in genere considerata la migliore ed era quella più usata[26]. Confrontando alcuni passi del Liber abaci e della traduzione latina dell'algebra fatta da Gherardo da Cremona, la studiosa Nobuo Miura ha scoperto che molti dei novanta problemi riportati nel capitolo di Leonardo sull'algebra sono stati tratti direttamente dal testo di al-Khwarizmi, cosa che dimostra come il Pisano abbia fatto uso di quella particolare traduzione. e se la matematica araba gioca un ruolo indiscutibile, il riferimento a Euclide è sostanzioso e documentato. Già solo la ripartizione in quindici capitoli rimanda ai quindici libri degli *Elementi* euclidei.

Uno studio puntuale dei riferimenti a Euclide ravvisabili nel *Liber* e nel resto dell'opera fibonacciana è opera di Menso Folkerts al cui lavoro si rimanda[27]. Le citazioni euclidee sono particolarmente fitte nella porzione dell'opera fibonacciana oggetto della presente trattazione. Nei primi cinque capitoli del *Liber*, quella che Leonardo dedica all'esposizione delle operazioni di calcolo tra numeri interi, il solo autore cui si fa riferimento è proprio Euclide che risulta citato due volte. La prima citazione, in cui Euclide non è in verità esplicitamente menzionato, è tratta dal libro VII degli *Elementi*: Leonardo sta spiegando la moltiplicazione dei numeri con più di una parte decimale e utilizza un procedimento euclideo. La seconda citazione è tratta anch'essa dal Libro VII, questa volta è una definizione che compare nella sezione sulla divisione[28]. Qui Leonardo, nel definire i numeri primi (*incompositi* o *primi numeri*) e i numeri composti, rileva come Euclide chiami i numeri composti 'numeri piani':

---

[26] A tal proposito Devlin 2012 p. 206 sostiene che Hughes in una comunicazione privata del 2010 gli avrebbe riferito di avere le prove che Guglielmo abbia tradotto il testo anche nell vernacolo italiano.

[27] Menso Folkerts, *Leonardo Fibonacci's knowledge of Euclid's Elements and of other mathematical texts in Leonardo Fibonacci, Matematica e società nel Mediterraneo nel secolo XIII*, Roma 2005, pp. 93-114.

[28] Folkerts, Leonardo Fibonacci's knowledge, p. 94.

Reliqui vero composti, vel epidedi, idest superficiales, a peritissimo geometriae Euclide appellantur[29].

Nei capitoli VI e VII Leonardo espone le procedure di calcolo fra frazioni e fra interi e frazioni. In questi capitoli Euclide è ancora una volta il solo autore citato. Ci sono ben quattro citazioni: nella trasformazione delle frazioni Leonardo usa la teoria delle proporzioni e cita Euclide per aver stabilito che *sicut totum ad totum, ita pars est ad partem*[30]: si tratta della proposizione V.15 di Euclide. Poco più avanti nel testo, Leonardo spiega la procedura per cercare il Massimo Comun Divisore di due numeri usando il cosiddetto algoritmo euclideo, qui è ancora una volta citato Euclide: *ut in Euclide apertis demonstrationibus declarantur*[31], anche se in questo caso la citazione fibonacciana di Euclide VII. 2 non è parola per parola. Quando poi spiega la divisione Fibonacci riferisce la regola euclidea per cui il rapporto tra due numeri è lo stesso che il rapporto tra i loro multipli:

Et hoc est quod Euclides peritissimus geometra in suo libro declarat: quod quam proportionem habet quilibet numerus ad quemlibet numerum, eadem proportionem habent equa quelibet multiplicia illorum[32].

Alla fine del capitolo VII, poi, il Pisano spiega come una frazione possa essere espressa come somma di frazioni a numeratore unitario. Qui egli cita ancora una proposizione euclidea, la VII. 19, quella che riguarda l'equivalenza di a:b=c:d e a x d = b x c:

Quia cum quattuor numeri sunt proportionales, est multiplicatio secundi in tertium equa multiplicationi primi in quartum, ut ab Euclide demonstratum est[33].

Nei capitoli dall'VIII all'XI Euclide non è citato[34] e ricompare nel XII capitolo. In esso Fibonacci dedica una sezione alla 'ricerca dei numeri perfetti[35]' che segue la procedura formulata da Euclide IX.36 anche se il matematico greco non è in questo caso citato esplicitamente. Nel capitolo XIV Leonardo spiega con esempi numerici il metodo per il calcolo approssimato delle radici quadrate e cubiche. Anche qui il procedimento usato è quello spiegato nel II libro degli *Elementi*. All'inizio di questo capitolo, inoltre, Leonardo cita

[29] Boncompagni, Scritti, p.30.
[30] Boncompagni, Scritti, p. 51.
[31] Boncompagni, Scritti, p. 51.
[32] Boncompagni, Scritti, p. 69.
[33] Boncompagni, Scritti, p. 82.
[34] Bisogna aspettare il capitolo IX per trovare citato un altro matematico greco, il Tolomeo dell'Almagesto:
Est enim hec talis propositio proportionum ea que ostenditur in figura cata, scilicet sectoris, per quam Tholomeus docuit in Almagesti reperire demonstrationem circulorum a circulo recto, et multa alia; et Ametus filius ponat decem et octo combinationes ex ea in libro, quem de proportionibus composuit (Boncompagni, Scritti, p. 119)
[35] De inventione perfectorum numerorum (Boncompagni, Scritti, p.283).

quasi letteralmente sei dei sette enunciati del libro II degli Elementi e menziona esplicitamente Euclide:

Liceat mihi in hoc de radicum capitulo quedam necessaria, que claves dicuntur, inserere: que cum sint in secundo Euclidis apertis demonstrationibus demonstrata, sufficit super diffinitiones earum hoc tantum secundum numerum procedere[36].

Nella seconda parte del capitolo XIV sono esemplificati i calcoli in cui compaiono le radici quadrate: in questa sezione Leonardo si basa sul libro X degli *Elementi* di Euclide e lo afferma programmaticamente: *Diffinitiones duarum linearum ratiocinatarum, super quas decimus Euclidis liber geometrie tractat, assignare disposui*[37].

Infine, anche il capitolo quindicesimo, le cui fonti sono più rintracciabili in Pitagora e nella tradizione araba[38], contiene espliciti riferimenti ad Euclide e precisamente al V libro degli *Elementi*: *ut in quinto Euclidis ostenditur*[39].

Euclide è dunque l'autore più citato del *Liber* e il costante punto di riferimento dell'opera. La presenza di citazioni euclidee a volte anche di un certo respiro (in realtà soprattutto nella *Practica Geometriae* più che nel *Liber*) suggerisce la questione di capire se sia possibile risalire alla traduzione latina di Euclide che Fibonacci ebbe a disposizione[40]. Nel dodicesimo secolo gli *Elementi* erano stati tradotti tre volte dall'arabo al latino. La prima traduzione era stata approntata da Adelardo di Bath, probabilmente nel secondo quarto del XII secolo[41]. Ad Ermanno di Carinzia è attribuita una seconda traduzione[42]. Una terza traduzione, posteriore al 1187, fu realizzata da Gerardo da Cremona[43]. In realtà, la più diffusa versione degli *Elementi* nel XII secolo era la cosiddetta 'Versione II' o 'Adelardo II' il cui autore, in realtà, non fu Adelardo, ma Roberto di Chester[44] che tenne presente varie versioni latine degli *Elementi*: quella di Adelardo e di Ermanno oltre che lo Pseudo-Boezio. Inoltre era disponibile, come ulteriore traduzione in latino, la cosiddetta 'Versione III'[45]. In realtà nel XII secolo circolava anche una traduzione latina basata direttamente sul testo greco realizzata in

---

36 Boncompagni, Scritti, p. 352.
37 Boncompagni, scritti, p. 356.
38 Folkerts, Leonardo Fibonacci's knowledge, p.97.
39 Boncompagni, Scritti, p.391.
40 Folkerts, Leonardo Fibonacci's knowledge, 106.
41 H. L. L. Busard, The First Latin Translation of Euclid's Elements Commonly Ascribed to Adelard of Bath, Toronto 1983.
42 H. L. L. Busard, The Translation of the Elements of Euclid from the Arabic into Latin by Hermann of Carinthia: book I-VI, <<Janus>>, 54 (1967), 1-140; book VII-XII, Amsterdam, 1977.
43 H. L. L. Busard, The Latin translation of the Arabic version of Euclid's Elements commonly ascribed to Gerard of Cremona, Leiden 1983.
44 H. L. L. Busard, M. Folkerts, Robert of Chester's (?) Redaction of Euclid's Elements: the so-called Adelard II Version, 2 vols., Basel/Boston/Berlin 1992.
45 H. L. L. Busard, Johannes de Tinemue's Redaction of Euclid's Elements, the So-called Adelard III Version, 2 vols., Stuttgart 2001.

Sicilia dopo il 1165[46] che faceva parte di un gruppo di testi tradotti nel sud Italia e in Sicilia nel corso del XII e che includeva anche l'Almagesto di Tolomeo, l'altro autore greco che il Pisano cita esplicitamente: proprio considerando il fatto che Fibonacci gravitava intorno alla corte di Federico II è probabile che questa traduzione non gli fosse ignota. La verità è, però, che Leonardo più che citare parola per parola, sembra parafrasare o citare a memoria: e consegue che sia impossibile una risposta definitiva sulla versione euclidea che egli ebbe a disposizione, ma è fuori di dubbio che egli conoscesse approfonditamente l'opera del matematico greco e che programmaticamente si riferisca ad essa modellando il suo *Liber* sull'impianto euclideo almeno nella scansione in quindici libri o capitoli.

I. 5. Il *Liber Abaci*: fortuna e diffusione e la *querelle* tra matematica teorica e pratica.

Come ha osservato Raffaella Franci nella comunicazione presentata a Chieti nel 2005 è il *Liber Abaci* a introdurre nella cultura occidentale un insegnamento della matematica alternativo a quello universitario e basato su Boezio, un insegnamento, cioè, rivolto alle applicazioni pratiche della matematica e indirizzato all'emergente classe mercantile. La *querelle* tra matematica pratica o commerciale e matematica teorica o speculativa coincide con quella tra gli insegnamenti matematici impartiti nelle scuole d'abaco e quelli studiati nelle università. Aritmetica e algebra, grazie alle scuole d'abaco, divengono parte integrante del bagaglio culturale delle classi mercantili che con il loro dinamismo stimolano a loro volta l'indagine matematica. E però ai commercianti interessavano prevalentemente le applicazioni pratiche di tale disciplina lasciando le speculazioni matematiche ad esclusivo appannaggio degli accademici e segnando una linea di demarcazione tra le due matematiche: quella teorico-speculativa e quella applicata.

Sulla scorta di quanto detto appare leggittimo chiedersi se il *Liber Abaci* debba essere considerato un manuale pratico ovvero teorico. È indubbio che l'opera di Fibonacci faccia da apripista ai successivi trattatelli d'abaco in volgare assolutamente pratici e che pure si dichiarano in debito nei confronti del Pisano ancora per tutto il XVI secolo, anche quando magari non hanno attinto direttamente ad esso. Eppure questo dato di fatto, fino a poco tempo fa - fino cioè a prima dell'edizione critica del *Prologo* approntata dal gruppo di lavoro di cui faccio parte[47] - sembrava contrastare con un'affermazione dello stesso Leonardo che nel

[46] Folkerts, Leonardo Fibonacci's knowledge, p. 107.
[47] dettaglio sul gruppo di lavoro

Prologo, cercando di chiarire brevemente l'oggetto del suo trattato, pareva aver dichiarato che la propria opera guardasse più alla teoria che alla pratica. In realtà, come dicevo, finora non esiste un'edizione critica del *Liber Abaci*, e solo di recente abbiamo pubblicato l'edizione critica del *Prologo* basata sugli 8 testimoni di questa porzione dell'opera. Ora, la collazione dei 6 manoscritti contenenti la lettera dedicatoria a Michele Scoto premessa a tale *Prologo*, ha rilevato che la tradizione diverge proprio su questo punto importante per la definizione del tipo di lavoro che il Pisano afferma di aver fatto. Dopo aver precisato che nel suo *Liber* esporrà «l'intera dottrina dei numeri secondo il metodo degli Indiani» e anticipato che nella trattazione saranno utilizzati esempi geometrici visto che «l'aritmetica e la geometria sono legate tra loro e si suffragano a vicenda», Leonardo aggiunge - secondo il testo stabilito nella recente edizione critica del Prologo curata da me e dal prof. Germano - che il suo libro è relativo più alla pratica che alla teoria, perché per assimilare bene i concetti teorici bisogna esercitarsi a lungo e con diligenza. Fibonacci, in sostanza, sostiene che il suo trattato è più pratico che teorico. Ebbene, proprio quest'affermazione voglio analizzare, perché se nella maggior parte dei codici troviamo la lezione *magis quam ad theoricam spectat ad praticam* – ovvero 'più che alla teoria si rivolge alla pratica' - e nel codice Napoletano VIII C 18 troviamo una formulazione diversa, ma di significato identico, ovvero *ad practicam magis quam ad theoricam spectat 'alla pratica più che alla teoria si rivolge'*, il solo Fiorentino Conv. Soppr. C. 1. 2616 capovolge tale concetto con la sua lezione *magis ad theoricam spectat quam ad practicam 'più alla teoria si rivolge che alla pratica'*. Poiché, però, proprio quest'ultimo codice rappresentò la sola fonte utilizzata dal Boncompagni per la sua edizione a stampa ed è quello che si pone, dunque, alla base del testo oggi vulgato del trattato fibonacciano, tutti gli studi condotti su tale trattato fanno riferimento alla presunta affermazione del Fibonacci secondo la quale il *Liber Abaci* "è relativo più alla teoria che alla pratica", dichiarazione che ha confuso non poco le idee sull'interpretazione delle finalità del trattato, che invece intende rivolgersi proprio alla classe mercantile di cui Leonardo faceva parte.

Quale sia la natura del *Liber Abaci* è una questione alquanto dibattuta dagli studiosi, probabilmente alimentata proprio dall'apparente incongruenza tra la dichiarazione della *vulgata*, secondo la quale si tratterebbe di un manuale teorico più che pratico, e il grande spazio che invece l'autore dà alle questioni pratiche. Questo caso risulta particolarmente istruttivo, perché ci fa capire come un banale errore di un manoscritto, veicolato da una stampa che ha determinato una vulgata dell'opera, abbia inciso sull'opinione degli studiosi e creato fraintendimenti e aporie teoriche fra quella che sembrava l'opinione dell'autore espressa nel *Prologo* e l'effettiva realtà dell'opera. Il restituire quella che sembra la lezione corretta ed autentica scioglie molti dei problemi che si erano determinati nella discussione intorno alla natura del trattato fibonacciano. In ogni caso, va ben considerata la forma dell'affermazione di Leonardo sulla natura prevalentemente pratica del suo trattato: egli non scrive che il suo è un manuale pratico *tout court*, ma solo che esso "guarda", "si riferisce", "è relativo" alla pratica, cioè che trova in essa il suo effettivo compimento. Infatti, il Pisano non manca di affrontare delle questioni matematiche di tipo teorico, anche se egli non perde mai di vista le loro applicazioni pratiche. Certamente un manuale di matematica non può non apparire teorico, eppure lo spazio concesso alle questioni pratiche si mostra assai significativo: i capitoli centrali (VIII-XII) sono ad esse interamente dedicati e, anche quando spiega operazioni algebriche, Leonardo utilizza diversi esempi e, prima di procedere con un nuovo argomento, raccomanda di esercitarsi bene per assimilare ciò che è stato insegnato e per poter comprendere le nozioni successive). D'altra parte, come ha fatto notare Alessandra Simi in un interessante articolo del 2004 a cui rinvio[48], Fibonacci intitola *Practica geometriae* il suo trattato di geometria che poggia su solide basi speculative e in cui il livello generale della trattazione è assai elevato: ogni questione è illustrata minuziosamente e giustificata meticolosamente ricorrendo ad argomentazioni teoriche e dottrinali di notevole spessore che, se da un lato mostrano le grandi doti didattiche dell'autore, dall'altro vanno indubbiamente ben oltre le mere esigenze pratiche. Un elemento di 'praticità è se mai ravvisabile nella scelta didattica operata dall'autore di proporre sistematicamente la materia non seguendo lo schema euclideo o archimedeo, ma secondo un approccio 'per problemi'. Ritornando al *Liber Abaci* esso sembra, in definitiva, un ibrido: Leonardo è il primo ad introdurre i problemi pratici, ma nel suo manuale c'è ancora molto di quella teoria che scomparirà del tutto dai trattati d'abaco successivi, questi sì, assolutamente pratici e consistenti spesso in una sorta di elenco di prescrizioni ad uso dei mercanti. In effetti l'impressione che si ha, nel leggere i libri d'abaco più tardi è che l'aritmetica servisse semplicemente come preparazione per l'impostazione e la soluzione dei problemi posti dall'attività mercantile anche se, come non ha mancato di far notare Alessandra Simi[49], i mondi delle università e delle scuole d'abaco non erano compartimenti stagni visto che alcuni lettori di matematica venivano reclutati tra i maestri d'abaco. Ne risulta che questi maestri d'abaco avevano in molti casi una profonda cultura matematica ma doveva esserci una divergenza tra gli interessi dei docenti e dei discenti.

[48] estremi bibliografici dell'articolo
[49] nota bibliografica

Va notato che non sarà un caso se Tartaglia stesso, proprio all'inizio della sua opera si riallaccia direttamente a Leonardo rilevando i limiti dell'opera del suo più immediato prececessore, quel Luca Pacioli che nella *Summa de aritmetica geometria proportioni et proportionalità* aveva 'raccolto tutti i fiori' dell'opera divulgatrice di Fibonacci in un'opera fruibile in volgare, ma in modo asistematico e confuso anteponendo la presentazione di 'casi' e 'problemi' all'enunciazione del principio matematico che era alla base della loro soluzione e presentando inoltre tali casi e problemi in modo confuso. Di qui la sua esigenza di scrivere un *General Trattato de' numeri* che ponesse ordine nella materia e seguisse il modo di procedere prima di Euclide e poi anche di Leonardo che 'faceva discendere ogni postulazione da una postulazione precedente'. Per tornare al nostro Tartaglia, dunque, mi preme mettere in luce come la sua notazione sulla distinzione tra matematica teorica e pratica getta luce su quella che doveva essere una questione abbastanza dibattuta la Fibonacci in poi e cioè la necessità di distinguere, tra l'altro, anche frai matematici e coloro che attingevano a competenze matematiche solo per questioni meramente pratiche.

Capitolo II

La tradizione del *Liber Abaci* e un tentativo di classificazione di una parte dei testimoni superstiti

II.1. La storia della tradizione del *Liber Abaci*.

Il lavoro filologico su un testo medievale comporta delle precisazioni[50]. Oggigiorno lo stato dinamico del testo e il suo processo di trasformazione terminano obbligatoriamente con la pubblicazione del testo. La pubblicazione a stampa garantisce la standardizzazione del testo diffuso fino a un certo punto. Se un autore continua ulteriormente a rimaneggiare l'opera una seconda edizione potrà nuovamente fissare una versione differente dell'opera, cosa che permette di non confondere le due edizioni[51]. Ma in epoca medievale questi testi erano diffusi da copie manoscritte, le opere degli autori potevano essere copiate a differenti livelli di composizione e conseguentemente essere diffuse in versioni originali diverse di cui l'autore non poteva controllare la qualità. Ci furono molti autori che, coscienti della difficoltà rappresentata dalle diverse edizioni di un testo, si sforzarono di stabilire una distinzione tra questi diversi stadi. Tale può essere considerata la dichiarazione di Fibonacci all'inizio del suo Liber:

Incipit liber abbaci compositus a Leonardo filiorum Bonaccii Pysano in anno MCCII et correctus ab eodem XXVIII[52].

La divisione in libri, che caratterizza le opere medievali di una certa ampiezza, ricorda che, prima dell'epoca del *codex*, un libro era un rotolo[53]. Poi, la tecnica del *codex* permise di raggruppare in una successione di più fascicoli rilegati il contenuto di molti rotoli: la separazione tra i libri sopravvive nel *codex*. La divisione in libri non è l'unica sopravvivenza della tecnica precedente: anche la pratica dell'*incipit* e dell'*explicit* lo è. Queste due parole latine sono la prima e l'ultima del testo, un po' come dei riferimenti tecnici di identificazione. Il termine *incipit* precedeva il nome dell'autore, il titolo e il numero d'ordine del libro e, similmente, alla fine dell'opera, nome dell'autore, titolo e numero d'ordine del libro erano ripetuti preceduti (o seguiti) dalla parola *explicit* che ha finito con l'assumere il vago significato di 'è terminato', ma che in realtà, nella tecnica del rotolo, aveva il senso preciso di 'è stato srotolato fino alla fine'. In questa tecnica le dette menzioni erano collocate al'inizio e alla fine di ogni rotolo per rendere assolutamente chiaro il processo di lettura. Infatti, se un lettore, dopo aver srotolato fino alla fine un rotolo, non si fosse preso la briga di riavvolgerlo in senso inverso e di rimetterlo nella forma in cui lo aveva trovato, il lettore successivo, invece di affrontare il testo dall'inizio, si imbatteva nell'ultima colonna di scrittura. Era

---

[50] M. Beit-Arié, Transmission de textes par scribes et copistes. Interférences incoscientes et critiques, in Les Problèmes posés par l'édition critique des tetes anciens et médiévaux, Louvain-La-Neuve 1992.
[51] M. Beit-Arié, Transmission, p. 175.
[52] La peculiarità dei prologhi medievali è messa in luca dagli studi sull'argomento raccolti in Les prologues médiévaux, Actes du Colloque international organisé par l'academia Belgica et l'école française de Rome avec le concours de la F.I.D.E.M. (Rome, 26-28 mars 1998), ed. J. Hamesse, Brepols, Turnhout 2000.
[53] Louis Holtz, Autore, copista, anonimo, in Lo Spazio letterario cit., pp.325-352, p.325.

dunque necessario che egli potesse sapere alla prima occhiata di che opera e di quale libro di quell'opera si trattava ed ecco quindi la ripetizione di quelle menzioni ad ogni estremità del *volumen*.

I diciotto testimoni a noi finora noti sono quelli menzionati nella bibliografia specialistica che a vario titolo si è occupata del trattato fibonacciano, o quelli presenti in liste di *work in progress* stilate da Warren Van Egmond e Meso Folkerts, che ho avuto la fortuna di poter consultare.

Si tratta dei testimoni contenuti nei manoscritti seguenti, che presentano tutti, nei margini, tabelle di calcolo e diagrammi rappresentativi, nella loro qualità di parte integrante del testo fibonacciano:

1. Firenze, Biblioteca Medicea Laurenziana, ms. Gadd. 36, ff. 1-168, cart., sec. XIV. Testimone incompleto, tramanda solo gli ultimi quattro capitoli del trattato, dal XII al XV, e l'ultimo capitolo è anch'esso incompleto, perché si interrompe alla metà della parte terza.

Bibl.: Boncompagni, *Della vita e delle opere*, pp. 40s.; Van Egmond, *The Commercial Revolution*, pp. 485, 551.

2. Firenze, Biblioteca Nazionale Centrale, ms. Conv. Soppr. C. 1. 2616, ff. 1-214, perg., sec. XIV in. Tramanda l'opera nella sua interezza, unitamente all'*Epistola* di dedica a Michele Scoto ed al *Prologo* autobiografico. Rappresenta la fonte su cui Boncompagni fondò l'*editio princeps* dell'opera.

Bibl.: Boncompagni, *Intorno ad alcune opere*, pp. 209-18; Id., *Scritti di Leonardo Pisano*, I, pp. 1-459.

3. Firenze, Biblioteca Nazionale Centrale, ms. Fond. Prin. II. III. 25 [Magl. XI. 22], ff. 1-175, cart., sec. XV o XVI. Testimone incompleto, in quanto manca dell'*Epistola* di dedica a Michele Scoto e di una buona parte del capitolo XV; esibisce a f. 1r il *Prologo* autobiografico e le prime righe del capitolo I in una forma volgarizzata toscana, mentre il resto della trattazione appare regolarmente trascritta nella sua forma latina. Il codice, già Magl. XI. 22, è ora legato insieme con un altro di diversa provenienza e contenuto, rappresentando la prima parte di un ms. composito costituito di un totale di 300 ff.

Bibl.: Boncompagni, *Della vita e delle opere*, p. 50; Van Egmond, *The Commercial Revolution*, p. 551.

4. Firenze, Biblioteca Nazionale Centrale, ms. Magl. XI. 21, ff. 1-285, perg., sec. XIV. Tramanda l'opera nella sua interezza, unitamente all'*Epistola* di dedica a Michele Scoto ed al *Prologo* autobiografico, ma la dedica appare aggiunta come in un secondo tempo sulla parte

alta del mg. dx. di f. 1r dalla stessa mano, come sembra, che ha vergato il codice. La prima pagina esibisce il disegno di un maestro che insegna l'arte del calcolo sulle dita.

Bibl.: Boncompagni, *Della vita e delle opere*, p. 34; Van Egmond, *The Commercial Revolution*, p. 551.

5. Firenze, Biblioteca Nazionale Centrale, ms. Magl. XI. 38, ff. 120r-231v, cart., sec. XVI. Testimone incompleto, tramanda solo gli ultimi due capitoli del trattato, il XIV ed il XV. L'intero codice, di ff. 293, numerati da 2 a 294, contiene opere in latino ed in greco.

Bibl.: Boncompagni, *Della vita e delle opere*, p. 58.

6. Firenze, Biblioteca Riccardiana, ms. 783, ff. 1-346, cart., sec. XV. Tramanda l'opera nella sua interezza, unitamente all'*Epistola* di dedica a Michele Scoto ed al *Prologo* autobiografico.

Bibl.: Boncompagni, *Della vita e delle opere*, p. 45; Van Egmond, *The Commercial Revolution*, pp. 485, 551.

7. Firenze, Biblioteca Riccardiana, ms. 2252, ff. 72r-142r, cart., sec. XIV. Testimone incompleto, tramanda la maggior parte dei capitoli XII e XIII del trattato, all'interno di un codice, di ff. 169. La copia della porzione dell'opera fibonacciana inizia in volgare toscano, ma si riferisce, poi, ad un esemplare in latino dal f. 107v.

Bibl.: Van Egmond, *The Ccommercial Revolution*, pp. 489; Id., *Practical Mathematics*, *s. v.*

8. Milano, Biblioteca Ambrosiana, ms. I. 72 Sup., ff. 1-124, perg., sec. XIII. Tramanda l'opera nella sua interezza, ma si apre col solo *Prologo* autobiografico senza esibire l'*Epistola* di dedica a Michele Scoto. Precedono la copia, su due fogli con numerazione autonoma, accurati disegni a colori che rappresentano il metodo di rappresentare le cifre sulle dita della mano.

9. Napoli, Biblioteca Nazionale, ms. VIII. C. 18, ff. 1-285, cart., sec. XVII. Tramanda l'opera nella sua interezza, unitamente all'*Epistola* di dedica a Michele Scoto ed al *Prologo* autobiografico.

10. Paris, Bibliothèque Mazarine, ms. 1256, ff. 33r-85v, cart., sec. XIV. Testimone incompleto, tramanda i capitoli XIV e XV.

11. Paris, Bibliothèque Nationale, ms. Lat. 7225 A, ff. 81r-220r, cart., sec. XVI. Testimone incompleto, tramanda i capitoli XIV e XV.

12. Paris, Bibliothèque Nationale, ms. Lat. 7367, ff. 1-168, cart., sec. XV. Testi mone incompleto, contiene tre sezioni, delle quali le prime due tramandano i capitoli XIV e XV del

Liber Abaci, mentre l'ultima una descrizione in volgare toscano dei *numeri rupti*, cioè delle frazioni.

13. Siena, Biblioteca Comunale degli Intronati, ms. L. IV. 20, ff. 1-224, perg., sec. XIII ex.-XIV in. Testimone incompleto, manca del *Prologo* autobiografico e di una parte del cap. XV, ma esibisce l'*Epistola* di dedica a Michele Scoto.

Bibl.: Boncompagni, *Della vita e delle opere*, p. 25; Van Egmond, *The Commercial Revolution*, p. 551.

14. Siena, Biblioteca Comunale degli Intronati, ms. L. IV. 21, ff. 1-208, cart., sec. XV. Testimone in volgare toscano diviso in 16 capitoli e contenente una rielaborazione del *Liber Abaci* di Leonardo Pisano con inserzioni da altri aritmetici ad opera di Benedetto da Firenze (esplicitamente datato al 1463).

Bibl.: L. Ilari, *La Biblioteca Pubblica di Siena disposta secondo le materie*, III, Siena 1845, p. 1, col. 2, e p. 8, col. 1; Boncompagni, *Della vita e delle opere*, pp. 25 e 55s.

15. Città del Vaticano, Biblioteca Apostolica Vaticana, ms. Palat. Lat. 1343, ff. 1- 174, perg., sec. XIII ex.-XIV in. Tramanda l'opera nella sua interezza, unitamente all'*Epistola* di dedica a Michele Scoto ed al *Prologo* autobiografico. Dopo il capitolo 8, prima dell'inizio del 9 si trova qui, a differenza di tutti gli altri mss. noti, l'indicazione: *incipit magister castellanus*, con probabile riferimento ad una non meglio definita fonte utilizzata dal Fibonacci per la sua trattazione seguente.

Bibl.: Boncompagni, *Della vita e delle opere*, pp. 31-32; Van Egmond, *The Commercial Revolution*, pp. 508, 551.

16. Città del Vaticano, Biblioteca Apostolica Vaticana, ms. Urb. Lat. 291, ff. 1r-33v, 121r-132v, cart., sec. XIV. Testimone incompleto, tramanda parti dei capitoli XIV e XV in un volgarizzamento toscano.

17. Città del Vaticano, Biblioteca Apostolica Vaticana, ms. Vat. Lat. 4606, ff. 52r-71v, 77r-107v, cart., sec. XIV. Testimone incompleto, tramanda parti dei capitoli XIV e XV.

Bibl.: Van Egmond, *The Commercial Revolution*, pp. 514, 551.

Un'edizione critica del *Liber Abaci* di Fibonacci deve basarsi sulla collazione degli otto testimoni che hanno tramandato l'opera integralmente (o quasi) e degli altri 8 che conservano i capitoli riguardanti le cosiddette 'questioni pratiche'.

1. Milano, Biblioteca Ambrosiana, ms. I. 72 Sup., ff. 1-124, perg., sec. **XIII**. A

2. Siena, Biblioteca Comunale degli Intronati, ms. L. IV. 20, ff. 1-224, perg., sec. **XIII** ex.-XIV in. Testimone incompleto, manca del *Prologo* autobiografico e di una parte del cap. XV. S

3. Città del Vaticano, Biblioteca Apostolica Vaticana, ms. Palat. Lat. 1343, ff. 1- 174, perg., sec. **XIII** ex.-XIV in. V

4. Firenze, Biblioteca Nazionale Centrale, ms. Conv. Soppr. C. 1. 2616, ff. 1-214, perg., sec. **XIV** F

5. Firenze, Biblioteca Nazionale Centrale, ms. Magl. XI. 21, ff. 1-285, perg., sec. **XIV**. Tramanda l'opera nella sua interezza F_1

6. Firenze, Biblioteca Riccardiana, ms. 783, ff. 1-346, cart., sec. **XV**. R

7. Firenze, Biblioteca Nazionale Centrale, ms. Fond. Prin. II. III. 25 [Magl. XI. 22], ff. 1-175, cart., sec. **XV o XVI**. Testimone incompleto, in quanto manca dell'*Epistola* di dedica a Michele Scoto e di una buona parte del capitolo XV. F2

8. Napoli, Biblioteca Nazionale, ms. VIII. C. 18, ff. 1-285, cart., sec. **XVII**. N

II.2. Le peculiarità di trasmissione di un trattato tecnico.

Prima di presentare qualche esempio delle emendazioni apportate al testo vulgato del *Liber*, mi preme premettere che indagare sui rapporti di parentela tra i testimoni di un'opera di carattere tecnico – specie quando, come in questo caso, essa consista in un trattato di matematico – presenta alcune peculiarità che si possono così sintetizzare:

- errori dovuti a distrazione derivante dal carattere ripetitivo del trattato
- errori dovuti a ignoranza del copista che potrebbe non essere un esperto della materia trattata
- varianti dovute a sintesi o rielaborazioni perché un'opera di carattere tecnico è priva di quell'aurea di sacralità stilistica che impone al copista il rispetto della forma dell'espressione originale oltre che del contenuto.
- varianti dovute all'intervento di un copista 'dotto' che se si rende conto di errori nei calcoli matematici li corregge.

Gli scritti più fragili sono quelli che trasmettono un insegnamento[54], come i trattati destinati alla scuola o i commenti di testi. Il che è facilmente spiegabile: i manuali vengono tuttora compendiati.

[54] L. Holtz, Autore, copista cit., p. 348.

II.3. Le varianti 'non significative' del *Liber Abaci* e quelle 'significative'.

Nel caso del *Liber Abaci* di Fibonacci la collazione dei manoscritti ha portato alla luce una mole enorme di varianti, esse riguardano in particolare le cifre arabe. Si ricordi che il merito di Fibonacci sta proprio nell'aver introdotto sistematicamente il sistema di numerazione indo-arabo in Europa: si trattava di una novità e i copisti non erano avvezzi al loro uso. Nel corso del tempo, inoltre, i segni che indicavano le cifre arabe sono cambiati (in particolare il 7, il 4 e il 5) e questo ha potuto generare fraintendimenti nei copisti.

Inoltre, in una scrittura veloce, i segni per l'1 e il 2, ma anche per il 2 e il 3, o lo 0 il 6 e il 9, tendono a confondersi.

Ciò significa, a mio avviso, che tali errori, almeno in prima istanza, non vanno considerati come significativi perché, ad esempio, N – che è un copista colto – può correggere autonomamente un errore nel suo antigrafo ristabilendo la lezione originaria.

Altre varianti ricorrenti riguardano l'oscillazione tra *virga* e *virgula* (termini sinonimici che indicano la 'linea di frazione') che sembrano essere casuali anche all'interno di uno stesso manoscritto. In linea di massima, in ogni caso, A sembra propendere costantemente per *virga* in luogo di *virgula*, mentre gli altri testimoni oscillano senza, probabilmente, rispettare il proprio antigrafo. Lo stesso dicasi per le varianti nell'ortografia di *addictio*, *additio*, *adictio*, *aditio*, *aditatio* e *additatio*.

Fortunatamente alcune omissioni e alcune integrazioni all'interno del testo di quelle che probabilmente erano glosse interlineari, mi stanno permettendo di ricostruire i primi rapporti di parentela dei codici[55].

[55] Uno dei primi risultati raggiunti grazie alla collazione dei testimoni del *Liber*, è stata la possibilità di emendare alcuni luoghi del testo vulgato. La collazione dei 6 manoscritti contenenti la lettera dedicatoria a Michele Scoto premessa al *Prologo*, ha rilevato che la tradizione diverge proprio su un punto importante per la definizione del tipo di lavoro che il Pisano afferma di aver fatto. Dopo aver precisato che nel suo *Liber* esporrà «l'intera dottrina dei numeri secondo il metodo degli Indiani» e anticipato che nella trattazione saranno utilizzati esempi geometrici visto che «l'aritmetica e la geometria sono legate tra loro e si suffragano a vicenda», Leonardo aggiunge che il suo libro è relativo più alla pratica che alla teoria, perché per assimilare bene i concetti teorici bisogna esercitarsi a lungo e con diligenza. Fibonacci, in sostanza, sostiene che il suo trattato è più pratico che teorico. Ebbene, proprio quest'affermazione voglio analizzare, perché se nella maggior parte dei codici troviamo la lezione *magis quam ad theoricam spectat ad praticam* – ovvero 'più che alla teoria si rivolge alla pratica' - e nel codice Napoletano VIII C 18 troviamo una formulazione diversa, ma di significato identico, ovvero *ad practicam magis quam ad theoricam spectat 'alla pratica più che alla teoria si rivolge'*, il solo Fiorentino Conv. Soppr. C. 1. 2616 capovolge tale concetto con la sua lezione *magis ad theoricam spectat quam ad practicam 'più alla teoria si rivolge che alla pratica'*. Poiché, però, proprio quest'ultimo codice rappresentò la sola fonte utilizzata dal Boncompagni per la sua edizione a stampa ed è quello che si pone, dunque, alla base del testo oggi vulgato del trattato fibonacciano, tutti gli studi condotti su tale trattato fanno riferimento alla presunta affermazione del Fibonacci secondo la quale il *Liber Abaci* "è relativo più alla teoria che alla pratica", dichiarazione che ha confuso non poco le idee sull'interpretazione delle finalità del trattato, che invece intende rivolgersi proprio alla classe mercantile di cui leonardo faceva parte.
Voglio chiarire, per inciso, quale sia la natura del *Liber Abaci* è una questione, in realtà, alquanto dibattuta dagli studiosi, probabilmente alimentata proprio dall'apparente incongruenza tra la dichiarazione della *vulgata*, secondo la quale si tratterebbe di un manuale teorico più che pratico, e il grande spazio che invece l'autore dà

In particolare, un errore del testo vulgato che la semplice collazione dei manoscritti mi ha permesso facilmente di emendare, è la trasposizione di un paragrafo del capitolo secondo che la fonte di Boncompagni inserisce, invece, dopo il primo paragrafo del capitolo III. Il secondo capitolo del *Liber Abaci* è dedicato alla moltiplicazione, mentre il terzo è dedicato alle addizioni. Leggendo il codice F generava perplessità, quindi, il fatto che Fibonacci, dopo aver iniziato il terzo capitolo trattando dell'addizione, saltando di palo in frasca, ritornasse alla moltiplicazione descrivendo un metodo diverso per effettuare tale operazione: quello che dagli studiosi viene definito 'il metodo della moltiplicazione a crocetta'. In realtà all'inizio del secondo capitolo Fibonacci scrive chiaramente che dividerà il secondo capitolo in otto sezioni[1], ma dell'ottava sezione non c'è traccia nella fonte di Boncompagni e quindi nel testo vulgato.

> Est enim alius modus multiplicandi valde laudabilis, maxime in multiplicandis magnis numeris, quem ostendam in multiplicatione de 567 in 4321. Constituatur quadrilaterum in forma scacherii, habens puncta 5 in longitudine, scilicet unum plus numero figurarum maioris numeri, et habeat in latitudine puncta 3, sicuti sunt tres figure

---

alle questioni pratiche. Questo caso risulta particolarmente istruttivo, perché ci fa capire come un banale errore di un manoscritto, veicolato da una stampa che ha determinato una vulgata dell'opera, abbia inciso sull'opinione degli studiosi e creato fraintendimenti e aporie teoriche fra quella che sembrava l'opinione dell'autore espressa nel *Prologo* e l'effettiva realtà dell'opera. Il restituire quella che sembra la lezione corretta ed autentica scioglie molti dei problemi che si erano determinati nella discussione intorno alla natura del trattato fibonacciano. In ogni caso, va ben considerata la forma dell'affermazione di Leonardo sulla natura prevalentemente pratica del suo trattato: egli non scrive che il suo è un manuale pratico *tout court*, ma solo che esso "guarda", "si riferisce", "è relativo" alla pratica, cioè che trova in essa il suo effettivo compimento. Infatti, il Pisano non manca di affrontare delle questioni matematiche di tipo teorico, anche se egli non perde mai di vista le loro applicazioni pratiche. Certamente un manuale di matematica non può non apparire teorico, eppure lo spazio concesso alle questioni pratiche si mostra assai significativo: i capitoli centrali (VIII-XII) sono ad esse interamente dedicati e, anche quando spiega operazioni algebriche, Leonardo utilizza diversi esempi e, prima di procedere con un nuovo argomento, raccomanda di esercitarsi bene per assimilare ciò che è stato insegnato e per poter comprendere le nozioni successive). D'altra parte, come ha fatto notare Alessandra Simi in un interessante articolo del 2004 a cui rinvio, Fibonacci intitola *Practica geometriae* il suo trattato di geometria che poggia su solide basi speculative e in cui Il livello generale della trattazione è assai elevato: ogni questione è illustrata minuziosamente e giustificata meticolosamente ricorrendo ad argomentazioni teoriche e dottrinali di notevole spessore che, se da un lato mostrano le grandi doti didattiche dell'autore, dall'altro vanno indubbiamente ben oltre le mere esigenze pratiche. un elemento di 'praticità è se mai ravvisabile nella scelta didattica operata dallautore di proporre sistematicamente la materia non seguendo lo schema euclideo o archimedeo, ma secondo un approccio 'per problemi'. Ritornando al *Liber Abaci* esso sembra, in definitiva, un ibrido: Leonardo è il primo ad introdurre i problemi pratici, ma nel suo manuale c'è ancora molto di quella teoria che scomparirà del tutto dai trattati d'abaco successivi, questi sì, assolutamente pratici e consistenti spesso in una sorta di elenco di prescrizioni ad uso dei mercanti. In effetti l'impressione che si ha, nel leggere i libri d'abaco più tardi è che l'aritmetica servisse semplicemente come preparazione per l'impostazione e la soluzione dei problemi posti dall'attività mercantile anche se, come non ha mancato di far notare Alessandra Simi, i mondi delle università e delle scuole d'abaco non erano compartimenti stagni visto che alcuni lettori di matematica venivano reclutati tra i maestri d'abaco. Ne risulta che questi maestri d'abaco avevano in molti casi una profonda cultura matematica ma doveva esserci una divergenza tra gli interessi dei docenti e dei discenti.

in minori numero. Et ponatur maior numerus super quadrilaterum supradictum, et minor ponatur ante ipsum, ut hic cernitur.

C'è poi un altro modo di moltiplicare assai efficace, soprattutto nel moltiplicare grandi numeri, che mostrerò nella moltiplicazione di 567 per 4321. Si costruisca un quadrilatero a forma di scacchiera, avente 5 punti in lunghezza, cioè uno più nel numero delle cifre del numero maggiore, e 3 punti in larghezza, così come sono tre le cifre nel numero minore. E si ponga il numero maggiore sopra il quadrilatero suddetto e il minore ponga davanti allo stesso, come si vede qui nella figura.

Questo paragrafo, che costituisce, in realtà, la parte ottava del secondo capitolo presenta la seguente situazione codicologica:

- compare a chiusura del II capitolo sotto il titolo *pars octava* nei codici S e V e B
- compare a chiusura del II capitolo, ma sotto il titolo *pars septima* nel codice R
- compare praticamente nella stessa posizione, ma sotto il titolo *Incipit capitulum Tertium* in NAF_1
- compare in posizione differente solo in F, che lo pone dopo il primo paragrafo del terzo capitolo.

Dunque, sebbene il titolo *pars octava* compaia solo nei soli codici S, V e B, esso è sicuramente da accogliere nel testo critico, dopo che sia stata senz'altro ristabilita la posizione del paragrafo in questione indicata dal *consensus codicum*, ma deducibile dalla stessa logica del testo.

II.4. Prime ipotesi sui rapporti tra alcuni dei testimoni del *Liber Abaci*.

Mi sembra si possano individuare rapporti di parentela più stretta tra $AVNF_1$, mentre gli altri codici apparterrebbero ad un altro ramo della tradizione. In realtà, l'ipotesi su cui mi sento di sbilanciarmi riguarda il legame molto stretto osservato tra N ed F_1, un rapporto tale che praticamente tutte le varianti di F_1 compaiono anche in N, e laddove non compaiano si possono giustificare come una correzione del copista dotto. Citerò a titolo meramente esemplificativo un solo esempio tratto dal capitolo settimo del *Liber*, quello dedicato all'addizione e sottrazione di numeri frazionari:

Si vero $\frac{1}{7}\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ extrahere volueris[56].

Il brano presenta la seguente situazione codicologica, relativamente ai manoscritti già collazionati: Vero FSRVA, volueris N F_1//Volueris FSRVA, *om*. N F_1.

[56] B. Boncompagni, *Scritti cit.*, p.66.

Ma è una divergenza di varianti tra N ed F_1, e la motivazione paleografica che secondo me ne è alla base, a farmi propendere per una derivazione, non necessariamente diretta, di N da F_1. Si osservi infatti, sempre nel settimo capitolo il brano seguente:

> Si volueris addere $\frac{1}{3}$ 12 cum $\frac{3}{4}$ 126, describe numeros ut hic ostenditur, et multiplica 12[57] per suam virgulam.

L'espressione *multiplica 12* è tramandata in tutta la tradizione eccetto che in N dove si legge chiaramente *multiplica ea 12*. Ebbene, tale lezione singolare potrebbe essere indotto nel copista di N da un'errata lettura di F_1 dove la scrittura di *multiplica* si presta a qualche ambiguità: in particolare 'ca' potrebbe essere stato confuso con ea da N o dal suo antigrafo perduto.

ho avuto modo anche di iniziare a riflettere sui rapporti di parentela tra i codici, fino a sentirmi di dire che N, il codice Napoletano del XVII deriva da F1 che potrebbe costituirne il diretto antigrafo senza anelli intermedi.

Gli esempi che vi propongo sono tratti dal VII capitolo che Fibonacci dedica alla trattazioni delle operazioni di addizione e sottrazione tra numeri irrazionali.

> Si vero$\frac{1\ 1}{7\ 5}$ de $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ extrahere volueris, reperies prescripta 245 et 144 per qualem volueris modum de duobus prescriptis.
>
> [Vero FSRVA, volueris F_1 N//Volueris FSRVA, *om*. F_1N]

> Pone ergo 2232 super $\frac{2\ 3}{7\ 5}$ et accedas ad $\frac{2\ 3}{9\ 8}$ et multiplica 3 que sunt super 8 per 9 et 2 que sunt super 9 per 8 et adde insimul, erunt 43 que multiplica per alios ruptos videlicet per 5 et per 7, erunt 1505, ut superius pro $\frac{2\ 3}{9\ 8}$ de 2520 invenimus. Pone ergo 1505 super $\frac{2\ 3}{9\ 8}$
>
> [Ut superius-1505 FASRV, *om*. F_1N]

> Sit $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 3}$que partes sunt ex partibus numerorum multiplicatorum
>
> [Ex partibus FARSV, om. F_1N]

[57] 12 F F_1ASRV, ea 12 N, (ma si noti che in F_1 la lettura di *ca* di *multiplica* è ambigua: potrebbe anche trattarsi di *ea*)

de divisione autem eorum ad invicem fac ut supra

[eorum F ASV, illorum F_1N, om. R]

Capitolo III

Le peculiarità retorico-linguistiche del *Liber*

III. 1. Le peculiarità retorico-linguistiche del *Liber*.

La traduzione del *Liber Abaci* di Leonardo Pisano trova la sua difficoltà maggiore nella resa di un linguaggio della matematica che se nel XIII secolo già esisteva, come sostiene Andrea Bocchi[58], sicuramente non era modernamente inteso come insieme di segni in cui significante e significato fossero in rapporto biunivoco di 1:1 onde evitare ogni ambiguità e veicolare con precisione i contenuti da trasmettere[59]. Una lingua speciale modernamente intesa, infatti, si differenzia dalla lingua generale di cui è sottocategoria proprio per l'assenza di sinonimi e complicati giri di frase p perifrasi: ogni concetto è individuato e ben definito da un termine specifico che viene utilizzato ogni volta che occorra riferirsi a quel particolare concetto senza che subentrino preoccupazioni stilistiche di introdurre forme di *variatio* nell'esposizione. Il criterio moderno non può applicarsi a nessuno dei primi abbozzi di lingue speciali nel medioevo o ancora prima, la maturità della consapevolezza linguistica era ancora agli albori e siamo noi moderni a etichettare come 'lingue speciali' il latino o il greco della medicina, dell'astronomia, della matematica antiche o medievali.

Per tratteggiare un ritratto della lingua usata dal Fibonacci nel suo trattato di matematica risulta indispensabile indagare, attraverso il confronto anche con la successiva trattatistica d'abaco in volgare[60], quali siano le caratteristiche retorico-linguistiche di questa lingua settoriale[61].

---

[58]Secondo Andrea Bocchi, *Geometria in volgare* in *Lingua e Stile*, 2/2009, p. 289, è indubbio che esistesse tra dodicesimo e tredicesimo secolo un lessico speciale della matematica universalmente comprensibile, il latino dei traduttori dall'arabo e quello dell'insegnamento accademico, ma si andava formando anche una lingua della matematica pratica che oggi possiamo ricostruire a partire dai libri d'abaco in volgare e dal trattato fibonacciano che ne è in molti casi la fonte. Walter Berschin, *Traduzioni in latino nel secolo XIII in Aspetti della letteratura latina nel secolo XIII*. Atti del primo Convegno internazionale di studi dell'associazione per il Medioevo e l'Umanesimo latini (AMUL) Perugia 3-5 ottobre 1983 a cura di Claudio Leonardi e Giovanni Orlandi, Spoleto 1992, p. 230, sostiene che nel XIII secolo le lingue più importanti dalle quali si traduceva in latino erano l'arabo e il greco. In particolare l'opera di Aristotele sarebbe giunta all'Occidente medievale solo dopo un lungo cammino: dalla scuola di Bagdad sarebbe passata, sempre in ambiente arabo, attraverso l'Africa settentrionale fino ad approdare in Spagna, dove per la prima volta sarebbe stata riscoperta dall'Occidente. Sebbene il lavoro dei duecenteschi traduttori in latino dall'arabo sia senz'altro dunque meritorio e indispensabile per la divulgazione in occidente delle conquiste della matematica orientale, essi furono duramente criticati dalle generazioni successive. Lo stesso Michele Scoto, su cui cade inevitabilmente l'attenzione di chiunque si occupi di studi fibonacciani in quanto dedicatario del *Liber*, non fu ricordato con particolare deferenza già dalla generazione successiva. Il francescano Ruggero Bacone, parlando di lui e di tutti i traduttori del primo Duecento (escluso il compatriota Roberto Grossatesta) asseriva che non avevano capito niente, tanto di problemi culturali quanto linguistici del mondo arabo, e che anzi non sapevano nemmeno il latino. (cfr. W. Berschin, *Traduzioni*, p. 234).

[59] Ho già affrontato la questione della tendenza all'univocità semantica di un termine in un contesto specialistico e di come essa non sia ancora rispettata nel *Liber Abaci* (cfr. C. Carotenuto, *Tradurre il* Liber Abaci *di Leonardo Pisano* in E. Burattini *et al*, *Per un'edizione*, p. 89) rimandando alla trattazione esaustiva di F. Scarpa, *La traduzione specializzata*, Milano 2008[2] (cfr. in particolare pp.55-60).

[60] Il linguaggio speciale della matematica in volgare tardomedievale presenta, come rilevato dal Bocchi, *Geometria*, p.293, un'evidente dipendenza dagli adattamenti dal latino e, specie per il lessico, una conservatività che è peraltro tipica dei lessici di settore. D'altra parte il confronto con opere coeve in latino, che non siano i trattati di geometria dello stesso Pisano, è reso difficile proprio dal tipo di rivoluzione introdotta dal *Liber Abaci* nell'impostazione stessa dell'insegnamento della matematica: rivolta soprattutto ai mercanti essa tralascia le

Ma prima di indagare le peculiarità della lingua fibonacciana, occorre mettere in luce che queste si inscrivono nel più ampio quadro della lingua latina medievale su cui sarà opportuno di volta in volta soffermarsi. Come ha sintetizzato Dag Norberg nel suo accurato studio sulla lingua medievale[62] dal XIII secolo la situazione della cultura medievale cambiò rapidamente. Nelle università la dialettica prevalse sulla grammatica, i fatti attirarono gli interessi degli studenti molto più della forma elegante, si abbandonarono gli *auctores* classici per dedicarsi allo studio della teologia, del diritto, della medicina, della filosofia e delle scienze. Ne conseguì che il latino nelle Università perse i contatti con le belle lettere e divenne sempre più tecnico. Sono soprattutto la semplicità della sintassi e la monotonia dello stile che caratterizzano il latino dell'insegnamento universitario: si aggiungono nuovi argomenti con un *item*, un *amplius*, o un *praeterea* ripetuti all'infinito, la logica, infatti, esigeva una precisione impeccabile delle espressioni latine, ma non una variazione secondo le regole della retorica.

Dopo i primissimi paragrafi del capitolo VI, ad esempio, per introdurre un nuovo esempio sull'argomento già trattato (*de eodem*) viene utilizzato *item*, che è più volte ripetuto per introdurre i successivi passaggi dell'operazione da svolgere:

(1) <u>Item</u> si volueris multiplicare $\frac{1}{2}12$ per $\frac{3}{5}23$, describe questionem ut hic ostenditur et multiplicabis 12 per 2 que sunt sub virgula et addes 1 quod est super ipsa 2,

questioni meramente speculative e mira più alle applicazioni pratiche. Ne consegue l'abbandono del latino per la trattatistica d'abaco successiva a Fibonacci e che pure a Fibonacci si riallaccia. Si deve sempre al Bocchi la riflessione su come la rapida diffusione della matematica pratica nella vita commerciale ed artigianale ed il suo progressivo radicamento in strutture scolastiche dedicate è evidentemente correlata alla semplificazione della materia che solo in pochi casi viene trattata con un ricorso continuato ai coevi manoscritti latini. Una volta passato in ambito volgare, insomma, non vi è possibilità di un ritorno al latino (cfr. A. Bocchi, *Geometria*, p.296. Si leggano, a proposito del nuovo metodo dell'insegnamento della matematica nel tardomedioevo gli approfonditi studi di A. Simi, in particolare A. Simi, *L'eredità della Practica geometriae di Leonardo Pisano nella geometria del basso Medioevo e del primo Rinascimento*, in *BSSM* XXIV (2004) Fasc. 1, cfr. anche R. Franci, *L'insegnamento dell'aritmetica nel Medioevo* e E. Ulivi, *Le scuole d'Abaco e l'insegnamento della matematica a Firenze nei secoli XIII-XVI*, entrambi in *Scienze matematiche e insegnamento in epoca medioevale*, Atti del convegno internazionale di studio, Chieti 2-4 maggio 1996 a cura di Paolo Freguglia, Luigi Pellegrini e Roberto Paciocco, Napoli, 2000).

[61] Interessanti precisazioni sulla particolarità delle lingue di settore latine si devono a I. Mazzini, *Storia della lingua latina e del suo contesto*, II. *Lingue socialmente marcate*, Casoria 2010, p. 15s. L'autore, superando la distinzione tra lingua speciale e lingua tecnica grazie all'etichetta di 'lingua socialmente marcata' o 'settoriale' (entrambe trovano infatti la loro motivazione nella natura che unisce diverse persone e fa di loro un gruppo socialmente e culturalmente separato, anche se nel caso delle lingue tecniche il vincolo è rappresentato dalla professione, nel caso di quelle speciali è costituito dall'ideologia, dal sesso, dall'età), sostiene che sia lecito supporre che le lingue settoriali caratterizzate da un vincolo sociale nel mondo antico fossero molte e più differenziate di quanto oggi possiamo immaginare, visto che la società dell'epoca era più classista della contemporanea. Al contrario, meno numerose dovevano essere le lingue contraddistinte da un vincolo meramente professionale, visto che i saperi non erano così differenziati e specialistici come lo sono oggi.

[62] D. Norberg, Manuale di latino medievale, a cura di M. Oldoni, Cava de' Tirreni p.117s.

erunt medie 25. (2) Item multiplicabis 23 per 5 que sunt sub virgula, et addes 3 que sunt super ipsa 5, erunt quinte 118, multiplicabis ergo medietas 25 per quintas 118, erunt medie quinte, scilicet decime, 2950.

Sempre nello stesso capitolo sesto, qualche paragrafo più avanti si nota un tentativo di *variatio* nell'alternarsi delle espressioni sinonimiche *item cum debueris* e *et cum debueris*:

Item cum debueris dividere per 4 et per 4 hoc est per $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 4}$, divides eum per $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 8}$. Et cum debueris dividere per 3 et per 6, hoc est per $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 6}$, divides per $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 9}$, ideo quia tantum faciet multiplicatio de 2 in 9 quantum de 3 in 6. Item cum debueris dividere per 4 e per 6, hoc est per $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 6}$, divides per $\frac{1\ 0}{3\ 8}$. Et cum debueris dividere per $\frac{1\ 0}{6\ 6}$, divides per $\frac{1\ \ 0}{3\ 10}$. Et cum debueris dividere per $\frac{1\ 0}{5\ 8}$, divides per $\frac{1\ \ 0}{4\ 10}$. Et cum debueris dividere per $\frac{1\ 0}{6\ 6}$, divides per $\frac{1\ 0}{4\ 9}$, ideo quia utraque virgula, scilicet $\frac{1\ \ 0}{5\ \ 6}$ et $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 9}$, est regula de 36.

Linguisticamente, ha osservato Erich Auerbach[63], la *Scolastica* è rivoluzionaria perché interrompe quasi brutalmente la tradizione del latino scritto, che fino allora era stata in sostanza retorica o retorico-manieristica, e fa passare in primo piano per la prima volta l'oggettività scientifica del contenuto. Si manifesta qui uno dei notevoli vantaggi offerti dalla circostanza che il Medioevo possedeva nel latino uno strumento la cui possibilità di impiego scientifico non era messa in pericolo dalle influenze dell'uso quotidiano. Era, infatti, relativamente facile creare una lingua speciale estremamente raffinata e perspicua nell'espressione concettuale. Anche se ciò era soltanto possibile con l'aiuto di neologismi che per un orecchio classicamente educato suonavano barbarici, e a prezzo di distruggere l'armonia classico-retorica del periodo.

L'analisi linguistico-stilistica del trattato fibonacciano mette in luce una serie di caratteristiche che si possono così schematizzare:

1. Frequenza del congiuntivo prescrittivo-esortativo
2. Alternanza, tipica d'altra parte dei testi didattici, tra seconda singolare e prima plurale.
3. Peculiarità della struttura sintattica del calcolo, che prevede l'imperativo dell'operazione e il futuro del risultato.

[63] E. Auerbach, Lingua letteraria e pubblico nella tarda antichità latina e nel Medioevo, Milano 1970 (seconda edizione italiana), p.249.

4. Resa delle proposizioni oggettive con la costruzione quod, quia o quoniam + congiuntivo anziché con l'accusativo + infinito.

5. Varietà nella costruzione dei verbi della moltiplicazione.

6. L’uso dei preverbi.

7. Uso indistinto di *is*, *hic* e di *ille*, *iste*, *ipse* e *idem* in luogo di *is* e conseguente rimpiazzo del pronome dimostrativo con nuove creazioni.

8. Un lessico tecnico in parte ancora ambiguo.

9. L'abbondanza di espressioni brachilogiche e di metonimie.

10. Gli usi 'medievali' delle preposizioni.

11. Gli usi 'medievali' delle congiunzioni.

Nei paragrafi seguenti queste particolarità saranno adeguatamente analizzate attraverso opportune esemplificazioni e dovuti riferimenti testuali.

III. 2. Il congiuntivo prescrittivo-esortativo.

Da una prima lettura del trattato fibonacciano salta immediatamente all’occhio come il modo verbale più utilizzato sia il congiuntivo. Tale modo è prevalente non solo nelle proposizioni subordinate e ipotetiche, ma anche nelle principali: qui la sua funzione esortativa supplisce alle voci mancanti dell’imperativo. Bisogna rilevare infatti che - specie nei primi capitoli del *Liber* - la seconda persona è scarsamente utilizzata dall’autore che, anziché apostrofare direttamente il suo lettore/discente, si rivolge ad un *quis* spersonalizzante che voglia eseguire l’operazione oggetto di analisi.

Esaminiamo, a titolo esemplificativo, l’*incipit* del quarto capitolo dedicato alla sottrazione.

> De extratione minorum numerorum de maioribus[64].
>
> Cum, autem, numerum de numero quis extrahere voluerit, <u>describat</u> minorem numerum sub maiori, collocans similes gradus sub similibus, et <u>incipiat</u> extrahere primam figuram minoris numeri de prima maioris, et <u>ponat</u> superhabundantem numerum super

[64] Si noti che, da qui in avanti, il testo sarà citato nell’edizione critica che sto approntando sulla base della collazione dei testimoni dell’opera, il riferimento alle pagine del Boncompagni, che attualmente costituisce la *vulgata* del *Liber* è quindi puramente indicativo. Nel caso specifico, il titolo è tramandato unanimemente dalla tradizione come *Incipit capitulum quartum de extratione minorum numerorum de maioribus*, ma si è preferito modernizzarlo. Delle varianti testuali, in ogni caso, non si darà conto d’ora in poi visto che esse non costituiscono l’oggetto della presente trattazione. La traduzione dei passi riportati d’ora in avanti a titolo di esempio è di chi scrive.

primas figuras. Et secundam extrahat de secunda, et ponat residuum super secundam, et tertiam de tertia, et reliquas de reliquis per ordinem, semper residua ponendo[65].

Qualora, poi, qualcuno volesse sottrarre un numero da un numero, scriva il numero minore sotto il maggiore, collocando i gradi simili sotto i simili, e cominci a sottrarre la prima cifra del numero minore dalla prima del maggiore, e ponga[66] il numero che avanza sopra le prime cifre[67]. E sottragga la seconda cifra dalla seconda, e ponga la differenza[68]sopra la seconda, e sottragga la terza dalla terza, e le cifre rimanenti dalle rimanenti in ordine, ponendo sempre la differenza.

Verbi gratia, ut si voluerit quis de 89 extrahere 35, ponantur 35 sub 89, ut in hac margine ostenditur. Extrahantur, itaque, 5 de 9, remanent 4, que ponat super 9. Et extrahantur 3 de 8, remanent 5: que ponat super 8. Et sic habebuntur, pro residuo posite extractionis, 54[69].

Per esempio, se qualcuno volesse sottrarre 35 da 89, si ponga il 35 sotto l'89, come si mostra qui a lato. Si sottragga, poi, il 5 dal 9, rimane 4, che si deve porre sopra il 9. E si sottragga il 3 dall'8, rimane 5: lo si ponga sopra l'8. Così si otterrà, come differenza della sottrazione proposta, 54.

Gli esempi proposti mettono bene in luce come il congiuntivo esortativo assolva perfettamente la funzione di impartire istruzioni tipica della trattatistica didascalica. Per una maggiore scorrevolezza della traduzione, nel caso in cui si trasformino delle coordinate alla principale in subordinate, ho preferito rendere la funzione prescrittiva del congiuntivo esortativo con un'espressione perifrastica. Si sarà notata, ad esempio, la mia oscillazione nella traduzione del *que ponat*, sintagma frequente nel trattato e, a mio avviso, troppo ripetitivo per una traduzione accettabile al gusto moderno; nel passo in questione il *que ponat super 9* è stato tradotto con 'che si deve porre sopra il 9', ma è valida anche la traduzione di *que ponat super 8* come 'lo (si) scriva sopra l'8': nel primo caso il relativo *quae* (nella grafia classica, si tratta di un accusativo neutro plurale poiché dal Fibonacci le cifre maggiori di 1 sono sentite

[65] B. Boncompagni, *Scritti*, p.22.
[66] si traduce qui *pono* come 'porre', anche se è ugualmente accettabile, e forse preferibile, la traduzione 'scrivere'. *Pono* qui sembra più riferirsi all'atto di 'porre' il numero nella casella della tavoletta di sabbia che costituiva l'abaco su cui si eseguivano le operazioni di calcolo (cfr. E. Caianiello, *La vita*, p. 62)
[67] Fibonacci qui si riferisce alla prima cifra del numero superiore e a quella del numero inferiore incolonnate una sull'altra.
[68] Traduco con 'differenza' il termine *residuum* perché così si definisce il 'resto della sottrazione' nell'attuale linguaggio matematico.
[69] B. Boncompagni, *Scritti*, p.22.

come ‘un’aggregazione di unità’ e quindi come plurale) è reso come tale anche in italiano dando vita ad una subordinata relativa, nel secondo caso il pronome relativo italiano (traduzione anch’essa legittima vista la duplice natura del significante latino) dà luogo ad una proposizione coordinata alla principale per asindeto. La legittimità di questa *variatio* stilistica nella traduzione rispetto all’originale è ovviamente opinabile, e non escludo un ripensamento in un lavoro di revisione della traduzione successiva all’ultimazione della stessa.

Quando invece Fibonacci si rivolge direttamente al suo discente nell'esemplificare le operazioni di calcolo e usa quindi la seconda persona singolare, la prescrizione viene espressa in vari modi: l'imperativo si alterna al congiuntivo e all'indicativo futuro con valore prescrittivo, e compaiono costrutti perifrastici con *debeo*. Vale la pena di rilevare in questa sezione che la confusione che si riscontra nella lingua fibonacciana tra l'uso dell'indicativo e del congiuntivo è, come ha avuto modo di osservare Karl Strecker, tipica del latino medievale. L'indicativo e il congiuntivo, infatti, non sono usati con la stessa precisione che avevano nel latino classico e il loro uso varia molto da autore ad autore, anche se Strecker ritiene di poter individuare alcune regole generali: il congiuntivo si trova nelle domande indirette, nel discorso indiretto, nelle dipendenti volitive, nelle dipendenti finali e dopo *ut*, *quo*, *quatenus*; nelle frasi temporali dopo *dum* e *cum* compare sia l'indicativo che il congiuntivo; *quamvis* può reggere l'indicativo, come *quamquam* il congiuntivo[70].

Nel *Liber Abaci* la confusione tra congiuntivo e indicativo, che è particolarmente frequente e in alcuni casi apparentemente casuale, in realtà può essere spesso dovuta a errori della tradizione e quindi non direttamente ascrivibile a Leonardo. Ad esempio all'inizio del capitolo sesto, nello svolgimento di un'operazione di calcolo in cui Fibonacci usa prevalentemente il futuro indicativo, parte della tradizione ci ha riportato un congiuntivo presente con valore esortativo:

> Item multiplicabis 23 per 5 que sunt sub virgula, et <u>addes</u> 3 que sunt super ipsa 5 [addes NASV F_1 F_2, Addas FR]

In questo brano ho ritenuto di accogliere la lezione *addes* perché il passo continua con altri futuri e l'idea della prescrizione è poco dopo espressa con la perifrasi *debeo* + *infinito* anziché con il congiuntivo esortativo:

> erunt quinte 118, <u>multiplicabis</u> ergo medietas 25 per quintas 118, <u>erunt</u> medie quinte, scilicet decime, 2950. Quare <u>divides</u> per 2 et per 5, que sunt sub virgulis, hoc est

[70] K. Strecker, Introduction cit., p. 66.

per 10, vel debes 2950 dividere per 10 - quia ex duplo de $\frac{1}{2}12$ in quincuplum de $\frac{3}{5}23$, scilicet de 25 in 118, provenit decuplum multiplicationis de $\frac{1}{2}12$ in $\frac{3}{5}23$ - exibunt integra 295 et nihil aliud, ut superius in questione demonstratur.

L'alternarza tra l'uso del congiuntivo presente e dell'indicativo futuro oltre che dell'imperativo e della perifrasi debeo + infinito con valore prescrittivo provoca non poche confusioni nella tradizione evidenti nel seguente brano del capitolo VII:

pones [pones SAVRNF_1, Ponas F] ergo 234 super $\frac{1\ 3}{9\ 5}$ et adde 234 cum 255 erunt 489 que divide per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{5\ \ 7\ \ 9}$, que sunt sub virgulis et relinques [relinques SVF_1, Relinquas FARN,] 3 quod non divides per ipsa ideo quia in multiplicatione utrarumque partium reliquisti quod non multiplicasti per 3: quare summam iunctionis ipsarum partium non debes dividere per 3, sed debes eam dividere per alios ruptos, cum per ipsos multiplicasti, exibit $\frac{464}{579}1$, ut superius.

Nel seguente brano del sesto capitolo il congiuntivo-prescrittivo appare fuori luogo sebbene la tradizione sia concorde e il solo N abbia l'indicativo probabilmente per congettura autonoma:

Item si vis aptare $\frac{1}{10}\frac{1}{8}\frac{1}{6}$, invenias minimum mensuratum numerorum 6 et 8 et 10, hoc est minor numerus qui integraliter dividatur [Dividatur F F_1AVR, dividitur N] per unum quemque eorum, eritque 120.

Parimenti se vuoi aggregare $\frac{1}{10}\frac{1}{8}\frac{1}{6}$, trova il minimo comune multiplo tra 6, 8 e 10, cioè il numero più piccolo perfettamente divisibile ('che si divide perfettamente', e non 'che devi dividere perfettamente' anche se è ugualmente ammissibile la traduzione 'che si divida perfettamente') per ciascuno di essi, risulterà 120.

Mentre, sempre nel capitolo VI, il seguente esempio di *lectio singularis* può già imputarsi all'influenza della lingua parlata sul copista di F_1.

Sed primum volo demonstrare unde talis evitatio procedat.

[Procedat F F_2ARSN, procedit F_1]

III. 3. Alternanza, tipica dei testi didattici, tra seconda singolare e prima plurale

Dal punto di vista linguistico il testo del *Liber Abaci* presenta una forte oscillazione tra forme impersonali e personali, che tuttavia spesso sottintendono un *quis* che le spersonalizza e che motiva la mia traduzione generalmente impersonale, ancora una volta, in vista della fruibilità da parte del lettore moderno, abituato ad una maggiore uniformità delle persone soggetto[71]. Lungi dal costituire una consapevole scelta retorica di voluta mimesi del parlato, l'alternanza tra forme personali e impersonali sembra piuttosto ascrivibile ad una forma trascurata dello stile che pone l'attenzione più sul contenuto da trasmettere che sulle modalità di espressione. Gli anacoluti riguardano inoltre l'alternanza tra seconda singolare e prima plurale che, secondo Bocchi, sarebbe tipica anche della trattatistica d'abaco in volgare[72]. Va notato, in ogni caso, che mentre l'oscillazione tra forme personali e impersonali è differente nei vari codici, quella tra seconda singolare e prima plurale, invece, è uniforme nella tradizione testuale. In effetti, in un testo didascalico anche moderno è frequente l'alternanza tra l'istruzione impartita direttamente dal docente al discente e una prima persona plurale in cui il docente, esemplificando, si mette allo stesso livello degli alunni come per svolgere l'esercizio insieme a loro.

Esemplificativo è un passo del capitolo dedicato alla moltiplicazione.

> Verbi gratia, ut <u>si iunxerimus</u> figuras que sunt in summa multiplicationis, scilicet 1 et 3 et 6 et 9, erunt 19. De quibus <u>extrahe</u> bis novenarium, remanebit 1, ut pro pensa <u>prediximus</u> eum debere remanere. Vel de dictis 19 dele 9 que sunt in primo gradu ipsorum, remanebit similiter 1. Et <u>nota</u> cum additis figuris de 37, scilicet 3 cum 7: tunc dividis 37 per 9, de qua divisione remanet 1, sicut remansit ex 10 que procreata fuerunt ex addictione 3 et 7, cum ex eis extracta fuerunt 9. Nam residuum quod remanet ex quovis numero diviso per 9, est summa que procreatur ex additatione omnium figurarum facientium ipsum numerum[73].

---

[71] Esemplificativo di questo modo di procedere è il seguente brano dove l'oscillazione riguarda sia il passaggio dalla terza persona singolare attiva alla terza persona plurale passiva con valore impersonale, sia il passaggio inatteso alla seconda persona: *Item si <u>voluerit</u> addere 25 et 461 et 6789 et 58 et 491 et 10718, <u>describantur</u> omnes numeri per ordinem, sicuti in positione positi sunt, et <u>addat</u> numerum figurarum que sunt in capitibus cunctorum dictorum numerorum, incipiendo ab inferiori, scilicet 8 et 1 et 8 et 9 et 1 et 5, semper in manu sinistra colligendo, erunt 32. <u>Ponat</u> 2 et <u>retineat</u> 3, super que <u>colligat</u> numeros figurarum que in secundo gradu numerorum sunt, scilicet 1 et 9 et 5 et 8 et 6 et 2: erunt 34. <u>Ponat</u> 4 et <u>retineat</u> 3, super quem <u>ascendat</u> colligendo numerum figurarum tertii gradus, scilicet 7 et 4 et 7 et 4, <u>erunt</u> 25. <u>Ponat</u> 5 et <u>retineat</u> 2 super quem <u>addat</u> numerum figurarum que sunt in quarto gradu, scilicet 0 et 6, erunt 8 que <u>ponat</u>. Post hec <u>ponat</u> 1 pro 1 quod restat in quinto gradu inferioris numeri, cum non sint in reliquis numeris figure facientes eundem gradum. Et sic <u>habebis</u> pro eorum collectione 18542, ut hic ostenditur* (B. Boncompagni, *Scritti*, p.4s).

[72] cfr. A. Bocchi, *Geometria*, p. 289.

[73] B. Boncompagni, *Scritti*, p.8.

Per esempio, se sommeremo le cifre che sono nel risultato della moltiplicazione, cioè 1 più 3 più 6 più 9, risulterà 19. Sottrai da questo due volte il numero nove, rimarrà 1, come abbiamo previsto che dovesse rimanere come resto di prova. Oppure, dal suddetto 19 cancella il 9 che è nel suo primo grado, similmente rimarrà 1[74]. E rilevalo[75] con le cifre addizionate del 37, cioè 3 più 7: se dividi 37 per 9 e da questa divisione rimane 1, così come era rimasto dal 10 che è stato generato dall'addizione di 3 e 7, una volta che gli sia stato sottratto il nove. Infatti il resto della divisione per 9 di un qualsiasi numero è uguale alla somma di tutte le cifre che compongono quel numero[76].

Come si vede, nell'esemplificare praticamente la formulazione teorica precedentemente impartita l'autore passa da una posizione di partenza in cui inizia lo svolgimento dell'esercizio insieme al suo lettore, quasi volesse guidarlo per mano, ad istruzioni impartite seccamente alla seconda persona dell'imperativo. Questo modo di procedere, rilevato anche dal Bocchi nel volgarizzamento trecentesco della *Practica Geometriae* di Leonardo Pisano edito da Francesco Feola[77], sarà quindi da considerare come precipuo del linguaggio matematico già tardomedievale[78].

[74] In questo contesto Fibonacci non parla più di sottrarre il 9 come "quantità", ma come "cifra". Infatti anche in inglese la nostra "prova del nove" viene designata come *casting out nines*, letteralmente "buttar fuori i nove". Ciò deriva dallo stratagemma, solitamente adottato, di tralasciare i 9 dal computo della radice numerica semplificando ulteriormente il calcolo della somma delle cifre. La cosa è possibile in quanto, togliere o aggiungere nove ad un numero, lascia invariata la somma delle sue cifre, e vale anche per le altre cifre che sommate danno come esito nove o un suo multiplo.

[75] Traduco così il verbo *notare* che significa generalmente "indicare" o "segnare con un gesto" ma anche "rilevare" e "osservare".

[76] Sento l'esigenza di integrare il testo tradito *ipsum numerum* con "sottratti tanti nove quanti si può". Si può ipotizzare che Fibonacci ometta tale rilievo considerandolo ovvio, ma non si può escludere che il testo qui possa anche risalire ad una forma compendiata non dell'autore, ma entrata nella tradizione.

[77] A. Bocchi, *Geometria*, p.289. Il testo di Feola recensito da Bocchi è F. Feola, *Gli esordi della geometria in volgare. Un volgarizzamento trecentesco della* Practica Geometriae *di Leonardo Pisano*, Firenze 2008.

[78] Questo tipo di struttura è tipica dei passi in cui Fibonacci si cimenta in un'esemplificazione pratica, già dal primo capitolo, infatti, il Pisano scrive: *Possumus etiam aliam tradere regulam leviorem qua poteris citissime legere numerum plurium figurarum. Verbi gratia: proponamus numerum 15 figurarum, 678935784105296, dimissis primis tribus figuris, scilicet 296, super quibuslibet aliis tribus, protrahe virgulam in modum arcus, ut in premisso exemplo; et pro qualibet virgula, dices millia, et illas tres figuras, quas in principio dimisisti, leges sicut stant; et sic dices sexcenta septuaginta octo milia milia milia milium, cum quattuor sint virgule, et noningenta et triginta quinque milia milia milium, cum super sint tantum tres virgule, et septingenta octuaginta quattuor milia milium, cum due super sint linee, et 105 milia, cum una tantum sit virgula, et 296 pro illis tribus quas in principio dimisisti. Et si praeter ultimum numerum cum remanent una figura vel due, pone ipsas sub ultima virgula et leges eas omnes quattuor vel omnes quinque simul. Et sic poteris legere numerum quot cumque volueris figurarum.* Come si vede però in questo brano c'è semplicemente il passaggio dalla prima persona plurale alla seconda singolare che rimane costante fino alla fine dell'esempio, mentre il brano riportato sopra nel testo è più tipico dello stile inconcinno del Fibonacci.

III.4. Struttura sintattica del calcolo che prevede l'imperativo dell'operazione e il futuro del risultato.

In un trattato di matematica che presta particolare attenzione alle applicazioni pratiche degli enunciati teorici, i passi dedicati alla spiegazione dei calcoli sono molto numerosi e si prestano a interessanti riflessioni linguistiche. Queste porzioni di testo hanno una struttura costante che prevede l'imperativo dell'operazione e il futuro del risultato, struttura ereditata anche, come analizzato sempre dal Bocchi[79], dalla trattatistica in volgare, ma che ha avuto poi esiti differenti nell'italiano dove il risultato è dato al presente e non al futuro.

> Item si voluerit extrahere 80 de 392, <u>ponat</u> 80 sub 392 et <u>extrahat</u> 0 de 2, remanent 2: que <u>ponat</u>. Et 8 <u>demat</u> de 9, remanet 1: quod <u>ponat</u>. Post hoc <u>ponat</u> 3 que habundant in maiori[80] numero. Et sic <u>habebuntur</u> 312 pro residuo dicte extractionis[81].
>
> Allo stesso modo se uno[82] volesse sottrarre 80 da 392, ponga l'80 sotto il 392 e sottragga lo 0 dal 2, rimane 2: lo ponga. E sottragga l'8 dal 9, rimane 1: lo ponga. Dopo ciò ponga il 3 che avanza nel numero maggiore. E così si <u>otterrà</u> 312 come differenza della detta sottrazione.

Talora il procedimento linguistico descritto è nascosto da corruzione della tradizione, come nel seguente brano del capitolo VI:

> Quare si multiplicetur quinta de 25, scilicet 5, per dimidium de 118, scilicet per 59, proveniet summa multiplicationis de $\frac{1}{2}$ 12 in $\frac{3}{5}$ 23.
>
> [Proveniet NV, Provenit FA F_1S provenerit R, *om.* F_2]

[79] A. Bocchi, *Geometria*, p. 289.
[80] Vale la pena di notare come questa lezione fosse corrotta nel manoscritto utilizzato dal Boncompagni (e quindi nella sua versione a stampa che ne è una fedele trascrizione), in esso infatti leggiamo *minori* in luogo del *maiori* che compare in tutto il resto della tradizione, d'altra parte è la stessa logica interna del testo a suggerire il ripristino di tale lezione.
[81] B. Boncompagni, *Scritti*, p.22s.
[82] L'integrazione di 'uno', traduzione di un *quis* assente nel testo originale, si rende ovviamente necessaria per una maggiore scorrevolezza della traduzione. Vale la pena di notare che in luoghi dalla struttura simile il *quis* è presente anche nel testo originale oppure c'è la forma impersonale: una volta ultimata l'edizione critica bisognerà capire se attribuire all'autore stesso l'omissione del *quis* o all'operazione di compendio dei successivi trascrittori.

La lezione che sembra più corretta compare già nel brano precedente[83] ed è tradita da V, che è tra i più antichi testimoni, mentre in N è probabilmente frutto di una correzione del copista facilmente desumibile dal testo.

In realtà questa particolare struttura fibonacciana, si inserisce nel quadro più ampio di un nuovo uso dei tempi verbali da parte del latino medievale esaurientemente sintetizzato nello studio dello Strecker[84].

III.5. Resa dell'oggettiva con la costruzione quod, quia o quoniam + indicativo anziché accusativo + infinito.

La tendenza ad abbandonare la resa classica dell'oggettiva con la costruzione accusativo + infinito in luogo della più piana *quod*, *quia* + indicativo o addirittura congiuntivo prelude agli sviluppi romanzi. L'affermarsi di questa costruzione, comunissima nella *Vulgata*, viene comunemente indicato come uno degli esempi dell'influenza del latino biblico anche sulla sintassi. In realtà essa doveva essere tipica del linguaggio parlato e la ritroviamo già in Plauto[85]:

Plauto, As. 52: Equidem scio iam filius quod amet meus instanc meretricem[86].

In ogni caso essa è generalmente la norma dopo i verbi di dire, pensare, percepire.

In Fibonacci tale costrutto compare prevalentemente in dipendenza da *scio*:

Scimus quod prescripta divisio recta est[87]. (4) Et scias[88] quia[89] 5 que sunt sub virgula divisionis [R, f. 35r] post 4, cum super ipsa sit 0, nihil representant[90].

---

[83] cfr. ergo ex multiplicatione quinte partis de 25 in 118 proveniet quinta decupli multiplicationis de $\frac{1}{2}$ 12 in $\frac{3}{5}$ 23, scilicet duplum ipsius multiplicationis: [N, f. 44r] quare si multiplicetur quinta de 25, scilicet 5, per dimidium de 118, scilicet per 59, proveniet summa multiplicationis de $\frac{1}{2}$ 12 in $\frac{3}{5}$ 23.

[84] Karl Strecker, Introduction to Medieval Latin, Dublino 1968, p. 67 s evidenza come negli autori medievali i verbi al passato non siano troppo differenziati. Per esempio, l'imperfetto può avere anche forza di aoristo, mentre il perfetto e l'imperfetto stanno spesso l'uno vicino all'altro senza nessuna differenza di significato. Il piucheperfetto è abbastanza frequentemente usato come tempo della narrativa, mentre il piucheperfetto congiuntivo spesso appare al posto dell'imperfetto congiuntivo. Tra gli usi del latino medievale confluiti nella lingua fibonacciana si riscontra l'uso del presente in luogo del futuro; il futuro è spesso rimpiazzato dal futuro perfetto.

[85] Karl Strecker, *Introduction to Medieval Latin*, Dublino 1968, ha messo in luce come il latino medievale evolva naturalmente dal latino classico, e anzi come il 'latino classico' non vada considerato come qualcosa di statico: esso appare già in via di sviluppo persino quando lo incontriamo negli autori antichi. Molto di ciò che si crede sia proprio del latino Medievale era in realtà già apparso negli autori latini antichi come *proprius* usato in luogo dei pronomi possessivi e *tanti* per *tot*.

[86] cfr. M. Leumann, J. Hofmann, *Lateinische Grammatik*, Monaco 1928, p. 720.

[87] Est F F_1 F_2NASV, sit R

[88] Scias F F_1 F_2ARSV, scies N

E ancora, all'inizio del settimo capitolo:

Et <u>scias quia tale est</u> addere $\frac{1}{3}$ cum $\frac{1}{4}$, quale est dicere $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, que partes sunt unius integri.

III.6. Varietà nella costruzione dei verbi della moltiplicazione.

L'analisi del capitolo dedicato alla moltiplicazione lascia rilevare innanzitutto come in Fibonacci sia frequente un'oscillazione tra *in*, *per* e *contra* nell'esemplificazione dell'operazione da eseguire tra moltiplicando e moltiplicatore. Dal momento che l'esito in italiano è *per*, ciò lascerebbe presupporre che il *Liber* sia stato composto in un momento di passaggio nella storia della lingua quando ancora si sente l'influenza dell'uso classico di *in*, ma già si manifesta una preferenza per l'altro segno. Simili oscillazioni in realtà non sono infrequenti in Fibonacci e nel latino medievale in generale: se si è scelto di porre l'attenzione proprio su questa è perché il Bocchi la rileva nel suo articolo già più volte citato[91] e auspica un'indagine su questa e altre particolarità del testo fibonacciano, modello dei volgarizzamenti successivi.

Esemplificativo è l'*incipit* del secondo capitolo, dedicato interamente alla moltiplicazione. Fibonacci spiega che, per comodità didattica, procederà alla divisione del secondo capitolo in otto parti, ciascuna dedicata ad un particolare tipo di moltiplicazione:

Quarum prima pars erit de multiplicatione duarum figurarum <u>contra</u> duas atque unius figure <u>contra</u> plures. Secunda de multiplicatione trium figurarum <u>contra</u> tres atque duarum figurarum in tribus. Tertia de multiplicatione quattuor figurarum <u>contra</u> quattuor, etiam et duarum figurarum et trium <u>in</u> quattuor figuris. Quarta de multiplicatione quinque figurarum <u>in</u> quinque. Quinta de multiplicatione plurium figurarum quam quinque, qualiter multiplicentur ad invicem. Sexta de multiplicatione numerorum secundi gradus <u>per</u> numeros eiusdem gradus, hoc est duarum figurarum <u>per</u> duas, atque unius figure contra plures, qualiter cordetenus in manibus multiplicentur. Septima de multiplicatione trium figurarum <u>per</u> tres, similiter qualiter in manibus cordetenus multiplicentur. Octava de multiplicatione omnium numerorum alio modo[92].

[89] quia R, Quare F F_1 F_2ASV, quod N
[90] Il brano è tratto dal capitolo VI.
[91] A. Bocchi, *Geometria*, p. 289.
[92] B. Boncompagni, *Scritti*, p.7. Si noti che il sintagma *alio modo* è una congettura che emenda una tradizione che si può così schematizzare: *alium modum* F, *in alium numerum* N, *modum* R, *in alium modum* A, *per alium modum* S.

Di queste, la prima parte tratterà della moltiplicazione di due cifre per due e di una cifra per più cifre. La seconda parte della moltiplicazione di tre cifre per tre e di due cifre per tre. La terza della moltiplicazione di quattro cifre per quattro, nonché di due e tre cifre per quattro. La quarta della moltiplicazione di cinque cifre per cinque. La quinta della moltiplicazione di più di cinque cifre, in che modo si moltiplichino a vicenda. La sesta della moltiplicazione dei numeri di secondo grado per numeri dello stesso grado, cioè della moltiplicazione di due cifre per due, e di una sola cifra per più cifre, in che modo si moltiplichino sulle mani a mente. La settima della moltiplicazione di tre cifre per tre, similmente come si moltiplichino sulle mani a mente. L'ottava della moltiplicazione di tutti i numeri con un metodo differente.

Si noti come da un iniziale uso di *contra* e poi *in* come connettore tra moltiplicando e moltiplicatore, si passi a quello di *per* anticipando l'esito analogo dell'italiano. Vale la pena di sottolineare che la tradizione del brano riportato, per quanto concerne le preposizioni oggetto di analisi, è uniforme e quindi siamo autorizzati a ipotizzare che si tratti di un'oscillazione che risale all'autore stesso dal momento che le indagini finora condotte sulla tradizione manoscritta non permettono di delineare un preciso quadro di parentele tra i testimoni che sembrerebbero essere indipendenti l'uno dall'altro[93].

Il confronto con un libro d'abaco in volgare perugino trecentesco, mette però in luce come l'uso di *per* come operatore di calcolo della moltiplicazione – che pure ritroviamo - si affianchi quello di *via* o la perifrasi *multiplicare* n *fiade* n:

Deie fare chusì: <u>multiplichare</u> 7 <u>fiade</u> 5, che fonno 35[94]

[93] In realtà le collazioni degli otto testimoni dei primi capitoli del *Liber* mi hanno permesso di elaborare delle ipotesi di studio su cui mi riservo di meditare e che devo ulteriormente verificare. Mi preme ricordare che indagare sui rapporti di parentela tra i testimoni di un'opera di carattere tecnico – specie quando, come in questo caso, essa consista in un trattato di matematica – presenta alcune peculiarità che si possono così sintetizzare: alcuni errori sono poligenetici e dovuti a distrazione derivante dal carattere ripetitivo del trattato; ci sono poi gli errori dovuti a ignoranza del copista che potrebbe non essere un esperto della materia trattata; ci si imbatte, ancora, di frequente in varianti dovute a sintesi o rielaborazioni perché un'opera di carattere tecnico è priva di quell'aura di sacralità stilistica che impone al copista il rispetto della forma dell'espressione originale oltre che del contenuto; ci sono infine le varianti dovute all'intervento di un copista 'dotto' che se si rende conto di errori nei calcoli matematici li corregge. Del resto qualche considerazione simile la fa anche Franca Brambilla sull'edizione critica dei testi volgari (cfr. F. Brambilla Ageno, *L'edizione critica dei testi volgari*, Padova 1975): "L'errore indiretto non è chiaramente distinguibile dall'errore critico, o meglio, è raramente rintracciabile allo stato puro, in quanto, per definizione, esso dovrebbe essere completamente meccanico e inconscio, e invece di solito nasce anch'esso dalla tendenza del copista a interpretare, sia pure in modo sommario e confuso, il testo che trascrive, a sostituire a una successione di lettere senza senso una parola nota e comprensibile anche se priva di legami col contesto".

[94] A. Bocchi, *Il Livero de l'abbecho in volgare perugino*, pag. 3 riga 11.

> sì devemo multiplicare amedoro le parte denanze per tale numero en que se truova quillo rocto[95]
>
> Sì devemo multiplicare 20 via 10, che fa 200 libre[96].

Lascia pensare invece che secoli dopo Niccolò Tartaglia, nel suo *General trattato dei numeri e misure* – siamo ormai nel 1553, utilizzi uniformemente *fia* e non *per* come connettore tra moltiplicando e moltiplicatore:

> Hor multiplica quel 6 (non diviso) in ciascuna di quelle tre parti, dicendo 6 fia 2 fa 12, et 6 fia 5 fa 30, et 6 fia 7 fa 42[97]...

Lo stile dell'autore, dichiaratamente curato, testimonia un uso tecnico di *fia* che non era nemmeno di Fibonacci e che non avrà fortuna nell'italiano moderno.

III.7. L'uso dei preverbi.

Ogni lingua speciale oltre a possedere termini suoi specifici tende anche a risemantizzare alcune voci della lingua generale di cui rappresenta una sottocategoria[98]. Parte di tale risemantizzazione è resa possibile dall'uso dei preverbi. Essi infatti pur essendo per lo più usati come sinonimici nella lingua generale[99], nelle lingue tecniche spesso aggiungono una sfumatura di senso alla nozione espressa dalla base verbale consentendo all'autore utili precisazioni spazio-temporali[100]. Come osservato dalla Urso in un suo studio sul lessico medico di Celio Aureliano[101] in virtù della sua ricchezza e della sua novità il campo dei

[95] A. Bocchi, *Il Livero cit*., p. 3 riga 17

[96] A. Bocchi, *Il Livero cit*., p. 7 riga 15

[97] E. Nenci (ed), N. Tartaglia, *Quantità, unità e numero. selezione dal General Trattato,* Milano 2011, p. 100.

[98] C. Carotenuto, *Tradurre*, p. 90.

[99] In particolare si è notato che la preferenza per le parole più corpose dal parte del latino volgare o parlato portò alla prevalenza dei verbi composti sulle corrispondenti forme semplici. Ne è un cospicuo esempio la soppressione di *edo* (che in qualche caso era ulteriormente ostacolato dalla sua coniugazione anomala *edo*, *es*, *est*) a favore di *comedo*, dove in origine il prefisso verbale forniva una forza di completamento "mangiare tutto quanto" (Leonard R. Palmer, *La lingua latina*, Treviso 2002, p. 210s.).

[100] Occorre precisare, però, che si tratta di processi cui manca la precisione scientifica che è propria della linguistica moderna. Nella sua sintesi sul latino medico, ad esempio, Mazzini, *Storia della lingua*, p. 266 individua come peculiarità di questa lingua tecnica l'uso indifferente dei verbi composti e semplici: "la necessità di *variatio* induce i medici, soprattutto nei ricettari (...) a creare dei composti e a usarli in luogo dei semplici, senza sostanziale differenza semantica; esempi: *unguo/ inunguo/ superinunguo* 'unguo'; *lino/ illino/ superillino*, 'spalmo' ".

[101] Anna Maria Urso, *I preverbi nel latino tardo: il caso di Celio Aureliano*, in *Latin vulgaire latin tardif VIII*. Atti dell'VIII colloquio internazionale sul latino volgare e tardo, Oxford 6-9 settembre 2006 a cura di Roger Wright- New York 2008, pp.292-300. Celio Aureliano fu un medico romano assegnato al V secolo per il suo latino, nato a Sicca, in Numidia. Le sue opere sono composte in latino barabarizzato, ma contengono notizie provenienti da opere andate perdute, principalmente di Sorano d'Efeso: il *Genetia* e il *De morbis acutis et*

neologismi si offre come osservatorio privilegiato per valutare le risorse che la preverbazione ha offerto allo sforzo di creazione lessicale. A Fibonacci non sembra attribuibile la creazione di neologismi, ma l'uso di preverbi è frequentissimo. Il preverbio più utilizzato è *prae-* (s'intende nella forma ortografica medievale *pre-*)[102]. Si tratta in effetti di un preverbio che serve a scandire la preliminarità di un'azione rispetto a un'altra all'interno di una prescrizione[103]: dal primo capitolo ricorrono espressioni come *per adcenta predicta*[104], *in prescripto numero*[105], *in premisso exemplo*[106], *predictis figuris*[107], *prescriptas in tabulis iunctiones*[108].Similmente è usato il preverbio *supra* premesso ai participi *scriptus* e *dictus*: *secundum supradictam demonstrationem*[109], *in suprascripto numero*[110]. Anche i composti con *re-* sono molto frequenti ma questo preverbio assume un significato diverso a seconda del tipo di verbo a cui si accompagna[111]: *rescribo*[112] avrà quindi valore iterativo rispetto a *scribo*, mentre *retineo*[113] rimanda a 'tenere indietro' quindi 'trattenere'[114], ma 'riportare' nella lingua del *Liber*:

> Et scribantur unitates super primum gradum numerorum prescriptorum, et per unam quamque decenam <u>retineat</u> in manu sinistra unum[115].
>
> E si scrivano le unità sopra il primo grado dei numeri precedentemente scritti, e per ogni decina <u>si riporti</u> sulla mano sinistra uno[116].

Il preverbio *re-* atribuisce a *servo* una sfumatura di significato simile a quella di *retineo*: *reservo* indica infatti l'atto del 'riportare' le decine durante un'operazione di calcolo. Questa

---

chronicis (cfr. L. Zurli, *Le* praefationes *ai* Passionum Libri *di Celio Aureliano* in Prefazioni*, prologhi, proemi di opere tecnico-scientifiche latine* a cura di C. Santini e N. Scivoletto, I, Roma 1990, p. 409s.).

102 Anche nel lessico della matematica di Fibonacci, dunque, come già osservato dalla Urso nei suoi studi su Celio (cfr. *I preverbi*, p. 294) la gerarchia delle presenze conferma la tendenza generale della lingua, dal momento che i preverbi più usati sono tra quelli più produttivi in generale o comunque particolarmente fecondi in età tarda.

103 A.M. Urso, *I preverbi*, p. 295.

104 B. Boncompagni, *Scritti*, p. 4.

105 B. Boncompagni, *Scritti*, p. 4.

106 B. Boncompagni, *Scritti*, p. 4.

107 B. Boncompagni, *Scritti*, p. 5.

108 B. Boncompagni, *Scritti*, p. 7.

109 B. Boncompagni, *Scritti*, p. 3.

110 B. Boncompagni, *Scritti*, p. 4.

111 Forcellini, *Lexicon totius latinitatis*, IV, p.19. I composti con *re-* più numerosi nel *Liber* sono *recolligo*, *remaneo*, *renuntio*, *rescribo*, *reservo*, *resto*, *retineo*.

112 B. Boncompagni, *Scritti*, p. 21.

113 B. Boncompagni, *Scritti*, p. 2.

114 Forcellini, *Lexicon*, p.127.

115 B. Boncompagni, *Scritti*, p. 7.

116 Nell'esempio riportato si noterà l'oscillazione tra la forma impersonale (*scribantur*) e quella personale (*retineat*) che è scomparsa nella mia traduzione normalizzante.

sfumatura di significato può essere anche delegata al solo valore morfosintattico del verbo semplice, tant'è che nell'uso fibonacciano forma base e prefissato possono alternarsi, talora anche nel medesimo contesto[117].

D'altra parte l'uso dei preverbi si riconduce anche al più generale rigetto dei monosillabi o delle parole troppo brevi da parte della lingua medievale poiché i diminutivi e i verbi iterativi sono più espressivi delle parole semplici[118].

> De collecta summa ponat unitates et decenas <u>reservet</u>, et multiplicet tertiam per tertiam et addat cum <u>servatis</u> decenis[119].
>
> Del risultato dell'addizione ponga le unità e <u>riporti</u> le decine; e moltiplichi la terza per la terza e addizioni alle decine <u>riportate</u>.

Il preverbio *super*-, invece, dà a *sum* e *habeo* il valore di 'avanzare' in riferimento al resto di un'operazione, e compare, con lo stesso significato anche in unione con *habundo*[120].

Si noti però che *super*- unito alle voci del presente del verbo sum indica soltanto 'sopra':

> cum <u>super sint</u> tantum tres virgule[121].
>
> dal momento che <u>sopra ci sono</u> 3 archetti.

Nel senso di avanzare invece le voci del verbo *sum* sono al passato:

> posuimus unitates in tertio gradu et decenas que <u>super fuerunt</u> in quarto[122].
>
> Abbiamo posto le unità in terzo grado, e le decine <u>avanzate</u> in quarto.

III.8. Indebolirsi dei pronomi personali e dimostrativi. Uso indistinto di *is*, *hic* e di *ille*, *iste*, *ipse* e *idem* in luogo di *is* e conseguente rimpiazzo del pronome dimostrativo con nuove creazioni.

L'uso di *is* e *hic* perde nel latino medievale, e di conseguenza anche nella lingua di Fibonacci, sfumature proprie di significato e tendono successivamente a essere usati come

---

117 Assistiamo a un fenomeno simile anche nel lessico tecnico di Celio (cfr. A. M. Urso, *I preverbi*, p.295): qui la Urso precisa che "questi usi apparentemente contraddittori non devono far pensare a uno svilimento del valore semantico del preverbio. Piuttosto, essi costituiscono il frutto bivalente dell'urgenza didascalica dell'autore che a volte può non essere sollecitata dal contesto o può cedere il posto ad esigenze di altro tipo, mentre a volte si fa viva, scivolando nell'iperdidascalismo".

118 D. Norberg, *Manuale cit.*, p.41.

119 B. Boncompagni, *Scritti*, p.11.

120 *et ponat post numerum paucarum figurarum tot zephyra quot figure superhabundant de maiori numero* (B. Boncompagni, *Scritti*, p.17)

121 B. Boncompagni, *Scritti*, p.4.

122 B. Boncompagni, Scritti, p. 10.

ulteriori sinonimi di *is* anche *ille*, *iste*, *ipse* e *idem*[123]. Più in generale *ille* e *iste* sono sentiti come articoli determinativi, mentre *quidam* e *unus* svolgono la funzione di articoli indeterminativi preludendo, quest'ultimo, allo sviluppo romanzo.

All'inizio del capitolo quinto, ad esempio, in luogo del dativo di *is* ci attenderemmo quello di *hic* o addirittura di *qui*:

> Volentibus scire dividere quoslibet numeros per quoslibet numeros, necessarium est <u>eis</u> ut addiscant prius dividere omnes numeros per numeros qui sunt a binario usque in decenarium.

Più avanti, nello stesso capitolo, *eam* è sentito come troppo debole e sostituito da *ipsam*:

> Cum super quemlibet numerum quedam virgula protracta fuerit, et super ipsam quilibet[124] alius numerus[125] descriptus fuerit.

Questo fenomeno fa sì che si senta l'esigenza di nuove creazioni lessicali che rimpiazzino il pronome dimostrativo che si è indebolito. Di qui il sovrabbondare di *praesens*, *praedictus praefatus*, *supranominatus*, *memoratus*[126].

Indicativo è il seguente passo del quinto capitolo in cui il precedente sovrabbondare di *istam* e ipsam ha reso necessario riferirsi alla precedente frazione con l'aggettivo di *suprascripta*, ma ista compare in parte della tradizione seppure divergente anche per il costrutto grammaticale adoperato.

> Verbi gratia, <u>in suprascripta virga</u>, scilicet in $\frac{1}{2}\frac{5}{6}\frac{7}{10}$ sunt $\frac{7}{10}$ in primo gradu ipsius virge
>
> [in-virga FAS, in suprascriptam virgam F_1, in ista virga V, in istam virgulam R, istam virgulam N]

A tale categoria appartiene anche l'uso di *ad invicem* o di *vicibus* che pure incontriamo in Fibonacci in luogo di *inter se*. Quest'ultima espressione, infatti, si indebolisce nel latino medievale e viene sostitutita oltre che dai suddetti sintagmi, anche da *sese invicibus* e *alterutrum*[127].

> Deinde multiplicabis residuum numerorum *ad invicem*[128].
>
> Ideo quia non habent aliquam comunem regulam *ad invicem*[129].

---

123 K. Strecker, *Introduction to Medieval Latin*, Dublino 1968, p. 63.
124 Quilibet FNRAV, quislibet S
125 Numerus FNRAS, *om*. V
126 Dag Norberg, *Manuale di latino medievale* a cura di Massimo Oldoni, Cava de' Tirreni 1999, p.27, ascrive all'influenza della lingua burocratica degli uffici dell'amministrazione imperiale e delle cancellerie ecclesiastiche, l'introduzione dei participi *suprascriptus*, *supradictus*, *praedictus*, *praefatus* in luogo di un pronome anaforico *is*.
127 K. Strecker, *Introduction cit*., p.65.
128 Inizio cap. VI
129 cap VII.

Et adde ter 4 vicibus 7[130].

Persiste però l'uso di inter se:

Est, enim, modus inveniendi maximam comunitatem quam *inter se* habent numeri comunicantes[131].

III.9. Il lessico tecnico e le sue ambiguità.

Preliminarmente occorre rilevare che gli studi sul lessico delle lingue di settore devono tener presente, come già messo in luce da David R. Langslow[132], che non si possono studiare le lingue tecniche come semplice insieme di termini che formano un lessico settoriale, ignorando che esse sono parte di una cultura molto più complessa posseduta dal parlante e, più in generale, condivisa socialmente. Studiando le lingue tecniche bisogna tener presente che esse attraversano tutta la formazione dell'uomo antico. Ancora più importante è tenere presente che i fruitori di lingue tecniche erano il più delle volte altamente istruiti, che parlavano anche una lingua non tecnica, per cui è errato considerare il latino tecnico opposto al 'buon' latino. Relegare il latino tecnico ai margini della lingua vuol dire impoverire la nostra capacità di apprezzare la letteratura antica.

Quel che è chiaro è che il lessico matematico di Fibonacci non può definirsi un lessico tecnico modernamente inteso: quest'ultimo pretende infatti, onde evitare ogni ambiguità, che ad ogni significante corrisponda un solo significato e, viceversa, che esista un solo significante per designare un determinato concetto. Il latino di Fibonacci, invece, abbonda di sinonimi e di sostantivi polisemantici. Dei diversi casi di corrispondenza tra monosemia nella lingua di partenza e polisemia nella lingua di arrivo e viceversa ho già avuto modo di trattare[133]; riporterò quindi solo alcuni casi funzionali al presente discorso. L'operazione dell'addizione, ad esempio, è indicata di volta in volta non solo come *additio*, *addictio*, *additatio* – perché fin qui si potrebbe parlare semplicemente di varianti grafiche e dell'uso del frequentativo *addito* rispetto alla forma base *addo-*, ma anche con il termine *iunctio* o *collectio*, e 'addizionare' è di volta in volta *additare*, *iungere*, *colligere*. La linea di frazione è indicata indifferentemente come *virga* o *virgula*. Per esprimere il concetto di 'frazione' vengono utilizzati i due termini *ruptus* e *minuta*.

---

130 Fine cap. VI

131 Inizio cap VI

132 R. Langslow, *'Langues reduites au lexique'?The Languages of Latin Tecnical Prose* in *Aspects of the Language of Latin Prose,* a cura di Tobias Reinhardt, Michael Lapidge, James N. Adams, Oxford 2005, pp. 287-302.

133 cfr. E. Burattini *et al.*, *Per un' edizione*, pp. 95s. A questo articolo si rimanda anche per le esemplificazioni testuali.

Particolarmente interessante è quest'ultimo caso, perché il valore sinonimico di *minuta* rispetto a *ruptus* non è, a mio avviso, immediatamente rilevabile. L'esempio riportato di seguito riguarda l'*incipit* del sesto capitolo che il Pisano dedica alla moltiplicazione fra numeri con parti frazionarie[134].

> Cum, autem, quemlibet numerum cuiuslibet gradus cum quolibet rupto vel ruptis per quemlibet numerum cum quolibet rupto vel ruptis multiplicare volueris, describe maiorem numerum cum suo rupto - vel ruptis - sub minori numero cum suis minutis, scilicet numerum sub numero, et minuta sub minutis[135].
>
> Orbene, qualora tu volessi moltiplicare un qualunque numero di qualunque grado con una o più frazioni per un qualunque numero con una o più frazioni, scrivi il numero maggiore con la sua frazione, o le sue frazioni, sotto il numero minore con le sue frazioni, vale a dire numero sotto numero e frazioni sotto frazioni.

Ora, in una prima fase interpretativa, nel tentativo di rendere anche in italiano la variante sinonimica, avevo attribuito a *ruptus* il valore semantico di 'parte frazionaria' e a *minuta* quello vero e proprio di 'frazione'. Ma una riflessione successiva mi ha convinto che sebbene la prima traduzione non sia scorretta, alla luce del resto del capitolo pare evidente che *minuta* non abbia per Fibonacci un significato diverso anche se attiguo a quello di *ruptus*, ma sia usato come sinonimico assolutamente equivalente: prova ne sia che, nel brano citato a titolo esemplificativo, nella medesima frase e per indicare lo stesso concetto oggettivo l'autore passa da *ruptus* a *minuta*: *maiorem numerum cum suo rupto sub minori numero cum suis minutis*[136].

---

[134] Sul sistema di notazione delle frazioni nel Liber si è scritto molto, una buona sintesi tradotta in italiano è in Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Milano 2011, p. 296s. L'autore precisa che "la sbarretta orizzontale delle frazioni era usata regolarmente da Fibonacci (ed era nota nel mondo arabo prima di lui), ma fu solo nel XVI secolo che entrò nell'uso generale. (...) Di fatto nel *Liber abaci* vengono largamente usati i due sistemi peggiori: le frazioni a numeratore unitario e le frazioni comuni. Fibonacci poneva abitualmente la parte o le parti frazionarie di un numero misto davanti alla parte intera: per esempio, invece di scrivere 11 5/6 scriveva 1/3 ½ 11, ove la giustapposizione di frazioni a numeratore unitario e di numeri interi significava addizione. Fibonacci evidentemente doveva prediligere le frazioni a numeratore unitario e riteneva che anche i suoi lettori fossero della sua opinione: infatti il Liber Abaci contiene tavole di conversione per passare da frazioni comuni a frazioni con numeratore unitario (...). Un insolito trucchetto notazionale lo portava a esprimere la somma di 1/5 ¾ e 1/10 2/9 nella forma 1 6 2/2 9 10 1, ove la notazione 1 6 2/2 9 10 significava in questo caso 1/ 2 x 9 x 10 + 6/9 x 10 + 2/10.

[135] B. Boncompagni, *Scritti*, p. 47.

[136] Vale la pena di chiarire che da quello che si evince dal resto del capitolo *ruptus* indica quelli che noi oggi chiamiamo i decimali, ovvero la parte dopo la virgola di un numero decimale. Nella matematica medievale, però, questo sistema di notazione per i numeri decimali non esisteva e la stessa quantità veniva espressa dal numero intero preceduto dalla frazione che ne indicava la quantità frazionaria (cfr. *supra* nota 59). Ad esempio, 1,5 veniva indicato come un intero più un mezzo e cioè: 1,5 = $\frac{1}{2}$ 1 = 0,5 + 1. Il fatto che nella scrittura del *Liber* la frazione preceda, anziché seguire il numero, mentre nell'attuale sistema di numerazione i decimali sono a destra

Un caso di termine polisemantico è invece quello del verbo *facio* che viene utilizzato sia per indicare il risultato di un'operazione (in concorrenza con *habeo*) sia nel senso di 'calcolare'.

Analizziamo, per esempio, un brano tratto dal settimo capitolo che tratta delle operazioni tra frazioni:

> Et accipe superiorem numerum cum suis minutis, et <u>fac</u> inde talia minuta qualia sunt illa que sunt cum ipso numero. Et similiter de inferiori <u>facies</u> sua minuta[137].

In questo passo non è immediato il significato da attribuire al verbo *facio*, e che cosa significhi 'fare le frazioni'. Questo è uno di quei casi che rendono lampante come un testo del genere si spieghi da sè, proseguendo con la lettura. Fibonacci accompagna le enunciazioni teoriche alle esemplificazioni pratiche, quindi procedere nella lettura permette di chiarire le espressioni oscure. Il significato dell'espressione *facere minuta* si palesa infatti nel brano seguente (tratto sempre dal settimo capitolo):

> Si volueris multiplicare 11 et dimidium per 22 et tertiam, describe maiorem numerum sub minori, scilicet $\frac{1}{3}22$ sub $\frac{1}{2}11$, ut hic ostenditur. (2) Deinde <u>fac</u> dimidias de $\frac{1}{2}11$. Ideo quia ruptus qui est cum 11 est medietas, quod sic fit: multiplicabis 11 per 2 que sunt sub virgula post ipsa 11, et de super adde 1 quod est super virgulam de 2, erunt medie 23, vel duplica $\frac{1}{2}11$, erunt 23. (...).(3) Eademque ratione multiplicabis 22 per suam virgulam, hoc est per 3 que sunt sub virgula post 22, erunt tertie 66, cum quibus adde 1 quod est super 3, erunt tertie 67, que serva super $\frac{1}{3}22$. Et hoc fuit triplicare $\frac{1}{3}$ 22.(4) Et multiplicabis dimidias 23 per tertias 67, erunt sexte 1541, quas divides per

---

della virgola, è attribuibile all'eredità di una scrittura araba che procede da destra a sinistra. Infatti, è chiaro che per Fibonacci la frazione segue il numero intero, dato che quando si riferisce ad essa egli utilizza l'avverbi *post* anziché *ante* (*Deinde fac dimidias de* $\frac{1}{2}$ *11 (...) multiplicabis 11 per 2 que sunt sub virgula <u>post</u> ipsa 11*, cfr. Boncompagni, *Scritti*, p. 47).

[137] B. Boncompagni, *Scritti*, p. 47.

ruptos qui sunt sub virgulis amborum numerorum, scilicet per 2 et per 3. (5) Que divisio sic fit: multiplica 2 per 3, erunt 6, in quibus divide 1541, exibunt integra $\frac{5}{6}$ 256[138].

(1) Se tu volessi moltiplicare 11 e un mezzo per 22 e un terzo, scrivi il numero maggiore sotto il minore, vale a dire $\frac{1}{3}$ 22 sotto $\frac{1}{2}$ 11, come qui si mostra. (2) *Poi calcola a quanti mezzi corrisponda* $\frac{1}{2}$ *11, ovvero trasforma questo algoritmo in un unico numero frazionario*. Dal momento che la frazione che è con 11 è una metà, ciò si fa così: moltiplicherai l'11 per il 2 che è sotto la linea di frazione davanti tale 11 e addiziona in aggiunta l'1 che è sopra la linea di frazione del due, risulterà 23 mezzi, ovvero raddoppia $\frac{1}{2}$ 11, risulterà 23. (...) (3) Per la stessa ragione moltiplicherai il 22 per la sua frazione, cioè per il 3 che è al denominatore davanti al 22, risulterà 66 terzi, al quale addiziona l'1 che è sopra il 3, risulterà 67 terzi, che devi riportare sopra $\frac{1}{3}$ 22. E questo significa triplicare $\frac{1}{3}$ 22. (4) E moltiplicherai il 23mezzi per il 67 terzi, risulterà 1541 sesti che devi dividere per i denominatori di entrambi i numeri, vale a dire per 2 e per 3. (5) Questa divisione avviene così: moltiplica 2 per 3, risulterà 6 per il quale dividi 1541, risulterà perfettamente $\frac{5}{6}$ 256.

III.10. Modificazioni del sistema casuale e gli usi 'medievali' delle preposizioni.

Nel latino medievale il sistema dei casi comincia a vacillare: in realtà, come ha avuto modo di osservare Barbara Spaggiari[139], già nel latino classico, la prevalente tendenza alla sintesi provoca un arricchimento funzionale nell'ambito di un ristretto numero di casi che risultano alla fine grammaticalizzati e ridotti da otto a sei. Il valore dei casi in latino non è sempre univoco: ad esempio, lo strumentale e il locativo erano confluiti fino da epoca antica nell'ablativo e genitivo singolari; il vocativo tendeva a confondersi con il nominativo, soprattutto in funzione oppositiva. Altri sincretismi parziali avvengono nel plurale, dove una sola forma funge da dativo, ablativo, strumentale e locativo[140].

[138] B. Boncompagni, *Scritti*, p. 47.
[139] B. Spaggiari, Il latino volgare, pp. 81-120 in Lo spazio letterario del Medioevo. 1. Il Medioevo Latino Volume I, La produzione del testo, Tomo I dir. G. Cavallo, C. Leonardi.
[140] B. Spaggiari, Il latino cit., p.93.

Il fenomeno del sincretismo casuale viene compensato dall'uso alternativo di moduli preposizionali già esistenti[141] e espressioni di uso preposizionale con *de*, *ad*, *per*, *cum*, si sostituiscono sempre più spesso al genitivo, dativo e ablativo; inoltre dopo le preposizioni l'impiego dell'accusativo tende a generalizzarsi[142]. Nel quadro di una generale riorganizzazione del sistema casuale e di quello preposizionale, le preposizioni mutano le loro funzioni, tali novità sono accolte anche nella lingua del Pisano.

1. *de* è spesso usato in luogo di *ex*

   Ad esempio, all'inizio, del quinto capitolo in un'espressione che definisce il concetto di metà il de sostituisce ex nella formazione di un complemento partitivo che inizia a non essere sentito più come tale:

   Ipsa unitas unam partem <u>de</u> duabus partibus unius integri affirmat.

2. *pro* ha anche valore causale o finale

   Una sfumatura finale la si rinviene in espressioni come:

   Et sic habebit $\frac{2}{3}$ 121 <u>pro</u> quesita divisione, ut hic ostenditur[143].

3. *cum* può introdurre il complemento di mezzo:

   Et ut hec apertius intelligantur, ea <u>cum numeris</u> in sequentibus demonstrentur[144].

III.11. Gli usi 'medievali' delle congiuzioni.

Un tratto caratteristico del latino tardo è la confusione delle congiunzioni[145]. Le seguenti congiunzioni in aggiunta a *et*, *ac*, *atque* sono usate nel significato di '*e*': *vel*, *seu*, *quin*, *quoque*, *etiam*, *nihilominus*, *pariter*, *simul*, *necnon*, *necne*.

Il titolo della quarta parte del VII capitolo è esemplificativo:

Incipit pars quarta de aditione et extratione <u>seu</u> divisione integrorum numerorum cum ruptis.

In questo brano del capitolo quinto la varietà delle congiunzioni usate serve ad evitare la ripetizione di et:

[141] B. Spaggiari, Il latino cit. p. 93s, nota come le preposizioni rivestano in principio solo una funzione chiarificatrice rispetto ai segnacasi, ma già a partire dal I-II secolo d.C. si registra un netto incremento del modulo preposizionale a scapito delle forme prive di preposizione.
[142] D. Norberg, *Manuale di latino medievale*, Cava de' Tirreni, p. 38s.
[143] cap. V
[144] cap. V.
[145] D. Norberg, Manuale, p. 41.

> Et sic inveniet, quia <u>nec</u> per 17, <u>vel</u> per 19, <u>aut</u> per 23 <u>seu</u> per 29, <u>vel</u> per 31, <u>nec</u> per 37 <u>aut</u> per 41, <u>nec etiam</u> per 47 <u>vel</u> per 53 potest dividi.

E ancora:

> Possunt enim multiplicationes, addictationes, minutiones <u>seu</u> divisiones numerorum aliter per alias quasdam pensas probari[146]

> Deinde adde $\frac{5}{18}\frac{1}{8}$, scilicet multiplica dimidium de 8 per 18, <u>vel</u> dimidium de 18 per 8, <u>seu</u> accipe dimidium multiplicationis de 8 in 18 et proveniunt 72[147]

Si trovano anche *sed et*, *aut/aut* utilizzati in luogo di *et/et*[148].

Nam, *namque*, *enim*, *etenim*, *autem*, ma anche *sed*, *at*, *vero* hanno perso molto della loro forza e sono diventati dei semplici connettivi.

I paragrafi, infatti, sono spesso introdotti da nam o enim:

> Nam si prescripte divisionis probam per pensam de 7 cognoscere cupit, accipiat pensam per 7 de 24059, hoc est superfluum eiusdem numeri in 7 divisi[149]

Non di rado *nam* ed *enim* possono essere usati come avversativi.

Si noti che *sic* può essere usato nel senso di 'poi'.

Quare è usato come congiunzione causale.

Quod tende a introdursi dappertutto: si incontra questa preposizione in giri di frase come *dico quod*, *timeo quod*, *volo quod*, *ante quod*, *post quod*, *pro quod*.

Gli autori medievali s'ingannano spesso sull'uso della congiunzione -*que* che, da lungo tempo, era scomparsa dalla lingua parlata. Spesso l'uso della particella è del tutto pleonastico, soprattutto nei pronomi: sembra evidente che l'analogia coi pronomi *quicumque*, *uterque*, *quisque* abbia contriuito a tale uso[150].

III.12.Conclusioni.

Il campo del latino matematico, come lingua di settore, non è stato ancora sufficientemente indagato. Gli studi delle lingue tecniche latine hanno riguardato il latino dell'agricoltura, quello militare, quello astronomico e culinario, e di recente l'interesse dei filologi classici anche per la lingua dei medici ci permette, oggi, di averne una conoscenza

[146] cap. V
[147] cap. VI
[148] K. Strecker, Introduction cit., p. 65.
[149] Cap. V
[150] D. Norberg, Manuale, p.166.

adeguata[151]. Il motivo della scarsità di studi sulla lingua matematica latina, potrebbe trovare una ragione nel fatto che la matematica come scienza non fu mai latina: si è detto che solo nel tardomedioevo Fibonacci si ingegnò a scrivere un trattato matematico che divulgasse in occidente le acquisizioni matematiche arabe affinché la *gens Latina de cetero sicut hactenus absque illa minime inveniatur*[152].

Ne consegue che il presente lavoro sulla lingua di Fibonacci non possa essere che parziale e lacunoso. Ciononostante da questa breve disanima delle principali questioni linguistiche sollevate dallo studio del *Liber Abaci* emergono peculiarità della lingua del Pisano che la accomunano alla lingua della successiva trattatistica d'abaco in volgare. Dal punto di vista sintattico, come si è visto, spicca l'uso del congiuntivo esortativo che si alterna con l'imperativo dato l'intento didascalico delle prescrizioni. Gli anacoluti, influenza più o meno consapevole della lingua parlata, sono un'altra caratteristica precipua di questo latino. Le peculiarità lessemiche rilevate, poi, con l'uso dei preverbi che aiutano nella risemantizzazione delle voci provenienti dalla lingua generale, sono, come si è visto con il riferimento agli studi su Celio, comuni anche ad altre lingue tecniche. Relativamente, poi, a quest'ultimo punto, quello cioè che riguarda il lessico tecnico dell'autore, è evidente che un'edizione e traduzione del *Liber* dovrà imprescindibilmente essere accompagnata da un glossario che motivi le scelte traduttologiche e delinei un quadro almeno sommario della storia del termine.

[151] I. Mazzini, *Storia della lingua*, p.246,
[152] G. Germano e C. Carotenuto, *Epistola di dedica e* Prologo *del* Liber Abaci *di Leonardo Pisano* in *Per un'edizione*, p. 124.

Parte Seconda

Il Capitolo Quinto

Capitulum quintum

De divisionibus integrorum numerorum[153]

(1) Volentibus scire dividere quoslibet numeros[154] per quoslibet numeros, necessarium [R, f.17r] est eis ut addiscant[155] prius[156] dividere omnes numeros per numeros[157] qui sunt a binario usque in decenarium. Et, cum hoc scire non possint[158] donec quasdam introductiones [$F_{1,}$ 34] divisionum quorumdam numerorum per ipsos cordetenus sciant, quorum divisiones in sequentibus paginis in tabulis[159] declarantur. Sed edoceantur[160] primum qualiter cuncta minuta numerorum perfecte scribantur.

(2) [N, f.24r] Cum super quemlibet numerum quedam virgula protracta fuerit, et super ipsam quilibet[161] alius numerus[162] descriptus fuerit, superior numerus partem vel partes inferioris numeri affirmat: nam inferior denominatus[163], et[164] superior denominans appellatur[165]. (3) Ut si super binarium protracta fuerit virgula, et super ipsam unitas descripta sit, ipsa unitas unam partem de duabus partibus unius integri affirmat, hoc est medietatem, sic $\frac{1}{2}$, et si[166] super ternarium ipsa unitas posita fuerit, sic $\frac{1}{3}$ [167], denotat tertiam[168]; et si super

[153] Capitulum-numerorum: Incipit capitulum-numerorum FF_1NRAVS
[154] quoslibet numeros RS, *in mg* F, *om.* N A V F_1
[155] Addiscant F F_1NRAS, addiscat V
[156] prius FR AVS, *om.* N F_1
[157] Per numeros F F_1NRAS, *om.* V
[158] possint F F_1N AVS, possit R
[159] in tabulis F F_1N AVS, *om.* R
[160] edoceantur NR F_1AS, edoceatur V, et doceatur F
[161] Quilibet FNRAV, quislibet S
[162] Numerus FNRAS, *om.* V
[163] Denominatus $FNRASVF_{1b}$, numerus denominatur F_{1a}
[164] et F F_1NAVS, *om.* R
[165] Superior-appellatur: S lo aggiunge in interlinea
[166] si N F_1RAVS, *om.* F
[167] et -sic $\frac{1}{3}$ RNAVS F_1, *in mg* F
[168] tertiam N F_1AVS, tertium FR

septenarium, sic $\frac{1}{7}$, septimam[169]; et si[170] super 10, decimam; et si super 19, nonamdecimam partem unius integri affirmat, et sic deinceps. Item si binarius super ternarium extiterit[171], sic $\frac{2}{3}$, duas partes de tribus partibus[172] unius integri affirmat, hoc est[173] duas tertias; et si super 7 duas septimas, sic[174] $\frac{2}{7}$, et si[175] super 23 duas vigesimas tertias denotabunt[176], et sic deinceps. Item si septenarius super[177] novenarium positus fuerit, sic $\frac{7}{9}$, septem novenas unius integri affirmant[178]; et si 7[179] super 97[180], septem nonagesimas septimas denotabunt. Item 13 posita[181] super 29, tredecim vigesimas nonas affirmant. Et si 13 sunt[182] super 347, tredecim trecentesimas quadragesimas septimas indicabunt. Et sic de reliquis numeris est intelligendum.

(4) Item si sub una eadem virgula plures numeri positi fuerint[183], et super unum [A, f.10r] quemque ipsorum alii numeri[184] describentur, numerus qui[185] in capite virgule dextere partis super numerum positus fuerit ipsius sub positi numeri partem vel partes, ut prediximus, denotabit[186]. Qui, vero, super secundum ipsius secundi partes de partibus primi sub positi numeri declarat[187]. Qui[188] autem super tertium, ipsius tertii partes[189] partium secundi de

169 Septimam FNRA, septimam partem V, septima + spazio bianco F_1, invece S ha uno spazio bianco dopo septimam in cui potrebbe andarci partem
170 Si F F_1NRAS, sic V
171 extiterit F F_{1a}RAVS, exitit N F_{1b}
172 partibus F F_1RNVS, *om.* A
173 est FRAVS, *om.* N F_1
174 sic F F_1RAVS, *om.* N
175 si F F_1RAVS, sic N
176 denotabunt FRA F_1VS, denotabit N
177 Super FRAVSN, super super F_1
178 affirmant F F_1RAVS, affirmat N
179 7 F F_1NAV, *om.* R, in interlinea in S
180 97 FRAVS, 7/97 N F_1
181 posita FRS, potes N F_1 A, posites V
182 sunt F F_1R AS, *om.* N
183 Fuerint F F_1RANS, fuerunt V
184 numeri F F_1RNVS, numeri numeri A
185 qui F F_1RNVS, *om.* A
186 denotabit FRAVS F_1, denotabunt N
187 Declarat FRANS, declarabit V, declareat F_1

partibus primi affirmat: et sic semper qui sequentur[190] super virgulam partes partium cunctorum antecedentium sub virgula denotant. (5) Ut si sub quadam virgula sint[191] 2 et 7 et super 2 sit 1 et super 7 sint 4, ut hic cernitur, $\frac{1}{2}\frac{4}{7}$, denotantur quattuor septime, et medietas unius septime. Si autem super 7 esset[192] zephyrum, sic $\frac{1}{2}\frac{0}{7}$, medietas tantum unius septime denotaretur[193]. Item si[194] sub quadam alia virgula sint[195] 2 et 6 et 10; et super 2 sit 1 et super 6 sint 5 et super 10 sint 7, ut hic ostenditur, $\frac{1}{2}\frac{5}{6}\frac{7}{10}$, septem que sunt [R, f.17v] super [N, f.24v] 10 in capite virgule representant septem decimas[196], et 5 que [F_1, f.35] sunt super 6 denotant quinque sextas unius decime partis, et 1 quod[197] est super 2 denotat medietatem sexte unius decime[198] partis et sic singulariter de singulis intelligatur[199]. (6) Tamen monendum est ut semper minores numeri sint versus sinistram sub eadem virgula: sed si [F, f.11v] plures fuerint virgule, rupti [V, f. 7/11] unius virgule non respondent[200] ruptis alterius, et illa virgula que est maior pars integri, semper est ponenda versus dexteram manum. Dicuntur quidem fractiones que sunt in una virga[201], esse in gradibus, et est primus gradus earum fractio que est in capite virge a dextera parte. Secundus est fractio sequens versus sinistram partem[202]. (7) Verbi gratia, in suprascripta virga[203], scilicet in $\frac{1}{2}\frac{5}{6}\frac{7}{10}$ sunt $\frac{7}{10}$ in primo gradu ipsius virge et

---

188 qui F F_1RAVS, quod N
189 tertii partes FNAVS F_1, tertii partem vel partis partes R
190 qui sequentur F F_1RAVS, consequentur N
191 sint VS, fiat F F_1RAN
192 esset F F_1NAVS, fuerit R
193 denotaretur FNAVS F_1, denotaretur et R
194 si A, *om*. FRNVS F_1
195 sint F F_1RAVS, sunt N
196 decimas RA, decenas FNVS F_1
197 quod F F_1AVS, qui NR
198 Decime F F_1RANS, in mg. V
199 intelligatur FRAS, intelligantur N F_1
200 Respondent F F_1RANS, respondet V
201 virga F F_1RS, virgula NAV
202 partem F F_1NAV, quereret R, secundus-partem: om. S
203 in-virga FAS, in suprascriptam virgam F_1, in ista virga V, in istam virgulam R, istam virgulam N

$\frac{5}{6}$ sunt in secundo, et $\frac{1}{2}$ est[204] in tertio, hoc est in[205] ultimo gradu eiusdem virge. Et sic quot sunt numeri sub virga tot sunt gradus eiusdem[206]. (8) Et si in virga[207] fuerint plures rupti, et ipsa virga terminaverit in circulo, tunc fractiones eius aliter quam dictum sit denotabunt. Ut in hac[S, f.14r] $\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{9}\circ$ cuius virge fractiones denotant, octo nonas[208] unius integri[209], et sex septimas de octo nonis, et quattuor quintas sex septimarum de octo nonis[210] et duas tertias quattuor quintarum sex septimarum de octo nonis[211] unius integri. (9) Et si[212] hec virga terminaret[213] ab alia parte in circulo sic[214] $\circ\frac{8}{9}\frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3}$ denotaret tantum duas tertias de quattuor quintis de sex septimis de[215] octo nonis unius integri. (10) Item si virgule protraherentur super virgam[216] in hunc modum $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{5}{9}$ denotant fractiones eius quinque nonas et tertiam et quartam et quintam unius none.

(11) His itaque intellectis, introductiones predicte, ut inferius cernitur, describantur[217] et[218] cordetenus summo studio addiscantur.

[204] $\frac{1}{2}$ est F F_1RANS, medietas V
[205] In F F_1RANS, ad V
[206] Secundus est-gradus eiusdem: in mg posuit S
[207] in virga F F_1RAVS, in ipsa virga N
[208] nonas F F_1RAVS, novenas N
[209] Unius integri FRANS F_1, om. V
[210] nonis F F_1RNVSA_b, novenis A_a
[211] et duas-octo nonis FRAVS F_1, *om*. N
[212] si RAVS F_1, sic FN
[213] terminaret F F_1RAVS, remaneret N
[214] sic F F_1NAVS, sic videlicet R
[215] De F F_1RANS, et V
[216] Virgam FRANS F_1, virgulam V
[217] describantur F F_1RVS, scribantur NA
[218] et N F_1RAVS, cum F

Divisiones[219] per binarium[220]

$\frac{1}{2}$	de	1	est	0	et	remanet[221]	1
$\frac{1}{2}$		2	est	1[222]			
$\frac{1}{2}$		3		1[223]			1[224]
$\frac{1}{2}$		4		2			
$\frac{1}{2}$		5		2			1
$\frac{1}{2}$		6		3			
$\frac{1}{2}$		7		3			1
$\frac{1}{2}$		8		4			
$\frac{1}{2}$		9		4			1
$\frac{1}{2}$		10		5			
$\frac{1}{2}$		11		5			1
$\frac{1}{2}$		12		6			
$\frac{1}{2}$		13		6			1
$\frac{1}{2}$		14		7			
$\frac{1}{2}$		15		7			1
$\frac{1}{2}$		16		8			

[219] Divisiones FN, Introductiones R, *om.* A

[220] per binarium FR, per binarium sequuntur scilicet $\frac{1}{3}$ 10 3 1/$\frac{1}{3}$ 11 3 2/$\frac{1}{3}$ 12 4/ $\frac{1}{3}$ 13 4 1/ $\frac{1}{3}$ 14 4 2/$\frac{1}{3}$ 15 5/ $\frac{1}{3}$ 16 5 1/ $\frac{1}{3}$ 17 5 2/ $\frac{1}{3}$ 18 6/ $\frac{1}{3}$ 19 6 1/ $\frac{1}{3}$ 20 6 2/ $\frac{1}{3}$ 21 7/ $\frac{1}{3}$ 22 7 1/ $\frac{1}{3}$ 23 7 2/ $\frac{1}{3}$ 24 8/ $\frac{1}{3}$ 25 8 1/ $\frac{1}{3}$ 26 8 2/ $\frac{1}{3}$ 27 9/$\frac{1}{3}$ 28 9 1/ $\frac{1}{3}$29 9 2/ $\frac{1}{3}$ 30 10 N A(*om.* per binarium sequuntur scilicet)

[221] remanet FN, erunt R, *om.* A

[222] 2 est 1 FN, 2 est 1 erunt R, 2 1 A

[223] 3 1 FN, 3 est 1 erunt R, 3 1 A

[224] ½-1 FN, ½ 3 est 1 1 R

$\frac{1}{2}$		17		8			1
$\frac{1}{2}$		18		9			
$\frac{1}{2}$		19		9			1
$\frac{1}{2}$		20		10[225]			

Divisiones per ternarium[226]

$\frac{1}{3}$	de	1	est	0			1
$\frac{1}{3}$		2		0			2
$\frac{1}{3}$		3		1			
$\frac{1}{3}$		4		1			1
$\frac{1}{3}$		5		1			2
$\frac{1}{3}$		6		2			
$\frac{1}{3}$		7		2			1
$\frac{1}{3}$		8		2			2
$\frac{1}{3}$		9		3			
$\frac{1}{3}$		10		3			1
$\frac{1}{3}$		11		3			2
$\frac{1}{3}$		12		4			
$\frac{1}{3}$		13		4			1
$\frac{1}{3}$		14		4			2
$\frac{1}{3}$		15		5			

[225] ½ 1- ½ 20 10 FR, *ponet infra* N
[226] Divisiones-ternarium FN, Introductiones ternarii R, *om*. A

$\frac{1}{3}$		16		5			1
$\frac{1}{3}$		17		5			2
$\frac{1}{3}$		18		6			
$\frac{1}{3}$		19		6			1
$\frac{1}{3}$		20		6			2
$\frac{1}{3}$		21		7			
$\frac{1}{3}$		22		7			1
$\frac{1}{3}$		23		7			2
$\frac{1}{3}$		24		8			
$\frac{1}{3}$		25		8			1
$\frac{1}{3}$		26		8			2[227]

Introductiones quaternarii[228]

$\frac{1}{4}$ [229]		1[230]		0[231]			1
$\frac{1}{4}$		2		0			2
$\frac{1}{4}$		3		0			3
$\frac{1}{4}$		4		1			
$\frac{1}{4}$		5		1			1
$\frac{1}{4}$		6		1			2
$\frac{1}{4}$		7		1			3

[227] 1/3 10- 8-2 FRN, *om*. A
[228] Introductiones quaternarii FRN, *om*. A
[229] ¼ FN, ¼ de R
[230] 1 F, 1 est NR
[231] 0 FN, 0 remanet R

$\frac{1}{4}$		8		2			
$\frac{1}{4}$		9		2			1
$\frac{1}{4}$		10		2			2
$\frac{1}{4}$		11		2			3
$\frac{1}{4}$		12		3			
$\frac{1}{4}$		13		3			1
$\frac{1}{4}$		14		3			2
$\frac{1}{4}$		15		3			3
$\frac{1}{4}$		16		4			
$\frac{1}{4}$		17		4			1
$\frac{1}{4}$		18		4			2
$\frac{1}{4}$		19		4			3
$\frac{1}{4}$		20		5			
$\frac{1}{4}$		21		5			1
$\frac{1}{4}$		22		5			2
$\frac{1}{4}$		23		5			3
$\frac{1}{4}$		24		6			
$\frac{1}{4}$		25		6			1
$\frac{1}{4}$		26		6			2
$\frac{1}{4}$		27		6			3
$\frac{1}{4}$		28		7			
$\frac{1}{4}$		29		7			1

$\frac{1}{4}$		30		7			2
$\frac{1}{4}$		31		7			
$\frac{1}{4}$		32		8			
$\frac{1}{4}$		33		8			1
$\frac{1}{4}$		34		8			2
$\frac{1}{4}$		35		8			3
$\frac{1}{4}$		36		9			
$\frac{1}{4}$		37		9			1
$\frac{1}{4}$		38		9			2
$\frac{1}{4}$		39		9			3
$\frac{1}{4}$		40		10[232]			

Introductiones quinari

$\frac{1}{5}$	de[233]	5	est	1
$\frac{1}{5}$		10[234]		2
$\frac{1}{5}$		15		3
$\frac{1}{5}$		20		4
$\frac{1}{5}$		25		5
$\frac{1}{5}$		30		6
$\frac{1}{5}$		35		7
$\frac{1}{5}$		40		8

232 ¼ 40 10 FRN, *om*. A *seb hic exhibet intruductiones binarii*
233 de FR, om. N
234 10 FR, 10 est N

$\frac{1}{5}$		45		9
$\frac{1}{5}$		50		10

[R, f. 17v] Introductiones senarii[235]

$\frac{1}{6}$	de	6		1
$\frac{1}{6}$		12		2
$\frac{1}{6}$		18		3
$\frac{1}{6}$		24		4
$\frac{1}{6}$		30		5
$\frac{1}{6}$		36		6
$\frac{1}{6}$		42		7
$\frac{1}{6}$		48		8
$\frac{1}{6}$		54		9
$\frac{1}{6}$		60		10[236]

Introductiones septenarii[237]

$\frac{1}{7}$	de	7	est	1
$\frac{1}{7}$		14		2
$\frac{1}{7}$		21		3
$\frac{1}{7}$		28		4
$\frac{1}{7}$		35		5

235 introductiones senarii FN, introductiones sexenarii R, *om*. A
236 1/6-10 RN, *om*. F
237 septenarii FN, septonarii R, *om*. A

$\frac{1}{7}$		42		6
$\frac{1}{7}$		49		7
$\frac{1}{7}$		56		8
$\frac{1}{7}$		63		9
$\frac{1}{7}$		70		10

Divisiones[238] octonarii

$\frac{1}{8}$	de	8	est	1
$\frac{1}{8}$		16		2
$\frac{1}{8}$		24		3
$\frac{1}{8}$		32		4
$\frac{1}{8}$		40		5
$\frac{1}{8}$		48		6
$\frac{1}{8}$		56		7
$\frac{1}{8}$		64		8
$\frac{1}{8}$		72		9
$\frac{1}{8}$		80		10

Divisiones novenarii[239]

$\frac{1}{9}$	de	9[240]	est[241]	1
$\frac{1}{9}$		18		2

[238] Divisiones octonarii FN, Introductiones octonarii R, *om*. A
[239] Divisiones novenarii F, introductiones novenarii N, coniunitiones novenarii N, *om*. A
[240] 9 NRA, 1/9 F
[241] est FR, *om*. N A

$\frac{1}{9}$		27		3
$\frac{1}{9}$		36		4
$^1/_9$		45		5
$\frac{1}{9}$		54		6
$\frac{1}{9}$		63		7
$\frac{1}{9}$		72		8
$\frac{1}{9}$		81		9
$\frac{1}{9}$		90		10

Divisiones decenarii[242]

$\frac{1}{10}$	de	10	est	1
$\frac{1}{10}$		20		2
$\frac{1}{10}$		30		3
$\frac{1}{10}$		40		4
$\frac{1}{10}$		50		5
$\frac{1}{10}$		60		6
$\frac{1}{10}$		70		7
$\frac{1}{10}$		80		8
$\frac{1}{10}$		90		9
$\frac{1}{10}$		100		10[243]

Introductiones divisionum per 11[244]

[242] Divisiones decenari NR, *om*. F A
[243] 1/10-100 10 NR, *om*. F

$\frac{1}{11}$	de	11	est	1
$\frac{1}{11}$		22		2
$\frac{1}{11}$		33		3
$\frac{1}{11}$		44		4
$\frac{1}{11}$		55		5
$\frac{1}{11}$		66		6
$\frac{1}{11}$		77		7
$\frac{1}{11}$		88		8
$\frac{1}{11}$		99		9
$\frac{1}{11}$		110		10

Introductiones divisionum per 12[245]

$\frac{1}{12}$	de	12	est	1
$\frac{1}{12}$		24		2
$\frac{1}{12}$		36		3
$\frac{1}{12}$		48		4
$\frac{1}{12}$		60		5
$\frac{1}{12}$		72		6
$\frac{1}{12}$		84		7
$\frac{1}{12}$		96		8
$\frac{1}{12}$		108		9

[244] Introductio divisionum per 11 FN, introductiones divisionum per 11 R, *om.* A
[245] Introductio divisionum per 12 F N, introductiones divisionum per 12 R, *om.* A

$\frac{1}{12}$		120		10

Introductiones divisionum per 13[246]

$\frac{1}{13}$	de	13	est	1
$\frac{1}{13}$		26		2
$\frac{1}{13}$		39		3
$\frac{1}{13}$		52		4
$\frac{1}{13}$		65		5
$\frac{1}{13}$		78		6
$\frac{1}{13}$		91		7
$\frac{1}{13}$		104		8
$\frac{1}{13}$		117		9
$\frac{1}{13}$		130		10[247]

[246] Introductiones divisionum per 13 FRN, *om.* A

[247] 10 N, 10/$\frac{1}{13}$ 143 11/$\frac{1}{13}$ 156 12/$\frac{1}{13}$ 169 13/$\frac{1}{13}$ 182 14/$\frac{1}{13}$ 195 15 F, 10/ Introductiones divisionum per 19/$\frac{1}{14}$ de 14 est 1/ $\frac{1}{14}$ 28 2/ $\frac{1}{14}$ 42 3/ $\frac{1}{14}$ 56 4/ $\frac{1}{14}$ 70 5/ $\frac{1}{14}$ 84 6/ $\frac{1}{14}$ 98 7/ $\frac{1}{14}$ 112 8/ $\frac{1}{14}$ 126 9/ $\frac{1}{14}$ 140 10 R A(om. / $\frac{1}{13}$ 143-divisionum per 19)

[F, f. 12v/ N, f.25v/R, f.19r/ V,f.43 7/11v/S, f. 15r]

Regula universalis[248] *de divisione numerorum*[249] *per numeros primi gradus*

(1) Notis igitur prescriptis divisionibus atque eis[250] frequenti usu optime perscrutatis, et si quis voluerit[251] quemlibet numerum cuiuslibet gradus per quemlibet dictorum numerorum, scilicet eorum qui sunt a binario usque in[252] decenarium dividere, describat numerum in tabula et ponat figuram per quam figuram[253] numerum dividere voluerit sub primo gradu ipsius numeri. Et incipiat divisionem ab ultima figura numeri et dividat eam, si possibile fuerit, per numerum figure, per quam[254] numerus dividere voluerit, ponens[255] divisionem inferius in tabula sub eodem ultimo gradu. Et si aliquid ex divisione superfuerit, ponat ipsum superfluum super eandem ultimam figuram et copulet ipsum cum consequenti[256] figura, et dividat eas duas[257] figuras, tanquam facientes numerum duarum figurarum, et ponat divisionem sub[258] eadem sequenti figura; et superfluum si fuerit, super ipsam describat. Et sic semper[259], prescripto ordine, superfluum sequenti figure copulando[260] et numerum qui ex divisione provenerit ponendo et superfluum superius describendo gradatim usque[261] ad primam figuram numeri devenerit procedendo[262] studeat operari[263]. (2) Nam cum sepe contigerit quod figure in quibus numeri dividentur maiores ultimis[264] figuris ipsorum numerorum extiterint, tunc cum non valeant ipse per ipsas dividi, incipiat divisionem ab

---

[248] Universalis FNRAV, universal S
[249] numerorum FNAVS, numerorum eis R
[250] eis NAVS, eius FR
[251] voluerit NRAVS, voluit F
[252] In FNRAV, ad S
[253] Figuram FNRAV, om. S
[254] quam FAV, quem NR
[255] Ponens FRANS, pones V
[256] consequenti FNAVS, sequenti R
[257] eas duas FNAVS, eas R
[258] Sub FRANS$_2$, super VS$_1$
[259] semper FNAVS, semper super R
[260] sequenti figure copulando FRAS, figure copulando sequenti N, sequenti figure capitulando V
[261] Usque FNRAV, usque quod S
[262] et superfluum-procedendo FNAVS, *om*. R
[263] studeat operari NRAVS, *om*. F
[264] ultimis FRAVS, vel nimis N

ultimis et a consequentibus figuris[265]; et dividat[266] eas prescripta ratione copulatas, et divisiones ponat sub penultimis, et de superfluis vadat usque ad finem, ut prediximus, operando. Si[267] superfluum[268] quodque[269] non fuerit, dividat tantum[270] ipsam figuram, quousque superfluum invenerit, que copulari edocetur, et si ipsam[271] dividere non poterit, ideo quia sit minor ipsa per quam dividitur, ponat sub ipsa zephyrum, et totam ipsam[272] tanquam superfluum consequenti[273] figure copulando adiungat. Et sic habebit quarumlibet dictarum divisionum quantitates.

(3) [N, f. 26r] Ut si voluerit dividere 365 per 2, describat 2 in quadam parte tabule et desuper protrahat virgulam, et alia 2 ponat sub 5, et incipiat dividere 3 per 2, scilicet ultimam figuram, dicens: $\frac{1}{2}$ de 3 est[274] 1, et remanet 1. Et describat[275] 1 sub eisdem 3 et 1[276] quod remanet describat superius, ut in prima descriptione cernitur, et[277] remanente 1, copulato cum 6[278] que sunt iuxta ultimam dictam figuram, facient[279] 16. Accipiat[280] $\frac{1}{2}$ de 16 quod est 8. Ponat ergo 8 sub 6 antepositum 1 sub 3, ut in secunda descriptione cernitur. Et cum nichil sit superfluum in divisione de 16, dividat 5 per 2: exibunt 2 et remanet 1. Describat 2 sub 5 et 1 quod remanet scribat[281] super posita 2 que ex parte cum virgula servare iussimus: et erit

[265] figuris FNAVS, *om.* R
[266] dividat FRAVS, dividas N
[267] si RVS, *in mg.* F, *om.* N
[268] superfluum NR AVS, *in mg.* F
[269] quodque FNR, Quinque VS
[270] tantum FN A VS, tamen R
[271] ipsam NRAVS, ipsa F
[272] Totam ipsam FNRAV, tota ipsa S
[273] consequenti FRAVS, sequenti N
[274] est FRAVS, et N
[275] 1 et describat NRAV, 1 describat F S
[276] et 1 FNAVS, *in interlinea* R
[277] cernitur et FRAVS, cernitur N
[278] copulato cum 6 FNAVS, cum 6 copulato R
[279] facient FRAVS, faciet N
[280] Accipiat FRNS, accipiatur V
[281] scribat FNVS, describat R

medietas unius integri. Et ante ipsum $\frac{1}{2}$ describat numerum exeuntem[282] ex divisione[283], scilicet 182, ut in ultima descriptione patet[284]. (4) Nam rupti vel fracti[285] semper ponendi sunt post integra, quamvis prius integra quam rupti pronuntiari debeant.

(5) Et notandum rursus, quia[286] quando aliquis numerus divisus est [R, f.19v] per aliquem numerum, tunc ex multiplicatione divisoris in exeuntem provenit divisus numerus[287], ut[288] si 40 dividantur[289] per 4[290] veniunt 10[291], quare si multiplicamus 4 per 10 quadraginta, scilicet divisum numerum, faciunt. Similiter si multiplicabuntur[292] $\frac{1}{2}$ 182[293] per 2, scilicet[294] exeuntem numerum per divisorem[295], provenient[296] 365, scilicet numerus divisus.

Divisio 365 per 3[297]

(1) Item si eadem 365 per 3 dividere voluerit, describat 3 sub 5 et dividat 3 per 3: exibit 1 quod ponat sub 3. Item dividat 6 per 3: exibunt[298] 2 que ponat sub 6; et dividat 5 per 3, exibit[299] 1 et remanent[300] 2: ponat 1 sub 5 et 2[301] super virgulam de 3 ex parte servata, et ante

---

282 Exeuntem FRNS, exeunte V
283 ex divisione FRS, *om*. NV
284 Patet FNRAV, erunt S
285 Rupti vel fracti FRVN, fracti vel rupti S
286 quia FRV, quod N, non capisco in S
287 divisus numerus FNVS, divisii super numerus R
288 Ut FRVS, Unde N
289 dividantur FNVS, dividatur R
290 per 4 FNVS, *om*. R
291 10 FRVS, 4 N
292 multiplicabuntur RVS, multiplicabunt FN
293 $\frac{1}{2}$ 182 FRNS, 182 $\frac{1}{2}$ V
294 scilicet FRVS, *om*. N
295 Divisorem FRNS, divisionem V
296 Provenient FRNS, proveniunt V
297 divisio 365 per 3 S, divisio de 365 per 3 R, , *om*. FNV
298 exibunt FRVS, exibit N
299 exibit FNSR$_{(b)}$, exibunt R$_{(a)}$
300 remanent FRS, remanet et N
301 Ponat 1-et 2 FRNS, om. V

ipsum[302] ponat numerum exeuntem[303] ex divisione, scilicet 121. Et sic habebit[304] $\frac{2}{3}$ 121 pro quesita divisione, ut hic ostenditur. (2) Et notandum quod numerus qui dividitur vocatur ‘divisus’ vel ‘dividendus’; et numerus qui dividit vocatur ‘dividens’ vel ‘divisor’, et numerus qui provenit ex divisione vocatur ‘procedens’ vel ‘exiens’.

Divisio 1346 per 4[305]

[S, f. 15 V] (1) Item si voluerit quis dividere 1346 per 4, ponat 4 sub [N, f.26v] 6[306] et dividat 13 per 4, cum non possit dividere 1, quod est in ultimo gradu numeri: exibunt 3 et remanet 1. Ponat 3 sub 3 et remanens 1 super eadem ponat[307] 3, et copulet ipsum[308] 1 cum 4 que antecedunt 3 in numero, erunt 14: sumat[309] quartam de 14 que est 3 et remanent 2. Ponat 3 inferius sub 4 et remanentia 2 superius. [V, f. 11r] Quibus copulatis cum 6, faciunt 26: que dividat per 4, exibunt 6 et remanent 2. Ponat 6 sub 6 et remanentia[310] 2 ponat super virgulam[311] de[312] 4 ex parte servata[313] [F, f.13r]: que notant duas quartas unius integri que equales sunt medietati unius integri. Et ante ipsas[314] ponat[315] numerum exeuntem[316] ex divisione, scilicet 336. Et sic habebuntur $\frac{1}{2}$ 336 pro quesita divisione.

(2) Verbi gratia, divisimus primum 13 per 4, que 13 terminantur in tertio gradu. Quare ipsa esse centenaria[317] cognoscimus, cum tertius gradus sit centenariorum. Divisis ergo

---

302 Ipsum FRNS, ipsam V
303 Exeuntem FRNS, exeunte V
304 habebit NRVS, habebitur F
305 Divisio-4 FRS, *om*. NV
306 6 FRNS, 5 V
307 super eadem ponat NR, ponat super eadem VS, ponat sub eadem F
308 Ipsum FRNV, om. S
309 sumat FV, sumat ergo S, summat RN
310 remanentia FRS, remanent NV
311 super virgulam NVS, sub virgula FR
312 de FRVS, *om*. N
313 parte servata FNVS, partis servatis R
314 ipsas FNVS, ipsam R
315 Ponat FRNS, ponetur V
316 Exeuntem FRNS, om. V
317 Esse centenaria FRNV, centenaria esse S

tredecim centenariis per 4, veniunt centenaria tria et remanet[318] unum centenarium[319] indivisibile. Quare posuimus 3 in tertio gradu, scilicet in loco centenariorum[320] et 1 quod fuit superfluum posuimus[321] super 3, etiam[322] denotans centum et copulavimus ipsum 1 cum 4: fecerunt 14 que terminantur in secundo gradu, scilicet in loco decenarum[323], quare denotant decenas[324] 14 quas divisimus per 4, venerunt tres decene, et duedecene remanserunt indivisibiles. Quare posuimus 3 sub 4 et 2 super 4, in loco videlicet decenarum[325], copulavimus ipsa 2 cum 6 primi gradus. Ex quorum[326] copulatione habuimus[327] 26 unitates[328], cum ipsa copulatio terminet[329] in primo gradu. Et divisimus ipsas 26 unitates per 4, [R, f.20r] et venerunt unitates 6, et remanserunt 2. Quare posuimus 6 in loco unitatum et duo posuimus super virgam de 4[330]. Et[331] sic intelligatur de reliquis similibus divisionibus.

Divisio 5439 per 5[332]

(1) Item si voluerit dividere 5439 per 5, ponat 5 sub 9 et dicat: $\frac{1}{5}$ de 5 est 1, quod ponat sub 5. Et $\frac{1}{5}$ de 4 est 0 et remanent[333] 4. Ponat 0 sub 4, et pro[334] remanentibus 4, copulet ipsa [N, f. 27r] 4 cum 3 et dicat: $\frac{1}{5}$ de 43 sunt 8 et remanent[335] ipsa 3. Ponat 8 sub 3 et accipiat

---

[318] remanet FNS, remanent VR
[319] centenarium FVS, centonarium NR,
[320] centenariorum FNVS, centonarium R
[321] posuimus FRVS, *om*. N
[322] super 3 etiam R, super 6 et est FN VS
[323] decenarum FNSR$_{(b)}$, decenariorum VR$_{(a)}$
[324] decenas NRVS, centenas decenas F
[325] decenarum NR, decenarum et FVS
[326] quorum FRVS, quo cum N
[327] Habuimus FRNV, om. S
[328] Unitates FRNV, unitates fuerunt S
[329] Terminet FRNV, terminetur S
[330] 4 FRVS, *exhibet spatium* N
[331] et FRVS, ut N
[332] Divisio-per 5 FRNS, om. V
[333] remanent RNVS, remanet F
[334] et pro FRVS, pro N
[335] remanent FNVS, remanet R

quintam de ipsis 3[336] copulatis cum 9, scilicet de 39, exibunt 7 et remanent 4: ponat 7 sub 9 et 4 super virgulam de 5 ex parte[337] servatis et anteponat numerum exeuntem ex divisione.

Divisio[338] 9000 per 7

(1) Item si voluerit dividere 9000 per 7, ponat 7 sub primo zephyro, et dividat 9 per 7, exibit 1 et remanent 2. Ponat ergo 1 sub 9 et 2 desuper. Quibus copulatis cum 0 quod est secus 9, faciunt 20: que dividat[339] per 7, exibunt 2 et remanent 6. Ponat 2 sub illo zephyro et 6 desuper. Quibus copulatis cum sequenti zephyro, faciunt 60: que dividat[340] per 7, exibunt 8 et remanent 4. Ponat 8 sub illo zephyro 0[341] et desuper ponat 4. Quibus copulatis cum zephyro primi gradus, faciunt 40: que dividat per 7, exibunt 5 et remanent 5. Ponat 5 sub ipso 0 et remanentia 5 ponat super virgulam de 7 ex parte descripta[342], et, ante ipsam, ponat numerum exeuntem ex[343] divisione.

Divisio[344] 10000 per 8

(1) Item si voluerit dividere 10000 per 8, ponat 8 sub 0 primi gradus et dicat: $\frac{1}{8}$ de 10 est 1 et remanent[345] 2. Ponat 1 sub 0 quarti gradus et desuper ponat 2 et dicat: $\frac{1}{8}$ de 20 est 2 et remanent 4[346]. Ponat 2 sub 0[347] tertii gradus et desuper ponat 4 et accipiat[348] $\frac{1}{8}$ de 40 que[349]

---

336 de ipsis 3 FNVS, de ipsis R
337 de 5 ex parte FNSV, ex parte de 5 R
338 Divisio-per 7 FNV, Divisio de-per 7 R, om. VS
339 dividat FRVS, divide N
340 dividat FRVS, divide N
341 0 FS, om. V
342 parte descripta FVS, parte scilicet descripta N, partis servatis R
343 ex FRNS, de V
344 Divisio-per 8 FNS, Divisio de-per 8 R, om. V
345 Remanent FRNS, remanet V
346 4 FNRS, 8 V
347 quarti-sub 0 S NVR (et 2 desuper et) , om. F
348 accipiat FRS, accipiet N, accipient V
349 que FRS, quod N

est 5 que ponat sub secundo gradu. Et ut[350] expleatur ordo graduum exeuntis numeri, ponendum est 0 sub 0 primi gradus, ut in hac descriptione cernitur.

Divisio[351] 120037 per 9

(1) Item si 120037 per 9 dividere voluerit[352], describat 9 sub 7 et dicat: $\frac{1}{9}$[353] de 12 est 1 et remanent 3, ponat 1 sub 2 et superius 3[354]. Et[355] $\frac{1}{9}$ de 30 est 3 et remanent 3. Ponat 3 sub 0 quarti gradus, et desuper ponat 3. Et iterum[356] accipiat $\frac{1}{9}$[357] de 30 quod est 3 et remanent 3: ponat 3 sub 0 tertii gradus et 3 ponat super ipsum 0. Iterum, et $\frac{1}{9}$ de 33 est 3 et remanent 6. Ponat 3 sub 3 et superius 6 [N, f. 27v] et $\frac{1}{9}$ de 67 est 7 et remanent 4. Ponat 7 sub 7 et rema[S, f. 16r]nentia 4 ponat super virgulam de 9 ex parte descripta[358]. (2) Et ita si secundum prescriptum dividendi ordinem dividere sciverit in aliquibus similibus divisionibus [R, f. 20v] nunquam poterit deviare: etiam[359] per eundem modum omnes numeri[360] dividi possunt[361] per 11 et per 13[362]. (3) Tamen oportet primum scire introductiones ipsorum ordinum[363] aliorum[364] suprascriptorum ut in tabulis divisionum superius continentur. Nam introductio de 11 ascendit

---

350 Et ut F VS, ut NR
351 Divisio-per 9 FNS , Divisio de-per 9 R, om. V
352 120037 per 9 dividere voluerit FNS, voluerit 120037 per 9 dividere R
353 $\frac{1}{9}$ FNRS, om. V
354 Superius 3 FRNV, superius ponat 3 S
355 3 et FNVS, 3 et dicat R
356 et iterum FVS, iterum NR
357 $\frac{1}{9}$ NRVS, 9 F
358 descripta FVS, descripto N R
359 Etiam FVNR, om. S
360 omnes numeri FNVS, numeri omnes R
361 dividi possunt FNVS, possunt dividi R
362 13 F RVS, 1 N
363 Ordinum FNRV, ordine S
364 aliorum FVS, et aliorum R, in aliorum N

ab uno usque in decies[365] 11, scilicet in 110[366]. Et introductio de 13 ascendit ab 1 usque[367] in decies 13, scilicet[368] 130.

De divisione[369] numerorum per 11

(1) Notis[370] quidem dictis introductionibus, et voluerit quis dividere 12532 per 11, ponat 11 sub 32. Et accipiat[371] $\frac{1}{11}$ de 12, que sunt in capite dividendi numeri quod est 1, et remanet 1. Ideo[372] quia $\frac{1}{11}$ [V, f. 11v] de 11 est 1 sicut in suprascriptis tabulis ostenditur, ergo $\frac{1}{11}$ de 12 est 1 et remanet 1[373]. Pone itaque 1 sub 2[374] de ipsis 12[375] et remanens 1 ponat super 2, et copulet ipsum 1 cum antecedente figura, scilicet cum 5, facient 15, de quibus accipiat $\frac{1}{11}$ que est 1 et remanet[376] 4 dicta ratione. Et[377] ponat 1[378] sub 5 et remanentia 4 super 5 que copulet cum antecedente figura, scilicet cum 3, facient[379] 43: de quibus iterum accipiat $\frac{1}{11}$ que est 3 et remanent[380] 10, ideo quia $\frac{1}{11}$ de 33 est 3, a quibus usque[381] in 43 desunt[382] 10, ergo $\frac{1}{11}$ de 43 est 3 et remanent 10 ut diximus. Ponat ergo 3 sub 3, et 10 ponat[383] super 43, hoc est ponat[384] 1

---

[365] decies FRVSN$_{(b)}$, decenies N$_{(a)}$
[366] 110 FRVS, 119 N
[367] usque FRVS, *om.* N
[368] scilicet FVS, in N, scilicet in R
[369] De divisione-per 11 N RS, Divisione-per 11 F, om. V
[370] Notis FNVS, Notis igitur R
[371] accipiat FRV, accipiet NS
[372] Ideo FSV$_b$, item N R, $\frac{1}{10}$ V$_a$
[373] ideo-remanet 1: *scripsit in margine* R
[374] 2 F RS, *om.* N
[375] 12 N VS, 2 F R
[376] Remanet FRNS, remanent V
[377] et FNVS, om. R
[378] 1 N RVS, 7 F
[379] facient FNVS, faciunt R
[380] remanent N RVS, remanet F
[381] quibus usque FVS, quibus que N, quibusque R
[382] desunt N RVS$_1$, sunt F S$_2$
[383] Ponat FRNV, om. S
[384] ponat F RVS, ponet N

super 4, que posita fuerunt super 5[385] et 0[386] ponet[387] super 3, et copulet rursus ipsa 10 cum antecedente figura, scilicet cum 2 que sunt in primo gradu, erunt 102, de quibus iterum accipiet[388] $\frac{1}{11}$, erunt 9 et remanent 3: ponat 9 sub dictis 2 et remanentia 3 ponat super virgulam de 11 ex parte servata, et habebit pro quesita divisione $\frac{3}{11}$ 1139[389].

Divisio de 123586 per 13[390]

(1) Item si voluerit dividere 123586 per 13, positis 13 sub 86, dividat 123[391] per 13, cum 12 minus sit[392] de 13, exibunt 9 et [N, f. 28r] remanent 6. Nam tertia decima[393] de 117 est 9, a quibus usque[394] in 123 desunt 6. Ponat 9 sub 3 de ipsis 123 et remanentia 6 ponat super eisdem[395] 3 et copulabit ea[396] cum 5: erunt 65, quorum $\frac{1}{13}$ [397] est 5. Quare ponat 5 sub 5 et sub 8 ponat 0[398] cum 8 minus sint[399] de 13, et copulabit ipsa 8 cum 6 que sunt in primo gradu: erunt 86. Quorum $\frac{1}{13}$ [400] cum sit 6 et remanent 8, ponat[401] 6 in primo gradu exeuntis numeri,

[385] que posita-super5 FNVS, om. R
[386] super 5 et 0 FVS, *spatium vacuum exhibet* N
[387] ponet FNVS, om. R
[388] accipiet FNVS, accipiat R
[389] $\frac{3}{11}$ 1139 FNRS, 1139 $\frac{3}{11}$ V
[390] Divisio de 123586 per 13 NS, Divisio de F R, om. V
[391] 123 F RS, 12 N V
[392] sit F RS, sint N, 13 sit V
[393] decima FNS, decima pars R
[394] quibus usque F RS, quibusque N
[395] eisdem FS, eundem N, eiusdem R
[396] ea F RS, eam N
[397] $\frac{1}{13}$ FNRS , 13 V
[398] 0 FNRS, om. V
[399] sint FNS, sit R
[400] $\frac{1}{13}$ FNR S, 13 V
[401] ponat RVS, ponet FN

et 8 super virgam de 13, et[402] habebit pro quesita divisione $\frac{8}{13}$[403]9506. (2) Per hunc etiam modum possunt dividi numeri per 17 et per 19. Tamen oportet scire introductiones ipsorum ordine aliorum suprascriptorum numerorum. Sed cum grave videatur ipsorum introductiones cordetenus posse retineri, qualiter per alium modum numeri dividantur per 17[404] et per 19[405], etiam et[406] per alios numeros duarum[407] figurarum, in[408] suo loco demostrabimus[409].

De divisione numerorum cordetenus in manibus per eosdem numeros[410].

(1) Verum si materiam[411] consimilium divisionum cordetenus in manibus operari voluerit, retineat numerum in manibus quem dividere voluerit, et eat semper [R, f.21r] per manus, gradatim dividendo, incipiendo ab ultima figura, ponens semper in manibus numeros ex divisione exeuntes, superflua semper cordetenus retinendo et numerum dividendum gradatim de manibus delendo. (2) Verbi gratia, ut si proposuerit dividere 7543[412] per 6, retineat[413] prescriptum[414] numerum in manibus, et dividat 7 per 6 que[415] sunt in manu dextera in loco miliariorum, exibit 1 et remanet 1: deleat[416] 7 de manu et ponat ibidem 1 et remanens 1 retineat in corde quod copulet cum 5 que sunt in manu dextera[417] in loco centenariorum, erunt 15 que dividat per 6, exibunt 2 et remanent[418] 3: deleat 5 de manu et ponat ibidem 2 et

---

402 et FVS, om. N
403 $\frac{8}{13}$ N RS, $\frac{3}{13}$ F
404 17 F RVS, *spatium vacuum exhibit* N
405 19 F RVS, *spatium vacuum exhibit* N
406 et FVS, om. N R
407 duarum FNVS, quare R
408 in FNVS, om. R
409 demostrabimus FVS, demonstrabimus N
410 numeros FNVS, om. R
411 materiam N RS, materia FV
412 7543 FVS, 7548 N R
413 retineat FS, remaneat N R, re(ma)tineat V
414 prescriptum R VS, prescriptuntur F N
415 que F R S, que 7 NV
416 deleat FVS_2, et deleat N R, in corde deleat S_1
417 dextera F RVS, dextra N
418 remanent F NVS, remanet R

in corde retineat 3. Quibus copulatis cum 4 que sunt in sinistra manu in loco decenarum[419], faciunt 34, que dividat[420] per 6, exibunt 5 et remanent 4: deleat 4 de manu, et[421] ponat ibidem 5 et remanentia 4 in corde retineat que copulet cum 3 que sunt in eadem manu in loco unitatum, erunt 43 que dividat per 6, exibunt 7 et remanet[422] [N, f. 28v] 1. Deleat 3 de manu et ponat ibidem 7, et pro remanenti 1 dicat sextam. (2) Et sic habebit in manibus [S, f. 16v] pro quesita divisione $\frac{1}{6}$ 1257.

Divisio 8059 per 5[423]

(1) Vel[424] si voluerit dividere 8059 per 5, retineat numerum in manibus et dicat: $\frac{1}{5}$ de 8 que sunt in loco miliariorum est 1 et remanent 3. Deleat 8 de manu[425] et ponat ibidem 1 et in corde[426] retineat 3. Et cum in hoc numero in loco centenariorum non habeatur[427] aliquid[428] in manu, dicendum est quod sit ibi[429] zephyrum, cum quo copulet 3 servata, facient 30, quorum $\frac{1}{5}$ est 6 que ponat in eodem[430] loco, scilicet centenariorum et ducat divisionem de manu dextera ad sinistram, dicens $\frac{1}{5}$ de 5[431], scilicet de eis[432] que sunt in loco decenarum[433] est 1. Deleat 5 et ponat ibidem 1 et accipiat $\frac{1}{5}$ de 9 que est 1[434] et remanent[435] 4, scilicet de eis que

[419] decenarum FV, decenariorum N RS
[420] dividat F RVS, divide N
[421] Et FRNS, om. V
[422] remanet NVS, remanent F R
[423] Divisio-per 5 F RS, om. NV
[424] Vel FRNS, Et V
[425] manu F RVS, manibus N
[426] in corde F RVS, *om.* N
[427] habeatur FVS, habeantur N R
[428] Aliquid FRNS, aliquem V
[429] ibi FNVS, ibidem R
[430] eodem N RS, corde FV
[431] De 5 FRNS,de 5 est 6 que ponat in eodem loco V
[432] eis FVS, his N R
[433] decenarum FVS, decenariorum N R
[434] 1 N RVS, spatium vacuum exhibit F
[435] remanent NS, remanet R, retineat F, remaneat V

sunt in loco unitatum. Deleat ipsa 9 de manu et ponat ibidem 1 et pro remanentibus 4 dicat $\frac{4}{5}$.

(2) Et sic habebit pro quesita divisione $\frac{4}{5}$ 1611, et sic in reliquis similibus divisionibus intelligatur[436].

(3) Cumque autem quis[437] aliquem numerum per 10 dividere voluerit, deleat ex ipso numero[438] figuram primi gradus et ponat eam[439] super quedam 10 posita[440] ex parte[441] cum virgula[442], e ante ipsam[443] [V, f. 12r] ponat numerum qui remanserit post delectionem dicte prime figure. Et sic poterit quemlibet numerum per 10 dividere.

(4) Verbi gratia, ut si voluerit dividere 167[444] per 10, deleat ex ipsis figuram primi gradus, scilicet 7 [R, f.21v] et[445] ponat ea[446] super quedam 10, ut diximus, ex parte servata cum virgula, et ante ipsam[447] ponat remanentem numerum, scilicet 16. Et sic habebit[448] pro quesita divisione $\frac{7}{10}$ 16. (5) Et si 1673 per 10 dividere voluerit, deletis[449] 3 de 1673, remanent, pro quesita divisione, $\frac{3}{10}$ 167[450].

Incipiunt divisiones numerorum per numeros[451] incompositos[452] secundi gradus

(1) Numerorum[453] quidam sunt 'incompositi', et sunt illi qui in arismetrica[454] et in geometrica 'primi' appellantur, ideo quia a nullis numeris minoribus existentibus ipsis, preter

436 Intelligatur FRNS, intelligitur V
437 cumque autem quis N RV, cum autem quis S, cum aliquis F
438 numero FNVS, *om*. R
439 eam FNVS, ea R
440 quedam 10 posita N RVS, quedam positum F
441 ex parte F RVS, ex capite N
442 Virgula FRNS, virga V
443 Ipsam: ipsa FRNVS
444 167 N RVS, 16 F
445 Et FRVN, om. S
446 ea FV, eam N R
447 Ipsam FRVN, ipsa S
448 habebit N RVS, habebis F
449 deletis FVS, delens N R
450 167 FRNS, om. V
451 per numeros F R S, om. NVA
452 incompositos F RVSA, in compositos N

quam ab unitate, metiuntur vel numerantur[455]. Arabes ipsos 'hasam' appellant[456]. Greci 'coris canon'[457], nos autem 'sine regulis' eos appellamus. (2) Ex quibus illi, qui sunt infra[458] centum, in quadam tabula in sequentibus [N, f. 29r] describuntur. Alios vero primos, qui sunt ultra centum per regulam[459] invenire docebo. Reliqui vero compositi, vel epipedi[460], idest superficiales[461], a peritissimo[462] geometriae[463] Euclide appellantur, ideo quia componuntur[464] ex multiplicatione aliquorum numerorum, ut duodecim[465] que componuntur ex[466] multiplicatione binarii in[467] 6, vel ternarii in 4; nos autem ipsos 'regulares'[468] numeros appellamus. (3) Et cum dividendi[469] doctrina per primos et compositos[470] non sit eadem, in primis, scilicet per eos qui[471] sunt sine regulis[472] infra[473] centum, quoslibet[474] numeros ipsis[475] maiores existentes dividere[476] ostendamus.

(4) Cum autem quemlibet numerum per aliquem prescriptorum[477], qui sit sine regula, quis dividere voluerit, describat numerum in tabula, et sub ipso ponat ipsum primum numerum, per quem dividere voluerit, collocans si quem[478] similem gradum sub simili[479] et videat si due

---

453 Numerorum N RSA, Numerum FV
454 Arismetrica FRNSA, aritmetica V
455 metiuntur vel numerantur FVS, numerantur vel metiuntur R, vel numerantur metiuntur $AN_{(b)}$, numerantur metiuntur $N_{(a)}$
456 appellant FNVSA, appellantur R
457 Greci-canon FRVN, om. S
458 infra F RVSA, in N
459 per regulam F RVSA, postea R
460 compositi vel epipedi F R, vel epipedi compositi NVA, epipedi S
461 Superficiales FRVN, superficiales compositi S
462 A peritissimo A, apertissimo N RVS, peritissimo F
463 Geometriae FRVNS, geometra A
464 componuntur F RVSA, ponuntur N
465 Duodecim FRVSN, 12 A
466 ex F RVSA, et N
467 in F RVSA, c'è un trattino N
468 ipsos regulares F RVSA, ipsas regulas N
469 dividendi F RVSA, dividenda N
470 compositos F RVSA, composita N
471 eos qui F RVS, eas qui A, eas quae N
472 sine regulis F NVSA, *om*. R
473 infra F RVSA, in N
474 quoslibet FNVSA, quaslibet R
475 ipsis FNVSA, ipsos R
476 dividere FRVSA, dividere doceamus N
477 prescriptorum F N, prescriptorum numerorum RVA, prescriptorum numerorum hasam scilicet primi S
478 Si quem: i codici finora hanno siquidem ma non significa nulla, meglio controllare
479 simili FVSA, simili gradu N, similis *?* R

ultime[480] numeri dividendi[481] figure[482] maiorem numerum faciant[483], vel equalem vel minorem ipso primo numero per quem[484] numerus dividetur. (5) Et si maiorem vel equalem numerum fecerint, incipiendus est ultimus gradus exeuntis numeri sub sequenti ultimo gradu dividendi numeri, hoc est sub penultima, et ponat ibidem arbitrio[485] talem figuram que, multiplicata per ipsum[486] numerum vel divisorem[487], faciat[488] numerum duarum figurarum ultimarum[489] predictarum, vel fere. Et tunc multiplicabis ipsam per ultimam figuram ipsius primi numeri[490], scilicet divisoris[491], et exeuntem[492] summam de ultima figura extrahat. Et si aliquid superabundaverit, describat habundantiam[493] super ipsam figuram. Et multiplicet eamdem positam figuram per primam eiusdem primi numeri, scilicet divisoris, et multiplicationem de copulatione dicte superhabundantie et penultime figure extrahat, et residuum si fuerit numerus duarum figurarum, hoc est quod sit amplius de 10, ponat primum gradum ipsius numeri super penultimam figuram, et ultimam[494] super ultimam. Si autem primi gradus ipsum superfluum extiterit, scilicet minus 10, ponat figuram ipsius super penultimam et copulet ipsum superfluum cum tertia figura ab ultima. Et sub ipsa tertia figura ponat arbitrio talem figuram que multiplicata per [R, f.22r] eundem [S, f.17r] divisorem, faciat numerum dicte copulationis, vel fere.

(6) Quod arbitrium qualiter ex arte habeatur, in sequentibus divisionibus, secundum dif[/N, f.29v]ferentiam ipsorum, ostendere procurabo.

---

480 due ultime F RVSA, duo ultimi N
481 dividendi F RVSA, om. N
482 Numeri-figure FRVS, figure numeri dividendi A
483 faciant N RSA, facient F, faciunt V
484 quem N VSA, quam F R
485 Arbitrio FRVNA, om. S
486 Ipsum FRVNA, ipsum primum S
487 numerum vel divisorem N R VA, divisorem numerum F, numerum S
488 faciat: in interlinea posuit R
489 ultimarum FNVSA, *om*. R
490 numeri F RVSA, gradus N
491 divisoris F RVSA, divisionis N
492 exeuntem F RS, ex sequente N, ex sequentem VA
493 habundantiam F RVSA, superabundantiam N
494 Ultimam A, ultimum F RVS, ultimas N

(7) Et tunc multiplicet ipsam positam figuram sub tertia per ultimam divisoris, et summam extrahat, si possibile fuerit, ex ultimo gradu dicti superhabundantis et coniuncti numeri. Sin[495] autem extrahat[496] eam[497] de copulatione ultime et sequentis et superfluum ponat super eundem gradum, et multiplicet iterum ipsam per primam divisoris et summam extrahat de remanenti numero et superfluum ponat desuper, et sic semper copulando superflua cum figuris per gradus[498] sequentes et sub ipsis gradibus figuras ponendo arbitrio, et secundum prescriptum ordinem multiplicando usquequo ad finem numeri devenerit[499] procedere studeat. (8) Verum cum sepe contigerit quod de copulatione superflui et antecedentis figure numerus divisor extrahi non poterit, tunc scribendum erit zephirum sub[500] eadem antecedente[501] figura et copulabit eis[502], scilicet antecedenti vel sequenti[503] et superfluo, aliam antecedentem vel sequentem[504] figuram et sub ipsa ponat illam figuram que multiplicata per divisorem numerum faciat numerum illarum dictarum trium figurarum, scilicet ipsarum que exibunt ex copulatione superhabundantis figure et duarum antecedentium vel sequentium[505] figurarum. Unde si due ultime figure dividendi numeri minorem numerum divisore, ut prediximus, fecerit[506] incipiendus erit ultimus gradus exeuntis numeri sub tertia figura ab ultima. [V, f. 12v] Et ita quoslibet numeros per predictos numeros primos[507] dividere poteris[508]. (9) Et ut intelligibilius que dicta sunt intelligantur ea cum numeris ostendantur.

---

495 Sin FRVSN, si A
496 extrahat RSA, extrahet FNV
497 eam F RVSA, ipsam N
498 gradus F RS, gradus vel NA
499 devenerit FNSA, deveniat R
500 Sub FRNVA, super S
501 Antecedente FRNVA, antecedente vel sequente S
502 eis RVSA, eos F, eas N
503 antecedenti vel sequenti FVSA, antecedenti vel subsequenti N, sequenti antecedenti R
504 antecedentem vel sequentem VSA, antecedentem vel subsequentem N, vel sequentem antecedentem F, antecedentem R
505 antecedentium vel sequentium FSA, antecedentium vel subsequentim N, sequentium antecedentium R, antecedentium V
506 fecerit FVSA, fecerint N R
507 numeros primos N RVSA, primos numeros F
508 Poteris FRNSA, poterit V

Divisio de 18456 per 17[509]

(1) Si quis voluerit dividere 18456 per 17, describat 17 sub 56 de 18456 et accipiat $\frac{1}{17}$ [510] de 18 que sunt ultime due figure dividendi numeri que est 1 et remaneat[511] 1. Et[512] ponat[513] 1[514] sub 8 de ipsis 18, et remanens 1 ponat super 8, ut in prima descriptione ostenditur. Et copulet ipsum 1[515] cum antecedente figura, scilicet cum 4, facient[516] 14. Que 14 cum minus sint[517] divisore numero, scilicet de[518] 17, ponet[519] 0 sub ipsis 4, scilicet ante positum 1 sub 8 et copulabis ipsa 14 cum antecedente figura, scilicet cum 5, facient 145. Ponet itaque sub dictis[520] 5 talem figuram arbitrio que, per 17 multiplicata, faciat[521] fere dicta[522] 145. (2) Nam, ut[523] ipsum arbitrium ex arte habeatur[524], videatur de divisore numero, scilicet de[525] 17 cui [N, f.30r] decenario numero propinquior est: est enim propinquior 20. Dividat ergo dicta 145 per 20, quod sic fit: de 20 relinquat primam figuram, scilicet zephyrum, remanebunt 2 de ipsis 20. Et relinquat iterum primam figuram[526] de 145, scilicet [R, f. 22v] 5, remanebunt 14, que dividat per dicta 2[527], exibunt 7 et talis[528] debet esse figura[529] quam debet ponere sub 5, vel 1 amplius, scilicet 8 et hoc[530] contigit, quia 17 minus sunt de 20: unde maior pars est $\frac{1}{17}$ de 145

---

[509] Divisio - per 17 FRNSA, om. V
[510] $\frac{1}{17}$ FRNS, 17 VA
[511] remaneat F RV, remanet NSA
[512] et F NVS, *om*. RA
[513] ponat F RVS, ponet NA
[514] 1 F NVSA, .1. .1. R
[515] 1 ponat-ipsum1 F RVSA, *om*. N
[516] Facient FRVSN, faciet A
[517] Sint FRNSA, sit V
[518] scilicet de FRVSA, scilicet N
[519] ponet F NVS, ponat RA
[520] dictis F NVSA, ipsa R
[521] faciat F RSA, faciet V, faciunt N
[522] dicta F N VSA, dictam R
[523] ut F N VSA, unde R
[524] habeatur F N VSA, habeatur talem tradimus evidentiam R
[525] scilicet de FRVSA, scilicet N
[526] Figuram FRVSN, figurarum A
[527] Dicta 2 FRVSN, 2 dicta A
[528] talis F NVSA, talem R
[529] figura F N VSA, figuram R
[530] hoc R N VSA, hic F

quam $\frac{1}{20}$. Ponat itaque 8 sub 5 de 145, quia hic ita[531] opportet et multiplicet ipsa 8 per 17 et extrahat[532] multiplicationem ipsorum de 145, quod sic fit: multiplicabis[533] itaque 8 per ultimam figuram de 17, scilicet per unum, erunt 8, que extrahat de 14, remanebunt 6 que ponat super 4 de 14 et copulet ipsa 6 cum antecedente 5, facient 65, de quibus extrahat multiplicationem eorumdem 8 in aliam figuram de 17, scilicet in 7. Que multiplicatio est[534] 56, remanent[535] 9 et tot remanet[536] de 145, [A, f. 9r] extracta inde multiplicatione de 8 in 17, ut in secunda descriptione ostenditur[537]. Ponat itaque 9 super 5[538] et copulet ipsa cum antecedente figura, scilicet cum 6, facient[539] que restant dividenda per 17[540], 96, et ponat sub 6, iterum, talem figuram[541] que multiplicata per 17 faciet[542] proprius quam poterit de 96. Unde ut sciat qualis sit illa figura[543], relinquat 6 de 96 et remanentia 9 dividat per 2[544], sicut[545] antea fecimus de 14, exibunt $\frac{1}{2}4$[546]. Quare ponat 5, hoc est amplius de $\frac{1}{2}4$[547] sub 6, hoc est in[548] primo gradu exeuntis numeri, et multiplicabis[549] ipsa 5 per 1 de 17, scilicet per ultimam figuram ipsorum, facient[550] 5 que extrahat de 9 que posita sunt super 5, remanent 4, que ponat

---

531 ita R N VSA, itaque F
532 extrahat R NS, extrahet FV A
533 multiplicabis FRVS, multiplicabit NA
534 est F N VSA, facit R
535 remanent F N VSA, remanet R
536 remanet FR, remanent NVS
537 ostenditur FRVSA, cernitur N
538 5 R N VSA, 15 F
539 facient FRVSA, faciet N
540 que restant dividenda per 17 F, *om*. R V NSA
541 talem figuram FRVSA, tale figura N
542 faciet F NS, faciat RVA
543 sciat-figura FS, figura qualis sit illa sciat R, que restant dividenda per 17 qualis sit illa figura sciat NVA (davanti a que restat A ha unde ut poi cancellato)
544 2 FRVSN, 7 A
545 sicut FRVSA, et sic N
546 $\frac{1}{2}4$F NVS, $4\frac{1}{2}$ R, $\frac{1}{74}$ A
547 $\frac{1}{2}4$F NVS, $4\frac{1}{2}$ R, $\frac{1}{74}$ A
548 in FRVSA, *om*. N
549 multiplicabis FRVSA, multiplicabit N
550 Facient FRVSN, faciet A

super ipsis 9 et copulabis[551] ipsa[552] 4 cum antecedentibus [S, f.17v] 6[553] scilicet cum quibus antea copulavimus 9, facient 46 de quibus extrahet multiplicationem de eisdem 5 in 7, hoc est 35, remanebunt 11[554] que ponat super 17 ex parte servatis sub virga et[555] exeuntem numerum scilicet 1085 ponet[556] ante ipsam. Et sic habebis $\frac{11}{17}$1085 pro quesita divisione ut in hac ultima descriptione ostenditur.

(3) Rursus si eadem[557] 18456 per 19 dividere voluerit, describat 19 sub 56 de 18456. Et ponat[558] sub 4 de 184 talem figuram que multiplicata [N, f.30v] in 19 faciat fere ipsa[559] 184. Que qualis[560] sit, eodem modo quod de 17[561] diximus, cognoscitur: hoc est quod relinquat 4 de ipsis 184, remanent 18 que dividat per 2 exibunt 9 et talis debet esse figura ponenda, 9 scilicet[562]. Quare ponat 9 sub 4[563], scilicet sub tertio gradu et multiplicet 9 per 1 de 19 erunt 9 que extrahat de 18, remanent 9, que ponat super 8 et copulet ipsa 9 cum 4, facient[564] 94 de quibus extrahat multiplicationem de eisdem 9 in 9 de 19, que est 81, remanent 13. Ponet[565] ipsa 13 super[566] 94, scilicet 1 super 9 et 3 super 4, ut in prima descriptione ostenditur. Et copulabit[567] 13 cum antecedente figura, scilicet cum 5, erunt 135. Et ponet sub 5 talem figuram que, multiplicata per 19, faciat 135 vel fere eritque[568] 7: quia si relinquantur 5 de 135 remanebunt 13 que si per 2 diviserit exibit[569] 6 amplius[570]. Unde[571] ponet 7 sub 5 et

---

[551] copulabis FRVSA, copulabit N
[552] ipsa FRVSA, *om*. N
[553] 6 FRNA, 9 V
[554] Remanebunt 11 N VSA, remanebunt 11 remanebunt FR
[555] Sub virga et FRNV, sub virga A, et S
[556] ponet F NVSA, ponat R
[557] eadem FRVSA, eundem N
[558] ponat R NVS, ponet F A
[559] ipsa FRVSA, ipsam N
[560] Qualis FRVSN, qual A
[561] de 17 RSA, 17 F NV
[562] 9 scilicet R N VA, scilicet 9 F, om. S
[563] sub 4 FRVSA, sub 45 N
[564] facient FRVSA, faciunt N
[565] ponet F N VSA, ponat R
[566] super FRVSA, sub N
[567] copulabit R NS, copulabis FV A
[568] eritque FRVSA, erunt N
[569] exibit R N VSA, exibunt F
[570] amplius R NSA, et amplius F

multiplicabit[572] 7 per 1 de 19, erunt 7, que extrahat[573] de 13, remanent 6, que ponat super[574] 3 [R, f. 23r] de 13 et copulabit[575] 6 cum 5, facient 65 de quibus extrahet[576] multiplicationem de 7 in 9, scilicet 63, remanebunt 2, que pones[577] super 5, ut in secunda descriptione ostenditur. Et copulabis[578] 2 cum antecedente figura scilicet cum 6 que sunt in primo gradu, facient 26 que dividet[579] per 19, ut ita dicamus[580], exibit 1 et remanent 7. Ponat[581] 1 in primo gradu[582] exeuntis numeri, scilicet sub 6, et remanentia 7 ponat super virgulam de 19 que debent ex parte servari et exeuntem numerum, scilicet 971, ponat[583] ante ipsam virgulam. Et sic habebit pro quesita divisione $\frac{7}{19}$971, ut in hac ultima descriptione ostenditur.

<....>

(1) [V, f. 14r] Demonstrata, quidem, materia in habendo arbitrium in positione figurarum cum per 17 et per 19 numeros dividimus, nunc, vero, ostendimus qualiter habeatur[584] arbitrium in ponendis figuris cum per reliquos asam qui sunt infra[585] centum scilicet dividere[586] voluerimus. (2) Et hic est modus quare[587]: sicut cum dividimus per 17 vel per 19, accipimus medietatem ex dividendis numeris, prima figura relicta, et quinque uno amplius ideo quia 17 et 19 minus sunt de 20, ut prediximus, ita[588], cum diviserimus per 23, accipiemus medietatem vel quinque uno minus[589] quia 23 plus sunt de 20 et sic [N, f.31r] cum

571 Unde FRNSA, unum V
572 multiplicabit RNS, multiplicabis FVA
573 extrahat R NSA, extrahet FV
574 super FRVSA, sub N
575 copulabit R NS, copulabis FVA
576 extrahet F NVSA, extrahat R
577 pones FVSA, ponat R, propones N
578 copulabit R N, copulabis FVS A
579 dividet F RVS, dividat NA
580 ita dicamus FRVSA, infra dicemus N
581 ponat R, ponet F NSA, ponent V
582 Facient 26-primo gradu ripetuto due volte in A
583 ponat R NA, ponet FVS
584 habeatur NS, habeantur FV
585 infra FVS, in N
586 scilicet dividere NV, dividere FS
587 quare NS, quia FV
588 ita FVS, infra N
589 uno minus FVS, minus uno N

diviserimus per 29 debemus accipere tertiam et[590] quinque 1 plus, ideo quia 29 minus sunt de 30, quibus propriora sunt quam aliis decenariis. Et cum diviserimus per 31 debemus accipere tertiam et quinque[591] uno minus. (3) Et sic eodem modo cum diviserimus per 37, debemus accipere quartam et quinque 1 plus. Et cum per 41 vel per 43, debemus accipere quartam vel[592] quinque minus. Et cum[593] diviserimus per 47 debemus accipere quintam et quinque 1 plus. Et cum per 53 quintam et quinque 1 minus et cum per 59 sextam vel plus. Et cum per 61, sextam vel uno minus. Cum per 67, septimam vel uno plus. Cum per 71 vel per 73 septimam vel uno minus. Et cum per 79 debemus accipere octavam, vel plus. Et cum per 83, octavam vel minus. Et cum per 89, debemus accipere nonam vel plus. Et cum per 97 diviserimus debemus accipere decimam dividendorum numerorum, una figura relicta, vel quinque uno plus. (4) Unde cum quis diviserit quoslibet numeros per quemlibet prescriptorum numerorum et ignoraverit utrum debeat dare plus vel minus, quam diximus, ponat ipsam partem que ei[594] superius declaratur et multiplicet ipsam partem per numerum divisorem et si multiplicatio maior fuerit dividendi numeri detur unum minus. Et si minor ultra quam debeat fit multiplicatio detur unum plus. (5) Et sic poterit quemlibet numerum per predictos numeros [S, f. 18r] dividere. Tamen nos[595] in quibusdam divisionibus hoc idem declarabimus.

Divisio de 13976 per 23[596]

(1) Item si 13976 per 23 quis dividere voluerit, ponat 23 sub 76 et, cum 23 sint[597] plus quam[598] 13, scilicet de numero duarum ultimarum figurarum dividendi numeri, accipiende[599]

---

[590] Et FNS, om. V
[591] quinque FVS, quandoque N
[592] Vel FVN, et S
[593] cum FVS, quin N
[594] Ei FN, eis V, non si legge in S
[595] Nos FNV, om. S
[596] Divisio-23 FNRSA, om. V
[597] Sint FVNSA, sit R
[598] Quam FNVRS, om. A
[599] Accipiende FNVSA, et accipiende R

sunt tres ipse[600] ultime figure, quarum numerus est 139. Unde incipiendus est ultimus gradus exeuntis numeri sub eisdem 9. (2) Ponat[601] ibi 6 que sic inveniuntur per materiam dicti arbitrii, scilicet quod debemus relinquere primam figuram de 139, scilicet 9, remanent 13 que debemus dividere per 2, quia 23 proprior est 20 quam alio decenario numero[602], exibunt 6 et semis. Unde cum debeamus ponere minus, cum 23 sint plus 20, relinquimus ipsum semis[603], et ponemus 6 sub 9 ut diximus et multiplicet ipsa 6 per 2 de 23, erunt 12 que extrahat de 13, remanent[604] 1 quod ponat super 3 et copulet ipsum[605] 1[606] cum 9 erunt 19. Et multiplicet[607] 6[608] per 3 que sunt in 23 erunt 18 que extrahat de 19, remanent[609] 1 quod ponat super 9 ut in prima descriptione cernitur. Et copulet ipsum 1[610] cum 7 que antecedit eum[611] in numero[612], erunt 17. Et cum ipsa 17 minus sint quam[613] 23, ponendum est zephirum sub ipsa 7 et 6 que sunt in primo gradu numeri, sunt[614] cum ipsis 17 copulanda, erunt 176. Post hec ponat sub dicta[615] 6 talem figuram que, multiplicata in 23, faciat[616] fere 176. Eritque 7 prescripta ratione, hoc est minus medietate de 17. Multiplicet itaque ipsa 7 per 2 que sunt in 23, erunt 14 que extrahat de 17, remanent 3 que ponat super 7 [A, f. 9v] et copulet ipsa cum 6 primi gradus, erunt 36 ex quibus extrahat multiplicationem de 7 in 3 de 23, remanent 15 que ponat super virgulam de 23 ex parte servatis ut in hac ultima descriptione describitur[617].

[600] Tres ipse FNVRS, ipse tres A
[601] Ponat FNV, ponatur RSA
[602] Decenario numero FNVSA, numero decenario R
[603] Unde-semis FNRSA, om. V
[604] Remanent FNRSV, remanet A
[605] Ipsum FNRSV, ipsa A
[606] 1 R, om. FVSA
[607] Multiplicet FNVA, multiplicent RS
[608] 6 FNRSA, 9 V
[609] Remanent FNRSV, remanet A
[610] 1 FNRVA, om. S
[611] Eum FNRSA, om. V
[612] numero RSA, Numeris FN, numeros V,
[613] Quam VRSA, qualem FN
[614] numeri sunt FNRSA, Numeri V,
[615] Dicta FNVSA, eadem dicta R
[616] Faciat FVA, faciant RS
[617] Describitur FVSA, ostenditur R

Probatio suprascripte divisionis[618].

(1) Verum, si prescriptam divisionem per pensam novenarii probare voluerit, accipiat pensam de 13976 que sunt 8 et servet eam ex parte. Et iterum accipiat pensam exeuntis numeri, scilicet de 607 que sunt 4 et multiplicet eam per pensam de 23 que sunt 5, erunt 20[619]. De quibus accipiat pensam que sunt 2 et addat eam cum 15 que sunt super[620] virgulam de 23, erunt 17 quorum pensa sunt 8 sicuti superius ex parte servavimus. (2) Verbi gratia, quoniam ex divisore ducto in exeuntem numerum provenit divisus numerus, ergo si multiplicamus probam divisoris per probam exeuntis, veniet proba divisi numeri. (3) Sed ex diviso numero per 23 remanserunt 15, quibus extractis de [R, f.24r] 13976 remanent 13961, quibus divisis per 23 ve[/V, f. 14v]niunt 607[621]. Ergo ex multiplicatione de 23[622] in 607 proveniunt 13961. (4) Quare si multiplicatur[623] proba[624] de 607, que est 4, per probam de 23[625], que est 5, veniunt 20, quorum proba, scilicet[626] 2, est[627] proba de 13961, quibus additur proba de 15 que super sunt, que est 6, faciunt 8: scilicet proba de 13976 et hoc volui demonstrare[628].

(5) Possunt enim multiplicationes, addictationes, minutiones seu divisiones numerorum aliter per alias quasdam pensas probari, scilicet per eam de 7 et de omnibus numeris asam existentibus ut per 11 vel[629] per 13 et deinceps. Quam doctrinam secundum quod nobis videbitur congruum in sequentibus demonstrabimus[630].

---

618 Probatio-divisionis FRSA, om. V
619 20 VRSA, 0 F
620 Super FRSV, om. A
621 607 FRSV, 107 A
622 23 FRSV, 73 A
623 Multiplicatur FRS, multiplicabitur AV
624 Proba FVRA, probatio S
625 23 FVRS, 73 A
626 Scilicet FVSA, est R
627 Est FVSA, et est R
628 Remanent 13961-volui demonstrare FRS, *hunc textum post* in sequentibus demonstrabimus *posuerunt* A V (*sed* V *exibit* quare si multiplicabitur, faciunt 8 scilicet probam)
629 Vel FVSA, et R
630 Demonstrabimus FVSA, demostrationibus ostendemus R

(1) Item si voluerit dividere 24059 per 31, describat 31 sub 24059 et ponat sub zephirum 7, ideo quia 31[631] sunt circa 30 et sunt plus. Unde si acceperimus $\frac{1}{3}$ de 24, scilicet, extracta prima figura de 240, habebimus, pro tertia parte, 8 que sunt plusquam 7. Unde ponemus, ut diximus, 7 sub zephyro[632]. Et secundum prescriptum ordinem multiplicet ipsa 7 per 3 de 31, erunt 21[633] que extrahat de 24, remanent 3, que ponat super 4. Et multiplicet eadem[634] 7 per 1 de 31, erunt[635] 7 que extrahat de 30, remanent 23 que ponat super 30. Et dampnet ipsa 3, si vult. Vel si non vult, eas in corde habeat[636] pro dampnatis. Item copulet ipsa 23[637] cum 5, erunt 235 et ponat iterum, prescripta[638] ratione, 7 sub 5, scilicet minus tertia parte de 23, et multiplicet ipsa per 3[639], erunt 21 que extrahat de 23, remanent 2. Ponat 2 super 3 et dampnet ipsa 23 et copulet ipsa [S, f. 18v] cum 5, faciunt 25. Et semper intelligat antecedentium cum consequentibus copulationes et multiplicet eadem 7 per 1, erunt[640] 7 que extrahat de 25, remanent 18, ponat ipsa super 25 et dampnet[641] ipsa 25[642]. Post hec, accipiat $\frac{1}{3}$[643] de 18, suprascripta ratione[644], erunt 6. Unde ponat 6 sub 9[645] et sub 1 de 31. Quibus positis, multiplicet ipsa per 3 de 31 erunt 18 per que dampnet super posita 18 et multiplicet eadem 6

[631] 31 VRSA, 3 F
[632] Zephyro FVS, zephyrum RA
[633] Erunt 21 FVSA, om. R
[634] Eadem FVSR, eandem A
[635] Erunt FVSA, faciunt R
[636] Eas in corde habeat FVSA, habeat eas in corde R
[637] 23 RSA, 32 FV
[638] Prescripta FRSA, inscripta V
[639] Per 3 FVSA, per 3 de 31 R
[640] Erunt FVSA, faciunt R
[641] Dampnet FS, dapnet V
[642] Ipsa 25 FVSA, ipsa 25 et copulet ipsa 18 cum sequentibus 9, faciunt 189 R,
[643] $\frac{1}{3}$ VRSA, $\frac{1}{8}$ F
[644] Ratione RS, numeratione FVA
[645] 9 FRSA, 6 V

per 1, erunt 6 que extrahat de 9 remanent 3 que ponat super virgulam[646] de 31 ex parte descripta[647]. (7) Et sic habebis pro quesita divisione $\frac{3}{31}$776, ut in hac descriptione cernitur.

<Probatio>

(1) Volo demonstrare unde hic modus dividendi proveniat. Posuimus quidem 7[648] sub tertio gradu numeri dividendi quam multiplicavimus per 3[649] que sunt in ultimo gradu divisoris et occupant secundum gradum, cum sint sub secundo gradu dividendi numeri. Et ex ipsa multiplicatione [R, 24v] provenit numerus terminans in quarto gradu, quare tertius gradus, quencumque gradum multiplicat tertium gradum facit ab ipso quem multiplicat vel facit numerum terminantem in[650] ipso. Nam quartus gradus, tertius est a secundo. Et ideo extraximus multiplicationem de 7 in 3, scilicet 21, de 24 que terminantur in quarto gradu. Et posuimus 3 super eundem quartum gradum[651], scilicet super 4 et intelleximus copulationem de[652] 3 cum 0 que est in tertio gradu numeri dividendi, que copulatio[653] est 30: et multiplicamus rursus eadem 7 per 1 quod est in primo[654] gradu divisoris. Et quia in hac multiplicatione multiplicamus tertium gradum per primum, quod est idem quod multiplicare primum per tertium. Et ideo multiplicationem de 7 in 1, scilicet 7, extraximus de 30, que 30 terminantur in tertio gradu, quare ex multiplicatione tertii gradus in primum vel primi in tertium provenit numerus tertii gradus vel terminans in ipso gradu: et posuimus 23 super 30 vel in loco eorum, et copulavimus ipsa 23 cum 5 que sunt in secundo gradu et habuimus 235 que terminantur in secundo gradu. Et posuimus in secundo gradu alia 7 que multiplicamus

[646] virgulam V, Virgula FRS, virgam A
[647] De 31-descripta FVSA, ex parte servata de 31 R
[648] 7 S, om. FVRA
[649] 3 FRS, om. A, *spatium vacuum* V
[650] In FRVS, ab A
[651] Quartum gradum FRVS, gradum quartum A
[652] De R, om. FVSA
[653] Copulatio FVSA, copulationem R
[654] primo VRSA, Ipso F,

iterum per 3 divisoris, hoc est secundum gradum per secundum[655]. Ex qua multiplicatione provenit numerus tertii gradus, vel terminans in ipso. Et ideo extraximus 21 de 23[656], cum ambo terminentur in tertio gradu; et 2 que remanserunt posuimus super 3, et intelleximus copulationem eorum cum 5 sequentibus, que copulatio est 25 et terminantur[657] in secundo gradu. De quibus[658] extraximus multiplicationem de 7 in 1, scilicet secundi gradus in primum: ex qua multiplicatione provenit numerus secundi gradus vel terminans in ipso, remanserunt 18 in eisdem gradibus in quibus sunt 25, scilicet 1[659] in tertio gradu, et 8 in secundo. Et copulavimus ipsa 18 cum 9 primi gradus, fuerunt 189, et posuimus 6 in primo gradu exeuntis numeri et multiplicavimus ea per 3, scilicet primum gradum per secundum, ex qua multiplicatione provenit numerus terminans in secundo gradu: que multiplicatio fuit 18, pro quibus deleri fecimus supradicta 18 cum terminentur in secundo gradu. Et multiplicavimus eadem 6 per 1 et fuerunt 6 in primo[660] gradu, que extraximus[661] de 9 que sunt in eodem gradu, remanserunt 3 quibus, divisis per 31, proveniunt $\frac{3}{31}$. Et sic habuimus $\frac{3}{31}776$. Et secundum hoc intelligas in similibus divisionibus[662].

<...>

(1) Nam si prescripte divisionis probam[663] per pensam de 7 cognoscere cupit, accipiat pensam per[664] 7 de 24059, hoc est superfluum eiusdem numeri in 7 divisi[665]. (2) Quod superfluum sic erit accipiendum: dicatur de $\frac{1}{7}$ de 24 remanent 3 de 30 eundo scilicet

[655] per secundum FVSA, om. R
[656] 23 FRSA, 33 V
[657] Terminantur FRSA, terminatur V
[658] De quibus VRSA, quibus F
[659] 1 SA, om. FRV
[660] primo VRSA, Ipso F,
[661] extraximus FVSA, extraxerimus R
[662] Divisionibus FVSA, demostrationibus vel divisionibus R
[663] Probam FVSA, probari R
[664] Per FVRA, de S
[665] In 7 divisi FVSA, divisi in 7 R

copulando remanent 2; de 25 remanent [R, f.25r] 4; de 49 remanet 0 pro quesito superfluo quod habeatur pro pensa. (3) Eodemque modo accipiat pensam[666] de 776 que sunt 6, et multiplicet ipsa[667] per pensam de 31 que sunt sub virgula, hoc est [V, f. 15r] per 3, erunt 18 que dividat per 7, remanent 4, que addat cum 3 que sunt super virgulam de 31, erunt 7, que dividat per 7, remanet[668] 0, ut oportebat pro pensa remanere.

Divisio de 780005 per 59[669]

(1) Si autem 780005 per 59[670] dividere voluerit, descriptis numeris, ponat 1 sub 8 ideo quia si[671] relinquerimus 8 de 78 remanent[672] 7, que si[673] diviserimus per 6 propter hoc quod 59 sunt circa 60, exibit [S, f. 19r]1[674] et[675] amplius. (2) Unde debemus ponere 1 sub 8, ut prediximus. Quo posito, multiplicet ipsum per 5, fiunt[676] 5 que extrahat de 7, remanent 2[677], que ponat super 7 et multiplicet eundem 1 per 9[678], et extrahat ipsam multiplicationem de 28, remanent 19. Et deleat 2[679] vel dampnet posita super 7[680], et ponat dicta[681] 19 super 78. Et ponat 3 sub 0, prescripta ratione, quarti[682] gradus et multiplicet ipsa per 5, erunt 15 que extrahat de 19, remanent[683] 4. Deleat ipsa 19 et, in loco novenarii, ponat ipsa 4. Et multiplicet eadem[684] 3 per 9 et extrahat de 40, remanent 13: deleat[685] ipsa 4 et ponat ibi[686] 1, et super 0

[666] Pensam FVSA, pensa R
[667] Ipsa FRSA, ipsam V
[668] Remanet RSA, remanent FV
[669] Divisio- per 59 FR, spatium vacuum exibit A, 78005 per 59 S, om. V
[670] 59 FRSA, 159 V
[671] Si FRVA, om. S
[672] Remanent FRSA, remanet V
[673] Si FRSA, om. V
[674] 1: il codice R al posto dell'1 ha uno spazio bianco (forse però è scritto con inchiostro più chiaro perché in questo codice i numeri erano ripassati col rosso)
[675] Et FRA, om. VS
[676] fiunt VRSA, Fuerit F,
[677] 2 FRS, 7 V, il codice A ha 7, ma sopra, senza cancellature, c'è 2
[678] per 9 FVSA, Per 9 exibunt 9 R
[679] 2 FRSV, 7 A
[680] Posita super 7 FVSA, ipsa 7 et 8 R
[681] dicta S, Ipsa R, dicat FVA
[682] Quarti VRAS(in mg.), quam F
[683] Remanent R, remanet FVSA
[684] Eadem FVSA, ipsa R
[685] Deleat FRS, deleant V
[686] Ibi RSA, in FV

ponat 3. (3) Post hec dividenda sunt 130 per 59, et danda 2, supradicta[687] ratione, pro ea divisione, et sub zephiro tertii gradus ponenda sunt ipsa 2. Que 2 in 59 multiplicata et de 130 extracta, remanent 12: quod idem est si multiplicentur dicta 2 per 5 et extrahentur de 13 et multiplicarentur per 9 et extraherentur de 30. (4) Deleat itaque 13 et ponat 1 in loco ubi erant[688] 3 de 13 et 2[689] ponat super 0 tertii gradus. Post hoc ponat 2 sub 0 secundi gradus, et multiplicet ipsa per 59 et extrahat de 120, remanent 2 super 0. Et deleat in animo suo 120 que superfuerant de preterita divisione, et que 'delere' figuras dicitur vel 'dapnare', sunt sicut eas[690] deletas intelligere vel dapnatas[691]. (5) Post hec copulet ipsa cum 5 que sunt in primo gradu numeri, faciunt[692] 25: que cum sint minus 59, ponat 0 sub 5 primi gradus et 25 super virgulam de 59 ex parte descripta, ut in hac descriptione manifeste designatur.

<....>

(1) Et ut[693] que de divisionibus[694] dicta sunt lucidius[695] initescant, quendam numerum per 97 dividamus. (2) Sitque 5917200. Positis 97 sub utroque zephyro, dividat numerum trium figurarum ultimarum[696] numeri dividendi, scilicet 591, per 97, pro qua divisione eveniunt 6, ideo quia 97 propriora sunt 100 quam alio[697] decenario numero. (3) Unde debemus dividere 59, scilicet numerum duarum figurarum ultimarum, per 10, ex qua divisione proveniunt fere 6, scilicet decima minus, et cum 97 minus sint[698] [R, f. 25v]de 100, debemus accipere quinque amplius deciem. Unde contingunt 6, ponat ipsa 6 sub primo gradu numeri ipsarum trium

687 Supradicta FV, suprascripta RSA
688 erant VRSA, Erat F
689 2 FVSA, 2 postea R
690 Eas FR, eas iam VA, dopo eas c'è una parola che non leggo in S (forse ratio)
691 Intelligere-dapnatas FVSA, vel dapnatas intelligere R
692 Faciunt FRA, fuerit VS
693 Et ut FVSA, Ut lucidius R
694 Divisionibus FVSA, divisione R
695 Lucidius FVSA, om. R
696 figurarum ultimarum VRSA, Ultimarum figurarum F,
697 alio RSA, ab alio FV
698 Minus sint FVSA, sint minus R

figurarum, hoc est sub 1 quod est in quinto gradu totius numeri. (4) Et multiplicet[699] ipsa 6 per 9 de 97, erunt 54 que extrahat de 59, scilicet ex numero duarum ultimarum figurarum[700], remanent[701] 5 que ponat super 9. Et[702] multiplicet eadem 6 per 7 de 97, erunt 42, que extrahat de 51, scilicet de copulatione 5 super positarum cum 1 antecedente[703], remanent[704] 9, que ponat super 1 et posita 5 vel dapnet vel deleat in corde. Et predicta 9, que posita sunt super 1[705], remanent ex divisione de 591 in 97. Quibus 9[706], copulatis cum figura antecedente in gradibus, scilicet cum 7, que sunt in quarto gradu numeri, faciunt 97 que dividat per 97, scilicet per divisorem, exibit 1: ponat 1 sub 7 et multiplicet illud[707] per 9 de[708] 97, erunt[709] 9, pro quibus deleat 9 que superfuerunt de 591, et multiplicet eundem 1 per 7, erunt 7, pro quibus relinquat 7 cum quibus 9 fuerat[710] copulata. Et cum nihil remaneat de ipsis 7 ad copulandum cum 2 antecedentia[711] sibi[712] et ipsa 2 minus sint de 97, ponat 0 sub ipsis 2 et copulet ipsa 2 cum 0 ei antecedentem, et[713] erunt 20. (5) Item, cum ipsa 20 minus sint de 97, ponendus erit 0 sub[714] dicto 0 cum 2 copulatis, scilicet sub ipso quod est in secundo gradu numeri[715]: post hec copulet ipsa 20 cum 0 ei antecedenti, scilicet cum illo quod est in primo gradu, facient 200, que dividenda restant per 97. (6) Pro qua divisione ponenda sunt 2 sub 0 primi gradus, prescripta ratione, et multiplicet ipsa per 9, et extrahat de 20 superius copulatis[716], remanent[717] 2, que ponat super 0 secundi gradus. Et intelligat copulationem

---

699 Multiplicet FRSA, multiplicat V
700 Ultimarum figurarum FRVS, figurarum ultimarum A
701 remanent VRA, Remanet FS,
702 Et FRVA, om. S
703 antecedente FVSA, eius antecedente R
704 Remanent FRSA, remanet V
705 1 FVSA, om. R
706 9 FA, om. VRS
707 illud SA, Ideo FVR
708 Per 9 de FRSA, om. V
709 Erunt FVA, fuerunt RS
710 Fuerat FRVA, fuerant S
711 Antecedentia FVSA, antecedentibus R
712 Sibi FVSA, om. R
713 Antecedentem et FVSA, antecedente R
714 Sub FRSA, cum V
715 Numeri FRS, om. VA
716 Copulatis FRVS, copulatas A
717 Remanent FRVS, remanet A

ipsarum cum 0 antecedente quod est in primo gradu, que sunt 20, de quibus extrahat multiplicationem eorundem 2 in 7, remanebunt 6, que ponat super virgulam de 97 ex parte descripta. Et habebit pro quesita divisione, $\frac{6}{97}$ 61002.

<De divisione numerorum compositorum>

(1) Cum satis de divisione numerorum in numeris duarum figurarum qui sunt sine regulis, idest asam, dictum esse [S, 19 v] videatur, nunc vero eorumdem divisiones in eis que sunt conpositi idest cum regulis, ostendantur. (2) Et quamvis per compositos numeros tanquam per primos omnes numeros dividere - multiplicamus[718] tamen[719] levius et subtilius - in sequenti ostenditur[720] doctrina, scilicet ut reperiantur ipsorum regule, scilicet numeri ex quibus componuntur et ponantur[721] sub quadam virgula ut semper minores sequantur maiores versus sinistram, ut [V, f.15v] supra, in hoc eodem capitulo, edocetur. (3) Post hoc dividat numerum quem voluerit dividere per minorem ex componentibus divisorem, [R, f. 26r] hoc est per minorem numerum vel figuram[722] que fuerit sub virgula[723], et si aliquid super habundaverit, ponat[724] ipsum super eandem figuram[725] vel numerum. (4) Et exiens numerus ex divisione dividatur per antecedentem numerum vel figuram in virgula. Et superfluum si fuerit ponat super ipsam antecedentem numerum vel figuram. (5) Et sic semper per ordinem per antecedentes conponentes numeros exeuntes ex divisione donec ad finem ipsarum devenerit, dividere studeat, et superflua super eas ponendo[726] et exeuntem numerum ex divisione ultime conpositionis, idest ultimi numeri sub virgula existentis ante ipsam ponere consuescat. (6) Et sic habebit divisionem quorumlibet numerorum factam per quemlibet compositum numerum

[718] Multiplicamus FRVA, valeamus S
[719] Tamen FRVA, tunc S
[720] ostenditur RS, Ostendit FVA
[721] Ponantur FRSA, proponantur V
[722] Figuram RS, figura FVA
[723] Virgula FRS, virga VA
[724] Ponat FRSA, pone V
[725] Eandem figuram VRAS, eadem figura F
[726] Ponendo VRSA, ponenda?F

quorumlibet graduum. (7) Nam, antequam[727] hoc demostrationibus declaretur, compositiones compositorum numerorum invenire, nec non et eorum que sunt sine regulis cognoscere[728], demonstrare duximus necessarium. (8) Et cum numeri duarum figurarum, qui sunt sine regulis, in quadam tabula superius sint demonstrati, compositorum regule duarum similiter figurarum[729] singulariter sub virgulis ostendantur. Aliorum vero graduum compositiones[730] per regulam reperire ostendemus.

Compositiones numerorum duarum figurarum hoc[731] que cum duabus[732] figuris scribuntur[733].

12	$\frac{1}{2}\,\frac{0}{6}$	44	$\frac{1}{4}\,\frac{0}{11}$	74	$\frac{1}{2}\,\frac{0}{37}$
14	$\frac{1}{2}\,\frac{0}{7}$	45	$\frac{1}{5}\,\frac{0}{9}$	75	$\frac{1}{3}\,\frac{0}{5}\,\frac{0}{5}$
15	$\frac{1}{3}\,\frac{0}{5}$	46	$\frac{1}{2}\,\frac{0}{23}$	76	$\frac{1}{4}\,\frac{0}{19}$
16	$\frac{1}{2}\,\frac{0}{8}$	48	$\frac{1}{6}\,\frac{0}{8}$	77	$\frac{1}{7}\,\frac{0}{11}$
18	$\frac{1}{2}\,\frac{0}{9}$	49	$\frac{1}{7}\,\frac{0}{7}$	78	$\frac{1}{6}\,\frac{0}{13}$
20	$\frac{1}{2}\,\frac{0}{10}$	50	$\frac{1}{5}\,\frac{0}{10}$	80	$\frac{1}{8}\,\frac{0}{10}$
21	$\frac{1}{3}\,\frac{0}{7}$	51	$\frac{1}{3}\,\frac{0}{17}$	81	$\frac{0}{9}\,\frac{0}{9}$
22	$\frac{1}{2}\,\frac{0}{11}$	52	$\frac{1}{4}\,\frac{0}{13}$	82	$\frac{1}{2}\,\frac{0}{41}$
24	$\frac{1}{3}\,\frac{0}{8}$	54	$\frac{1}{6}\,\frac{0}{9}$	84	$\frac{1}{2}\,\frac{0}{6}\,\frac{0}{7}$
25	$\frac{1}{5}\,\frac{0}{5}$	55	$\frac{1}{5}\,\frac{0}{11}$	85	$\frac{1}{5}\,\frac{0}{17}$
26	$\frac{1}{2}\,\frac{0}{13}$	56	$\frac{1}{7}\,\frac{0}{8}$	86	$\frac{1}{2}\,\frac{0}{43}$
27	$\frac{1}{3}\,\frac{0}{9}$	57	$\frac{1}{3}\,\frac{0}{19}$	87	$\frac{1}{3}\,\frac{0}{29}$

[727] Quam FRVA, quem S
[728] Cognoscere FVSA, om. R
[729] Similiter figurarum FVSA, figurarum similiter R
[730] compositiones FRSA, Compositos V,
[731] hoc SA, Hec FRV
[732] II^{abus} in F(b)
[733] Compositiones-scribuntur: in R questo titolo è posposto alla tabella

28	$\frac{1}{4}\frac{0}{7}$	58	$\frac{1}{2}\frac{0}{29}$	88	$\frac{1}{8}\frac{0}{11}$
30	$\frac{1}{3}\frac{0}{10}$	60	$\frac{1}{6}\frac{0}{10}$	90	$\frac{1}{9}\frac{0}{10}$
32	$\frac{1}{4}\frac{0}{8}$	62	$\frac{1}{2}\frac{0}{31}$	91	$\frac{1}{7}\frac{0}{13}$
33	$\frac{1}{3}\frac{0}{11}$	63	$\frac{1}{7}\frac{0}{9}$	92	$\frac{1}{4}\frac{0}{23}$
34	$\frac{1}{2}\frac{0}{17}$	64	$\frac{1}{8}\frac{0}{8}$	93	$\frac{1}{3}\frac{0}{31}$
35	$\frac{1}{5}\frac{0}{7}$	65	$\frac{1}{5}\frac{0}{13}$	94	$\frac{1}{2}\frac{0}{47}$
36	$\frac{1}{4}\frac{0}{9}$	66	$\frac{1}{6}\frac{0}{11}$	95	$\frac{1}{5}\frac{0}{19}$
38	$\frac{1}{2}\frac{0}{19}$	68	$\frac{1}{4}\frac{0}{17}$	96	$\frac{1}{2}\frac{0}{6}$
39	$\frac{1}{3}\frac{0}{13}$	69	$\frac{1}{3}\frac{0}{23}$	98	$\frac{1}{2}\frac{0}{7}\frac{0}{7}$
40	$\frac{1}{4}\frac{0}{10}$	70	$\frac{1}{7}\frac{0}{10}$	99	$\frac{1}{9}\frac{0}{11}$
42	$\frac{1}{6}\frac{0}{7}$	72	$\frac{1}{8}\frac{0}{9}$	100	$\frac{1}{10}\frac{0}{10}$

[R, f.26v; S, f.20r; A, f.10v] Regula universalis[734] de reperiendis compositionibus imparium numerorum.

(1) Cum autem regulas prescriptorum numerorum[735] in tabulis, ex frequenti usu, quis sciverit, et voluerit regulas, idest compositiones[736], cuiuslibet numeri aliorum numerorum[737] trium vel plurium[738] figurarum reperire, vel qui primus numerus, idest sine[739] regula[740] extiterit, cognoscere voluerit, describat numerum in tabula, et, descripto[741], provideat si numerus par fuerit[742] vel impar. (2) Nam si par fuerit ipsum compositum esse[743] cognoscat[744].

[734] Universalis FRVS, universal A
[735] Numerorum FRVS, om. A
[736] Compositiones FRVA, componentes numeros S
[737] Numerorum FVSA, om. R
[738] Plurium FVSA, plurimus R
[739] Sine RSA, secundum FV
[740] regula SA, Regulam FVR
[741] descripto FRS, Descripta VA,
[742] par fuerit FVSA, fuerit par R
[743] Compositum esse FRVS, esse (in interlinea) compositum A
[744] Cognoscat FRS, cognoscas V, om. A

Si impar, autem[745] compositus aut primus erit. Sunt enim numeri pares compositi aut[746] ex paribus et imparibus, aut ex paribus tantum. Quare regule ipsorum[747] primo investigande[748] sunt a paribus numeris, ut in suo demonstrabitur[749] loco. Inpares vero numeri componuntur ex imparibus tantum, unde componentes[750] ipsos per impares tantum investigatur[751] a quibus sumamus initium.

(3) Cum itaque figura primi gradus cuiuslibet imparis numeri 5 extiterit numerus, a 5 compositum esse cognoscat, hoc est quod per 5 integraliter dividetur. (4) Si autem alia figura impar in primo gradu extiterit que facit[752] totum numerum esse imparem, accipiat siquidem[753] pensam ipsius per novenarium: que si fuerit zephyrum, tunc $\frac{1}{9}$ et si 3 vel 6 pensa fuerit, tunc $\frac{1}{3}$ in sua erit compositione[754]. (5) Si autem pensa nulla istarum extiterit, dividat[755] ipsum per 7, et si aliquid inde superfuerit, dividat iterum numerum per 11, et si aliquid superfuerit, dividat[756] ipsum per 13 et semper eat dividendo per primos numeros ordinate, secundum quod scribuntur[757] in tabula superius descripta donec aliquem primum[758] numerum invenerit per quem propositum numerum absque aliqua superatione possit dividere vel donec ad eiusdem venerit radicem. (6) Si per nullum ipsorum dividi potuerit, tunc ipsum primum esse iudicabit[759]. (7) Si autem per aliquem predictorum primorum numerorum[760] ipsum dividere

745 Autem FVS, aut A, om. R
746 Aut FVSA, om. R
747 Ipsorum FVSR, ipsarum A
748 Investigande FRSA, investiganda V
749 Demonstrabitur FRSA, demostrabitur V
750 Componentes FVSA, etiam ponentes R
751 Investigatur F, investigantur AVRS
752 Facit FVSA, faciet R
753 Probabilmente anche qui bisogna emendare in *si quem*
754 Erit compositione FVAS, compositione erit R
755 Dividat: nel codice R dopo dividat c'è una parola che non riesco a decifrare, nel codice A prima di dividat c'è una m con un segno orizzontale sopra
756 dividat VS, Dividet FA
757 Scribuntur FV, se habent A, ... habent S (c'è una parolina di una sillaba che non decifro prima di habent)
758 Primum FVA, om. S
759 iudicabit FSA, Videbit V
760 Primorum numerum FSA, numerorum primorum V

absque superatione potuerit, quod ex divisione provenerit[761] dividat iterum[762] per ipsum, et numerus qui ex divisione extiterit, iterum per eumdem primum numerum dividat, hoc est quod ab eodem incipiet[763] querere componentes ipsius per ordinem per reliquos primos numeros usque ad ipsius radicem, si ipse non habuerit compositionem: et sic semper faciendo egrediatur, donec omnes[764] ipsum habuit[765] componentes. (8) Quibus perfecte habitis, ipsas[766] sub quadam virgula minores per[767] maiores summo studio studeat collocare. Et sic habebit[768] regulam, idest compositionem cuiuslibet imparis numeri.

<Exempla>

<De regula de 805 reperienda>

(1) Verbi gratia, sit numerus 805, cuius regula queratur: cum prima ipsius figura sit 5, nimirum $\frac{1}{5}$ in sua erit compositione. Quare dividat eum numerum per 5, exient 161, quorum pensa accepta, que est 8, ostendit ipsa 161 nec per 3, nec per 9 posse dividi integraliter. (2) Unde dividat[769] eum per 7, exient 23, qui numerus est sine regula: aptet repertos componentes, scilicet 5[770] et 7 et[771] 23 sub quadam virgula, et habebit[772] $\frac{1}{5}\frac{0}{7}\frac{0}{2}\frac{}{3}$ pro 805 compositione, hoc est quintam[773] unius septime[774] viginti[775] tertie partis[776] que est una

[761] Ex divisione provenerit FVA, om. S
[762] Iterum FVA, numerum S
[763] Incipiet FS, incipiat VA
[764] Omnes FSA, eos V
[765] Habuit FSA, habuitur V
[766] Ipsas FSA, ipsos V
[767] Per FSV, post A
[768] Habebit FSV, habit A
[769] Dividat FSV, dividet A
[770] 5 VS, 5 et 5 F
[771] Et FS, om. V
[772] Habebit FSV, habit A
[773] Quintam FV, quinta S
[774] Unius septime FVS, septime unius A
[775] Viginti FVS, vigesime A
[776] Unius-partis V, septime unius XXe tertie partis FAS(vigintesime)

octingentesima quinta, quare, ducta multiplicatione[777] de quinque in septem, scilicet 35[778] in XX[ti] tria[779], surgit in 805[780].

<De regula de 957 reperienda>

(1) Item si regulam de 957 invenire quesierit, dividat ipsa per 3 ideo quia 3 est pensa ipsius numeri, exibunt 319, que per 3 iterum dividenda non sunt, cum pensa ipsorum sit 4, et si diviserit eam[781] per 7, superabunt 4. Per 11 itaque dividuntur et est eorum undecima[782] pars 29, qui numerus primus est. Collocata, itaque, reperta regula sub virgula pro componentibus[783] 957 habebitur $\frac{1}{3}\frac{0}{11}\frac{0}{29}$, ut hic ostenditur.

De regula de 951 reperienda[784].

(1) Verum si regulam de 951 reperire voluerit, dividat ipsa per 3, ideo quia pensa ipsorum est 6, exibunt 317, quibus aliam regulam invenire est impossibile, cum integraliter non possit dividi per 7, nec per 11, nec per 13, nec per 17. Et pro ipsorum regula amplius querendum non est, quare si[785] divisa fuerit per 19 exiret[786] minor[787] numerus quam 19 ex divisione: ergo regula de 951 est $\frac{1\,0}{3\,317}$.

<De regula de 873 reperienda>

[777] Multiplicatione FSV, multiplicanes A
[778] 35 VSA, XXXII F
[779] Tria FSA, terti V
[780] In 805 FSA, om. V
[781] Eam F, ea VSA
[782] Undecima FVS, decima A
[783] componentibus VSA, Compositionibus F
[784] De regula-reperienda FSA, *om.* V
[785] Si FSV, *om.* A
[786] Exiret FSA, exibit V
[787] Minor VSA, primo F

(1) Item si eam de 873 habere voluerit, cum pensa ipsius numeri sit 0, dividat eum per 9, exibunt 97, qui numerus 97 superius in tabula primus esse mostrantur. Qua regula inventa, si sub virgula fuerit collocata, erit $\frac{1}{9}\ \frac{1}{97}$[788][789].

Regula de 1469 inventio[790].

[S, f.20v] (1) Nam si regulam de 1469 habere voluerit, accepta, ipsius numeri pensa, que est 2, demostrant ipsum carere regula ternarii et novenarii. Nam si per 7 eum diviserit[791] superant 6, si per 11 remanent similiter 6, per 13 vero si eum diviserit, exibunt 113, pro quibus non oportet amplius querere per aliquem sequentium primorum numerorum vel per eadem 13; cum sint[792] plus ipsorum radice, unde ex primis numeris 113[793] fore cognoscuntur. Est ergo regula de 1469, ut hic ostenditur $\frac{1}{13}, \frac{0}{113}$[794].

De regula de 2543 reperienda[795].

[V, f.16v] (1) Item si eam de 2543 habere voluerit, accepta ipsius numeri pensa, que est 5, demonstrat[796] ipsum nec 3 nec 9 in sua regula posse habere. Nam eo diviso[797] per septenarium remanet 2. Et per 11, remanent 2, et per 13, superant 8. Et sic inveniet, quia nec per[798] 17, vel per 19, aut per 23 seu per 29, vel per 31, nec per 37 aut per 41, nec etiam per 47 vel per 53

---

788 $\frac{1}{97}$ V, de $\frac{1}{97}$ FSA
789 $\frac{1}{97}$ FSA, $\frac{1}{97}$ De 873 V,
790 Regula-inventio FSA, om. V
791 Diviserit FS, divisit VA
792 Sint VS, sit F
793 113 VS, om. F
794 $\frac{0}{113}$ VSA, $\frac{0}{13}$ F
795 De regula-reperienda FSA, *om*. V
796 Demonstrat FS, demostrat V, demonstrant A
797 eo diviso VSA, Ea divisa F
798 Per FSA, om. V

potest dividi et ultra quam per 53 non est querendum quare 53 sunt plus radice[799] ipsius. (2) Et si possibile esset 2543 in sua compositione aliquem maiorem primum numerum quem 53 habere posse, ergo ipse maior numerus in quemlibet alium multiplicatur, faceret eundem 2543 - quem[800] oporteret esse minus de 53 - quod est impossibile, ideo quia usque in 53 ipsius regulam querendo, eum non invenimus: ergo est sine regula.

<De regula de 624481 reperienda>

(1) Item si ea de[801] 624481 reperire voluerit, ipsum numerum nec 3, nec 9, nec 7 habere, dictis dispositionibus, posse[802] cognoscet: per 11 vero dividitur, eius[803] pars, videlicet undecima, est 56771, que iterum per 11 dividat, scilicet ut sciat si iterum $\frac{1}{11}$ habuerit. (2) Nam per eos numeros[804] qui sunt minores de 11, scilicet per 9 et per 7 et per 3, non opportet ut dividantur: ideo quia in 624481 reperti non fuerunt, nec etiam in isto, scilicet in 56771, cum sit de ipsius compositione aliquo modo[805] poterit[806] reperiri. Ex qua vero divisione, scilicet per 11, exibunt 5161, quibus iterum per 11 divisis, remanent 2. Quare ipsa $\frac{1}{11}$ iterum habere est impossibile. (3) Post hec videndum est si habeant $\frac{1}{13}$, scilicet dividat ea per 13, ex qua divisione exeunt 397, quibus nec $\frac{1}{13}$, nec $\frac{1}{17}$[807], aut $\frac{1}{19}$[808] reperiri poterint. Unde ipsa 397 esse asam cognoscimus, quare inter 19 et ipsius radicem non est aliquis primus numerus,

---

[799] Plus radice FS, plus de radice VA
[800] Quem VSA, quam F
[801] Ea de S, eadem FV, eam de A
[802] Posse VSA, esse F
[803] Eius FV, cuius SA
[804] Numeros VSA, numeri F
[805] modo FSA, modo non V
[806] Poterit FSA, potuerit V
[807] $\frac{1}{17}$ FVS, 17 A
[808] $\frac{1}{19}$ FV, 19 SA

idest sine regula, nec ultra ipsius radicem, ut prediximus, erit querendum. Est enim compositio, idest regula de 624481, ut hic ostenditur $\frac{1}{11}\frac{0}{11}\frac{0}{13}\frac{0}{397}$.

Probatio suprascripte regule[809]

(1) Nam si inventam regulam per pensam de 7 probare voluerit, accipiat pensam de 624481 [A, f.11r]per 7 que est 5, et servet eam ex parte; et sumat pensam de 11, primo positis sub virgula, que est 4. Et multiplicet eam per 4, scilicet per pensam de aliis 11, erunt 16, que dividat per 7, remanent 2, que multiplicet per 6, scilicet per pensam de 13, erunt 12, de quibus demat 7, remanent 5, que multiplicet per 5, scilicet per pensam de 397, erunt 25, que dividat per 7, remanent 4, ut pro pensa servata sunt.

De regula parium numerorum reperiendis modus universalis

(1) Si vero ex aliquo numero pari quis regulam invenire voluerit, accipiat similiter pensam eius per 9, que si fuerit 0, habebit $\frac{1}{9}$. Et si fuerit 3 vel 6 habebit $\frac{1}{6}$ in sua compositione. (2) Si autem pensa nulla istarum extiterit, provideat, dividendo per 8 numerum duarum figurarum que sunt in primo et secundo gradu, quale fuerit superfluum: quod si fuerit[810] 0[811], et figura tertii gradus par extiterit, vel 2 vel 4 vel 6 aut 8, vel 0, totum numerum cuiuslibet gradus per 8 dividi posse cognoscat. Si autem ipsa tertia figura impar extiterit, ut 1 vel 3 vel 5 vel 7 aut 9, numerus ipse $\frac{1}{4}$ in sua compositione recipiet[812]. Si vero illud superfluum 4 extiterit, et figura tertii gradus fuerit impar, totus numerus per 8 similiter

809 Probatio-regule FS, probatio-regulam A, om. V
810 Fuerit FSV, fiunt A
811 0 FSA, 6 V
812 Recipiet FA, reperiet V

dividetur. Et si par extiterit, tantum $\frac{1}{4}$ in sua habebit[813] compositione. Si autem illud superfluum 2, vel 6 extiterit, numerus tantum per 2, ex paribus numeris, dividetur[814]. (3) Et secundum hoc accipiat pares compositiones de paribus [S, 21r] numeris, donec habeat regulam ipsius, vel ad aliquem imparem numerum occurrat, de quo impari, secundum suprascriptum imparium ordinem regulam, studeat invenire. (4) Nam si in primo[815] gradu aliquorum parium numerorum zephyrum extiterit, dematur ipsum, et pro ipso habeatur $\frac{1}{10}$ in compositione illius numeri. Et si aliud 0 in capite numeri remanserit, dematur iterum ipsum[816] de numero; et iterum $\frac{1}{10}$ in eiusdem numeri compositione habeatur. Et sic semper, donec 0 in capite numerorum extiterit, debet intelligere. (5) Et ut que dicta sunt de parium numerorum regularum inventione lucidius deprehendantur, ea cum numerorum demostrationibus ostendantur.

De regula de 126 reperienda.

(1) Et[817] si queratur regula de 126, quorum pensa cum sit 0, ostendit nonam eorum partem integram esse: quare 126 dividat per 9, exibunt 14, quorum regula superius in tabula regularum compositorum numerorum duarum figurarum secundi gradus $\frac{10}{27}$ esse utique demonstratur: unde pro regula de 126 habetur $\frac{100}{279}$, ut hic ostenditur.

<De regula de 156 reperienda>

[813] Habebit FVA, habebitur S
[814] Dividetur VSA, dividitur F
[815] primo VFA, Ipso F
[816] Iterum ipsum FSV, ipsum iterum A
[817] ut FS, Et VA

(1) Item si queratur regula de 156, ipsorum pensa, que est 3, demostrat quod per 6 possunt dividi, quibus in 6 divisis, exeunt 26, quorum regula est $\frac{1}{2}\frac{0}{13}$. Et sic habebitur pro regula de 156, ut hic notatur $\frac{1}{2}\frac{0}{6}\frac{0}{13}$.

<De regula de 2112 reperienda>

(1) Si vero ea[818] de 2112 reperire voluerit, cum ipsarum pensa, [V, f.17r] que est 6, ostendat ipsa per 6 posse dividi, dividatur ergo 2112 per 6, exibunt 352, de quibus accepta pensa, que est 1, ostendit quod nec per 6 nec per 9 possunt dividi, unde dividenda sunt 52 per 8, scilicet numerus duarum figurarum, de qua divisione remanet[819] 4. (2) Ex qua remansione[820] et ex eo quod figura tertii[821] gradus numeri, scilicet 3, impar[822] existit, ostenditur 352 per 8 posse dividi: dividanturque[823] per 8, exibunt 44, cuius regula est $\frac{1}{4}\frac{0}{11}$[824]. (3) Unde habentur pro regula de 2112, ut hic ostenditur $\frac{1}{4}\frac{0}{6}\frac{0}{8}\frac{0}{11}$. Nam cum $\frac{1}{4}\frac{0}{6}$ que in eadem[825] virgula continetur sint[826] regula de 24[827], que laudabiliorem regulam habere in tabula compositionum numerorum reperiuntur, scilicet $\frac{1}{3}\frac{0}{8}$, ideo quia maior figura est in ea quam in $\frac{1}{4}\frac{0}{6}$, quia maior est 8 quam 6, quare[828] semper sumende sunt regule numerorum extreme, que regule sunt composite ex numeris qui sunt a binario usque in 10, ut in

[818] Ea FRV, eam A
[819] Remanet FVA, remanent S
[820] Remansione FVA, divisione S
[821] Tertii FA, tertiarii è forse scritto in V ma non leggo bene
[822] Impar SA, in prima FV
[823] Dividanturque FSA, dividantur quoque V
[824] $\frac{0}{11}$ VSA, $\frac{1}{11}$ F
[825] Eadem FVS, eode A
[826] Sint FSA, sunt V
[827] 24 FSV, 74 A
[828] Quare FVS, quia A

sequentibus demonstrabitur. Unde coaptanda[829] est regula inventa, scilicet $\frac{1}{4}\frac{0}{6}\frac{0}{8}\frac{0}{11}$ in $\frac{1}{3}\frac{0}{8}\frac{0}{8}\frac{0}{11}$.

De regula de 4664 reperienda[830].

(1) Verum si regulam[831] de 4664[832] reperire voluerit, ipsorum pensa, que est 2, nec $\frac{1}{6}$ nec[833] $\frac{1}{9}$ habere posse ostendit. Et quia ex numero duarum figurarum in capite existentium, scilicet 64 in 8 diviso[834], remanet[835] 0 et figura que est in tertio gradu, scilicet 6, est par, ideo 4664 habere $\frac{1}{8}$ cognoscet. (2) Quare si ea per 8 diviserit[836], 583 nimirum ex divisione egredietur, quorum regula, si per doctrinam supradictam imparium numerorum quesierit $\frac{1}{11}\frac{0}{53}$, ipsam esse reperiet, unde[837] pro regula de 4664 habetur $\frac{1}{8}\frac{0}{11}\frac{9}{53}$.

<De regula de 13652 reperienda>

(1) Nam si eam de[838] 13652 reperire voluerit, pensa[839] ipsorum, que est 8, ea $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{9}$ carere demonstrat[840]. (2) Nam si numerum duarum[841] figurarum in eorum[842] capite

---

[829] coaptanda V, Coattanda FA, coactanda S
[830] De regula-reperienda SF (ma F ha 4644), de regula de 4664 A, om. V
[831] Regulam VSA, regula F
[832] 4664 VSA, 4644 F
[833] Nec FVS, om. A
[834] Diviso FSA, divisio V
[835] Remanet VSA, remanent F
[836] Diviserit FS, divisit VA
[837] Unde FSV, ut A
[838] eam de SA, Eamdem FV
[839] pensa FS, Pensam VA
[840] Demonstrat FSV, demostrant A
[841] Duarum FS, om. VA
[842] Eorum FSV, earum A

existentium per 8 diviserit[843], 4 remanebunt[844]. Unde cum figura tertii gradus, idest 6, par existit, $\frac{1}{4}$ in ipsorum regula indicant esse: quare si[845] 13652 per 4 diviserit[846], 3413 innascitur; que cum[847] regula careant, habetur pro regula de 13652, ut hic denotatur, $\frac{1}{4}\frac{0}{3413}$.

De regula de 15560 reperienda[848].

(1) Itaque si ipsam de 15560 reperire voluerit, cum sit zephyrum in primo gradu, dematur ipsum, et pro ipso habeatur $\frac{1}{10}$ in[849] regula prescripti numeri. (2) Deinceps studeat reperire regulam remanentis numeri, scilicet eam de 1556, quorum pensa que est 8, ostendit ipsa carere $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{9}$. Et quia ex numero duarum figurarum ipsorum capitis, idest 56 in 8 diviso[850], remanet 0, et quia figura tertii gradus, idest 5, impar existit, nullam regulam de paribus numeris posse haberi maiorem quam 4 ostenditur[851]. (3) Denique 1556 per 4 divisis, exeunt 389, que regula carere predictis ostensionibus reperiuntur. [S, f.21v] (4) Unde habetur[852] pro regula de 15560, ut hic denotatur[853], $\frac{1}{4}\frac{0}{10}\frac{0}{389}$.

<De regula de 32600 reperienda>

[843] Diviserit FSV, divisit A
[844] Remanebunt FS, remanebit VA
[845] Si VSA, om.F
[846] Diviserit FS, divisit VA
[847] Que cum FSV, quecumque A
[848] De regula-reperienda FS, om. V
[849] In FSA, om.V
[850] Diviso FSA, divisio V
[851] Ostenditur FSA, ostendatur V
[852] Habetur FVAS$_2$, habeatur S$_1$
[853] Denotatur FS, ostenditur VA

(1) Item si regulam de 32600 reperire voluerit, cum in[854] ipsorum primo gradu sit 0, debet in ipsorum regula[855], pro eodem zephyro, $\frac{1}{10}$ habere. Et ipso 0 de numero dempto, remanet 3260, in quorum primo gradu similiter est 0, pro quo habendum est iterum $\frac{1}{10}$. (2) Et dempto ipso de numero, remanent 326, quorum pensa, que est 2, negat ipsa[856] $\frac{1}{6}$ vel $\frac{1}{9}$ in suam habere posse compositionem. Nam 26, que sunt numerus[857] duarum figurarum capitis de 326, si per 8[858] dividatur, remanent 2: quare 326 per aliquem parem numerum, preterquam[859] per binarium, non posse dividi cognoscimus. (3) Unde, ipsis 326 divisis per 2 exeunt 163, que cum careant regula pro ipsa de 32600[860], habetur[861] $\frac{1}{2}\frac{0}{10}\frac{0}{10}\frac{0}{163}$.

<De regula de 2546000 reperienda>

(1) Et si eam de 7546000[862] reperire voluerit, demptis de ipso numero tribus zephyris, et pro ipsis habita $\frac{1}{10}\frac{0}{10}\frac{0}{10}$, remanet 7546. (2) Quorum pensa que est 4 negat ipsa posse habere $\frac{1}{6}$ vel $\frac{1}{9}$ in sua compositione. Nam si 46, qui sunt in capite de 7546, per 8 diviserit[863], remanent 6, quare nullum alium parem numerum, preter 2, posse[864] habere cognoscetur. (3) Que scilicet 7546, si per 2 diviserit[865], exibunt[866] 3773, quorum regula, si secundum

[854] In FSV, om. A
[855] Regula VSA, regulam F
[856] Ipsa FS, ipsum V, ipso A
[857] Numerus FS, pro numerus VA
[858] 8 FS, 4 V
[859] Preterquam FSV, preter quam A
[860] 32600 FVA, 3260 S
[861] Habetur FVA, habebitur S
[862] 7546000 FSA, 754600 V
[863] Diviserit FSV, divisit A
[864] Posse VSA, post se F
[865] Diviserit FS, divisit VA
[866] Exibunt FSV, exibit A

imparium[867] numerorum doctrinam reperire studuerit, ipsam $\frac{1}{7}\frac{0}{7}\frac{0}{7}\frac{0}{11}$ fore reperiet. (4) Quam si cum reperta superius regula, scilicet cum $\frac{1}{2}\frac{0}{10}\frac{0}{10}\frac{0}{10}$ optime in virgula coaptaverit pro regula de 7546000, habebitur $\frac{1}{2}\frac{0}{7}\frac{0}{7}\frac{0}{7}\frac{0}{10}\frac{0}{10}\frac{0}{10}\frac{0}{11}$ [868].

Divisio de 749 per 75[869].

[A, 11v] (1) Nota siquidem regularum numerorum inventione et[870] voluerit quis dividere 749 per 75, reperta regula de 75, que est $\frac{1}{3}\frac{0}{5}\frac{0}{5}$, dividat 749 per 3, exibunt 249, et remanent 2. (2) Que 2 ponat super 3 de virgula in parte servata, et dividat 249 per 5, per ea scilicet que antecedunt 3 in virgula, exeunt 49 et remanent 4. Que 4 ponat super[871] eadem 5, et 49 dividat iterum per 5, per ea que sunt in fine virgule, exeunt 9 et remanent 4. Que 4 ponat super ipsa 5, et 9 ponat ante ipsam virgulam. (3) Et sic habebit ex quesita divisione, ut hic ostenditur, $\frac{244}{355}$ 9[872].

Divisio de 67898 per 1760.

(1) Verum si 67898 per 1760[873] dividere voluerit, reperta regula de 1760, que est $\frac{1}{2}\frac{0}{8}\frac{0}{10}\frac{0}{11}$, dividat 67898 per 2, exibunt 33949, et remanet[874] 0. Quod 0 ponat super 2, et

---

[867] Imparium VSA, parium F

[868] $\frac{1}{2}\frac{0}{7}\frac{0}{7}\frac{0}{7}\frac{0}{10}\frac{0}{10}\frac{0}{10}\frac{0}{11}$ VSA, $\frac{1}{2}\frac{0}{7}\frac{0}{7}\frac{0}{10}\frac{0}{10}\frac{0}{10}\frac{0}{11}$ F

[869] Divisio - 75 FSA, om. V

[870] Et VSA, 5 F

[871] Super FVA, super 5 S

[872] $\frac{244}{355}$ 9VSA, $\frac{244}{3559}$ F

[873] 1760 FSV, 460 A

[874] Remanet FVA, remanent S

dividat 33949[875] per 8, exibunt 4243, et remanent[876] 5, que 5 ponat super 8 de virgula, et dividat 4243 per 10, exibunt 424 et remanet 3, hoc est ut[877] dematur figura primi gradus de 4243. (2) Que 424 dividat per 11, exibunt 38 et[878] remanent 6, que 6 ponat super 11 de virgula et 38 ponat ante virgulam. Et sic habebit pro quesita divisione $\frac{0}{2}\frac{5}{8}\frac{2}{10}\frac{6}{11}38$.

Probatio suprascripte divisionis[879].

(1) Quam divisionem, si per pensam de 13 probare voluerit, dividat prescripta 67898 per 13, remanent 12, que habeantur pro pensa. (2) Post hec, dividat 38 ante virgam[880] posita per 13, remanent 12, que multiplicet per 11 de virgula, et de super addat 6, que sunt super 11, erunt 138 que dividat per 13, remanent 8[881]. (3) Que multiplicet per 10 de virgula, et de super addat 3 que sunt super 10, erunt 83 que dividat per 13, remanent 5; que multiplicet per 8 de virgula, et de super addat 5 que sunt super[882] 8, erunt 45; que dividat per 13, remanent 6; que multiplicet per 2 de virgula[883], erunt 12, ut superius pro pensa servatum est. (4) Et cavendum est nequis aliquam divisionem per aliquam pensam alicuius numeri existentis sub virgula[884] divisionis nunquam probare consuescat, ideo quia leviter per eam posset[885] esse deceptus; (5) quare in hac divisione prohibetur per 11 probare: quia superfluo quod remaneret de 38, vel ex quolibet alio numero in 11, que sunt sub virgula multiplicato, et per 11 de pensa diviso, nil[886] superaret[887]: unde si ipsa 38 recta non essent, non possent per probationem de 11 cognosci. (6) Et sciat quia in divisionibus numerorum alia restat doctrina, scilicet cum numerus

[875] 33949 FVS, 3349 A
[876] Remanent VSA, remanet F
[877] Ut FVS, om. A
[878] Et FSA, om. V
[879] Probatio-divisionis FSA, om. V
[880] Virga FS, virgulam VA
[881] Que multiplicet-remanent 8 FSA, om. V
[882] Super VSA, per F
[883] Virgula FVS, virga A
[884] Virgula FSA, virga V
[885] Posset FSA, possit V
[886] Diviso nil FSA, divisioni V
[887] Superaret FSA, superet V

dividendus aliquam habet comunitatem cum divisore, scilicet quod dividendus numerus dividatur integraliter per aliquem numerum, vel numeros qui sint[888] ex regula divisoris, tunc primum dividatur numerus per numerum compositionis quam in virgule[889] [S, f.22r] divisoris ipse dividendus habuerit, sive maior in virgula sit, vel minor: ideo quia cum ipsum per ipsum diviserit, nihil ex divisione remanebit. (7) Et ut hec apertius intelligantur, ea cum numeris in sequentibus demonstrentur[890].

Divisio de 81540 per 8190[891].

(1) Ut[892] si 81540 per 8190 dividere voluerit, reperiatur divisoris regula, que est $\frac{1}{7}\frac{0}{9}\frac{0}{10}\frac{0}{13}$. (2) Et cum in regula de 81540 sit $\frac{1}{10}$, propter 0 quod est in primo gradu ipsorum, quamvis $\frac{1}{10}$ non[893] sit in capite virgule, tamen per 10[894] primitus 81540 sunt dividenda, hoc est quod dematur 0 de ipso numero, remanebunt 8154 que restant dividendam, extracto $\frac{1}{10}$ de virgula, per $\frac{1}{7}\frac{0}{9}\frac{0}{10}\frac{0}{13}$[895].

(3) Item 8154 per 9 dividitur[896], ideo[897] quia 0 est pensa ipsorum[898] per novenarium. Unde dividat ipsa per 9 de virga, exibunt 906[899], que restant[900] dividenda per $\frac{1}{7}\frac{0}{13}$. (4) Verum

[888] Sint FVA, sit S
[889] Virgule F, virgule regule V, virgula regule SA
[890] Demonstrentur FSA, demostratur V
[891] Divisio-8190 FS, om. VA
[892] ut VS, Et VA,
[893] Non FSA, vero V
[894] 10 F, $\frac{1}{10}$ VA
[895] $\frac{1}{7}\frac{0}{9}\frac{0}{10}\frac{0}{13}$ FVA, $\frac{1}{7}\frac{0}{9}\frac{0}{13}$ S
[896] Dividitur FSA, dividatur V
[897] Ideo FSA, om. V
[898] Ipsorum FSA, ipsarum V
[899] 906 FSV, 908 A
[900] Restant FA, restat VS

906[901] per 7 divisis, exeunt 129 et remanent 3: que 3 ponat super 7. Et 129[902] per 13 dividat, exeunt 9 et remanent 12. Que 12 ponat super 13, et exeuntia 9 ponat ante virgam[903], e habebit pro quesita divisione $\frac{3}{7}\frac{12}{13}9$.

<Probatio>

(1) Nam si prescripta divisione[904] probare voluerit, ponenda erunt[905] 10 et 9 que extracta fuerunt de virga sub eadem virga[906] post 7, et super ipsa ponenda sunt zephyra, ut in hac virgula[907] cernitur, $\frac{0}{10}\frac{0}{9}\frac{3}{7}\frac{12}{13}$: postea poterit ea probare secundum prescriptum probandi ordinem. (2) Vel aliter habeantur 906 pro numero diviso et $\frac{1}{7}\frac{0}{13}$ pro divisore, et secundum hec probare studeas per modum supradictum.

(3) Satis enim de divisionibus numerorum per compositos numeros dictum esse videretur, nisi in eorum compositionibus numerum trium figurarum vel plurium existerent. Sed ut[908] in hoc opusculo expleta doctrina dividendi contineatur, numeros dividere in eis qui sunt trium figurarum vel plurium, in sequentibus ostendantur.

Divisio numerorum per numeros asam tertii gradus[909].

(1) Cum autem quemlibet numerum cuiuslibet gradus per quemlibet numerum trium figurarum, hoc est tertii gradus, quis dividere voluerit, ponat similem gradum ipsius numeri trium figurarum[910] sub simili gradu dividendi numeri, et provideat si[911] numerus[912] trium

[901] 906 FVS, 908 A
[902] 129 FVS, 139 A
[903] Virgam FSV, virgulam A
[904] Divisione FSA, divisionem V
[905] Erunt FS, erit V
[906] Virga FSV, virgula A
[907] Virgula FS, virga VA
[908] Ut FVA, om. S
[909] Divisio-gradus FSA, om. V
[910] Trium figurarum FSA, om. V

figurarum ultimarum dividendi numeri maior divisore existerit[913]: si enim maior vel equalis fuerit, incipiendus erit ultimus gradus exeuntis numeri sub tertia figura ab ultima; et si minor, incipiendus erit sub antecedente, hoc est sub quarta ab ultima. (2) Et posita figura sub qualibet predictarum[914] quam talem esse convenit, quod multiplicata ipsa[915] in[916] numerum[917] divisorem, scilicet in eum, in quo numerus maior dividitur, faciant numerum trium figurarum, vel quattuor ultimarum, vel ita fere, ut non remaneat inde numerus divisoris vel ultra[918]. (3) Et tunc multiplicet eam [V, f.18r] per ultimam figuram divisoris numeri, et multiplicationem de numero ultime figure, si poteris, extrahat, et si non, eam extrahat de numero duarum figurarum ultimarum, et superfluum ponat super eundem gradum de quo superfuerit. (4) Et multiplicet iterum eandem positam figuram per antecedentem ultime divisoris numeri, scilicet per eam que est in ipsius secundo gradu, et venientem summam extrahat de suprascripto superfluo cum antecedente figura in maiori numero copulato. Et si superfluum fuerit, ponat primum gradum ipsius super eandem antecedentem figuram[919], et reliquos vero post ipsos delendo scilicet, vel dampnando aliud primum positum superfluum. (5) Et adhuc multiplicet eandem positam figuram per figuram primi gradus eiusdem divisoris numeri, et summam multiplicationis extrahat de copulatione secundi superflui cum antecedente figura maioris numeri; et primum gradum ipsius superflui ponat super ipsam antecedentem figuram[920], reliquos vero post ipsum, delendo scilicet vel dampnando alium secundum dictum superfluum. (6) Post hec studeat ponere aliam talem figuram sub alia antecedente figura maioris numeri, idest ante primam positam figuram, que multiplicata in prescriptum divisorem numerum, faciat copulationem tertii superflui, et antecedentis figure vel fere, cum

[911] Si FS, om. VA
[912] numerus FSA, Numeros V
[913] Existerit FSA, extiterint V
[914] Predictarum FSA, predictorum V
[915] Ipsa FSA, ipsam V
[916] In FSA, om. V
[917] Numerum FS, numerorum VA
[918] Faciant-vel ultra: questa frase viene posposta dopo Et tunc-numeri, frase che viene ripetuta di nuovo dopo vel ultra in V
[919] figuram FSA, Figurarum V
[920] Figuram FVA, figuram et S

[A, f.12r] qua vadat multiplicando per ordinem per figuras divisoris numeri, sicut [S, f. 22v] in prima posita figura[921] docetur, semper superflua per ordinem super ponendo. Et deinceps in reliquis figuris, usque ad finem procedendo, similiter studeat operari. (7) Si vero ex aliquo superfluorum supradictorum et antecedente figura procreabitur numerus minor divisore, tunc ponat zephyrum sub ipsa antecedente figura; et copulabit eidem antecedenti figure et superfluo aliam antecedentem[922] figuram, sub qua ante predictum zephyrum erit[923] utique ponenda figura. (8) Et si iterum numerus[924] copulationis superflui, et duarum antecedentium figurarum, minor divisore fuerit, erit iterum ante predictum zephyrum aliud 0[925] ponendum, et copulabis dicto superfluo et dictis duabus figuris aliam eis antecedentem figuram sub qua ponat talem figuram, que multiplicata in divisori numero faciat fere numerum copulationis superflui et trium ei antecedentium figurarum; et habebis quorumlibet similium divisiones. Et ut que dicta sunt liquidius[926] exponantur, ea cum numeris ostendantur.

<Exempla>

<Divisio de 1349 per 257>

(1) Ut si voluerit dividere 1349 per 257, describat 257 sub 349 de 1349. Et quia numerus trium figurarum ultimarum dividendi numeri, idest 134, minor est de 257, scilicet de divisore numero, ideo sub quarta figura ipsius dividendi numeri, que primum occupat gradum, idest[927] sub 9, figura exeuntis numeri erit ponenda. (2) Et[928] talis que multiplicata in 257, faciat fere 1349 que erit 5. Quibus positis sub 9, multiplicet ipsam per ultimam figuram divisoris numeri, scilicet per 2, erunt 10, que extrahat de 13, scilicet de numero duarum ultimarum figurarum numeri dividendi, cum non possint ea de numero ultime figure extrahere. (3) Remanent 3, que

[921] Figura AVS, om. F
[922] Aliam antecedentem FVSA$_2$, antecedentem alia A$_1$
[923] Erit FVA, eritque S
[924] Numerus FSA, non numerus V
[925] 0 FVA, om. S
[926] Liquidius FSV, lucidius A
[927] Idest FS, scilicet V
[928] Et FS, om. VA

copulanda sunt cum antecedentibus 4, faciunt 34 de quibus[929] extrahat multiplicationem positorum 5 in 5 divisoris numeri, remanent 9, que ponat super 4 et multiplicet eadem posita 5 per 7, erunt 35, que extrahat de 99, scilicet de copulatione supradictorum 9 cum 9[930] primi gradus dividendi numeri, remanent 64; que ponat super virgam[931] de 257 seorsum descriptam. Et exeuntia 5 ponat ante ipsam[932] virgam. (4) Et habebit pro quesita divisione $\frac{64}{257}5$.

Divisio de 30749 per 307[933].

(1) Verum si 30749 per 307 dividere voluerit, describat 307 sub 749. Et quia 307, qui est numerus trium figurarum ultimarum dividendi numeri, equalis est divisori numero, ponendum est 1 sub primo gradu numeri predictarum trium figurarum, scilicet sub 7 que sunt in tertio gradu dividendi numeri. (2) Et multiplicet ipsum 1 per 3 divisoris, faciunt 3, pro quibus reliquantur[934] 3 que sunt in ultimo gradu dividendi, et multiplicet iterum eundem[935] 1 per 0 divisoris, faciet 0, pro quo relinquat ipsum 0 quod est in dividendi numero. Et iterum multiplicet eundem 1 per 7, faciunt 7, pro quibus relinquat ipsa 7 que sunt in dividendi numero. (3) Nam tertius gradus quemcumque gradum multiplicat, tertium gradum facit ab ipso que multiplicat: ergo cum multiplicat tertium quintum gradum facit[936]. Et cum multiplicat secundum, facit quartum; et cum multiplicat primum, facit tertium. (4) Et quia 4, que antecedunt 7 in dividendi numero, minus sunt de 307, scilicet divisore, ponendum est 0 sub ipsis 4. Et iterum quia 49 eiusdem dividendi numeri minus sunt eisdem 307, ponendum erit 0 sub 9, scilicet in primo gradu exeuntis numeri, et predicta 49 ponat super virgulam[937] de

[929] de quibus VSA, de quibus extrahere, remanent 3 que copulanda sunt cum antecedentibus 4, faciunt 34 de quibus F,
[930] supradictarum 9 cum 9 VSA, 9 F
[931] virgam VSA, virgam supradictarum 9 cum F,
[932] Ipsam FVA, om. S
[933] Divisio-307 FSA, om. V
[934] Relinquatur FV, relinquat SA
[935] Iterum eundem FVS, eundem iterum A
[936] Ab ipso-facit VS, om. F
[937] Virgulam FVS, virgam A

307 ex parte [V, f.18v] servata, et exeuntia 100 ponat ante virgulam. (5) Et habebis[938] $\frac{49}{307}$ 100 pro quesite divisioni.

<Diviso de 574930 per 563>

(1) Item si proposuerit dividere 574930 per 563, positis 563 sub 930, ponat prescriptis dispositionibus 1 sub 4, scilicet in quarto gradu, et multiplicet ipsum per 5 divisoris numeri[939], fiunt 5, pro quibus relinquat 5 que sunt in ultimo gradu dividendi numeri. Quia cum quartus gradus multiplicat tertium, sextum gradum facit[940], hoc est quartum ab ipso quem multiplicat. (2) Et multiplicet eundem[941] 1 per 6 divisoris, fiunt 6, que extrahat de 7, remanet 1, quod ponat super eadem 7: nam cum quartus gradus multiplicat secundum, quintum gradum facit. (3) Et iterum multiplicet 1 per 3 divisoris, fient 3 que extrahat [S, f.23r] de 4, hoc est de 14, propter 1 quod remansit super 7. Nam cum quartus gradus multiplicat primum, quartum gradum facit vel terminante in ipso. Et ideo predicta 3 sunt extrahenda de 4, que sunt in quarto gradu, hoc est de 14 que terminant in ipso, remanebunt 11, scilicet 1 super quintum gradum et aliud super quartum. (4) Cum quibus 11 copulet 9 fiunt 119. Que cum[942] sint minus de 563, scilicet divisore, ponendum est 0 sub ipsis 9, et copulet 3 que sunt in secundo gradu dividendi numeri cum 119, fient 1193. (5) Quare ponat arbitrio in secundo gradu[943] exeuntis, talem figuram que multiplicata per 563 faciat fere 1193. Que figura erit 2, que multiplicet per 5 divisoris, fiunt 10, que extrahat de 11 prescriptis, remanet[944] 1; pro quo relinquat ipsum 1 quod fuerat positum super 4 et deleat aliud 1 quod est super 7, et[945] multiplicet 2 per 6 divisoris, fiunt 12 que extrahat de 19, remanent 7 que ponat super 9 et deleat 1 quod est super

[938] Habebis FV, habebit SA
[939] Numeri FSA, numeris V
[940] Sextum gradum facit FSA, gradum facit sextum V
[941] Eundem FSA, om. V
[942] Que cum FVA, quecumque S
[943] Arbitrio in secundo gradu VSA, in secundo gradu arbitrio F
[944] Remanet FSV, et remanet A
[945] Et FVS, om. A

4. (6) Et multiplicet 2 per 3 divisoris fiunt 6: que extrahat de 73, remanent 67. Deleat 7 que erant super 9 et ponat 67 super 93, ut in descriptione habetur. Et copulet ipsa 67 cum 0, fiunt 670, pro quibus, dictis dispositis, ponat 1 sub 0, et multiplicet ipsum per 5 divisoris, fiunt 5: que extrahat de 6, remanet 1. Deleat ipsa 6 et ponat ibidem 1, et multiplicet 1 per 6, fiunt 6, que extrahat de 7 remanet 1: deleat 7 et ponat ibi ipsum 1 et multiplicet 1 per 3 divisoris, fiunt 3, que extrahat de 110, remanent 107 que ponat super virgulam de 563 et ante ipsam ponat exeuntia 1021, ut in hac descriptione describitur.

Probatio suprascripte divisionis[946].

(1) Quam divisionem si per pensam de 11 probare voluerit, dividat[947] 574930 per 11, remanent 4: que serves[948] pro pensa. Et dividat exeuntia 1021 similiter per 11, remanent 9 que multiplicet per 2[949] que remanent ex divisis 563 per 11, erunt 18. (2) Quibus addat pensam numeri remanentis super virgam, scilicet de 107, que pensa est 8, quia divisis 107 per 11, remanent 8; et sic habebit 26. Quibus divisis per 11, remanent 4, ut pro pensa opportet remanere.

(2) Ad habendum itaque arbitrium in ponendis figuris in exeuntibus numeris, cum numeri trium figurarum vel plurium dividuntur per numeros trium figurarum, tale tradimus magisterium, ut consideret si divisor numerus prope fuerit alicui numero centenario[950] - sive plus, sive minus sit eo - et aspiciat contra quot figuras sit ponenda figura in numero exeunte, et ex illis figuris relinquat duas que sunt in secundo et in primo gradu earum. (3) Residuum vero numerum[951] dividat per numerum centenariorum, cui divisor proprior extiterit[952] et

[946] Probatio- divisionis SA(ma A lo ha in margine), probatio suprascripte F, om. V
[947] Dividat FS, om. VA
[948] Serves FA, servent V, servet S
[949] 2 FVS, 7 A
[950] Numero centenario FVA, centenario numero S
[951] Numerum A, numeruum S, Numeros FV,
[952] Extiterit FSA, existit V

quot[953] ex divisione pervenerit, erit ponenda figura, vel parum plus si divisor erit minus numero predicto centenariorum, vel parum minus, si divisor fuerit plus eodem numero centenariorum.

<Exempla>

<Divisione de 1247 per 421>

(1) Verbi gratia, volumus dividere 1247 per 421, relinquemus[954] 47[955] et dividemus 12 que remanent per 4, cum 421 sint proprior 400 quam alio centenario numero, venient 3, sed dandum erit minus, quia 421 sunt plus de 400, et si esset[956] minus ut 379, dandum esset plus. Et sic[957] intelligas[958] in reliquis. (2) Et si divisor numerus esset proprior alicui centenario, et dimidio ut 150, vel ducentis quinquaginta, et ceteris similibus, tunc, relictis duabus figuris predictis, reliquum numerum duplicet, et duplicatam summam per duplum centenariorum et dimidium dividat et habebit arbitrium ponende figure.

<Divisio de 2137 per 563>

(1) Verbi gratia, volumus dividere 2137 per 563. Dividimus[959] 21 per $\frac{1}{2}5$[960], hoc est duplum de 21, scilicet 42, per duplum de $\frac{1}{2}5$[961], hoc est per 11, exibunt 3 et plus, et hoc modo accipiatur arbitrium in similibus.

---

[953] Quot FSV, om. A
[954] relinquemus VS, Relinquamus FA,
[955] 47 S, 4 FA, 24 V
[956] Esset FSA, essent V
[957] Sic FVA, sit S
[958] Intelligas FV, intelligat SA
[959] Dividimus FV, dividemus SA
[960] $\frac{1}{2}$ 5 FS, 5 $\frac{1}{2}$ V, $\frac{1}{25}$ A
[961] $\frac{1}{2}$ 5 FS, 5 $\frac{1}{2}$ V, $\frac{1}{25}$ A

<Divisio de 5950000 per 743>

(1) Item si 5950000 per 743 dividere voluerit, descriptis numeris, ponat 8, supradictis dispositis, sub 0 quarti gradus. (2) Scilicet, quia relictis 50 de 5950, remanent 59, quorum duplum si dividatur per duplum de $\frac{1}{2}7$[962], propter divisorem qui est prope 750, fere 8 veniet ex di[/S, f.23v]visione. (3) Et multiplicet 8 [V, f. 19r] per 7 divisoris, erunt 56, que extrahat de 59, remanent 3 que ponat super 9. Et 8 per 4, fiunt 32, que extrahat de 35, remanent 3 que ponat super 5 et dampnet ipsa 3[963] que fuerunt posita super 9. Et 8 per 3 divisoris fiunt 24 que extrahat de 30, remanent 6 que ponat super 0, et deleat 3 que fuerunt super 5. (4) Et sic semper multiplicata posita figura, singulariter per figuras divisoris numeri, incipiendo scilicet ab ultima usque ad primam veniendo, semper opportet divisionem remanere in ipsa figura, sub qua figura poni precipitur, ut in prima huius divisionis descriptione demonstratur. (5) Post hec ponat duo zephyra sub duobus zephyris tertii et secundi gradus, ideo quod utraque zephyra copulata cum 6 minorem faciunt numerum quam 743. Unde summenda sunt 6 cum tribus zephyris, scilicet 6000 et[964] in 743 dividenda. (6) Pro qua divisione ponenda sunt 8 in primo gradu exeuntis numeri, scilicet sub 0 primi gradus, quare, diviso duplo de 60 per duplum de $\frac{1}{2}7$[965], veniunt 8. Quibus 8 in 7 multiplicatis et de 60 extractis, remanent 4. (7) Que 4 ponat super 0 tertii gradus et dampnet 6 que sunt super 0 quarti gradus et iterum 8 in 4 divisoris multiplicatis et de 40 extractis, remanent 8. (8) Nam sicut multiplicatio prescriptorum 8 per ordinem de gradu mutatur in gradum[966] in divisori numero, ita eorum multiplicationes in dividendi numero de gradu in gradum[967] mutari debent. (9) Ponat siquidem

[962] $\frac{1}{2}7$ FS, 37 VA
[963] 3 FVA, om. S (che però ha una macchia in interlinea dove forse era stato aggiunto in un secondo momento)
[964] Et FVS, om. A
[965] $\frac{1}{2}$ 7 FSA, 7 $\frac{1}{2}$ V
[966] gradum S, Gradu FVA,
[967] Gradum VSA, gradu F

remanentia 8 super 0 secundi gradus et deleat ipsa 4 que fuerunt[968] posita super 0 tertii gradus et multiplicet 8 per 3 fiunt 24, que extrahat de 80, remanent 56, que ponat super virgulam de 743 et ante ipsam ponat 8008, et habebit proposite divisionis quantitatem. (10) Et cum per ea que de divisionibus dicta sunt plenum magisterium haberi possit in dividendis numeris per numeros IIII^or figurarum et plurium, tamen, ut melius intelligantur, predictas[969] divisiones per aliquot numeros quattuor figurarum demonstrentur.

Divisio de 17849 per 1973[970].

(1) Ut[971] si proponatur dividere 17849 per 1973, describatur divisor sub dividendo, scilicet 1973 sub 7849 de 17849. Et, cum numerus quattuor ultimarum figurarum dividendi numeri, idest 1784, minor sit divisore, positio[972] figure exeuntis numeri sub primo gradu dividendi numeri fieri necesse est. (2) Unde ponat 9 sub primo gradu utrorumque numerorum ideo quia ducto novenario in divisore[973], facit fere dividendum numerum. Vel quia divisor est prope 20 centenariis, dividenda sunt 17 per 2[974], et relinquende tres figure numeri dividendi, scilicet 849. (3) Et tunc multiplicet ipsa 9 per 1 divisoris et extrahat de 17 remanent[975] 8 que ponat super 7 et multiplicet 9 per 8 divisoris et extrahat de 88, remanent 7, que ponat super 8, et dampnet posita 8. Et[976] iterum multiplicet 9 per 7 divisoris et extrahat de 74, remanent 11 que ponat super 74, et multiplicet 9 per 3 divisoris numeri, et extrahat de 119, remanent 92, que ponat super virgulam de 1973, et ante ipsam ponat 9. Et habebit proposite divisionis quantitatem.

---

[968] Fuerunt FS, fuerant VA
[969] Predictas FS, quadam V, quedam A
[970] Divisio-1973 FS, om. VA
[971] ut F, Et V, videlicet ut S, item A
[972] Positio FSA, posito V
[973] Divisore FSV, divisorem A
[974] 2 FSA, 7 V
[975] Remanent FSV, remanet A
[976] Et FSV, Ut A

Divisio de 1235689 per 4007[977].

(1) Item si voluerit dividere 1235689[978] per 4007, descriptis numeris, ponat 3 sub tertio gradu numerorum, prescriptis scilicet dispositis, et multiplicet ipsa 3 per 4, fiunt 12, pro quibus relinquat 12 que sunt numerus duarum ultimarum figurarum[979] dividendi numeri. (2) Et multiplicet 3 per 0, quod est in tertio gradu divisoris, faciet 0 quod extrahat de 3, que sunt in dividendi numero, remanet[980] ipsa 3. Et iterum multiplicet 3 per 0 secundi gradus divisoris, faciet 0. Quod extrahat de 35, remanent iterum ipsa 35. Et 3 per 7 faciunt 21, que extrahat de 356, remanent 335, que ponat super 356. (3) Nam cum 3358 que sunt copulatio remanentis numeri cum ei antecedente figura minus sint de 4007, ponendum est 0 ante posita 3, scilicet sub secundo gradu numerorum et copulanda sunt 3358 cum antecedente figura idest cum 9 sub quibus ponat 8 in exeunti[981] numeri[982]. (4) Et multiplicet ipsam[983] per 4, et extrahat de 33, remanet 1, quod [S, f.24r] ponat super 3 primi gradus de 33 et dampnet ipsa[984] 33. Et 8 per 0 tertii gradus et extrahat de 15 remanet 15. Et iterum multiplicet 8 per 0 secundi gradus divisoris numeri et extrahat de 158 remanet ipsa 158. Et 8 per 7 faciunt 56, que extrahat de 1589, remanent 1533[985], que ponat super virgulam de 4007, et ante ipsam ponat 308. Et habebit quesite divisionis quantitatem ut in hac denotatur descriptione.

<Probatio>

(1) Verum si eam, vel quamlibet aliam divisionem aliter quam per pensam[986] probare voluerit, multiplicet exeuntem numerum per divisorem et venienti summe [A, f.13r]addat remanentem numerum ex divisione, scilicet ipsum qui super virgulam poni precipitur.

---

[977] Divisio-4007 FSA, om. V
[978] 1235689 FSV, 12345689 A
[979] Ultimarum figurarum FSA, figurarum ultimarum V
[980] Remanet FSV, remanent A
[981] Exeunti FSA, exeuntis V
[982] Numeri FV, numero SA
[983] Ipsam FV, ipsa S, ipse A
[984] Ipsa FSA, om. V
[985] 1533 FSA, 1598 V
[986] Pensam FV, pensas SA

(2) Ut in hac multiplicet[987] 308 per 4007 et multiplicationi super addat 1533 que sunt super virgulam, et si collecta[988] summa fecerit [V, f. 19v] divisum numerum, ipsam divisionem rectam fore cognoscat.

[987] Multiplicet FS, om. VA
[988] Collecta FSA, copulata V

Capitolo quinto

La divisione dei numeri interi

(1) A coloro che vogliono saper dividere un numero qualsiasi per un numero qualsiasi è necessario [R, f.17r] imparare prima a dividere tutti i numeri per i numeri che vanno dal numero due fino al numero dieci. E, poiché non possono saperlo fare finché non sanno a memoria alcuni schemi di divisioni di alcuni numeri fra di loro, le loro divisioni sono esemplificate in tabelle nelle pagine seguenti. Ma si deve loro insegnare innanzitutto in che modo scrivere perfettamente tutti i piccoli segni dei numeri.

(2) [N. f. 24r] Quando sopra un qualsiasi numero sarà tracciata una linea[989] e sopra di essa sarà scritto un qualsiasi altro numero, il numero superiore esprime la parte o le parti del numero inferiore: infatti l'inferiore è chiamato denominatore[990] e il superiore numeratore[991]. (3) Così, se sopra il numero due sarà tracciata una linea e sopra di essa sarà scritto il numero uno, questo numero uno esprime una parte di due parti di un intero, cioè la metà, così: $\frac{1}{2}$; e se lo stesso numero uno sarà posto sopra il numero tre, così: $\frac{1}{3}$, indica un terzo[992]; e se sopra il numero sette, così: $\frac{1}{7}$, un settimo; e se sopra il 10, un decimo; e se sopra il 19, esprime la diciannovesima parte di un intero, e così via. Allo stesso modo se il numero due si troverà sopra il numero tre, così: $\frac{2}{3}$, esprime due parti di tre parti di un intero, cioè due terzi; e se sopra il 7, così: $\frac{2}{7}$, due settimi; e se sopra il 23 indicherà due ventitreesimi, e così via. Allo stesso modo se il numero sette sarà posto sopra il numero nove, così: $\frac{7}{9}$, esprime sette noni di un intero; e se il 7 sarà sopra il 97 indicherà sette novantasettesimi. Allo stesso modo il 13 posto sopra il 29, esprime tredici ventinovesimi; e se il 13 è sopra il 347, indicherà tredici trecentoquarantasettesimi. E così bisogna intendere per tutti gli altri numeri.

(4) Parimenti se sotto una medesima linea saranno posti più numeri e sopra ciascuno [A, f. 10r] di quegli stessi saranno scritti altri numeri, il numero che sarà posto sopra il numero all'inizio della parte destra della linea indicherà, come abbiamo già detto, la parte o le parti del numero stesso posto sotto.

989 *Virgula* andrebbe tradotto più propriamente con "linietta" o "trattino" anche per distinguere questo termine da *virga* "linea" "tratto" di cui è il diminutivo. Non si è ritenuto di operare questa distinzione perché Fibonacci usa le due voci come sinonimiche.

990 Si è tradotto così il "denominato" di Fibonacci, adeguandomi alla terminologia scientifica moderna.

991 Si è tradotto così il "denominante" di Fibonacci, adeguandomi alla terminologia scientifica moderna.

992 Fibonacci scrive *tertiam* sottintendendo *partem*, mentre sottintende *partes* quando il numeratore è maggiore di 1. Qui si è tradotto "un terzo" per adattarsi al linguaggio matematico moderno, e ci si è comportati analogamente in casi simili.

Quello, poi, sopra il secondo esprime[993] le parti di tale secondo delle parti del primo numero posto sotto. Quello, ancora, sopra il terzo esprime le parti di tale terzo stesso delle parti del secondo delle parti del primo: e così sempre quelli che seguono sopra la linea indicano le parti delle parti di tutti quanti i numeri che precedono sotto la linea[994].

(5) Così, se sotto una linea ci sono 2 e 7 e sopra il 2 c'è 1 e sopra il 7 c'è 4, come qui si vede: $\frac{1}{2}\frac{4}{7}$, si indica quattro settimi e la metà di un settimo. Se però sopra il 7 ci fosse zero, così : $\frac{1}{2}\frac{0}{7}$, si indicherebbe solo la metà di un settimo. Parimenti, se sotto un'altra linea ci sono 2, 6 e 10 e sopra il 2 c'è 1 e sopra il 6 c'è 5 e sopra il 10 c'è 7, come qui si mostra: $\frac{1}{2}\frac{5}{6}\frac{7}{10}$, il sette che è [R, f.17v] sopra [N, f. 24v] il 10 all'inizio della linea rappresenta sette decimi, e il 5 che è sopra il 6 indica cinque sesti di un decimo, e l'1 che è sopra il 2 indica la metà della sesta parte di un decimo, e così uno ad uno s'intenda di ognuno.

(6) Tuttavia bisogna osservare[995] che sotto la medesima linea in direzione di sinistra stanno numeri sempre più piccoli: ma se [F, f.11v] ci fossero più linee, le frazioni di una sola linea non rispondono alle frazioni di un'altra, e quella linea[996] che è la maggior parte dell'intero, deve essere sempre posta in direzione della mano destra. Si dice appunto che le frazioni, che sono in una sola linea di frazione, sono in gradi, e il primo grado di quelle è la frazione che è all'inizio della linea sulla destra. Il secondo grado è la frazione seguente verso sinistra.

(7) Per esempio, nella linea precedente, vale a dire in $\frac{1}{2}\frac{5}{6}\frac{7}{10}$, $\frac{7}{10}$ sono nel primo grado di questa linea e $\frac{5}{6}$ sono nel secondo e $\frac{1}{2}$ è nel terzo, cioè nell'ultimo grado di tale linea. E così quanti sono i numeri sotto la linea, tanti sono i suoi gradi. (8) E se nella linea ci saranno più frazioni e questa linea terminerà con un cerchietto, allora le sue frazioni indicheranno altro da quello che è stato detto. Così, in questa linea: $\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{9}\bullet$, le cui frazioni indicano otto noni di un intero e sei settimi di otto noni e quattro quinti di sei settimi di otto noni e due terzi di quattro quinti di sei settimi di otto noni di un

[993] Il testo latino ha *declarat*, che in questo contesto risulta essere usato come sinonimo di *affirmat*, tradotto con 'esprime'. Si è preferito non rendere l'alternanza sinonimica presente nel testo latino (si sarebbe potuto tradurre 'presenta') perché se nel latino matematico medievale la *variatio* era un valido artificio retorio, il linguaggio scientifico moderno tende a un rapporto 1:1 tra significante e significato.

[994] Fibonacci esemplifica nel paragrafo successivo questo passaggio: sotto la linea di frazione il numero posto a sinistra indica sempre le parti del numero posto a destra indipendentemente dal numeratore: quindi in $\frac{1}{2}\frac{4}{7}$, il 2 indica "due parti di un settimo".

[995] *Monere* vale per 'far osservare', quindi il senso dell'espressione risulterebbe 'bisogna far osservare', si è preferito una traduzione meno macchinosa.

[996] Qui, probabilmente Fibonacci intende per metonimia la frazione.

intero[997]. (9) E se questa linea terminasse dall'altra parte con un cerchietto, così: $\bullet\frac{8}{9}\frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3}$, indicherebbe soltanto due terzi di quattro quinti di sei settimi di otto noni di un intero. (10) Allo stesso modo se dei trattini[998] si protendessero sulla linea in questo modo $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{5}{9}$ le sue frazioni indicherebbero cinque noni e un terzo e un quarto e un quinto di un nono.

(11) Comprese pertanto queste cose, gli schemi suddetti, come si vede più sotto, sono tracciati perché siano imparati a mente con grande applicazione.

Divisioni per il numero due

$\frac{1}{2}$	di	1	è	0	e	rimane	1
$\frac{1}{2}$		2	è	1			
$\frac{1}{2}$		3		1			1
$\frac{1}{2}$		4		2			
$\frac{1}{2}$		5		2			1
$\frac{1}{2}$		6		3			
$\frac{1}{2}$		7		3			1
$\frac{1}{2}$		8		4			
$\frac{1}{2}$		9		4			1
$\frac{1}{2}$		10		5			
$\frac{1}{2}$		11		5			1
$\frac{1}{2}$		12		6			
$\frac{1}{2}$		13		6			1

[997] In pratica, se c'è un cerchietto alla fine della linea di frazione i denominatori a sinistra non indicano le parti del denominatore a destra, ma l'intera frazione a sinistra indica le parti della frazione a destra. Quindi in $\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{9}\bullet$, il 7 non indica sette parti di un nono, ma sei settimi di otto noni.

[998] In questo caso ho tradotto *virgula* con "trattino" perché è chiaro che Fibonacci si riferisce ad un altro segno grafico.

$\frac{1}{2}$		14		7			
$\frac{1}{2}$		15		7			1
$\frac{1}{2}$		16		8			
$\frac{1}{2}$		17		8			1
$\frac{1}{2}$		18		9			
$\frac{1}{2}$		19		9			1
$\frac{1}{2}$		20		10			

Divisioni per il numero tre

$\frac{1}{3}$	d i	1	è	0			1
$\frac{1}{3}$		2		0			2
$\frac{1}{3}$		3		1			
$\frac{1}{3}$		4		1			1
$\frac{1}{3}$		5		1			2
$\frac{1}{3}$		6		2			
$\frac{1}{3}$		7		2			1
$\frac{1}{3}$		8		2			2
$\frac{1}{3}$		9		3			

$\frac{1}{3}$		1 0		3			1
$\frac{1}{3}$		1 1		3			2
$\frac{1}{3}$		1 2		4			
$\frac{1}{3}$		1 3		4			1
$\frac{1}{3}$		1 4		4			2
$\frac{1}{3}$		1 5		5			
$\frac{1}{3}$		1 6		5			1
$\frac{1}{3}$		1 7		5			2
$\frac{1}{3}$		1 8		6			
$\frac{1}{3}$		1 9		6			1
$\frac{1}{3}$		2 0		6			2
$\frac{1}{3}$		2 1		7			
$\frac{1}{3}$		2 2		7			1

$\frac{1}{3}$		2 3		7			2
$\frac{1}{3}$		2 4		8			
$\frac{1}{3}$		2 5		8			1
$\frac{1}{3}$		2 6		8			2

Divisioni per il numero quattro

$\frac{1}{4}$		1		0			1
$\frac{1}{4}$		2		0			2
$\frac{1}{4}$		3		0			2
$\frac{1}{4}$		4		1			
$\frac{1}{4}$		5		1			1
$\frac{1}{4}$		6		1			2
$\frac{1}{4}$		7		1			3
$\frac{1}{4}$		8		2			
$\frac{1}{4}$		9		2			1

1 4		1 0		2			2
1 4		1 1		2			3
1 4		1 2		3			
1 4		1 3		3			1
1 4		1 4		3			2
1 4		1 5		3			3
1 4		1 6		4			
1 4		1 7		4			1
1 4		1 8		4			2
1 4		1 9		4			3
1 4		2 0		5			
1 4		2 1		5			1
1 4		2 2		5			2

14		23		5			3
14		24		6			
14		25		6			1
14		26		6			2
14		27		6			3
14		28		7			
14		29		7			1
14		30		7			2
14		31		7			
14		32		8			
14		33		8			1
14		34		8			2
14		35		8			3
14		3		9			

		6					
1 4		3 7		9			1
1 4		3 8		9			2
1 4		3 9		9			3
1 4		4 0		1 0			

Divisioni per il numero cinque

1 5	d i	5		1
1 5		1 0		2
1 5		1 5		3
1 5		2 0		4
1 5		2 5		5
1 5		3 0		6
1 5		3 5		7
1 5		4 0		8

1 5		4 5		9
1 5		5 0		1 0

Divisioni per il numero sei

1 6	d i	6		1
1 6		1 2		2
1 6		1 3		3
1 6		2 4		4
1 6		3 0		5
1 6		3 6		6
1 6		4 2		7
1 6		4 8		8
1 6		5 4		9

Divisioni per il numero sette

1 7	d i	7		1

$\frac{1}{7}$		1 4		2
$\frac{1}{7}$		2 1		3
$\frac{1}{7}$		2 8		4
$\frac{1}{7}$		3 5		5
$\frac{1}{7}$		4 2		6
$\frac{1}{7}$		4 9		7
$\frac{1}{7}$		5 6		8
$\frac{1}{7}$		6 3		9
$\frac{1}{7}$		7 0		1 0

Divisioni per in numero otto

$\frac{1}{8}$	d i	8	e	1
$\frac{1}{8}$		1 6		2
$\frac{1}{8}$		2 4		3
$\frac{1}{8}$		3 2		4

$\frac{1}{8}$		40		5
$\frac{1}{8}$		48		6
$\frac{1}{8}$		56		7
$\frac{1}{8}$		64		8
$\frac{1}{8}$		72		9
$\frac{1}{8}$		80		10

Divisioni per il numero nove

$\frac{1}{9}$	di	$\frac{1}{9}$	(	1
$\frac{1}{9}$		18		2
$\frac{1}{9}$		27		3
$\frac{1}{9}$		36		4
$\frac{1}{9}$		45		5
$\frac{1}{9}$		54		6

$\frac{1}{9}$		63		7
$\frac{1}{9}$		72		8
$\frac{1}{9}$		81		9
$\frac{1}{9}$		90		10

Divisioni per il numero dieci

$\frac{1}{10}$	di	10	è	1
$\frac{1}{10}$		20		2
$\frac{1}{10}$		30		3
$\frac{1}{10}$		40		4
$\frac{1}{10}$		50		5
$\frac{1}{10}$		60		6
$\frac{1}{10}$		70		7
$\frac{1}{10}$		80		8
$\frac{1}{10}$		90		9

$\frac{1}{10}$		10 0		10 [999]

Divisioni per 11

$\frac{1}{11}$	d i	1 1	(	1
$\frac{1}{11}$		2 2		2
$\frac{1}{11}$		3 3		3
$\frac{1}{11}$		4 4		4
$\frac{1}{11}$		5 5		5
$\frac{1}{11}$		6 6		6
$\frac{1}{11}$		7 7		7
$\frac{1}{11}$		8 8		8
$\frac{1}{11}$		9 9		9
$\frac{1}{11}$		1 10		1 0

Introduzioni delle divisioni per 12

[999] 1/10-100 10 NR, *om.* F

$\frac{1}{12}$	di	12	è	1
$\frac{1}{12}$		24		2
$\frac{1}{12}$		36		3
$\frac{1}{12}$		48		4
$\frac{1}{12}$		60		5
$\frac{1}{12}$		72		6
$\frac{1}{12}$		84		7
$\frac{1}{12}$		96		8
$\frac{1}{12}$		108		9
$\frac{1}{12}$		129		10

Schema delle divisioni per 13

$\frac{1}{13}$	di	13	è	1
$\frac{1}{13}$		26		2
$\frac{1}{13}$		39		3
$\frac{1}{13}$		52		4

$\frac{1}{13}$		65		5
$\frac{1}{13}$		78		6
$\frac{1}{13}$		91		7
$\frac{1}{13}$		104		8
$\frac{1}{13}$		117		9
$\frac{1}{13}$		130		10
$\frac{1}{13}$		143		11
$\frac{1}{13}$		156		12
$\frac{1}{13}$		169		13
$\frac{1}{13}$		182		14
$\frac{1}{13}$		195		15

[F, f.12v/N, f.25v/R, f.19r]

Regola generale della divisione dei numeri per i numeri di primo grado.

(1) Dunque, alla luce della conoscenza delle divisioni scritte qui sopra e del loro perfetto approfondimento con un ripetuto esercizio, anche[1000] se uno volesse dividere qualunque numero di qualunque grado per uno qualsiasi dei numeri suddetti, cioè di quelli che vanno dal numero due fino al numero dieci, scriva il numero sulla tavoletta e ponga la cifra per la quale vorrà dividere il numero sotto il primo grado del numero stesso. E inizi la divisione dall'ultima cifra del numero e la divida, se sarà possibile, per la quantità numerica della cifra[1001] per la quale vorrà dividere il numero, ponendo il quoziente della divisione[1002] più in basso sulla tavoletta sotto il suo ultimo grado. E se dalla divisione sopravanzasse un resto, ponga tale resto sopra la sua ultima cifra e lo unisca con la cifra successiva e divida queste due cifre, come se costituissero un numero di due cifre, e ponga il quoziente della divisione[1003] sotto la sua cifra seguente; e se ci fosse resto, lo scriva sopra di essa. E così, si applichi a fare i calcoli sempre nell'ordine qui sopra descritto, unendo il resto alla cifra seguente, ponendo il numero che risulterà dalla divisione e scrivendo il resto più sopra, procedendo grado a grado, fino a giungere alla prima cifra del numero. (2) Infatti, dal momento che spesso accade che le cifre per le quali i numeri sono divisi sono maggiori delle ultime cifre degli stessi numeri da dividere[1004], allora, non essendo possibile dividere queste per quelle, cominci la divisione dalle ultime cifre e da quelle successive; e divida queste cifre unite nel modo sopra descritto, ponga i resti delle divisioni[1005] sotto le penultime e proceda a calcolare, come abbiamo detto precedentemente, fino alla fine dei resti. Se non ci sarà un resto qualunque, divida solo la cifra stessa, che si insegna ad unire finché non si troverà il resto; e se non potrà dividere quella cifra per il fatto che è minore di quella per la quale deve essere divisa, ponga sotto di essa uno zero, e la aggiunga intera unendola alla cifra successiva come fosse un resto. E così otterrà il quoziente[1006] di qualunque divisione suddetta.

(3) [N, f. 26r] Così, se volesse dividere 365 per 2[1007], scriva il 2 in una parte della tavoletta e sopra tracci una linea e ponga un altro 2 sotto il 5 e cominci a dividere 3, cioè l'ultima cifra, per 2, dicendo: $\frac{1}{2}$ di 3 è 1 con resto 1. E scriva l'1 appunto sotto il 3 e scriva più sopra l'1 che resta, come si vede nella prima figura, e l'1 che resta, unito con il 6 che è posto accanto all'ultima cifra suddetta,

[1000] Tale "anche" si spiega alla luce delle operazioni descritte precedentemente.

[1001] Per *numerum* qui Fibonacci intende la "quantità numerica" della cifra.

[1002] Con *divisionem* Fibonacci intende brachilogicamente il "quoziente della divisione": per rendere più scorrevole la lettura si è preferito qui e avanti chiarire meglio il significato del termine.

[1003] *Divisionem* è una brachilogia per 'quoziente della divisione'.

[1004] Abbiamo ritenuto l'aggiunta "da dividere" necessaria all'immediata intelligenza del testo.

[1005] Si è tradotto qui "resti delle divisioni" il termine *divisiones* perché è questo che Fibonacci brachilogicamente intende.

[1006] Si è tradotto così *quantitas* perché Fibonacci si riferisce qui al risultato della divisione che, nel linguaggio matematico moderno, si definisce appunto "quoziente".

[1007] In questo caso, nell'esemplificare il procedimento di 365:2, Fibonacci passa direttamente a descrivere lo svolgimento chiarendo di scrivere da parte il 2 con la linea di frazione che costituirà una componente del quoziente, senza però precisare di scrivere sulla tavoletta il numero.

determina 16. Calcoli $\frac{1}{2}$ di 16 che è 8. Ponga dunque l'8 sotto il 6 avendolo posto[1008] davanti all'1 sotto il 3, come si vede nella seconda figura. E dal momento che non è avanzato nulla dalla divisione di 16, divida il 5 per 2: risulterà 2 con resto 1. Scriva il 2 sotto il 5 e scriva l'1 che resta sopra quel 2 già scritto che ho raccomandato di conservare a parte con la linea di frazione: e risulterà la metà di un intero[1009]. Davanti a questo $\frac{1}{2}$ scriva il numero che viene fuori dalla divisione, cioè 182, come si palesa nell'ultima figura[1010]. (4) Infatti le parti o le frazioni si devono porre sempre dopo gli interi, anche se si devono pronunciare prima gli interi e poi le frazioni[1011].

(5) Bisogna di contro notare che quando un numero è diviso [R, f.19v] per un altro[1012], allora dalla moltiplicazione del divisore per il quoziente[1013] risulta il numero diviso, come nel caso in cui si divide 40 per 4 risulta 10, per cui se moltiplichiamo 4 per 10, si ha come risultato quaranta, vale a dire il numero diviso. Allo stesso modo se si moltiplicherà $\frac{1}{2}$ 182 per 2, cioè il quoziente per il divisore, risulterà 365, vale a dire il numero diviso.

Divisione di 365 per 3

(1) Parimenti se si volesse dividere ancora 365 per 3, si scriva il 3 sotto il 5 e si divida 3 per 3: risulterà 1 che si deve porre sotto il 3. Parimenti si divida 6 per 3: risulterà 2 che si deve porre sotto il 6. E si divida il 5 per il 3, risulterà 1 con resto 2: ponga l'1 sotto il 5 e il 2 sopra la linea del 3 conservato da parte[1014], e davanti a questo[1015] ponga il quoziente della divisione, vale a dire 121. Così otterrà $\frac{2}{3}$ 121 per la divisione richiesta, come qui si mostra.

(2) Si noti che il numero che viene diviso si chiama 'diviso' o 'dividendo'; e il numero che divide si chiama 'dividente' o 'divisore', e il numero che risulta dalla divisione si chiama 'procedente' o 'uscente'[1016].

[1008] *antepositum* si riferisce all'8 che viene posto davanti all'1 posto precedentemente sotto il 3, l'accusativo *positum* dipende dalla preposizione *ante*.
[1009] *unius integri* 'di un uno intero' o 'di un'unità intera' è un'espressione ridondante.
[1010] Il risultato di 365:2 è 182,5, vale a dire 182 e $\frac{1}{2}$ di un intero, ovvero - come scrive Leonardo - $\frac{1}{2}$ 182.
[1011] In una scrittura che procede da destra a sinistra scrivendo $\frac{1}{2}$ 182 il 182 è detto "davanti" a $\frac{1}{2}$ anche se noi diremmo "dopo".
[1012] Aliquem non andrebbe tradotto precisamente come 'altro', ma nel latino medievale ora sì.
[1013] Si è tradotto così *exeuntem* perché, nel linguaggio matematico moderno il numero che viene fuori da una divisione è definito appunto "quoziente".
[1014] Sembra che sia sottinteso il termine *figura*.
[1015] Qui dovrebbe essere sottinteso *numerum*.
[1016] Ovvero quoziente.

Divisione di 1346 per 4

(1) [S, f. 15v] Parimenti se uno volesse dividere 1346 per 4, ponga il 4 sotto [N, f.26v] il 6 e divida il 13 per 4, dal momento che non è possibile dividere l'1, che è nell'ultimo grado del numero: risulterà 3 con resto 1. Scriva il 3 sotto il 3 e ponga l'1 che resta sopra il medesimo 3, e unisca l' 1 stesso con il 4 che precede il 3 nel numero, risulterà 14: calcoli[1017] la quarta parte di 14 che è 3 con resto 2. Ponga il 3 più in basso sotto il 4 e il 2 che resta più sopra. Una volta unito tale 2 con il 6, si realizza 26: lo divida per 4, risulterà 6 con il resto di 2. Ponga il 6 sotto il 6 e ponga il 2 del resto sopra la linea del 4 conservato da parte [F, f.13r]: ciò indica due quarti di un intero che equivalgono alla metà di un intero. E davanti a questa frazione[1018] ponga il quoziente della divisione, vale a dire 336. E così si otterrà $\frac{1}{2}$ 336 per la divisione richiesta.

(2) A titolo di esemplificazione, abbiamo diviso innanzitutto 13 per 4, e questo 13 termina in terzo grado. Per questo sappiamo che è un numero dell'ordine delle centinaia, visto che il terzo grado è delle centinaia. Divise, dunque, tredici centinaia per 4, risultano tre centinaia e resta un centinaio indivisibile. Per questo abbiamo posto il 3 in terzo grado, vale a dire nel luogo delle centinaia, e abbiamo posto l'1 che era avanzato sopra il 3, dal momento che anch'esso denota il cento e abbiamo unito quest'1 con il 4: le due cifre hanno realizzato come risultato 14 che termina in secondo grado, cioè nel luogo delle decine, per questo indica 14 decine che abbiamo diviso per 4, sono risultate tre decine, e sono rimaste due decine indivisibili. Per questo abbiamo posto il 3 sotto il 4 e il 2 sopra il 4, vale a dire nel luogo delle decine, abbiamo unito questo 2 con il 6 del primo grado. Dall'unione di questi numeri abbiamo ottenuto 26 unità, dal momento che questa unione termina in primo grado. E abbiamo diviso queste 26 unità per 4 [R, f. 20r] e sono risultate 6 unità con il resto di 2. Per questo abbiamo posto il 6 nel luogo delle unità e abbiamo posto il 2 sopra la linea di frazione del 4. E così s'intenda delle altre divisioni simili.

Divisione di 5439 per 5

(1) Parimenti se uno volesse dividere 5439 per 5, ponga il 5 sotto il 9 e dica[1019]: $\frac{1}{5}$ di 5 è 1, lo ponga sotto il 5. E $\frac{1}{5}$ di 4 è 0 con resto di 4. Ponga lo 0 sotto il 4 e, per il 4 del resto, unisca questo [N, f. 27r] 4 con il 3 e dica[1020]: $\frac{1}{5}$ di 43 è 8, con resto, ancora, di 3. Ponga l'8 sotto il 3 e calcoli la quinta

[1017] *Sumo* significa "prendere, impadronirsi" e anche nel linguaggio matematico moderno si usano spesso espressioni come "si prenda" o "prendiamo". Si è qui preferita la traduzione "calcoli" perché ritenuta più scorrevole.
[1018] In latino abbiamo *ipsas* perché le frazioni con numeratore maggiore di 1 sono avvertite come plurali.
[1019] Si è tradotto così *dicat* anche se in questo contesto Fibonacci sembrerebbe usarlo come sinonimo di *accipiat* "calcoli".
[1020] cfr. nota 21.

parte di tale 3 unito con il 9, vale a dire di 39, risulterà 7 con il resto di 4: ponga il 7 sotto il 9 e il 4 sopra la linea di frazione del 5 conservato da parte e ponga davanti il quoziente della divisione.

Divisione di 9000 per 7

(1) Parimenti se si volesse dividere 9000 per 7, si ponga il 7 sotto il primo zero, e si divida il 9 per 7, risulterà 1 con resto di 2. Si ponga dunque l'1 sotto il 9 e il 2 sopra. Una volta unito il 2 con lo 0 che segue il 9, si determina il 20: lo si divida per 7, risulterà 2 con resto di 6. Si ponga il 2 sotto quello zero e il 6 sopra. Unito questo 6 con lo zero seguente, si determina 60: lo si divida per 7, risulterà 8 con resto di 4. Si ponga l'8 sotto quello zero e sopra ponga il 4. Unito questo 4 con lo zero di primo grado, si determina 40: lo si divida per 7, risulterà 5 con resto di 5. Si ponga il 5 sotto lo 0 stesso e si ponga il 5 del resto sopra la linea di frazione del 7 conservato da parte e, davanti a tale frazione, si ponga il quoziente della divisione.

Divisione di 10000 per 8.

(1) Parimenti se si volesse dividere 10000 per 8, ponga l'8 sotto lo 0 di primo grado e dica: $\frac{1}{8}$ di 10 è 1 con resto di 2. Si ponga l'1 sotto lo 0 di quarto grado e sopra ponga il 2 e dica: $\frac{1}{8}$ di 20 è 2 con resto di 4. Si ponga il 2 sotto lo 0 di terzo grado e sopra si ponga il 4 e si calcoli $\frac{1}{8}$ di 40 che è 5 che si deve porre sotto il secondo grado. E per completare l'ordine dei gradi del quoziente, bisogna porre lo 0 sotto lo 0 di primo grado, come si vede in questa figura.

Divisione di 120037 per 9

(1) Parimenti se si volesse dividere 120037 per 9, si scriva il 9 sotto il 7 e si dica: $\frac{1}{9}$ di 12 è 1 con resto di 3, si ponga l'1 sotto il 2 e il 3 più sopra. E si dica: $\frac{1}{9}$ di 30 è 3 con resto di 3. Si ponga il 3 sotto lo 0 di quarto grado, e sopra si ponga il 3. E di nuovo si calcoli $\frac{1}{9}$ di 30 che è 3 con resto di 3: si ponga il 3 sotto lo 0 di terzo grado e si ponga il 3 sopra lo 0 stesso. Ancora, anche $\frac{1}{9}$ di 33 è 3, con resto di 6. Si ponga il 3 sotto il 3 e più sopra il 6 [N, f. 27v] e $\frac{1}{9}$ di 67 è 7 con resto di 4. Si ponga il 7 sotto il 7 e si ponga il 4 del resto sopra la linea di frazione del 9 scritto da parte[1021]. (2) E così se saprà dividere secondo l'ordine del dividere descritto sopra giammai potrà sbagliare in altre simili

[1021] Il testo latino è ex parte servata, che sembra sottindendere un figura al quale riferirsi.

divisioni[1022] [R, f.20v]: secondo lo stesso metodo tutti i numeri possono essere divisi per 11 e per 13. (3) Tuttavia è necessario innanzitutto sapere gli schemi degli altri ordini scritti sopra, come sono contenuti più sopra nelle tabelle delle divisioni. Infatti lo schema dell'11 va da 1 fino a 11 decine, vale a dire fino a 110. E lo schema del 13 va da 1 fino a 13 decine, vale a dire fino a 130.

Divisione dei numeri per 11

(1) Alla luce della conoscenza appunto dei suddetti schemi, se qualcuno volesse anche dividere 12532 per 11, ponga l'11 sotto il 32. E calcoli $\frac{1}{11}$ di 12, che è in testa al numero da dividere che è 1, e resta 1, dal momento che $\frac{1}{11}$ di 11 è 1 come si mostra nelle suddette tabelle: dunque $\frac{1}{11}$ di 12 è 1 e resta 1. Pertanto ponga[1023] l'1 sotto il 2 di quel 12 e ponga l'1 del resto sopra il 2, e unisca l'1 stesso con la cifra precedente, vale a dire con il 5, risulta 15, di cui calcoli $\frac{1}{11}$ che è 1 col resto di 4 per la suddetta ragione. E ponga l'1 sotto il 5 e il 4 del resto sopra il 5 che deve unire con la cifra precedente, vale a dire con il 3, realizzano 43: di questo calcoli di nuovo $\frac{1}{11}$ che è 3 col resto di 10, dal momento che $\frac{1}{11}$ di 33 è 3, dal quale fino al 43 mancano dieci unità, dunque $\frac{1}{11}$ di 43 è 3 con resto 10 come abbiamo detto. Ponga dunque il 3 sotto il 3 e ponga il 10 sopra il 43, cioè ponga l'1 sopra il 4 che era stato posto sopra il 5 e porrà lo 0 sopra il 3, e unisca di nuovo questo 10 con la cifra precedente, vale a dire con il 2 che è in primo grado, risulterà 102, di cui di nuovo calcolerà $\frac{1}{11}$, risulterà 9 con resto 3: ponga il 9 sotto il 2 suddetto e ponga il 3 del resto sopra la linea di frazione dell'11 conservato da parte, e otterrà per la divisione richiesta $\frac{3}{11}1139$[1024].

Divisione di 123586 per 13.

(1) Parimenti se si volesse dividere 123586 per 13, posizionato il 13 sotto l'86, si divida il 123 per 13, dal momento che 12 è[1025] inferiore a 13, risulterà 9 con resto di 6 [N, f.28r]. Infatti la tredicesima parte di 117 è 9, dal quale fino a 123 mancano 6. Si ponga il 9 sotto il 3 di quel 123 e si ponga il 6 del

[1022] Abbiamo reso 'in altre simili divisioni' l'espressione zeugmatica 'in aliquibus similibus divionibus' del trattato fibonacciano che, più esattamente sarebbe 'in alcune divisioni, quelle simili a queste'.

[1023] Abbiamo tradotto 'ponga' il pone di Fibonacci: troviamo qui un imperativo dove ci aspetteremmo una terza persona del congiuntivo esortativo. Anche se può trattarsi di un errore della tradizione, abbiamo già fatto notare come gli anacoluti siano tipici dello stile inconcinno del Fibonacci.

[1024] Ricordiamo che $\frac{3}{11}1139$ è uguale a 1139 e $\frac{3}{11}$, cioè - dal momento che 3:11=0,27 - 1139,27

[1025] In questo caso il predicato è al singolare perché Fibonacci intende il 12 come cifra e non come quantità numerica.

resto sopra il medesimo 3 e lo si unirà con il 5: risulterà 65, di cui $\frac{1}{13}$ è 5. Per questo si ponga il 5 sotto il 5 e sotto l'8 si ponga uno 0 dal momento che l'8 è inferiore al 13, e si unirà questo 8 con il 6 che è nel primo grado: risulterà 86. Dal momento che $\frac{1}{13}$ di questo è 6 con resto di 8, si ponga il 6 nel primo grado del quoziente, e l'8 sopra la linea di frazione del 13, e si otterrà per la richiesta divisione $\frac{8}{13}$ 9506. (2) Secondo questo metodo i numeri possono essere divisi anche per 17 e per 19. Tuttavia è necessario saperne gli schemi secondo l'ordine degli altri numeri scritti precedentemente. Ma dal momento che sembra gravoso poter tenere a mente i loro schemi, mostreremo a suo luogo in che modo, secondo un altro metodo, i numeri si dividano per 17 e per 19, e anche per gli altri numeri di due cifre.

La divisione dei numeri a mente sulle mani per i medesimi numeri.

(1) Ma se si volesse applicare a mente sulle mani la dottrina di simili divisioni, si trattenga sulle mani il numero che si vorrà dividere, e si proceda sempre [R, f. 21r] sulle mani, dividendo grado per grado, cominciando dall'ultima cifra[1026], ponendo sempre sulle mani i numeri che risultano dalla divisione, trattenendo sempre a mente i resti e cancellando gradualmente dalle mani il numero da dividere. (2) Per esempio, se uno proponesse di dividere 7543 per 6, trattenga il numero prescritto sulle mani, e divida il 7 per il 6 che è sulla mano destra nel luogo delle migliaia, risulterà 1 con resto di 1: elimini il 7 dalla mano e ponga lì l'1 e tenga a mente l'1 del resto che deve unire con il 5 che è sulla mano destra nel luogo delle centinaia, risulterà 15 che deve dividere per 6, risulterà 2 con resto di 3: elimini il 5 dalla mano e ponga lì il 2 e trattenga a mente il 3. Unito questo con il 4 che è sulla mano sinistra nel luogo delle decine, risulta 34, che deve dividere per 6, risulterà 5 con resto di 4: elimini il 4 dalla mano e ponga lì il 5 e tenga a mente il 4 del resto che deve unire con il 3 che è sulla medesima mano nel luogo delle unità, risulterà 43 che deve dividere per 6, risulterà 7 con resto di 1 [N, f.28v]. Cancelli il 3 dalla mano e ponga lì il 7, e per l'1 del resto calcoli[1027] un sesto. E così otterrà sulle mani per la divisione richiesta $\frac{1}{6}$ 1257.

Divisione di 8059 per 5

[1026] Ovviamente per Fibonacci l'ultima cifra è quella che per noi è la prima da sinistra.

[1027] *Pro remanenti 1 dicat sextam*: abbiamo già avuto modo di rilevare che Fibonacci usa spesso il termine *dicere* nel significato di 'calcolare'. Qui il Pisano vuole dire 'l'1 del resto indica che nel quoziente della divisione c'è $\frac{1}{6}$.

(1) Oppure se si volesse dividere 8059 per 5, si rattenga il numero sulle mani e si dica: $\frac{1}{5}$ di 8 che è nel luogo delle migliaia è 1 con resto di 3. Cancelli l'8 dalla mano e ponga lì l'1 e tenga a mente il 3. E dal momento che in questo numero non c'è nulla sulla mano nel luogo delle centinaia, bisogna dedurne che lì ci sia uno zero, con il quale si deve unire il 3 conservato da parte, risulterà 30, di cui l' $\frac{1}{5}$ è 6 che si deve porre nel medesimo luogo, vale a dire delle centinaia e si conduca la divisione dalla mano destra alla sinistra, dicendo: $\frac{1}{5}$ di 5, vale a dire del numero che è nel luogo delle decine, è 1. Si cancelli il 5 e si ponga lì l'1 e si calcoli l' $\frac{1}{5}$ di 9, vale a dire del numero che è nel luogo delle unità, che è 1 con resto di 4. Si elimini il 9 dalla mano e si ponga lì l'1 e per il 4 del resto si dica $\frac{4}{5}$. (2) E così si otterrà per la divisione richiesta $\frac{4}{5}$1611, e così s'intenda nelle restanti divisioni simili.

(3) Se uno poi volesse dividere un numero qualunque per 10, elimini da questo numero la cifra di primo grado e la ponga su quel 10 posto da parte con la linea di frazione, e davanti ad essa ponga il numero che sarà rimasto dopo l'eliminazione della suddetta prima cifra. E così potrà dividere per 10 qualunque numero.

(4) Per esempio, se si volesse dividere 167 per 10, si elimini da questo la cifra di primo grado, vale a dire il 7 [R, f. 21v] e la si ponga su quel 10, come abbiamo detto, conservato da parte con la linea di frazione, e davanti ad essa si ponga il numero che resta, cioè 16. E così si otterrà per la divisione richiesta $\frac{7}{10}$16. (5) E se si volesse dividere 1673 per 10, eliminato il 3 da 1673, resta, per la richiesta divisione, $\frac{3}{10}$167.

Divisioni dei numeri per i numeri incomposti[1028] *di secondo grado*.

(1) Alcuni tra i numeri sono "incomposti", e sono quelli che in aritmetica e in geometria si definiscono "primi", dal momento che non sono misurati o numerati da nessun numero minore

[1028] Il termine italiano 'incomposto' è sembrato il più adatto per tradurre la voce latina 'incompositus'. 'Incomposto' infatti ha tra le sue sfumature di significato anche, come in latino, 'mancante di misura'. Se riprendiamo l'esemplificazione geometrica che Fibonacci ci ha presentato nel terzo capitolo e consideriamo ad esempio il 6 come un segmento formato da 6 unità, allora la sua misura è data da 2 segmenti di 3 unità, o da 3 segmenti di due unità, o da 6 segmenti di un'unità, o da un unico segmento di una sola unità: 2, 3, 6, e 1 sono appunto i divisori di 6. Un numero è infatti misurato dai suoi divisori. In italiano il termine 'incomposito, nel linguaggio settoriale della matematica antica, poi, indica precisamente, come nel latino del Fibonacci 'un numero che è divisibile solo per se stesso e per l'unità', ovvero 'un numero primo'. Cfr. Altoni, 1-3 'Ancora ci sono de' numeri incomposti, quali sono quelli che l'unità è loro comune misura, per non avere tali numeri ripiego, come è il 3, il 5, il 7, 11, 13, 17 ...sendo numeri che non si possono ripartire' (cit. in S. Battaglia, *Grande Dizionario della Lingua Italiana*, Torino 1972, VII, p. 718s.)

contenuto in loro stessi, tranne che dall'uno. Gli arabi li chiamano "hasam"[1029]. I greci "coris canon[1030]", noi invece li definiamo "senza regola". (2) Di questi numeri primi, quelli che sono fino a cento sono riportati in una tabella nelle pagine seguenti [N, f. 29r]. Per quanto riguarda, poi, gli altri numeri primi che sono dopo il 100 insegnerò a trovarli attraverso una regola[1031]. (3) Gli altri numeri, invece, sono definiti composti, o epipedi[1032], vale a dire superficiali, da Euclide, espertissimo di geometria, dal momento che sono composti dalla moltiplicazione di alcuni numeri, come nel caso di 12, che è composto dalla moltiplicazione di 2 per 6, o di 3 per 4; noi pertanto chiamiamo "regolari" tali numeri[1033]. (3) E dal momento che la dottrina del dividere per i numeri primi o per quelli compositi non è la stessa, mostreremo come dividere qualunque numero che sia maggiore di quelli per i numeri primi, vale a dire per quelli che sono 'senza regola', al di sotto di 100.

(4) Se, allora, qualcuno volesse dividere un qualunque numero per uno dei numeri scritti sopra che sia senza regola, scriva il numero sulla tavoletta e sotto di esso ponga il numero primo stesso per il quale vorrà dividere, mettendo in colonna ogni grado simile sotto il simile e veda se le due ultime cifre del numero da dividere formino un numero maggiore, o uguale o minore di quel numero primo per il quale il numero sarà diviso. (5) E se formeranno un numero maggiore o uguale, l'ultimo grado del quoziente deve cominciare sotto il grado seguente all'ultimo del dividendo[1034], cioè sotto la penultima cifra, e ponga lì secondo valutazione una tale cifra che, moltiplicata per il numero stesso o divisore,

---

[1029] Persistono delle difficoltà riguardo l'etimologia araba del termine hasam. Secondo l'arabista Annunziata Russo: "*asm*-, infinito del verbo tagliare, recidere; impedire. (fonte: Lis?n al-?Arab, s.v. * |sm). Purtroppo dalle fonti arabe consultate non sono riuscita a trovare un significato del termine in ambito matematico, per cui suggerirei come senso più prossimo quello di numero 'incomposito' in quanto tagliato, reciso o interrotto rispetto alla serie dei numeri composti (il senso della serie si può ritrovare in Corano LXIX, 7 in cui è riportato il termine, collocato sotto la stessa radice, |us?m: 'ininterrottamente').

[1030] Senza canone: senza regola, cwris kanon

[1031] In questo capitolo Fibonacci ultilizzerà il termine *regula* nell'accezione di 'insieme dei divisori' di un numero. Nel presente contesto, però, il Pisano usa il termine nella sua accezione classica di 'norma', il copista del codice riccardiano, infatti, rendendosi conto dell'ambiguità emenda *per regulam* in *postea*.

[1032] Epipedi significa 'che sono su un piano'.

[1033] I numeri che non siano primi vengono definiti 'regulares' perché hanno una 'regula'. Il termine latino 'regula' non è in questo contesto facilmente traducibile. È chiaro che il Pisano allude ai divisori dei numeri che, nei paragrafi seguenti, scompone in fattori primi. In questa traduzione preliminare si è ritenuto di rendere la voce latina 'regula' con 'regola', come è prassi nelle traduzioni in lingua moderna del *Liber Abaci*. Tale scelta non appare tuttavia soddisfacente perché il termine italiano 'regola' indica una legge, una prescrizione e mai, come in Fibonacci, l'insieme dei divisori che 'misurano' un numero. Va però rilevato che nel linguaggio settoriale della musica la 'regola armonica' è il 'monocordo', Zarlino, 2-3-134: Regola armonica è istrumento nel quale, col mezzo d'un altro detto emisferio in una corda o più tiratole sopra, si va investigando le ragioni delle consonanze e delle parti loro. Bontempi, I-I-55: Distese [Pitagora] una corda sopra un'asse e diede forma ad un nuovo strumento, il quale fu chiamato da chi canone, da chi regola armonica e da chi monocordo. G. B. Martinni, 2-3-222: Vengono questi strumenti chiamati 'monocordo', 'canone armonico' o, come vuole Boezio, 'regola armonica'. (cit. in S. Battaglia, *Grande Dizionario della Lingua Italiana*, Torino 1972, XV, p.734).

[1034] *Numerus dividendus*, 'numero da dividere', è più semplicemente il 'dividendo': ora in poi lo indicheremo così per una maggiore scorrevolezza della traduzione.

dia come risultato il numero formato dalle ultime due cifre suddette, o quasi. E allora moltiplicherà[1035] tale cifra per l'ultima cifra del numero primo stesso, vale a dire del divisore, e deve sottrarre il risultato[1036] dall'ultima cifra. E se avanzerà qualcosa, scriva questo resto sopra la cifra stessa. E moltiplichi tale cifra posta[1037] per la prima del medesimo numero primo, cioè del divisore, e sottragga il prodotto[1038] dalla suddetta unione del resto e della penultima cifra, e se il resto sarà un numero di due cifre, cioè una quantità che sia più grande di 10, ponga il primo grado di quel numero sopra la penultima cifra, e l'ultimo sopra l'ultima. Se poi tale resto sarà di primo grado, vale a dire minore di 10, ponga la cifra di quel numero sopra la penultima e unisca tale resto con la terzultima cifra. E sotto la terza cifra stessa ponga secondo valutazione una tale cifra che moltiplicata [R, f.22r] per il medesimo divisore, determini come risultato il numero di tale unione, o quasi.

(6) In che modo tale giudizio possa fondarsi sulla base di un metodo, farò in modo di mostrarlo nelle seguenti divisioni, secondo le loro differenze.

(7) E allora moltiplichi tale cifra posta sotto la terza per l'ultima del divisore e sottragga il prodotto, se sarà possibile, dall'ultimo grado del suddetto resto dopo che è stato unito. Se poi lo sottrarrà dall'unione dell'ultima cifra e della seguente e porrà il resto sopra il medesimo grado, moltiplicherà anche di nuovo questa cifra per la prima del divisore e sottrarrà il prodotto dal numero rimanente e porrà il resto sopra, e così unendo sempre i resti con le cifre seguenti grado per grado e ponendo secondo valutazione le cifre sotto tali gradi, e secondo l'ordine prescritto si applichi a procedere moltiplicando fino a quando giunga alla fine del numero. (8) Ma dal momento che spesso accadrà che dall'unione del resto e della cifra antecedente non può essere estratto il numero divisore, allora bisognerà scrivere uno zero sotto quella cifra antecedente e unirà ad essa, cioè all'antecedente o al seguente e al resto, l'altra cifra antecedente o seguente e sotto di essa deve porre quella cifra che moltiplicata per il numero divisore determini come risultato il numero di quelle suddette tre cifre, vale a dire di quelle che verranno fuori dall'unione della cifra del resto e delle due cifre antecedenti o seguenti. Per cui se le ultime due cifre del dividendo determineranno un numero minore del divisore, come abbiamo già detto, l'ultimo grado del quoziente dovrà iniziare sotto la terzultima cifra. E così potrai dividere qualunque numero per i suddetti numeri primi. (9) E affinché le cose che sono state dette siano comprese più chiaramente, saranno mostrate con i numeri[1039].

Divisione di 18456 per 17.

[1035] Fibonacci passa bruscamente alla seconda persona per poi tornare subito alle terza. Vale la pena di ricordare ancora una volta che può trattarsi tanto di un errore della tradizione, quanto di un anacoluto tipico dello stile inconcinno del Pisano.
[1036] Si è tradotto semplicemente con "risultato" il latino "exeuntem summam" "risultato che viene fuori".
[1037] Posta vale 'segnata'?
[1038] Per rendere più scorrevole la lettura si è ritenuto opportuno rendere 'multiplicationem', che è una brachilogia, con 'prodotto [della moltiplicazione]'.
[1039] ne faremo degli esempi pratici con i numeri, ne faremo degli esempi numerici.

(1) Se uno volesse dividere 18456 per 17, scriva il 17 sotto il 56 di 18456 e calcoli $\frac{1}{17}$ di 18 che sono le ultime due cifre del dividendo che è 1 e resta 1. E ponga l'1 sotto l'8 del medesimo 18, e ponga l'1 del resto sopra l'8, come si mostra nella prima figura. E unisca l'1 stesso con la cifra antecedente, vale a dire con il 4, risulterà 14. Dal momento che questo 14 è minore del divisore, vale a dire di 17, porrà uno 0 sotto il 4, vale a dire ponendolo davanti[1040] all'1 sotto l'8 e unirà[1041] questo 14 con la cifra antecedente, vale a dire con il 5, risulterà 145. Porrà pertanto secondo valutazione sotto il suddetto 5 la tale cifra che, moltiplicata per 17, determerà come risultato quasi il suddetto 145[1042]. (2) Infatti, come tale valutazione si ottenga da un metodo, si veda dal numero divisore, vale a dire da 17, a quale decina sia più vicino: la decina più vicina è 20. Si divida dunque il suddetto 145 per 20, che si svolge così: del 20 si tralasci la prima cifra, vale a dire lo zero, rimarrà 2 da quel 20. E tralasci di nuovo la prima cifra del 145, vale a dire 5 [R, f. 22v], resterà 14, che deve dividere per il suddetto 2, risulterà 7, e tale deve essere la cifra che deve porre sotto il 5, oppure una in più[1043], vale a dire 8 e questo accade perché 17 è minore di 20: donde $\frac{1}{17}$ di 145 è una parte maggiore rispetto a $\frac{1}{20}$ [di 145]. Ponga pertanto l'8 sotto il 5 di 145, dal momento che qui così è necessario e moltiplichi questo 8 per 17 e sottragga il prodotto della loro moltiplicazione da 145, cosa che si svolge così: si moltiplicherà[1044] dunque l'8 per l'ultima cifra del 17, vale a dire per 1, risulterà 8, che si deve sottrarre da 14, resterà 6 che deve porre sopra il 4 di 14 e deve unire questo 6 con il 5 antecedente, risulterà 65, da cui deve sottrarre il prodotto di quel medesimo 8 per l'altra cifra del 17, cioè per il 7. Il prodotto di questa moltiplicazione è 56, resta 9 e tanto resta da 145, sottratta da lì la moltiplicazione di 8 per 17, come si mostra nella seconda figura. Ponga pertanto il 9 sopra il 5 e lo unisca con la cifra precedente, vale a dire con il 6, risulterà 96 che resta da dividere per 17, e ponga sotto il 6, di nuovo, la tale cifra che moltiplicata per 17 determini un risultato quanto più vicino possibile a 96. Donde, affinché sappia quale sia quella cifra, tralasci il 6 di 96 e divida per 2 il 9 che resta, come abbiamo fatto prima con il 14, risulterà $\frac{1}{2}4$. Per questo ponga il 5, che è più grande di $\frac{1}{2}4$, sotto il 6, cioè nel primo grado del quoziente, e moltiplicherà questo 5 per l'1 di 17, vale a dire per l'ultima cifra di tale numero, risulterà 5 che deve sottrarre da 9 che è posto sopra il 5, resta 4, che deve porre sopra quel 9 e unirà tale 4 con il 6 antecedente vale a dire con quello che prima abbiamo unito al 9, determinerà 46 da cui deve sottrarre il prodotto di quel 5 per 7, cioè 35, resterà 11 che deve porre sopra il 17 conservato da parte sotto la linea di frazione e porrà davanti ad essa il quoziente, vale a dire 1085. E così otterrai $\frac{11}{17}1085$ come risultato della richiesta divisione come è mostrato nell'ultima figura.

[1040] Nota sul davanti in Fibonacci
[1041] Copulabis: si è preferito non rendere l'anacoluto, tipico dello stile inconcinno di Fibonacci, nella traduzione.
[1042] Dicta è neutro
[1043] ingrandita di un'unità
[1044] Ancora un anacoluto di cui non si dà ragione nella traduzione.

(3) Di nuovo se uno volesse dividere il medesimo 18456 per 19, scriva il 19 sotto il 56 di 18456. E ponga sotto il 4 di 184 la tale cifra, che moltiplicata [N, f. 30v] per 19 faccia quasi quel 184. Quale sia questa cifra lo si apprende nello stesso modo che abbiamo detto per il 17, cioè: si tralasci il 4 di tale 184, resta 18 che deve dividere per 2, risulterà 9 e tale deve essere la cifra da porre, vale a dire 9. Per questo ponga il 9 sotto il 4, vale a dire sotto il terzo grado e moltiplichi il 9 per l'1 del 19, risulterà 9 che deve sottrarre da 18, resta 9 che deve porre sopra l'8 e unisca questo 9 con il 4, risulterà 94 da cui deve sottrarre il prodotto di quel 9 per il 9 di 19, che è 81, resta 13. Porrà questo 13 sopra il 94, vale a dire l'1 sopra il 9 e il 3 sopra il 4, come si vede nella prima figura. E unirà il 13 con la cifra precedente, cioè con il 5, risulterà 135. E porrà sotto il 5 la tale cifra che, moltiplicata per 19, determini 135 o giù di lì, e questa sarà 7: perché se si tralascerà il 5 di 135 resterà 13 che se sarà diviso per 2 darà come risultato un po' più di 6. Quindi porrà il 7 sotto il 5 e moltiplicherà il 7 per l'1 del 19, risulterà 7, che deve sottrarre dal 13, resta 6, che deve porre sopra il 3 [R, f.23r] del 13 e unirà il 6 con il 5, determinerà 65, da cui sottrarrà la moltiplicazione di 7 per 9, vale a dire 63, resterà 2, che si porrà sopra il 5, come si vede nella seconda figura. E unirà il 2 con la cifra precedente, vale a dire con il 6 del primo grado, determinerà come risultato 26 che dividerà per 19, per così dire, risulta 1 con resto di 7. Ponga l'1 nel primo grado del quoziente, cioè sotto il 6, e ponga il 7 del resto sopra la linea di frazione del 19 che deve essere messo da parte, e ponga il quoziente, vale a dire 971, davanti a tale linea di frazione. E così otterrà come risultato della divisione richiesta $\frac{7}{19}971$, come si vede nell'ultima figura.

<...>

(1) Presentata pertanto la trattazione per valutare[1045] come porre le cifre quando dividiamo i numeri per 17 e per 19, ora, poi, mostriamo in che modo si deve valutare[1046] come porre le cifre quando li vogliamo dividere per gli altri numeri primi[1047] che sono al di sotto del cento. (2) E questo è il metodo per tale divisione: come quando dividiamo per 17 o per 19, calcoliamo la metà del numero da dividere, tralasciata la prima cifra, e anzi uno di più, per il fatto che 17 e 19 sono inferiori a 20, come abbiamo detto, così, quando divideremo per 23, calcoleremo la metà o anzi uno in meno, dal momento che 23 è maggiore di 20 e così [N, f.31r] quando divideremo per 29 dobbiamo calcolare la terza parte e anzi[1048] uno in più, dal momento che 29 è inferiore a 30 al quale è più vicino che ad altre decine. E quando divideremo per 31 dobbiamo calcolare la terza parte e anzi uno in meno. (3) E così, allo stesso modo, quando divideremo per 37, dobbiamo calcolare la quarta parte e anzi 1 in più. E quando per 41 o per 43, dobbiamo calcolare la quarta parte e anzi un numero in meno. E quando

[1045] *In habendo arbitrium*: 'per valutare secondo il proprio giudizio'. Si è inteso che con il sintagma *habere arbitrium* Fibonacci esprima l'idea del 'valutare'.
[1046] Valutare secondo il proprio giudizio
[1047] Non si sono trovate altre attestazioni di questo "asam" o "hasam" che, dal contesto, sembrerebbe indicare il "numero primo".
[1048] Risemantizzazione di quinque

divideremo per 47 dobbiamo calcolare la quinta parte e anzi 1 in più. E quando per 53 la quinta parte e anzi 1 in meno e quando per 59 la sesta parte e anzi un numero in più. E quando per 61, la sesta parte o un numero in meno. Quando per 67, la settima o un numero in più. Quando per 71 o per 73 la settima o un numero in meno. E quando per 79 dobbiamo calcolare l'ottava o un numero in più. E quando per 83, l'ottava o un numero in meno. E quando per 89, dobbiamo calcolare la nona o un numero in più. E quando divideremo per 97, dobbiamo calcolare la decima parte del numero da dividere, tralasciata una cifra, o anzi uno in più. (4) Per cui, quando qualcuno dividerà un numero qualunque per un numero qualunque di quelli scritti sopra e non saprà se debba aggiungere o diminuire di un numero, rispetto a quanto abbiamo detto, ponga quella parte che a lui si presenta più sopra e moltiplichi quella parte stessa per il divisore e se il prodotto risulterà maggiore del numero da dividere ne deve calcolare un'unità in meno. E se il prodotto risulterà inferiore a quanto dovrebbe ne aggiunga una in più. (5) E così potrà dividere qualunque numero per i numeri suddetti. Tuttavia esemplificheremo ciò nello svolgimento di alcune divisioni.

Divisione di 13976 per 23

(1) Parimenti, se qualcuno volesse dividere 13976 per 23, ponga il 23 sotto il 76 e, dal momento che il 23 è maggiore di 13, vale a dire del numero formato dalle ultime due cifre del dividendo, devono essere calcolate le ultime tre cifre, che formano il numero 139. Di lì bisogna cominciare l'ultimo grado del quoziente, sotto il medesimo 9. (2) Ponga qui il 6, che si trova così, cioè per mezzo della suddetta tecnica della valutazione, vale a dire dal momento che dobbiamo tralasciare la prima cifra di 139, cioè 9, resta 13 che dobbiamo dividere per 2 dal momento che 23 è più vicino a 20 che a ogni altra decina, risulterà 6 e mezzo. Di lì, dal momento che dobbiamo porre qualcosa di meno, perché 23 è più di 20, tralasciamo questa mezza unità[1049], e porremo il 6 sotto il 9 come abbiamo detto e si moltiplichi questo 6 per il 2 di 23, risulterà 12 che si deve sottrarre dal 13, resta 1 che deve porre sopra il 3 e deve unirlo con il 9, risulterà 19. E si moltiplichi il 6 per il 3 che è nel 23, risulterà 18 che si deve sottrarre dal 19, resta 1 che si deve porre sopra il 9 come si vede nella prima figura. E si unisca questo 1 con il 7 che lo precede nel numero, risulterà 17. E dal momento che questo 17 è inferiore a 23, bisogna porre uno zero sotto quel 7 e bisogna unire il 6 del primo grado del numero con il medesimo 17, risulterà 176. Dopo di ciò si ponga sotto il suddetto 6 la tale cifra che, moltiplicata per 23, realizzi quasi 176. E risulterà 7 per la suddetta ragione, cioè un numero in meno della metà di 17[1050]. Si moltiplichi pertanto questo 7 per il 2 che è nel 23, risulterà 14 che si deve sottrarre da 17, resta 3 che si deve porre sopra il 7 e lo si unisca con il 6 di primo grado, risulterà 36 da cui bisogna sottrarre la moltiplicazione di 7 per il 3 del 23, resta 15 che si deve porre sopra la linea di frazione del 23 conservato da parte come è descritto in questa ultima figura.

[1049] Si riferisce al 'mezzo' di sei e mezzo.
[1050] La metà di 17 è 8,5, quindi questa volta non viene tralasciato solo il decimale ma si calcola anche un'altra unità in meno.

Prova della suddetta divisione.

(1) Se, poi, si volesse verificare la suddetta divisione con la prova del nove, si calcoli la prova del 13976 che è 8 e la si conservi da parte. E di nuovo si calcoli la prova del quoziente, vale a dire di 607 che è 4 e la moltiplichi per la prova di 23 che è 5, risulterà 20. Calcoli la prova di tale numero, che è 2, e la addizioni al 15 che è sopra la linea di frazione del 23, risulterà 17 la cui prova è 8 come il numero che prima abbiamo conservato da parte. (2) Per esempio, dal momento che dal divisore moltiplicato per il quoziente risulta il numero diviso, dunque se moltiplichiamo la prova del divisore per la prova del quoziente, risulta la prova del numero diviso. (3) Ma dal numero diviso per 23 era rimasto 15, sottratto il quale da 13976, resta 13961 che, diviso per 23, determina come risultato 607. Dunque dalla moltiplicazione di 23 per 607 risulta 13961. (4) Per questo se si moltiplica la prova di 607, che è 4, per la prova di 23, che è 5, risulta 20 la cui prova, vale a dire 2, è la prova di 13961, a cui si addiziona la prova del 15 del resto, che è 6, risulta 8, vale a dire la prova di 13976 e questo ho voluto dimostrare.

(5) Infatti le moltiplicazioni, le addizioni e le sottrazioni o le divisioni dei numeri possono essere provati ognuno per ogni altra prova vale a dire per quella di 7 e per tutti gli altri numeri primi esistenti come per 11 o per 13 e così via. Secondo la dottrina che a noi sembrerà congrua, lo dimostreremo nelle pagine seguenti.

(1) Parimenti, se si volesse dividere 24059 per 31, scriva il 31 sotto il 2459 e si ponga il 7 sotto lo zero, dal momento che 31 è quasi 30 ed è anche di più. Di lì se calcoleremo $\frac{1}{3}$ di 24, vale a dire, sottratta la prima cifra di 240, avremo, come terza parte, 8 che è più di 7. Quindi poniamo, come abbiamo detto, il 7 sotto lo 0. E secondo il suddetto ordine si moltiplichi quel 7 per il 3 di 31, risulterà 21 che deve sottrarre da 24, resta 3, che si deve porre sopra il 4. E si moltiplichi quel 7 per l'1 del 31, risulterà 21 che si deve sottrarre da 24, resta 3, che si deve porre sopra il 4. E si moltiplichi quel 7 per l'1 di 31 risulterà 7 che si deve sottrarre da 30, resta 23 che si deve porre sopra il 30. E si cancelli quel 3, se si vuole. O se non si vuole, lo si tenga a mente come cancellato. Parimenti, si unisca questo 23 con il 5, risulterà 235 e ponga di nuovo, in base al metodo suddetto, il 7 sotto il 5, vale a dire un poco in meno della terza parte di 23 e la si moltiplichi per 3, risulterà 21 che si deve sottrarre da 23, resta 2. Si ponga il 2 sopra il 3 e si cancelli quel 23 e lo si unisca con il 5, risulta 25. E sempre si calcolino[1051] le unioni degli antecedenti con i conseguenti e si moltiplichi quel 7 per l'1, risulterà 7 che deve sottrarre da 25, resterà 18: lo si ponga sopra il 25 e si cancelli quel 25. Dopo di ciò si calcoli $\frac{1}{3}$ di 18, col metodo sopra descritto, risulterà 6. Per cui si ponga il 6 sotto il 9 e sotto l'1 del 31. Dopo averli posti, si moltiplichi quel 6[1052] per il 3 del 31, verrà 18 per il quale si cancelli il 18 posto sopra e moltiplichi quel 6 per l'1, risulterà 6 che bisogna sottrarre da 9, resta 3 che si deve porre sopra la linea

[1051] Intelligo significa calcolare, nota.
[1052] Multiplicet ipsa: con *ipsa* Fibonacci si riferisce al 6, come esplicitato nella traduzione per renderla di più immediata comprensione.

di frazione del 31 scritto da parte. (7) E così otterrai come risultato della suddetta divisione $\frac{3}{31}776$, come si vede in questa figura.

<Verifica>

(1) Voglio dimostrare donde questo modo di dividere provenga. Abbiamo posto il 7 sotto il terzo grado del numero da dividere che abbiamo moltiplicato per il 3 che è nell'ultimo grado del divisore e occupa il secondo grado, dal momento che è sotto il secondo grado del numero da dividere. E da questa moltiplicazione proviene un numero che termina in quarto grado, poiché il terzo grado, qualunque grado moltiplichi realizza il terzo da quello che moltiplica o realizza un numero terminante in esso. Infatti il quarto grado è terzo dal secondo. E perciò abbiamo sottratto la moltiplicazione di 7 per 3, vale a dire 21, da 24 che termina in quarto grado. E abbiamo posto il 3 sopra lo stesso quarto grado, vale a dire sopra il 4 e abbiamo calcolato l'unione del 3 con lo 0 che è nel terzo grado del numero da dividere, unione che è 30: e moltiplichiamo di nuovo quel 7 per l'1 che è nel primo grado del divisore. E poiché in questa moltiplicazione moltiplichiamo il terzo grado per il primo, che è lo stesso che moltiplicare il primo per il terzo. E allo stesso modo sottraiamo il prodotto[1053] di 7 per 1, vale a dire 7, da 30 che termina nel terzo grado; per questo dalla moltiplicazione del terzo grado per il primo o del primo per il terzo risulta un numero di terzo grado o terminante in quel grado: e abbiamo posto il 23 sopra il 30 o al suo posto[1054], e abbiamo congiunto il 23 con il 5 che è il secondo grado e abbiamo ottenuto 235 che termina in secondo grado. E abbiamo posto in secondo grado un altro 7 che moltiplichiamo di nuovo per il 3 del divisore, cioè il secondo grado per il secondo. Da tale moltiplicazione risulta un numero di terzo grado, o terminante in esso. E per questo abbiamo sottratto il 21 dal 23, dal momento che entrambi terminano nel terzo grado, e abbiamo posto il 2 che è rimasto sopra il 3, e abbiamo calcolato la sua sua congiunzione con il 5 seguente, unione che è 25 e termina in secondo grado. Da questo 25 abbiamo sottratto la moltiplicazione di 7 per 1, vale a dire del secondo grado per il primo: da tale moltiplicazione è risultato un numero di secondo grado o terminante in esso, è rimasto 18 nello stesso grado in cui c'è il 25, vale a dire l'1 in terzo grado, e l'8 nel secondo. E abbiamo unito questo 18 con il 9 del primo grado, è risultato 189, e abbiamo posto il 6 nel primo grado del quoziente e lo abbiamo moltiplicato per 3, vale a dire il primo grado per il secondo, da tale moltiplicazione è risultato un numero terminante in secondo grado: il prodotto di tale moltiplicazione[1055] è risultato 18, in vece del quale abbiamo fatto sì di cancellare il suddetto 18 dal momento che terminava in secondo grado. E abbiamo moltiplicato lo stesso 6 per 1 ed è risultato 6 in primo grado che abbiamo sottratto dal 9 che è nello stesso grado, è rimasto 3 che, diviso per 31, dà come risultato $\frac{3}{31}$. E così otteniamo $\frac{3}{31}$ 776. E fai i calcoli secondo questo metodo in simili divisioni.

[1053] *Multiplicationem* è una brachilogia per 'prodotto'.
[1054] Si ricorda che esiste il metodo della cancellazione
[1055] multiplicatio: prodotto della moltiplicazione

<Verifica>

(1) Infatti se si desidera conoscere la prova della divisione scritta sopra attraverso la 'prova del 7[1056]', si calcoli la prova per 7 di 24059, cioè il resto di quel numero diviso per 7. (2) Tale resto dovrà essere calcolato così: si dica che da $\frac{1}{7}$ di 24 resta 3[1057], < da $\frac{1}{7}$ > del 30 che segue, vale a dire congiungendo <il 3 del resto con lo 0 antecedente>[1058], resta 2, < da $\frac{1}{7}$ > del 25 resta 4, < da $\frac{1}{7}$ > del 49 resta 0, come resto richiesto che si ottiene come "resto di prova". (3) Allo stesso modo si calcoli la prova di 776 che è 6 e la si moltiplichi per la prova di 31 che si trova sotto la linea di frazione, cioè per 3, risulta 18 che si deve dividere per 7, resta 4 che si deve addizionare con il 3 che è sopra la linea di frazione del 31, risulta 7 che si deve dividere per 7, resta 0, come era necessario che rimanesse come prova.

Divisione di 780005 per 59

(1) Se tuttavia si volesse dividere 78005 per 59, scritti i numeri, ponga l'1 sotto l'8 per il fatto che se tralasciamo l'8 di 78 resta 7 che se lo dividessimo per 6, dal momento che questo 59 è quasi 60, uscirà un po'più di 1. (2) Per cui dobbiamo porre l'1 sotto l'8, come abbiamo detto prima. Posto questo, lo si moltiplichi per 5, risulterà 5 che deve sottrarre da 7, resta 2 che si deve porre sopra il 7 e si moltiplichi il medesimo 1 per 9 e si sottragga il prodotto di quella moltiplicazione[1059] da 28, resta 19. E cancelli o elimini il 2 posto sopra il 7, e ponga quel 19 sopra il 78. E, secondo il suddetto metodo, ponga il 3 sotto lo 0 di quarto grado e lo moltiplichi per 5, risulterà 15 che deve sottrarre da 19, resta 4. Cancelli il 19 stesso e, in luogo del 9, ponga il 4 stesso. E moltiplichi il 3 stesso per il 9, e lo sottragga dal 40, resta 13: elimini questo 4 e ponga lì l'1 e sopra lo 0 ponga il 3. (3) Dopo ciò bisogna dividere 130 per 59 e per questa divisione, in base al suddetto metodo, bisogna calcolare 2 e questo 2 bisogna porlo sotto lo zero del terzo grado. Una volta moltiplicato questo 2 per 59 e sottratto il risultato da 130, resta 12: sarebbe la stessa cosa se si moltiplicasse il suddetto 2 per 5 e lo si sottraesse da 13 e lo si moltiplicasse per 9 e lo si sottraesse da 30. (4) Si cancelli pertanto il 13 e si ponga l'1 nel luogo in cui vi era il 3 di 13 e si ponga il 2 sopra lo 0 di terzo grado. Dopo questo si ponga il 2 sotto lo 0 di secondo grado, e lo si moltiplichi per 59 e si sottragga il risultato da 120, resta il 2 sopra lo 0. E si cancelli nella sua mente il 120 che era rimasto dalla precedente divisione e questa operazione si definisce 'cancellare' o 'eliminare' le cifre così come per intendere che esse sono cancellate o eliminate. (5) Dopo di ciò si unisca questo 2[1060] con il 5 che è nel primo grado del numero,

[1056] il resto di prova
[1057] 24:7= 3 con resto 3
[1058] Congiungendo cioè il 3 (vale il resto di 24:7=3 con resto 3) con lo 0 che in 24059 viene dopo il 24.
[1059] *Multiplicationem* è una brachilogia che vale per 'il prodotto di quella moltiplicazione'.
[1060] *Copulet ipsa*: si è chiarito che si tratta del 2 del periodo precedente per maggiore chiarezza della traduzione.

risulta 25: poiché è minore di 39, si ponga uno 0 sotto il 5 di primo grado e il 25 sotto la linea di frazione del 59 scritto da parte, come in questa figura è indicato chiaramente.

<Esempi>

(1) E affinché le cose che sono state dette sulla divisione appaiano più chiare, dividiamo un numero qualunque per 97. (2) E sia dato 5917200. Posto il 97 sotto entrambi gli zero, si divida il numero formato dalle ultime tre cifre del dividendo, vale a dire 591, per 97, per la quale divisione viene fuori 6, perché 97 è più vicino a 100 che ad un altra decina. (3) Per cui dobbiamo dividere 59, vale a dire il numero formato dalle ultime due cifre, per 10, dalla cui divisione risulta quasi 6, vale a dire un decimo in meno, e dal momento che 97 è meno di 100, dobbiamo calcolare 5 decine e più. Di lì si arriva fin quasi[1061] a 6: ponga questo 6 sotto il primo grado del numero composto da quelle tre cifre cioè sotto l'1 che è nel quinto grado di tutto il numero. E moltiplichi questo 6 per il 9 di 97, risulterà 54 che si deve sottrarre da 59, cioè dal numero composto dalle ultime due cifre, resta 5 che si deve porre sopra il 9. (4) E si moltiplichi questo 6 per il 7 di 97, risulterà 42, che si deve sottrarre da 51, cioè dalla congiunzione del 5 posto sopra con l'1 antecedente, resta 9 che deve porre sopra l'1 e elimini o cancelli dalla mente il 5 posto. E il suddetto 9, che è posto sopra l'1, resta dalla divisione di 591 per 97. Il quale 9, unito con la cifra precedente nei gradi, vale a dire con il 7 che è nel quarto grado del numero, realizza 97 che si deve dividere per 97, vale a dire per il divisore, risulterà 1: si ponga l'1 sotto il 7 e lo si moltiplichi per il 9 di 97, risulterà 9, per il quale si cancelli il 9 che era avanzato da 591, e si moltiplichi il medesimo 1 per il 7, risulterà 7, per il quale si tralasci il 7 con il quale il 9 era stato unito. E poiché di tale 7 non rimane nulla per congiungerlo con il 2 antecedente ad esso e il 2 stesso è inferiore a 97, ponga uno 0 sotto tale 2 e unisca il 2 con lo 0 ad esso antecedente, e risulterà 20. (5) Parimenti, dal momento che tale 20 è inferiore a 97, bisogna porre uno 0 sotto il suddetto 0 congiunto con il 2, vale a dire sotto quello che è nel secondo grado del numero: dopo ciò si congiunga questo 20 con lo 0 ad esso antecedente, vale a dire con quello che è nel primo grado, risulta 200, che resta da dividere per 97. (6) Per tale divisione bisogna porre il 2 sotto lo zero di primo grado, in base al metodo che è stato descritto prima, e lo si deve moltiplicare per 9, e sottrarlo dal 20 congiunto più sopra, resta 2, che si deve porre sopra lo 0 di secondo grado. E si calcoli[1062] l'unione di queste cifre con lo 0 antecedente che è nel primo grado, che risulta 20, da cui si deve sottrarre il prodotto della moltiplicazione[1063] di 2 per 7, resterà 6, che si deve porre sopra la linea di frazione del 97 scritto da parte. E si otterrà per la richiesta divisione $\frac{6}{97}$ 61002.

<Divisioni dei numeri composti>

[1061] Contigunt vale 'toccare' o 'sfiorare', si è preferita una traduzione più vicina al linguaggio matematico.
[1062] Si noti ancora che *intellego* ha ancora l'accezione di 'calcolare'.
[1063] *Multiplicationem* è brachilogia nel senso di 'prodotto della moltiplicazione'.

(1) Dal momento che sembra sia stato detto abbastanza sulla divisione dei numeri per i numeri di due cifre che sono ‘senza regola’[1064], cioé ‘primi’, ora invero mostreremo le loro divisioni per quelli che sono composti, cioè hanno una regola. (2) E sebbene dividere per i numeri composti è come dividere per tutti i numeri primi - moltiplichiamo tuttavia più agilmente e sottilmente - nelle pagine seguenti se ne mostra la dottriva, vale a dire come si trovino le loro ‘regole’[1065], vale a dire i numeri dai quali sono composti e come si pongano sotto una linea di frazione, in modo che i minori seguano sempre i maggiori in direzione di sinistra, come si è insegnato sopra in questo stesso capitolo. (3) Dopo ciò si divida il numero che si vuole dividere per la più piccola tra le componenti[1066] del divisore, cioè per la quantità numerica ovvero la cifra più piccola che si troverà sotto la linea di frazione, e se ci sarà un qualche resto lo si ponga sopra la stessa cifra o sul numero. (4) E il quoziente della divisione sia diviso per il numero o per la cifra antecedente nella linea di frazione. Se ci sarà resto lo si ponga sullo stesso numero o cifra antecedente. (5) E così ci si applichi sempre a dividere i quozienti della divisione per le componenti antecedenti fino alla loro fine, e ci si abitui, ponendo i resti sopra le componenti, a porre il quoziente della divisione dell’ultima componente, cioè dell’ultimo numero che sta sotto la linea di frazione, davanti alla linea di frazione stessa. (6) E così si otterrà la soluzione della divisione[1067] di qualunque numero per qualunque numero composto di qualunque grado. (7) Infatti, prima di chiarire ciò con dimostrazioni, abbiamo ritenuto necessario mostrare come trovare le composizioni dei numeri composti[1068], e di conoscere anche quella dei numeri ‘senza regola’. (8) E dal momento che sono stati mostrati in una tabella precedente i numeri di due cifre che sono ‘senza regola’, siano mostrati, similmente i divisori[1069] dei composti di due cifre uno per uno sotto linee di frazione. Poi mostreremo come reperire attraverso una regola[1070] le composizioni degli altri gradi[1071].

Composizioni dei numeri di due cifre cioè che si scrivono con due cifre.

12	$\frac{1}{2}\frac{0}{6}$	44	$\frac{1}{4}\frac{0}{11}$	74	$\frac{1}{2}\frac{0}{37}$
14	$\frac{1}{2}\frac{0}{7}$	45	$\frac{1}{5}\frac{0}{9}$	75	$\frac{1}{3}\frac{0}{5}\frac{0}{5}$
15	$\frac{1}{3}\frac{0}{5}$	46	$\frac{1}{2}\frac{0}{23}$	76	$\frac{1}{4}\frac{0}{19}$

[1064] Ovvero sono privi di divisori.
[1065] La dottrina mostra come trovare la loro scomposizione in fattori.
[1066] Nella scomposizione in fattori di un numero le *componentes* sono appunto i ‘fattori’.
[1067] soluzione della divisione: divisionem factam
[1068] La scomposizione in fattori dei numeri.
[1069] Regule: qui è tradotto come ‘divisori’
[1070] In questo caso *regula* ha il significato proprio di ‘norma’. Dell’oscillazione semantica di tale termine all’interno di questo capitolo si è già parlato.
[1071] Qui Fibonacci intende che conoscendo la ‘regola’ cioè la scomposizione in fattori dei numeri di secondo grado, si può risalire alla scomposizione in fattori dei numeri di gradi superiori, una volta che siano stati scomposti in numeri di secondo grado.

16	$\frac{1}{2}\frac{0}{8}$	48	$\frac{1}{6}\frac{0}{8}$	77	$\frac{1}{7}\frac{0}{11}$
18	$\frac{1}{2}\frac{0}{9}$	49	$\frac{1}{7}\frac{0}{7}$	78	$\frac{1}{6}\frac{0}{13}$
20	$\frac{1}{2}\frac{0}{10}$	50	$\frac{1}{5}\frac{0}{10}$	80	$\frac{1}{8}\frac{0}{10}$
21	$\frac{1}{3}\frac{0}{7}$	51	$\frac{1}{3}\frac{0}{17}$	81	$\frac{0}{9}\frac{0}{9}$
22	$\frac{1}{2}\frac{0}{11}$	52	$\frac{1}{4}\frac{0}{13}$	82	$\frac{1}{2}\frac{0}{41}$
24	$\frac{1}{3}\frac{0}{8}$	54	$\frac{1}{6}\frac{0}{9}$	84	$\frac{1}{2}\frac{0}{6}\frac{0}{7}$
25	$\frac{1}{5}\frac{0}{5}$	55	$\frac{1}{5}\frac{0}{11}$	85	$\frac{1}{5}\frac{0}{17}$
26	$\frac{1}{2}\frac{0}{13}$	56	$\frac{1}{7}\frac{0}{8}$	86	$\frac{1}{2}\frac{0}{43}$
27	$\frac{1}{3}\frac{0}{9}$	57	$\frac{1}{3}\frac{0}{19}$	87	$\frac{1}{3}\frac{0}{29}$
28	$\frac{1}{4}\frac{0}{7}$	58	$\frac{1}{2}\frac{0}{29}$	88	$\frac{1}{8}\frac{0}{11}$
30	$\frac{1}{3}\frac{0}{10}$	60	$\frac{1}{6}\frac{0}{10}$	90	$\frac{1}{9}\frac{0}{10}$
32	$\frac{1}{4}\frac{0}{8}$	62	$\frac{1}{2}\frac{0}{31}$	91	$\frac{1}{7}\frac{0}{13}$
33	$\frac{1}{3}\frac{0}{11}$	63	$\frac{1}{7}\frac{0}{9}$	92	$\frac{1}{4}\frac{0}{23}$
34	$\frac{1}{2}\frac{0}{17}$	64	$\frac{1}{8}\frac{0}{8}$	93	$\frac{1}{3}\frac{0}{31}$
35	$\frac{1}{5}\frac{0}{7}$	65	$\frac{1}{5}\frac{0}{13}$	94	$\frac{1}{2}\frac{0}{47}$

36	$\frac{1}{4}\frac{0}{9}$	66	$\frac{1}{6}\frac{0}{11}$	95	$\frac{1}{5}\frac{0}{19}$
38	$\frac{1}{2}\frac{0}{19}$	68	$\frac{1}{4}\frac{0}{17}$	96	$\frac{1}{2}\frac{0}{6}$
39	$\frac{1}{3}\frac{0}{13}$	69	$\frac{1}{3}\frac{0}{23}$	98	$\frac{1}{2}\frac{0}{7}\frac{0}{7}$
40	$\frac{1}{4}\frac{0}{10}$	70	$\frac{1}{7}\frac{0}{10}$	99	$\frac{1}{9}\frac{0}{11}$
42	$\frac{1}{6}\frac{0}{7}$	72	$\frac{1}{8}\frac{0}{9}$	100	$\frac{1}{10}\frac{0}{10}$

Regola[1072] generale per trovare i fattori[1073] dei numeri dispari.

(1) Quando poi uno abbia appreso, grazie al lungo esercizio, le ‘regole’ dei numeri precedentemente scritti nelle tabelle e vuole trovare le regole, vale a dire la scomposizione in fattori, di qualunque numero tra gli altri numeri di tre o più cifre, o vuole capire se quello è un numero primo, cioè senza ‘regola’[1074], scriva il numero sulla tavoletta, e una volta scrittolo, consideri se il numero è pari o dispari. (2) Infatti se sarà pari, ne deduca che lo stesso è composto. Se invece sarà dispari, potrà essere composto oppure primo. Infatti i numeri pari sono composti o da pari e dispari, o soltanto da pari. Per questo le loro ‘regole’ devono essere ricercate a partire dai numeri pari, come dimostreremo a suo luogo[1075]. I numeri dispari, invece, sono composti solo da numeri dispari, per cui si cerchino i fattori stessi soltanto attraverso i numeri dispari e da questi appunto cominciamo[1076]. (3) Pertanto, qualora la cifra di primo grado di un qualunque numero dispari sia il numero 5, si sappia che esso è composto di 5, cioè che si divide perfettamente per 5. (4) Se invece fosse un’altra cifra dispari in primo grado che rende tutto il numero dispari, calcoli la sua prova per nove: se sarà zero, allora avrà

[1072] Fibonacci utilizza il termine *regula*, sia nella nostra accezione di ‘regola, norma codificata’ (come in questo caso), sia in quella di ‘divisore’ o meglio ‘insieme dei divisori di un numero’. Relativamente a tale seconda accezione si è preferito rendere per ora regula con ‘regola’ quando il sostantivo appare al singolare e quindi simanda all’insieme dei divisori di un numero, mentre si è tradotto ‘divisori’ quando il termine appare al plurale (cfr. *infra*) e il riferimento è a solo alcuni dei fattori in cui un numero è scomponibile.

[1073] *Compositio* e *Compositiones* di un numero indicano le ‘composizioni’ di un numero, ovvero l’insieme dei fattori primi in cui esso può essere scomposto, si è tradotto pertanto ‘scomposizione in fattori’ - ma non in ‘fattori primi’ perché talora Fibonacci considera come ‘componente’ di un numero anche l’8. Il termine in realtà sembra essere utilizzato come sinonimo di *regula*, rispetto al quale andranno rilevate le differenze nelle sfumature di significato.

[1074] I numeri primi non possono essere scomposti in fattori diversi da 1 e se stessi, quindi sono definiti ‘senza regola’.

[1075] Cfr. *infra* il paragrafo intitolato ‘Trovare le regole dei numeri pari’.

[1076] Ovvero, si cominci l’indagine sui fattori di un numero dispari partendo dalla cifra di primo grado - quella da cui ‘si prende inizio’.

$\frac{1}{9}$ nella sua scomposizione in fattori, se sarà 3 oppure 6, allora avrà $\frac{1}{3}$ nella sua scomposizione in fattori. (5) Se invece non avrà come prova nessuno di tali numeri, allora lo divida per 7, e se di lì ci sarà qualche resto divida ancora il numero per 11, e se ci sarà qualche resto, divida lo stesso per 13 e sempre si proceda dividendo per i numeri primi in ordine, secondo come sono scritti nella tabella riportata più sopra finché si troverà un qualche numero primo per il quale il numero proposto possa essere diviso senza alcun resto o finché si giungerà alla radice[1077] del numero stesso. (6) Se non potrà essere diviso per nessuno di quei numeri, allora esso dovrà essere classificato come numero primo. (7) Se invece si sarà potuto dividere senza resto per qualcuno dei suddetti numeri primi, divida di nuovo per lo stesso numero il quoziente della divisione, e divida di nuovo per lo stesso numero primo il numero che risulterà dalla divisione, cioè da quello s'inizierà a cercare i suoi fattori in ordine per tutti gli altri[1078] numeri primi fino alla sua radice, se esso non avrà fattori: e facendo sempre così si proceda di grado in grado, finché esso[1079] abbia tutti i fattori[1080]. (8) Ottenuti questi perfettamente, si applichi a collocare con grande attenzione i minori in luogo dei maggiori[1081] sotto una linea di frazione. E così otterrà la 'regola', vale a dire la composizione di qualunque numero dispari.

<Esempi>

<La scomposizione in fattori di 805>

(1) Per esempio, sia dato il numero 805, del quale sia richiesta la 'regola'. Dal momento che la sua prima cifra è 5, certamente ci sarà $\frac{1}{5}$ nella sua composizione. Per questo si divida quel numero per 5, risulterà 161, la prova del quale, che è 8, una volta calcolata, mostra che quel 161 non può essere diviso integralmente nè per 3, nè per 9. (2) Per cui lo si divida per 7, risulterà 23, che è un numero primo[1082]: disponga i fattori trovati, vale a dire 5 e 7 e 23 sotto una certa linea di frazione e otterrà $\frac{1}{5}$

[1077] Fibonacci si riferisce qui alla radice quadrata. Come spiegherà in un paragrafo successivo: se non si riescono a trovare i divisori di un numero tra i numeri primi compresi tra uno e la sua radice quadrata (cioè quel numero che moltiplicato per se stesso dà il numero stesso), allora esso non ha divisori ed è inutile cercare oltre. Sarebbe infatti impossibile trovare un divisore che moltiplicato per un altro (il quoziente della divisione) dia il dividendo. Per esempio, 317 non è divisibile perfettamente né per 3, nè per 5, nè per 7 nè per 11, nè per 13, nè per 17, e non è più necessario andare oltre, perché 19x19 ha come risultato 381, che è maggiore di 317. Quindi ammettendo pure che 317 fosse perfettamente divisibile per 19, il quoziente dovrebbe essere un numero primo uguale o maggiore di 19, dal momento che si è visto che 317 non ha tra i suoi fattori nessun numero primo compreso tra 1 e 17, il che è impossibile.

[1078] Ancora una volta traduciamo *reliquos* 'rimanenti' con 'tutti gli altri' perché ci si riferisce ai 'restanti numeri primi', ovvero a tutti gli altri.

[1079] Ipsum dovrebbe riferirsi al numero di cui si cercano i fattori che, con un'oscillazione che è abbastanza frequente in questo capitolo, sembra qui sentito come neutro.

[1080] Finché ne si ottengano tutti i fattori.

[1081] Minores per maiores: Fibonacci vuole intendere che si devo scrivere prima i numeri più piccoli e poi, procedendo verso sinistra, quelli più grandi (i minori in luogo dei maggiori).

[1082] Qui numerus est sine regula: numero che è 'senza regola'.

$\frac{0}{7}\frac{0}{23}$ per la composizione di 805, cioè cinque settimi di un ventitreesimo che è un ottocentocinquesimo, per il fatto che, effettuata la moltiplicazione di 5 per 7, cioè 35 per 23, si arriva a 805.

<La scomposizione in fattori di 957>

(1) Parimenti se si chiedesse di trovare la ‘regola’di 957, lo si divida per 3 dal momento che 3 è la prova di tale numero, risulterà 319, che non deve essere diviso di nuovo per 3, dal momento che la sua prova è 4, e se lo[1083] si dividesse per 7, avanzerebbe 4. Pertanto lo si divide per 11, e la sua undicesima parte è 29, che è un numero primo. Pertanto, una volta collocata la regola trovata sotto una linea di frazione, si otterrà, per la scomposizione in fattori di 957, $\frac{1}{3}\frac{0}{11}\frac{0}{29}$, come qui si mostra.

La scomposizione in fattori di 951

(1) Poi se si volesse trovare la ‘regola’ di 951, lo[1084] si divida per 3 dal momento che la sua prova è 6, risulterà 317, per il quale è impossibile reperire un altro divisore[1085], dal momento che non può essere diviso perfettamente per 7, nè per 11, nè per 13, nè per 17. E non bisogna cercare oltre[1086] per i suoi divisori, perché se fosse diviso[1087] per 19 dalla divisione risulterebbe un numero inferiore a 19[1088]: dunque la ‘regola’ di 951 è $\frac{1}{3}\frac{0}{317}$.

<La scomposizione in fattori di 873>

(1) Parimenti se si volesse ottenere la ‘regola’di 873, dal momento che la prova <per 9> di tale numero è 0, lo divida per 9, risulterà 97, numero che, nella tabella più sopra, è indicato come primo. Questa regola, se, una volta trovata, sarà collocata sotto la linea di frazione, risulterà $\frac{1}{9}\frac{1}{97}$.

La scomposizione in fattori di 1469[1089]

(1) Invero se si volesse ottenere la ‘regola’ di 1469, la prova di tale numero, che è 2, una volta calcolata, dimostra che quel numero manca, nella regola, del 3 e del 9. Invero, se lo si dividerà per 7 avanza 6, se per 11 avanza similmente 6, ma se lo si dividerà per 13, risulterà 113, per il quale non è

[1083] In latino abbiamo *eam* che però va probabilmente emendato.
[1084] In latino c’è *ipsa* quindi il numero è sentito come neutro.
[1085] In questo caso regula si riferisce ad un divisore soltanto (è impossibile repire un altro divisore) e non all’insieme dei divisori, si è quindi tradotto ‘divisore’.
[1086] Vale a dire non bisogna andare oltre il 17 nella ricerca dei divisori di 317.
[1087] In latino abbiamo *divisa* perché il numero è sentito come neutro plurale.
[1088] 317:19= 16,6
[1089] Regula de 1469 inventio: Il titolo in latino differisce qui dagli altri casi, se ne dà conto in nota e non nella traduzione per questioni di uniformità.

più necessario cercare per qualcuno dei seguenti numeri primi o per lo stesso 13, dal momento che è maggiore della sua radice[1090] per cui si riconosce che è tra i numeri primi[1091]. Dunque la 'regola' di 1469 è, come qui si mostra, $\frac{1}{13}\frac{0}{113}$.

La scomposizione in fattori di 2543

(1) Parimenti, se si volesse trovare la 'regola' di 2543, la prova di tale numero, che è 5, una volta calcolata, dimostra che esso, nella sua regola, non può avere nè 3 nè 9. Invero tale numero, se diviso per 7, dà come resto 2. Se diviso per 11, dà come resto 2, e se diviso per 13, avanza 8. E così troverà che il numero non può essere diviso nè per 17, o per 19, o per 23 o per 29, o per 31, nè per 37 o per 41, e neanche per 47 o per 53 e non bisogna cercare oltre il 53 perché 53 è maggiore della sua radice[1092]. (2) E se fosse possibile che 2543 potesse avere tra i suoi fattori un qualche numero primo maggiore di 53, dunque tale maggiore numero, moltiplicato per un qualunque altro fattore di 2543 - che bisognerebbe fosse inferiore a 53 - dovrebbe determinare lo stesso 2543[1093], cosa impossibile, per il fatto che, cercando i suoi divisori fino al 53, non lo abbiamo trovato: dunque esso è un numero primo.

<La scomposizione in fattori di 624481>

(1) Parimenti se si volesse trovare la 'regola' di 624481, si saprà, in base alle suddette disposizioni, che quel numero non può avere nè 3, nè 9 e non ha 7 <nella sua 'regola'>: per cui si divide per 11, la cui parte, vale a dire l'undicesima, è 56771, che di nuovo si deve dividere per 11, vale a dire affinché si sappia se esso ha ancora $\frac{1}{11}$ nella sua scomposizione. (2) Infatti non è conveniente che lo si divida per i numeri che sono minori di 11, vale a dire per 9 e per 7 e per 3: dal momento che non sono stati trovati in 624481, neanche in questo, cioè in 56771, potranno in alcun modo essere rinvenuti poiché esso appartiene alla sua composizione. Ma da tale divisione, vale a dire per 11, risulterà 5161 che, diviso di nuovo per 11, dà come resto 2. Per questo è impossibile ottenere di nuovo $\frac{1}{11}$. (3) Dopo di ciò bisogna vedere se ha $\frac{1}{13}$, vale a dire lo si deve dividere per 13, dalla quale divisione risulta 397, nella cui composizione non possono essere trovati nè $\frac{1}{13}$, nè $\frac{1}{17}$, oppure $\frac{1}{19}$, per cui capiamo che questo 397 è 'primo', per il fatto che tra 19 e la radice di questo numero, non c'è alcun numero primo, cioè è 'senza regola', nè dobbiamo cercare oltre la sua radice, come abbiamo

[1090] Per 'radice', Fibonacci intende la radice quadrata.
[1091] Ovviamente Fibonacci sottintende che 113 non può avere tra i suoi fattori alcuno dei numeri fino a 13 dal momento che se essi non erano il 1469, tantomeno possono essere in 113 che è un suo divisore.
[1092] Infatti 53x53=2809>2543
[1093] Fibonacci vuole dire che se ci fosse un numero maggiore di 53 tra i suoi fattori esso dovrebbe essere tale che moltiplicato per un altro numero (il quoziente della divisione di 2543:n>53) dovrebbe dare 2543. Questo numero deve essere inferiore a 53 dal momento che 53x53=2809>2543: ma ciò non è possibile perché già si sono cercati, senza trovarli, i fattori di 2543 fino a 53.

detto. E dunque la scomposizione in fattori primi, vale a dire la ‘regola’, di 624481 è, come qui si mostra, $\frac{1}{11}\frac{0}{11}\frac{0}{13}\frac{0}{397}$.

Verifica della regola scritta sopra.

(1) Invero se si volesse verificare la ‘regola’ trovata con la prova del 7, si calcoli la prova per 7 di 624481 che è 5 e la si conservi da parte; e si calcoli la prova dell’11 posto per primo sotto la linea di frazione, che è 4 e la si moltiplichi per 4, vale a dire per la prova dell’altro 11, risulterà 16, che si deve dividere per 7, resta 2 che si deve moltiplicare per 6, vale a dire per la prova di 13, risulta 12 da cui dsi eve sottrarre 7, resta 5 che si deve moltiplicare per 5, vale a dire per la prova di 397, risulterà 25, che deve dividere per 7, resta 4, come il numero che è stato conservato come prova.

Scomposizione in fattori dei numeri pari. Regola generale.[1094]

(1) Se poi qualcuno volesse trovare la scomposizione in fattori di un numero pari, calcoli similmente la sua prova per 9, se questa sarà 0, avrà $\frac{1}{9}$ <nella sua ‘regola’>. E se sarà 3 o 6 avrà $\frac{1}{6}$ nella sua scomposizione. (2) Se tuttavia la prova di questo numero non sarà nessuna di queste, veda, dividendo per 8 il numero formato dalle due cifre che sono in primo e secondo grado, quale sarà il resto: se questo sarà 0, e la cifra di terzo grado sarà pari, o 2 o 4 o 6 oppure 8 o 0, si capisce che tutto il numero di qualunque grado può essere diviso per 8. Se invece tale terza cifrà sarà dispari, come 1 o 3 o 5 o 7 o 9, lo stesso numero riceverà $\frac{1}{4}$ nella sua scomposizione in fattori. Ma se quel resto sarà 4, e la cifra di terzo grado sarà dispari, l’intero numero sarà similmente da dividersi per 8. E se sarà pari, avrà solo $\frac{1}{4}$ nella sua composizione. Se tuttavia quel resto sarà 2 o 6, il numero, fra tutti i numeri pari, si divide solo per 2. (3) E in base a ciò calcoli i fattori pari dei numeri pari, finché ottenga la loro ‘regola’ o s’imbatta in qualche numero dispari, del quale numero dispari si applichi a trovare la ‘regola’ secondo l’ordine suddetto dei numeri dispari. (4) Infatti se nel primo grado di qualunque numero pari ci sarà uno zero, lo tolga, e in luogo di esso calcoli $\frac{1}{10}$ nella scomposizione di tale numero. E se sarà rimasto un altro 0 all’inizio del numero, lo cancelli di nuovo dal numero e di nuovo calcoli $\frac{1}{10}$ nella scomposizione di tale numero. E così sempre si deve intendere finché ci sarà 0 all’inizio dei numeri. (5) E affinché si comprendano più chiaramente le cose che sono state dette sul trovare i divisori dei numeri pari, esse sono mostrate con esempi numerici.

[1094] Tale titolo presenta anche il latino una *variatio* rispetto al titolo del paragrafo che aveva descritto l’analogo procedimento per la scomposizione in fattori dei numeri primi dei numeri dispari.

La scomposizione in fattori di 126.

(1) Così, se si richiedesse la ‘regola’ di 126, dal momento che la sua prova <per nove> è 0, ciò mostra che la sua nona parte è perfetta: pertanto si divida 126 per 9, risulterà 14, la cui ‘regola’ abbiamo mostrato più sopra - nella tabella dei divisori dei i numeri composti di due cifre di secondo grado - che è $\frac{1}{2}\frac{0}{7}$: donde per la ‘regola’ di 126 si ha $\frac{1}{2}\frac{0}{7}\frac{0}{9}$, come qui si mostra.

<La scomposizione in fattori di 156>

(1) Parimenti se fosse richiesta la ‘regola’ di 156, la sua prova, che è 3, dimostra che può essere diviso per 6, una volta diviso per 6, risulta 26, la cui ‘regola’ è $\frac{1}{2}\frac{0}{13}$. E così si otterrà come ‘regola’ di 156: $\frac{1}{2}\frac{0}{6}\frac{0}{13}$, come qui si mostra.

<La scomposizione in fattori di 2112>

(1) Ma se si volesse trovare la ‘regola’ di 2112, dal momento che la sua prova, che è 6, mostra che esso può essere diviso per 6, si divida dunque 2112 per 6, risulterà 352, la cui prova, che è 1, una volta calcolata, mostra che esso non può essere diviso né per 6 né per 9, per cui bisogna dividere 52, cioè il numero di due cifre, per 8, da tale divisione resta 4. (2) Da tale resto e dalla cifra di terzo grado che si trova in primo grado, vale a dire 3, si mostra che 352 può essere diviso per 8: e si divida per 8, risulterà 44, la cui regola è $\frac{1}{4}\frac{0}{11}$. (3) Per cui si ottiene come ‘regola’ di 2112: $\frac{1}{4}\frac{0}{6}\frac{0}{8}\frac{0}{11}$, come qui si mostra. Infatti, dal momento che $\frac{1}{4}\frac{0}{6}$, che sono contenuti in tale linea di frazione, sono la ‘regola’ di 24, che si scopre ha, nella tabella dei numeri composti, una ‘regola’ migliore, vale a dire $\frac{1}{3}\frac{0}{8}$, per il fatto che la cifra maggiore è tra questi divisori piuttosto che in $\frac{1}{4}\frac{0}{6}$, dal momento che 8 è maggiore di 6, per questo bisogna sempre prendere i divisori[1095] estremi dei numeri, i quali divisori sono composti dai numeri che vanno da 2 fino a 10, come dimostreremo nelle pagine seguenti. Di lì bisogna raggruppare i divisori trovati, vale a dire $\frac{1}{4}\frac{0}{6}\frac{0}{8}\frac{0}{11}$ in $\frac{1}{3}\frac{0}{8}\frac{0}{8}\frac{0}{11}$.

Scomposizione in fattori di 4644.

[1095] Regule extreme: In questo caso si è tradotto ‘divisori’ anziché ‘regole’ o ‘regola’ perché Fibonacci si riferisce solo a una porzione della scomposizione in fattori.

(1) Ma se si volesse trovare la ‘regola’ di 4644, la sua prova, che è 2, mostra che esso non può avere <come divisori> né $\frac{1}{6}$ né $\frac{1}{9}$. E dal momento che dal numero di due cifre che si trova all’inizio, vale a dire 64, resta 0, e la cifra che è in terzo grado, vale a dire 6, è pari, perciò si capisce che 4664 ha $\frac{1}{8}$. (2) Per questo se esso sarà diviso per 8, dalla divisione risulterà appunto 583, la cui ‘regola’, se la si cercherà attraverso la suddetta dottrina dei numeri dispari, si scoprirà che essa è $\frac{1}{11}\frac{0}{53}$, per cui come ‘regola’ di 4664 si avrà $\frac{1}{8}\frac{0}{11}\frac{9}{53}$.

<La scomposizione in fattori di 13652>

(1) Se poi si volesse trovare la ‘regola’ di 13652, la sua prova, che è 8, dimostra che essa manca di $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{9}$. (2) Infatti se il numero formato dalle sue due cifre iniziali[1096] sarà diviso per 8, resterà 4. Per cui, poiché la cifra di terzo grado, vale a dire 6, è pari, essa indica che nella sua ‘regola’ c’è $\frac{1}{4}$: per questo 13652, se diviso per 4, genererà 3413, e poiché esso è un numero primo, si otterrà come ‘regola’ di 13652 $\frac{1}{4}\frac{0}{3413}$, come qui si mostra.

<La scomposizione in fattori di 15560>

(1) Se poi si volesse trovare la ‘regola’ di 15560, dal momento che c’è lo 0 in primo grado, lo si elimini e in sua vece si accolga $\frac{1}{10}$ nella ‘regola’ del numero assegnato. (2) In seguito ci si applichi a trovare la ‘regola’ del numero rimanente, vale a dire quella di 1556, la cui prova, che è 8, mostra che essa manca di $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{9}$. E poiché dal numero formato dalle due cifre iniziali, cioè 56, diviso per 8, resta 0, e poiché la cifra di terzo grado, vale a dire 5, è dispari, si mostra che tra i numeri pari non può avere nessun divisore[1097] maggiore di 4. (3) Infine 1556, diviso per 4, dà come risultato 389, che si trova ad essere un numero primo, in base alle suddette dimostrazioni. (4) Per cui si ottiene, come ‘regola’ di 15560, $\frac{1}{4}\frac{1}{10}\frac{0}{389}$, come qui si annota.

<La scomposizione in fattori di 32600>

[1096] *Numerum duarum figurarum in eorum capite*: ‘il numero delle due cifre che stanno all’inizio di tale <numero>, ma si è preferita una traduzione più scorrevole.

[1097] In questo caso ‘nullam regulam’ in questo caso non indica l’insime dei divisori ma un divisore singolo, per questo in tale caso ho tradotto ‘divisore’.

(1) Parimenti se si volesse trovare la ‘regola’ di 32600, dal momento che nel primo grado di tale numero c’è lo 0, bisogna accogliere nella sua ‘regola’, in vece di tale 0, $\frac{1}{10}$. E cancellato questo 0 dal numero, resta 3260, nel cui primo grado c’è similmente uno 0, in vece del quale bisogna accogliere ancora $\frac{1}{10}$. (2) E cancellatolo dal numero, resta 326, la cui prova, che è 2, dimostra che esso esso[1098] non può avere $\frac{1}{6}$ o $\frac{1}{9}$ nella sua scomposizione. Infatti 26, che è il numero formato dalle due cifre iniziali di 326, se viene diviso per 8, ha come resto 2: per questo capiamo che 326 non può essere diviso per qualsiasi altro numero pari, oltre che per il numero 2. (3) Per cui, diviso 326 per 2, risulta 163, essendo il quale un numero primo, si ottiene come ‘regola’ di 32600 $\frac{1}{2}\frac{0}{10}\frac{0}{10}\frac{0}{163}$.

<La scomposizione in fattori di 2546000>

(1) E se si volesse trovare la ‘regola’ di 7546000, cancellati da tale numero i tre zeri, e calcolati, in vece di essi, $\frac{1}{10}\frac{0}{10}\frac{0}{10}$, resta 7546. (2) La prova di tale numero, che è 4, dimostra che esso non può avere $\frac{1}{6}$ o $\frac{1}{9}$ nella sua composizione. Infatti se 46, che è all’inizio di 7546, sarà diviso per 8, resta 6, per questo si capisce che esso non può avere [nella sua scomposizione] nessun altro numero pari, tranne 2. (3) Vale a dire che se questo 7546 sarà diviso per 2, risulterà 3773, la cui ‘regola’, se ci si applicherà a cercarla in base alla dottrina dei numeri dispari, si troverà che essa è $\frac{1}{7}\frac{0}{7}\frac{0}{7}\frac{0}{11}$. (4) Se questa ‘regola’ sarà raggruppata per bene in una linea di frazione con la ‘regola’ trovata più sopra, vale a dire con $\frac{1}{2}\frac{0}{10}\frac{0}{10}\frac{0}{10}$, si otterrà, come ‘regola’ di 7546000: $\frac{1}{2}\frac{0}{7}\frac{0}{7}\frac{0}{7}\frac{0}{10}\frac{0}{10}\frac{0}{10}\frac{0}{11}$.

Divisione di 749 per 75

(1) Appreso il metodo per trovare le ‘regole’ dei numeri, se qualcuno volesse dividere 749 per 75, trovata la ‘regola’ di 75, che è $\frac{1}{3}\frac{0}{5}\frac{0}{5}$, divida 749 per 3, risulta 249 e resta 2. (2) Ponga tale 2 sopra il 3 della linea di frazione segnata da parte e divida 249 per 5, vale a dire per il numero che precede il 3 sotto la linea di frazione, risulta 49 con resto di 4. Ponga tale 4 sopra quel 5, e divida di nuovo 49 per il 5 che è alla fine della linea di frazione, risulta 9 con resto di 4. Ponga questo 4 sopra lo stesso 5 e ponga il 9 davanti alla medesima linea di frazione. (3) E così otterrà dalla divisione richiesta, $\frac{244}{355}$ 9, come qui si mostra.

[1098] Dei codici finora collazionati, la maggior parte hanno ‘ipsa’, neutro plurale, e cioè sentono il numero come quantità numerica plurale.

Divisione di 67898 per 1760

(1) Ma se si volesse dividere 67898 per 1760, trovata la regola di 1760, che è $\frac{1}{2}\frac{0}{8}\frac{0}{10}\frac{0}{11}$, si divida 67898 per 2, risulterà 33949, e resta 0. Si ponga questo 0 sopra il 2 e divida 33949 per 8, risulterà 4243 e resta 5, si ponga questo 5 sopra l'8 della linea di frazione e si divida 4243 per 10, risulterà 424 con resto 3, cioè come se si eliminasse la cifra di primo grado di 4243. (2) Si divida questo 424 per 11, risulterà 38 con resto di 6, si ponga questo 6 sopra l'11 della linea di frazione e si ponga il 38 davanti alla linea di frazione. (3) E così si otterrà, per la divisione richiesta, $\frac{0}{2}\frac{5}{8}\frac{2}{10}\frac{6}{11}$ 38.

Verifica della divisione descritta sopra.

(1) Se si volesse verificare tale divisione con la prova del 13, si divida il suddetto 67898 per 13, resta 12 che dovrà essere considerato come prova. (2) In seguito, si divida il 38 davanti alla linea di frazione posta per il 13, resta 12 che si dovrà moltiplicare per l'11 della linea di frazione, e in più si addizioni il 6 che è sopra l'11, risulta 138 che si deve dividere per 13: si avrà come resto 8. (3) Moltiplichi tale 8 per il 10 della linea di frazione e in più ci aggiunga il 3 che è sopra il 10, risulta 83, che deve dividere per 13, resta 5 che si deve moltiplicare per l'8 della linea di frazione e in più ci aggiunga il 5 che è sopra l'8, risulta 45 che si deve dividere per 13, resta 6 che si deve moltiplicare per il 2 della linea di frazione, risulta 12, come è stato conservato più sopra come 'prova'. (4) E bisogna fare attenzione che nessuno mai si abitui a fare la prova di alcuna divisione per alcuna prova di alcun numero che sta sotto la linea di frazione della divisione[1099], per il fatto che attraverso di essa facilmente potrebbe essere ingannato. (5) Per tale motivo in questa divisione si vieta di fare la prova per 11: poiché dal resto che rimane da 38 o da qualsiasi altro numero moltiplicato per l'11, che è sotto la linea di frazione, e diviso per l'11 della prova, non avanza nulla e quindi non si potrebbe sapere, attraverso la prova dell'11, se questo 38 non fosse corretto.

(6) E si sappia che[1100] per dividere i numeri c'è un'altro metodo, vale a dire che quando il dividendo[1101] ha una qualche comunanza con il divisore, ovvero il dividendo si può dividere integralmente per uno o più numeri che appartengano alla 'regola' del divisore, allora il numero deve essere innanzitutto diviso per la quantità numerica del fattore che il dividendo avrà uguale nella linea di frazione del divisore, sia che sia il maggiore sotto la linea di frazione, sia che sia il minore: infatti quando avrà diviso questo per quello, dalla divisione non ci sarà alcun resto. (7) E affinché si comprenda più chiaramente ciò, sarà dimostrato con esempi numerici nelle pagine seguenti.

[1099] In pratica Fibonacci raccomanda di non fare la prova della divisione nè per 2 nè per 8 nè per 10 o 11, vale a dire i numeri che sono sotto la linea di frazione.
[1100] Il costrutto *scire quia* 'sapere che' è tipico del latino tardomedievale.
[1101] Numerus dividendus: Fibonacci ha già chiarito che il 'numero da dividere' si definisce 'dividendo'.

Divisione di 81540 per 8190.

(1) Così, se si volesse dividere 81540 per 8190, si trovi la 'regola' del divisore, che è $\frac{1}{7}\frac{0}{9}\frac{0}{10}\frac{0}{13}$. (2) E, dal momento che nella 'regola' di 81540 c'è $\frac{1}{10}$, per lo 0 che è nel suo primo grado, sebbene $\frac{1}{10}$ non sia all'inizio della linea di frazione, tuttavia 81540 è da dividere innanzitutto per 10, cioè si deve sottrarre lo 0 da tale numero, resterà 8154 che resta da dividere, una volta sottratto $\frac{1}{10}$ dalla linea di frazione, per $\frac{1}{7}\frac{0}{9}\frac{0}{13}$.

(3) Parimenti si divida 8154 per 9, per il fatto che 0 è la loro prova per 9 di entrambi. Per cui divida il numero per il 9 della linea di frazione, risulta 906 che resta da dividere per $\frac{1}{7}\frac{0}{13}$. (4) Ma 906, diviso per 7, dà come risultato 129 con resto di 3: si ponga questo 3 sopra il 7. E si divida 129 per 13, risulta 9 con resto di 12. Si ponga il 12 sopra il 13 e si ponga il 9 che risulta davanti alla linea di frazione. E si otterrà per la divisione richiesta $\frac{3}{7}\frac{12}{13}9$.

<Verifica>

(1) Ora, se si volesse verificare la divisione scritta sopra, bisogna porre il 10 e il 9 che sono stati sottratti dalla linea di frazione, sotto la stessa[1102] linea di frazione dopo il 7, e sopra di essa bisogna porre due zeri, come si vede in questa linea di frazione: $\frac{0}{10}\frac{0}{9}\frac{3}{7}\frac{12}{13}$. Poi si potrà fare la prova della divisione secondo il prescritto ordine del fare la prova. (2) O altrimenti[1103] si consideri 906 come numero diviso[1104] e $\frac{1}{7}\frac{0}{13}$ come divisore, e in base a ciò ci si applichi[1105] a fare la prova in base al suddetto metodo.

[1102] Fibonacci intende la linea di frazione del quoziente ovvero: $\frac{3}{7}\frac{12}{13}9$. Vale la pena di ricordare che il Pisano dice *post* ovvero 'dopo', laddove noi diremmo 'davanti'.

[1103] Fibonacci propone un secondo metodo di verifica: partire direttamente dai numeri che risultano dopo che sono stati sottratti i divisori comuni.

[1104] Quando esegue le verifiche Fibonacci, secondo logica, chiama il dividendo 'diviso', mentre nel linguaggio matematico moderno siamo portati a lasciare l'etichetta di 'dividendo'. Nella traduzione ho lasciato 'diviso' perché ad inizio di capitolo Fibonacci ha chiarito che userà i due termini 'dividendo' e 'diviso' come sinonimici.

[1105] Studeas probare: in latino c'è un anacoluto, ovvero un passaggio improvviso alla seconda persona, che in base alle collazioni finora effettuate dei codici in nostro possesso, sembra essere tipico dello stile inconcinno di Fibonacci, ma che ho preferito non rendere in italiano a vantaggio di una maggiore scorrevolezza della traduzione.

(3) Potrebbe sembrare che sia stato detto abbastanza sulle divisioni dei numeri per i numeri composti, se non per le scomposizioni di quei numeri che consistono di tre o più cifre. Ma affinchè in questo opuscolo[1106] sia contenuta completa la dottrina del dividere, nelle pagine seguenti si mostrerà come divivere i numeri per quelli che sono di tre o più cifre.

Divisione dei numeri per numeri primi di terzo grado.

(1) Qualora poi qualcuno volesse dividere un qualunque numero di qualunque grado per un qualunque numero di tre cifre, cioè di terzo grado, ponga il grado simile di quel numero di tre cifre sotto il grado simile del dividendo e valuti se il numero formato dalle ultime tre cifre del dividendo sia maggiore del divisore: se infatti sarà maggiore o uguale, bisognerà iniziare l'ultimo grado del quoziente sotto la terzultima cifra, e se sarà minore bisognerà iniziare sotto quella precedente, cioè sotto la quartultima cifra. (2) Ed è opportuno che la cifra posta sotto una qualunque delle cifre suddette[1107] sia tale che, moltiplicatala per il divisore, cioè per il numero per il quale il numero maggiore viene diviso, realizzi il numero formato dalle ultime 3 o 4 cifre, o quasi, cosicchè non rimanga di lì il numero del divisore o qualcosa in più. (3) E allora si moltiplichi quella cifra per l'ultima cifra del divisore e, se si potrà, si sottragga il prodotto della moltiplicazione dal numero dell'ultima cifra, e se non sarà possibile lo si sottragga dal numero formato dalle ultime due cifre e ponga il resto sotto il grado dal quale sarà avanzato. (4) E moltiplichi di nuovo la cifra posta per la cifra antecedente all'ultima del divisore, vale a dire per quella che è nel suo secondo grado, e sottragga il risultato[1108] dal suddetto resto unito con la cifra antecedente nel numero maggiore. E se ci fosse un resto, ponga il suo primo grado sopra la medesima cifra antecedente, e gli altri poi dopo di esse, vale a dire cancellando o eliminando l'altro resto posto prima. (5) E ancora moltiplichi quella cifra posta per la cifra di primo grado di tale numero divisore e sottragga il prodotto della moltiplicazione dall'unione del secondo resto con la cifra precedente del numero maggiore; e ponga il primo grado del suo resto sopra la cifra antecedente stessa e i restanti poi dopo di esso, cancellando ovvero eliminando l'altro resto in base a quanto detto[1109]. (6) In seguito, si applichi a porre sotto l'altra cifra antecedente del numero maggiore, cioè davanti alla prima cifra posta, un'altra cifra tale che, moltiplicata per il suddetto numero divisore, dia come risultato il numero formato dall'unione del terzo resto e della cifra antecedente o quasi, con la quale proceda moltiplicando in ordine per le cifre del numero divisore come si è insegnato[1110] per la cifra posta per prima, sovrapponendo i resti sempre in successione. E poi si applichi a operare similmente per le restanti cifre procedendo fino alla fine. (6) Ma se

[1106] Opuscolo: si noti la modestia con cui ora Fibonacci definisce il suo poderoso manuale di 15 capitoli. Nell'italiano moderno il termine indica effettivamente un trattato di varia natura e anche scientifico.
[1107] Cioè sotto la terzultima o la quartultima
[1108] Venientem summam: è la prima volta che Fibonacci usa questo sintagma per indicare il 'risultato che viene fuori' da un'operazione.
[1109] Secundum: ma forse è da emendare in supra (supradictum è più comunue in Fibonacci).
[1110] *Docetur* lett. 'S'insegna'

dall'unione[1111] di qualcuno dei resti suddetti con la cifra antecedente risulterà un numero minore del divisore, allora ponga uno zero sotto la cifra antecedente stessa e unirà alla medesima cifra antecedente e al resto un'altra cifra antecedente, sotto la quale, davanti al suddetto zero, bisognerà porre in ogni caso una cifra. (7) E se di nuovo il numero formato dall'unione del resto e delle due cifre antecedenti sarà minore del divisore, bisognerà di nuovo porre davanti al suddetto zero un altro zero, unirà[1112] anche al suddetto resto e alle suddette due cifre, l'altra cifra ad esse antecedente sotto la quale si deve porre la tale cifra che moltiplicata per il numero divisore dià come risultato quasi il numero formato dall'unione del resto e delle tre cifre ad esso antecedenti. (7) E si otterrà[1113] le divisioni di qualunque tipo simile. E affinché le cose che sono state dette siano spiegate più chiaramente, le mostreremo con esempi numerici.

<Esempi>

<Divisione di 1349 per 257>

(1) Se si volesse dividere 1349 per 257, si scriva il 257 sotto il 349 di 1349. E poiché il numero formato dalle ultime tre cifre del dividendo, cioè 134, è minore di 257, vale a dire del divisore, per questo bisogna porre la cifre del quoziente sotto la quarta cifra di tale dividendo, quella che occupa il primo grado, cioè sotto il 9. (2) E la cifra tale che, moltiplicata per 257, farà quasi 1349, questa cifra[1114] sarà 5. Posta questa sotto il 9, la si moltiplichi per l'ultima cifra del divisore, vale a dire per il 2, risulterà 10 che deve essere sottratto da 13, vale a dire dal numero formato dalle ultime due cifre del numero da dividere - dal momento che non può essere sottratto dal numero dell'ultima cifra. (3) Resta 3 che deve essere unito con il 4 antecedente, risulta 34 da cui bisogna sottrarre il prodotto del 5 posto per il 5 del divisore, resta 9 che bisogna porre sopra il 4 e si deve moltiplicare il medesimo 5 posto per 7, risulterà 35 che bisogna sottrarre da 99, vale a dire dall'unione del 9 del primo grado del dividendo con il 9 suddetto, resta 64 che si deve porre sopra la linea di frazione de 257 scritto separatamente. E si deve porre il 5 che risulta davanti alla stessa linea di frazione. (4) E si otterrà per la divisione richiesta

$$\frac{64}{257}5.$$

Divisione di 30749 per 307.

(1) Ma se si volesse dividere 30749 per 307, si scriva il 307 sotto il 749. E dal momento che 307, che è il numero formato dalle ultime tre cifre del dividendo, è uguale al divisore, bisogna porre l'1

[1111] Ex aliquo superfluo: Fibonacci scrive: 'da qualcuno dei resti suddeti e dalla cifra antecedente', intendendo 'da qualcuno dei resti suddetti unito con la cifra antecedente'. Ho preferito rendere ancora più scorrevole la traduzione.

[1112] Copulabis: ancora un anacoluto di cui dò conto qui in nota, ma che preferisco non rendere nella traduzione.

[1113] Habebis: anacoluto che si è preferito non rendere in traduzione.

[1114] Quibus positis... ipsam: ci riferisce in entrambi i casi al 5 che all'inizio della frase viene senti come plurale e quindi come quantità numerica, poi invece come singolare femminile, quindi come cifra. Una traduzione che tenesse conto di questa sfumatura potrebbe essere ' posto tale numero 5 sotto il nome, moltiplichi questa cifra..'. Ma ho preferito rendere meno farraginosa la lettura.

sotto il primo grado del numero formato dalle suddette tre cifre, vale a dire sotto il 7 che è nel terzo grado del dividendo. (2) E si deve moltiplicare tale 1 per il 3 del divisore, risulta 3, in vece del quale si deve tralasciare il 3 che è nell'ultimo grado del dividendo, e si deve moltiplicare di nuovo tale 1 per lo 0 del divisore, risulta 0 in vece del quale si deve tralasciare lo 0 medesimo che è nel numero da dividere. E di nuovo si moltiplichi il medesimo 1 per 7, risulta 7, in vece del quale si tralasci lo stesso 7 che è nel dividendo. (3) Infatti il terzo grado, qualunque grado moltiplichi, realizza il terzo grado da quello che moltiplica: dunque quando moltiplica il terzo realizza il quinto grado. E quando moltiplica il secondo, realizza il quarto; e quando moltiplica il primo, realizza il terzo. (4) E poiché 4, che precede il 7 nel dividendo, è minore di 307, vale a dire del divisore, bisogna porre uno 0 sotto il 4 stesso. E, ancora, poiché il 49 del medesimo dividendo è minore dello stesso 307, bisogna porre uno 0 sotto il 9, vale a dire nel primo grado del quoziente, e bisogna porre il suddetto 49 sopra la linea di frazione del 307 conservato da parte e si deve porre il 100 che risulta davanti alla linea di frazione. (5) E si otterrà $\frac{49}{307}100$ per la divisione richiesta.

<Divisione di 574930 per 563>

(1) Parimenti se si proporrà di dividere 574930 per 563, una volta posto il 563 sotto il 930, si deve porre, in base alle suddette disposizioni, l'1 sotto il 4, vale a dire in quarto grado, e bisogna moltiplicarlo per il 5 del divisore, risulta 5, in vece del quale si deve tralasciare il 5 che è nell'ultimo grado del dividendo, dal momento che quando il quarto grado moltiplica il terzo, realizza il sesto grado, cioè il quarto da quello che moltiplica. (2) E si deve moltiplicare l'1 stesso per il 6 del divisore, risulta 6 che si deve sottrarre da 7, resta 1 che si deve porre sopra lo stesso 7: infatti quando il quarto grado moltiplica il secondo, realizza il quinto grado. (3) E di nuovo si deve moltiplicare l'1 per il 3 del divisore, risulta 3 che deve essere sottratto da 4, cioè da 14, per l'1 che è rimasto sopra il 7. Infatti quando il quarto grado moltiplica il primo, determina il quarto grado o un grado terminante in esso. E perciò il suddetto 3 deve essere sottratto dal 4 che è in quarto grado, cioè da 14 che termina in esso, resta 11, vale a dire un 1 sopra il quinto grado e l'altro sopra il quarto. (4) Con tale 11 si deve unire il 9, risulta 119. Poichè questo 119 è minore di 563, vale a dire del divisore, bisogna porre uno 0 sotto il 9 stesso, e si deve unire il 3 che è nel secondo grado del dividendo con il 119, risulta 1193. (5) Per questo ponga, in base a una valutazione, nel secondo grado del quoziente, la tale cifra che moltiplicata per 563 determini come risultato quasi 1193. Questa cifra sarà 2 che deve essere moltiplicta per il 5 del divisore, risulta 10 che deve essere sottratto dall'11 scritto sopra, resta 1, in vece del quale si tralasci lo stesso 1 che era stato posto sopra il 4 e cancelli l'altro 1 che è sopra il 7, e moltiplichi il 2 per il 6 del divisore, risulta 12 che deve essere sottratto da 19, resta 7 che deve porre sopra il 9 e cancelli l'1 che è sopra il 4. (6) E moltiplichi il 2 per il 3 del divisore, risulta 6: lo si deve sottrarre da 73, resta 67. Si cancelli il 7 che era sopra il 9 e si ponga il 67 sopra il 93, come si vede nella figura. E unisca il 67 stesso con lo 0, risulta 670, in vece del quale, in base alle suddette disposizioni, ponga l'1

sotto lo 0 e lo moltiplichi per il 5 del divisore, risulta 5: lo si sottragga da 6, resta 1. Cancelli il 6 stesso e ponga lì l'1 e moltiplichi 1 per 6, risulta 6 che deve essere sottratto da 7, resta 1: cancelli il 7 e ponga lì l'1 stesso e moltiplichi l'1 per il 3 del divisore, risulta 3 che deve essere sottratto da 110, resta 107 che si deve porre sopra la linea di frazione di 563 e davanti ad essa si ponga il 1021 che risulta come quoziente, come è descritto nella figura.

Verifica della suddetta divisione.

(1) Se si volesse verificare questa divisione attraverso la prova dell'11, si divida 574930 per 11, resta 4: lo si conservi come prova. E si divida similmente per 11 il 1021 del quoziente, resta 9 che si deve moltiplicare per il 2 che resta da 563 diviso per 11, risulta 18. (2) Ad esso si addizioni la prova del numero che resta sopra la linea di frazione, vale a dire di 107, la quale prova è 8, poiché da 107 diviso per 11, resta 8, e cosi si otterrà 26. Una volta diviso tale 26 per 11 resta 4, com'era necessario che rimanesse come prova.

(2) Ora tramandiamo l'insegnamento per valutare[1115] come porre le cifre dei quozienti, quando numeri di tre o più cifre sono divisi per numeri di tre cifre, in modo tale che si consideri se il divisore sia abbastanza prossimo ad un qualche numero dell'ordine delle centinaia - tanto se è un po' di più quanto se è un po' di meno - e si guardi di fronte a quali cifre bisogna porre la cifra del quoziente, e tra quelle cifre si tralascino le due che sono nel primo e nel secondo grado di esse. (3) Poi si divida il numero che resta per il numero dell'ordine delle centinaia a cui il divisore è più vicino e dovrà essere posta la cifra che risulterà dalla divisione, o un poco di meno, se il divisore sarà inferiore al suddetto numero dell'ordine delle centinaia, o un poco di più se il divisore sarà maggiore rispetto allo stesso numero dell'ordine delle centinaia.

<Esempi>

<Divisione di 1247 per 421>

(1) Per esempio, vogliamo dividere 1247 per 421, tralasciamo 47 e dividiamo il 12 che resta per 4, dal momento che 421 è più vicino a 400 che ad un altro numero dell'ordine delle centinaia, risulta 3, ma bisogna calcolare un po' di meno perché 421 è maggiore di 400, e se fosse inferiore, come 379, bisognerebbe calcolare un'unità in più. E così s'intenda per il resto. (2) E se il divisore non sarà vicino ad alcun centinaio, ma intermedio come 150, o 250 e gli altri simili, allora, tralasciate le due cifre suddette, si duplichi il numero restante e si divida la somma raddoppiata per il doppio del centinaio e mezzo e si conoscerà[1116] la cifra da porre.

<Divisione di2137 per 563>

[1115] *Habendum arbitrium*: si è tradotta l'espressione *habere arbitrium* come 'valutare'.
[1116] Habebit arbitrium: 'si otterrà la valutazione della cifra da porre'. Anche: si conoscerà la cifra da porre.

(1) per esempio, vogliamo dividere 2137 per 563. Dividiamo 21 per $\frac{1}{2}5$, cioè il doppio di 21, vale a dire 42, per il doppio di $\frac{1}{2}5$, cioè per 11, risulta 3 e un po' di più, e allo stesso modo si valuti in simili casi.

<Divisione di 5950000 per 743>

(1) Parimenti se si volesse dividere 5950000 per 743, una volta scritti i numeri, in base alle suddette disposizioni, si ponga l'8 sotto lo 0 di quarto grado. (2)Vale a dire, poichè, tralasciato il 50 di 5950, resta 59, il cui doppio se è diviso per il doppio di $\frac{1}{2}7$, a causa del divisore che è quasi 750, dalla divisione risulta quasi 8. (3) E si moltiplichi l'8 per il 7 del divisore, risulta 56 che si deve sottrarre da 59, resta 3 che si deve porre sopra il 9. E 8 per 4 risulta 32 che si deve sottrarre da 35, resta 3 che si deve porre sopra il 5 e si deve cancelare il 3 medesimo che era stato posto sopra il 9. E 8 per 3 del divisore risulta 24 che si deve sottrarre da 30, resta 6 che si deve porre sopra lo 0, e si cancelli il 3 che era sopra il 5. (4) E così via via, moltiplicata la cifra posta ad una ad una per le cifre del divisore, vale a dire iniziando dall'ultima fino ad arrivare alla prima, bisogna sempre che la divisione rimanga nella stessa cifra, sotto la quale si raccomanda di porre la cifra come si è mostrato nella prima descrizione di quella divisione. (5) Dopo ciò ponga due zeri sotto i due zeri di terzo e secondo grado, poiché entrambi gli zeri, uniti con il 6, realizzano un numero inferiore a 743. Per cui bisogna prendere il 6 con tre zeri, vale a dire 6000, e bisogna dividerlo per 743. (4) Per tale divisione bisogna porre l'8 nel primo grado del quoziente, vale a dire sotto lo 0 di primo grado, per il fatto che, una volta diviso il doppio di 60 per il doppio di $\frac{1}{2}7$, risulta 8. Una volta moltiplicato tale 8 per 7 e sottratto il loro prodotto da 60, resta 4. (5) Si ponga questo 4 sopra lo 0 di terzo grado e si elimini il 6 che è sopra lo 0 di quarto grado e di nuovo, moltiplicato l'8 per il 4 del divisore e sottratto il risultato da 40, resta 8. (6) Infatti come la moltiplicazione dell'8 scritto sopra per il divisore si muta in ordine, grado per grado, così le moltiplicazioni di esso per il dividendo devono mutare di grado in grado. (7) Ponga pertanto l'8 del resto sopra lo 0 di secondo grado e cancelli il 4 che era stato posto sopra lo zero di terzo grado e moltiplichi l'8 per il 3, risulta 24 che si deve sottrarre da 80, resta 56 che si deve porre sopra la linea di frazione di 743 e davanti ad essa si ponga 8008. E si otterrà il risultato[1117] della suddetta divisione.

(8) E benché grazie alle cose che sono state dette sulla divisione si è potuto ottenere un insegnamento completo nelle divisioni dei numeri per numeri di quattro o più cifre, tuttavia, perché sia più chiaro, saranno svolte le suddette divisioni per alcuni numeri di quattro cifre.

[1117] Quantitate proposite divisionis: si noti che è la prima volta che Fibonacci usa il termine *quantitas* nell'accezione di 'risultato', finora aveva sempre usato il sostantivo *summa*.

Divisione di 17849 per 1973

(1) E se si proponesse di dividere 17849 per 1973, si scriva il divisore sotto il dividendo, vale a dire il 1973 sotto il 7849 di 17849. E, dal momento che il numero formato dalle ultime quattro cifre del dividendo, vale a dire 1784, è inferiore al divisore, è necessario che la posizione della cifra del quoziente stia sotto il primo grado del dividendo. (2) Per cui ponga il 9 sotto il primo grado di entrambi i numeri per il fatto che, moltiplicato il 9 per il divisore, risulta quasi il dividendo. Ovvero poiché il divisore è quasi 20 centinaia, bisogna dividere il 17 per 2 e tralasciare le tre cifre del dividendo, vale a dire 849. (3) E allora si moltiplichi il 9 stesso per l'1 del divisore e si sottragga <il prodotto> dal 17, resta 8 che si deve porre sopra il 7 e si moltiplichi il 9 per l'8 del divisore e si sottragga <il prodotto della moltiplicazione> da 88, resta 7 che si deve porre sopra l'8 e si elimini l'8 posto. E di nuovo si moltiplichi il 9 per il 7 del divisore e si sottragga il prodotto da 74, resta 11 che deve essere posto sopra il 74, e si moltiplichi il 9 per il 3 del divisore e si sottragga il prodotto da 119, resta 92 che si deve porre sopra la linea di frazione di 1973, e davanti ad essa si ponga il 9. E si otterrà il risultato della suddetta divisione.

Divisione di 1235689 per 4007.

(1) Parimenti se si volesse dividere 1235689 per 4007, una volta scritti i numeri, si ponga il 3 sotto il terzo grado dei numeri scritti sopra ovvero disposti e si moltiplichi il 3 stesso per il 4, risulta 12, in vece del quale si tralasci il 12 che è il numero formato dalle ultime due cifre del dividendo. (2) E si moltiplichi il 3 per lo 0 che è nel terzo grado del divisore, risulta 0 che si deve sottrarre da 3 che è nel dividendo, resto lo stesso 3. E ancora si moltiplichi il 3 per lo 0 del secondo grado del divisore,risulta 0 che si deve sottrarre da 35, resta ancora lo stesso 35. E 3 per 7 risulta 21 che deve essere sottratto da 356, resta 335 che si deve porre sopra 356. (3) Infatti, poiché 3358 - che è l'unione del numero rimanente con la cifra ad esso antecedente - è inferiore a 4007, bisogna porre uno 0 davanti al 3 posto, vale a dire sotto il secondo grado dei numeri, e bisogna unire il 3358 con la cifra precedente, vale a dire con il 9 sotto il quale bisogna porre l'8 nel quoziente. (4) E bisogna moltiplicare tale 8 per 4 e sottrarre il prodotto dal 33, resta 1 che si deve porre sopra il 3 di primo grado del 33 e bisogna cancellare il 33 stesso. E <si moltiplichi> l'8 per lo 0 di terzo grado e si sottragga <il prodotto> da 15, resta 15. E di nuovo si moltipli l'8 per lo 0 di secondo grado del divisore e si sottragga <il prodotto> da 158, resta lo stesso 158. E 8 per 7 risulta 56 che si deve sottrarre da 1589, resta 1533 che si deve porre sopra la linea di frazione di 4007, e davanti ad esso bisogna porre il 308. E si otterrà il risultato della divisione richiesta come si vede nella figura.

<Verifica>

(1) Ma se si volesse verificare questa o qualunque altra divisione in un modo diverso che con la prova, si moltiplichi il quoziente per il divisore e al risultato si addizioni il numero che rimane dalla divisione, vale a dire quello che si raccomanda di porre sopra la linea di frazione. (2) Così in nella

verifica di questa divisione[1118] si moltiplichi 308 per 4007 e alla moltiplicazione si addizioni 1533 che è sopra la linea di frazione e se il risultato dell'addizione realizzerà il numero diviso, si capirà che questa divisione è corretta.

[1118] In hac: si riferisce alla divisione descritta nel paragrafo precedente.

Il Capitolo Sesto

[N, f. 42v; A, f.13r; R, f. 32v; S f. 24r; V, f. 19v; F_1 34v, F_2 20r]

Capitulum sextum

De multiplicatione integrorum numerorum cum ruptis[1119].

(1) Cum, autem, quemlibet numerum cuiuslibet gradus cum quolibet rupto vel ruptis per quemlibet numerum cum quolibet rupto vel ruptis multiplicare volueris, describe maiorem numerum cum suo rupto - vel ruptis - sub minori numero cum suis minutis, scilicet numerum sub numero, et minuta sub minutis. (2) Et accipe superiorem numerum cum suis minutis[1120], et fac inde[1121] talia minuta qualia sunt illa[1122] que sunt cum[1123] ipso numero. Et similiter de inferiori facies sua minuta. (3) Et multiplicabis facta minuta[1124] superioris numeri per facta minuta inferioris[1125]. Et summam divides per minuta[1126] utriusque numeri sub una virgula, scilicet coaptata, et habebis cuiuslibet numerorum cum minutis multiplicationes.

(4) Et ut hoc[1127] cum[1128] demonstrationibus numerorum intelligibiliter ostendatur, hoc capitulum in partes octo dividimus.

Quarum prima erit de multiplicatione numerorum integrorum cum uno rupto sub una virgula. [F_1, f. 35r]

Secunda de multiplicatione numerorum cum duobus et tribus ruptis sub una virgula.

Tertia de multiplicatione numerorum cum duobus[1129] ruptis sub[1130] duabus virgulis.

Quarta de multiplicatione numerorum cum duabus virgulis[1131] cum pluribus ruptis.

Quinta de multiplicatione numerorum cum tribus virgulis.

1119 Capitulum-ruptis: Explicit capitulum quintum. Incipit capitulum sextum de multiplicatione integrorum numerorum cum ruptis FARSVF_1, Incipit capitulum sextum de multiplicatione integrorum numerorum cum ruptis NF_2

1120 Et accipe-minutis F F_2RS, *om*. NAV F_1

1121 Inde FARSN F_1 F_2, *om*. V

1122 Illa FARSN F_1 F_2, alia V

1123 Cum F F_1 F_2ARSVN_2, sub N_1

1124 Minuta F F_1F_2NAS, minuta de R

1125 Per facta-inferioris FARS F_2, *om*. NV F_1

1126 Minuta FARSN F_1 F_2, summam V

1127 ut hoc RS F_2, Ut hec F, hoc N A V F_1

1128 Cum FNASV F_1 F_2, in R

1129 Duobus S F_1 F_2, Duabus FNAVR

1130 Sub FARSV F_1 F_2, et N

1131 Dopo virgulis in N c'è uno spazio bianco con due segni di cancellatura

Sexta de multiplicatione ruptorum sine sanis.

Septima de multiplicatione numerorum et ruptorum, quorum virge[1132] terminantur in circulo.

Octava de multiplicatione partium numerorum et ruptis.

Pars[1133] prima

De multiplicatione numerorum integrorum[1134] cum uno rupto sub una virgula.

(1) Si volueris[1135] multiplicare 11 et dimidium[1136] per 22 et tertiam[1137], describe maiorem numerum sub minori, scilicet $\frac{1}{3}22$ sub $\frac{1}{2}11$, ut hic ostenditur. (2) Deinde fac dimidias de $\frac{1}{2}11$[1138]. Ideo quia ruptus[1139] qui est cum 11 est medietas[1140], quod sic fit: multiplicabis[1141] 11 per 2 [N, f. 43r] que sunt sub virgula[1142] post ipsa 11, et de super adde[1143] 1 quod est super virgulam de 2, erunt medie 23, vel duplica $\frac{1}{2}11$, erunt 23. Describe ipsum[1144] 23 super $\frac{1}{2}11$ ut in descriptione ostenditur. (3) Eademque[1145] ratione multiplicabis 22 per suam virgulam, hoc est per 3 que sunt sub virgula post 22[1146], erunt tertie 66, cum quibus adde 1 quod est super[1147] 3, erunt tertie 67, que serva super $\frac{1}{3}22$. Et hoc fuit triplicare $\frac{1}{3}22$. (4) Et multiplicabis dimidias[1148] 23 per tertias 67, erunt sexte 1541, quas

---

1132 Virge FARSN F_1 F_2, virgule V
1133 Pars F_2, Incipit pars FARSNV F_1,
1134 Numerorum integrorum F F_2ARSV F_1, integrorum numerorum N
1135 volueris NARSV F_1 F_2, Voluerit F
1136 dimidium FNARV, dimidiam S F_1, dimidia F_2
1137 Et tertiam FARSN F_1 F_2, $\frac{1}{3}$ V
1138 $\frac{1}{2}$ 11 FNRSV F_1 F_2, $\frac{1}{3}$ 22 A
1139 Ruptus F F_2NRSV A, ruptis F_1
1140 Medietas FARSNV F_1, maior F_2
1141 Multiplicabis FARSNV F_1, multiplica F_2
1142 Virgula FARSN F_1 F_2, virgulam V
1143 adde NR F_2, Addes FAS, addet V F_1
1144 describe ipsum NAV F_1, Describe FRS F_2
1145 Eamdemque F F_2RSV, ea denique NA F_1
1146 Que-post 22 FARSNV F_1, *om*. F_2
1147 Super FARSNV F_1, desuper F_2
1148 Dimidias FAS F_2, dimidies N F_1, dimidie R, dimidios V

divides[1149] per ruptos[1150] qui sunt sub virgulis[1151] amborum numerorum, scilicet per 2 et per 3. (5) Que divisio sic fit[1152]: multiplica 2 per 3, erunt 6, in[1153] quibus divide 1541, exibunt integra[1154] $\frac{5}{6}256$ pro quesita multiplicatione, ut in prescripta[1155] descriptione demonstratur. [S, f. 24v] (6) Nam querenti quare ex multiplicatione medietatum in tertias proveniant sexte, respondes quia cum semel tertia accipitur - hoc est[1156] cum multiplicatur 1[1157] per tertiam - provenit tertia, quare cum multiplicatur [R, f. 33v] medietas unius per tertiam - scilicet cum accipitur medietas tertie - sextam provenire necesse est. Et ideo ex multiplicatione medietatum in tertias proveniunt sexte. (7) Rursus, cum, secundum alium intellectum, multiplicavimus duplum de $\frac{1}{2}11$, scilicet 23, per triplum de $\frac{1}{3}22$, scilicet per[1158] 67, tunc habuisse sexuplum summe[1159] multiplicationis eorum demonstrabo. (8) Ex multiplicatione quidem de $\frac{1}{3}22$ in $\frac{1}{2}11$ provenit summa quesita. Quare si multiplicatur $\frac{1}{3}22$[1160] per duplum de $\frac{1}{2}11$, hoc est per 23, provenit duplum quesite summe. Ergo si multiplicatur triplum de[1161] $\frac{1}{3}22$, hoc est 67[1162], per 23, scilicet per duplum de $\frac{1}{2}11$, nimirum triplum dupli,[F_1, f. 35v] hoc est sexuplum summe quesite proveniet. Quare sexta pars summe multiplicationis eorum est summa quesita, quod oportebat[1163] ostendere. (9) Et scias quia ideo multiplicavimus 2 per 3, quando per 2 et per 3 dividere debeamus quia multiplicatio illorum non surgit ultra decenarium numerum, et sic debes facere de omnibus numeris quorum multiplicationes non ascendunt ultra decem.

1149 Divides FARSN F_1, Dividas F_2, divide V
1150 Ruptos FARSNV, *om.* F_1, non si legge in F_2
1151 Virgulis FRASV, virgula N F_1, non si legge in F_2
1152 Que-fit FARSNV F_1, *om.* F_2
1153 Erunt-In FARSN F_1, erunt-ex V, om. F_2
1154 Integra FARSNV F_1, integraliter F_2
1155 Prescripta FN F_1 F_2AS, suprascripta R, scripta V
1156 Est NARSV F_1 F_2, *om.* F
1157 multiplicatur 1 R F_2SV, Multiplicatur FNA F_1
1158 Per FARSV F_1 F_2, *om.* N
1159 Summe F F_1 F_2ASV, summa NR
1160 $\frac{1}{3}22$FARS F_2, $\frac{1}{3}11$ NV F_1
1161 De FARSV F_2, *om.* N F_1
1162 67FNRSV F_1, 62 A F_2
1163 oportebat ARS F_2, Oportebit FNV F_1

(10) Verbi gratia, ut cum debueris dividere aliquem numerum per 2 et per 2, divides ipsum per 4, ideo quia bis[1164] 2 faciunt 4 et si debueris ipsum numerum dividere per 2 e per 4, divides eum[1165] per 8, et si per 2 e per 5, divides eum per 10 [F_2, f. 20v], et si per 3 e per 3, divides eum per 9, et si per 3 et per 5 numerum aliquem dividere volueris, dividas eum per[1166] $\frac{1\quad 0}{3\quad 5}$, ideo quia multiplicatio de 3 in 5 surgit in 15, quia numerus maior est de 10[1167]. Unde melius est ut [N, f. 43v] dividas per $\frac{1\quad 0}{3\quad 5}$, quam per 15.

De eodem.

(1) Item si volueris multiplicare $\frac{1}{2}12$ per $\frac{3}{5}23$, describe questionem ut hic ostenditur et multiplicabis 12 per 2 que sunt sub virgula et addes 1 quod est super ipsa 2[1168], erunt medie 25. (2) Item multiplicabis 23[1169] per 5 que sunt sub virgula, et addes[1170] 3 que sunt super ipsa 5, erunt quinte 118, multiplicabis [V, f. 20r] ergo medietas[1171] 25 per quintas 118, erunt medie quinte, scilicet decime, 2950[1172]. Quare[1173] divides[1174] per 2 et per 5, que sunt sub virgulis, hoc est per 10, vel debes 2950 dividere per 10 - quia[1175] ex duplo de $\frac{1}{2}12$[1176] in quincuplum de $\frac{3}{5}23$, scilicet de 25 in 118, provenit decuplum multiplicationis de $\frac{1}{2}12$ in $\frac{3}{5}23$ - exibunt[1177] integra 295[1178] et nihil aliud, ut superius[1179] in questione demonstratur.

[1164] Bis FARSN F_1 F_2, *om.* V
[1165] Eum FARSV F_1 F_2, ipsum N
[1166] Per FASV F_1 F_2, *om.* NR
[1167] 10 FASV F_1 F_2, 20 N
[1168] 2 FARSN F_1 F_2, *om.* V
[1169] 23 FSV F_2, 25 F_1 NA
[1170] addes NASV F_1 F_2, Addas FR,
[1171] medietas V, Medias FARSN F_1 F_2
[1172] Scilicet-2950 F F_1 F_2NASV, 2950 scilicet decime R
[1173] Quare FNAV F_1, quas R, in S non si legge bene, *om.* F_2
[1174] Divides DARSV, divide F_2, divisis N F_1
[1175] Quia F F_1 F_2ARSV, quarum N
[1176] $\frac{1}{2}12$ F F_1 F_2ARSN, $12\frac{1}{2}$ V
[1177] Exibunt F F_1 R ANSV, et exibunt F_2
[1178] Integra 295 F F_1 F_2ANSV, 295 integra R
[1179] Superius F F_1 R ANSV, inferius F_2

<Evitatio>

(1) Potes enim summam dicte[1180] multiplicationis aliter reperire, scilicet[1181] ut ante quam multiplices 25[1182] per 118, divide 25 per 5 de virgula. Cum per[1183] ipsa[1184] integraliter possint dividi, exibunt 5 que serva et divide 118 per 2 que sunt sub virgula, cum eorum medietas[1185] sit integra[1186], exibunt 59 que multiplica[1187] per 5 servata[1188] - fuerunt quinta pars de 25 - erunt 295 que sunt[1189] summa dicte multiplicationis, ut[1190] superius repertum est. (2) Et hec talis evitatio[1191] multum est consideranda per quam evitatur labor multiplicandi et dividendi, gravius enim est multiplicare 25 per 118, quam 5 per 59, quorum multiplicationem, scilicet de 5 in 59, non oportet per aliquem ruptum dividere. (3) Unde cum debueris multiplicare aliquem numerum [A, f.13v] per aliquem numerum, et debueris summam illorum per aliquem numerum vel numeros dividere, per quem, vel per[1192] quos, aliquem illorum numerorum[1193] possis[1194] integraliter dividere[1195], studebis semper dividere hos quos integraliter dividere poteris, antequam multiplices. Deinde multiplicabis residuum numerorum ad invicem, et divides per ruptum, vel per ruptos qui remanebunt ex evitatione, quod in sequentibus demonstrare curabimus.

(4) Sed primum [F_1, f. 35v] volo demonstrare unde talis evitatio procedat[1196]. Quia ex multiplicatione de 25 in 118 provenit decuplum multiplicationis de $\frac{1}{2}$ 12 in $\frac{3}{5}$ 23[1197], ut habetur ex[1198]

[1180] Dicte F F_1 R ANSV, om. F_2
[1181] Scilicet FRASV, idest N F_1, *om*. F_2
[1182] 25 ARSV F_1F_2, 23 F, 29 N
[1183] Per F F_2ARSV, *om*. N F_1
[1184] ipsa N ASV F_1, Ipsam FR F_2
[1185] Eorum medietas F F_1 F_2ASV, medietas eorum N
[1186] Sit integra F F_1NASV, integra sit R F_2
[1187] multiplica RS F_2, Multiplicata F F_1NAV,
[1188] Servata F F_2RS, servata quae NAV F_1
[1189] Sunt AF F_2RVS, sunt in N F_1
[1190] Ut F F_1 F_2ARSV, sicut N
[1191] Evitatio NARSV F_1 F_2, est vitatio F
[1192] Per F F_1 R ANSV, om. F_2
[1193] illorum numerorum F_1ARSV, Numerorum illorum F, ipsorum numerorum N, numerorum F_2
[1194] Possis FARSN F_1 F_2, possit V
[1195] Dividere F F_1ARSN F_2, dividere possit V
[1196] Procedat F F_2ARSN, procedit F_1
[1197] $\frac{1}{2}$ 12 in $\frac{3}{5}$ 23 F F_1 F_2NRSV, $\frac{1}{2}$ 23 A
[1198] ex R F_1, Per F F_2NASV

ea que in antecedente multiplicatione diximus[1199], ergo ex multiplicatione quinte partis de 25 in 118 proveniet quinta decupli multiplicationis[1200] de $\frac{1}{2}$12 in $\frac{3}{5}$23, scilicet duplum[1201] ipsius multiplicationis: [N, f. 44r] quare si[1202] multiplicetur quinta de[1203] 25, scilicet 5, per dimidium de 118, scilicet per 59[1204], proveniet[1205] summa multiplicationis[1206] de $\frac{1}{2}$ 12 in $\frac{3}{5}$23.

De eodem.

(1) Rursus, si volueris multiplicare $\frac{2}{3}$13 per $\frac{5}{7}$24, descriptis numeris ut hic ostenditur, multiplica 13 [S, f. 25r] per 3 et adde 2, que sunt super ipsa 3, erunt tertie 41. Item multiplica[1207] 24 per eorum virgulam[1208], hoc est per[1209] 7 et adde 5[1210], erunt septime 173 quas multiplica cum[1211] 41, erunt vigesime prime 7093. Quas divide per 3 et per 7 que sunt sub virgulis, positis sub una virgula sic$\frac{1\ \ 5}{3\ \ 7}$, exibunt[1212] integra $\frac{1\ \ 5}{3\ \ 7}$ 337[1213]. (2) De hac enim multiplicatione non potes aliquid evitari[1214], ideo quia[1215] 41 vel 173 nec per 3 nec per 7 integraliter dividuntur.

(3) Si autem per pensam novenarii cognoscere volueris utrum recta fuerit hec multiplicatio vel non, accipe pensam de 13 per eundem novenarium: que[1216] est 4 et multiplica eam per 3 que[1217] sunt sub virgula post ipsa 13, erunt 12 et adde 2 que sunt super ipsa 3, erunt 14, de quibus accipe pensam

1199 diximus NARSV F_1 F_2, Duximus F
1200 Multiplicationis N F_1 F_2ARSV, triplicationis F
1201 Duplum NASRV F_1 F_2, divisum F
1202 Si F F_1 F_2NRSV, *om.* A
1203 Quinta de RS, quinta F F_1NAV F_2
1204 59 F F_1 F_2NARV, 95 S
1205 Provenit FA F_1S, proveniet NV, provenerit R, *om.* F_2
1206 summa multiplicationis S, summa multiplicata N F_1 F_2AV, Ipsa multiplicatio F, multiplicationem R
1207 Multiplica F F_1 F_2ARSN, multiplicata V
1208 virgulam NV F_1 F_2, Regulam FARS
1209 Eorum-per: R lo pospone rielaborando
1210 Adde 5 F F_1 F_2NASV, adde 5 hoc est per eorum regulam R
1211 Cum F F_1 F_2NASV, per R
1212 Exibunt F F_1NAS, exibit RV
1213 integra $\frac{15}{37}$ 337 F F_1NASV, $\frac{15}{37}$ 337 integra R, $\frac{15}{37}$ 337 F_2
1214 evitari F_1 F_2NARSV, Evitare F,
1215 Quia F_1F F_2ARSV, quare N
1216 Que F F_1 R ANSV, si F_2
1217 Que F F_1 R ANSV, si F_2

que est 5 et serva eam. Et vide de 41 si pensa ipsorum[1218] est 5, sicut modo servasti, quia tunc scies ipsa 41 recta esse, si pensa eorum fuerit 5. Pensa enim de 41 est 5, ut opportet: quare servabis 5 super 41, vel post ipsa. (4) Postea videbis, per eamdem pensam novenarii, de 173 si recta sunt, videlicet[1219] multiplicabis pensam de 24, que est 6, per 7 que sunt sub virgula et addes 5 que sunt super[1220] ipsa 7, erunt 47, quorum pensa[1221], que est 2, serva, quia[1222] talis debet esse pensa de 173 et ita est, quare pones 2 super 173. (5) Et multiplicabis pensam de 41 per pensam de 173[1223], scilicet 5 per 2, erunt 10. De quibus extrahe pensam, remanet 1 quod est pensa summe multiplicationis: servabis enim ipsum 1 super summam multiplicationis, scilicet super $\frac{1\ \ 5}{3\ \ 7}$, 337. Et [R, f.34v]multiplicabis pensam de 337 que est 4 per 7 que sunt sub virgula post 337, et super adde 5, erunt 33, quorum pensa, que est 6, multiplicabis per 3 que[1224] sunt sub[1225] eadem virgula post 7[1226] et adde 1 quod [F_2, f.21r]est super ipsa 3, erunt 19, quorum pensa est 1, ut pro pensa summe multiplicationis super 337 in questione servatum est: ergo recta est dicta multiplicatio[1227]. (6) Nam ordo [N, f.44v] probandi est cum inceperis multiplicare, debes incipere probare. Ut in hac multiplicatione, cum habuisti 41 ex multiplicatione de 13 in 3, [F_1, f.] duobus super additis, debuisti statim per pensam[1228] cognoscere, si ipsa 41 recta esset[1229], similiter[1230] et[1231] cum habuisti 173, debuisti[1232] cognoscere per pensam[1233] si recta esset[1234]. Iterum, cum multiplicasti 41 per 173, debuisti cognoscere per pensam si eorum multiplicatio recta

[1218] Ipsorum F F_1 F_2ARSV, eorum N
[1219] Videlicet F F_1 F_2ARSV, scilicet N
[1220] Super F F_2A RS, sub NV, non si legge F_1
[1221] Pensa F F_2ARSV F_1, pensam N
[1222] Quia F F_1 F_2ARSV, quare N
[1223] Et ita est- per pensam de 173: N ripete questo rigo
[1224] Que F F_1 R ANSV, si F_2
[1225] sub F_1 F_2NARSV, Super F,
[1226] 7FNRS F_2, 2 AV F_1
[1227]multiplicatio F_1, Multiplicatione FARSVN F_2
[1228] Per pensam F F_1 F_2NASV, *om*. R
[1229] esset FS, essent F_1 F_2NARV
[1230] Similiter F F_1 F_2ARSV, *om*. N
[1231] Et F F_1NSV, *om*. AR F_2
[1232] debuisti FNRSV, Habuisti N, non si legge in F_1
[1233] cognoscere-pensam F F_1ARSV, per pensam cognoscere N
[1234] Esset FS, essent NARV F_1 / et-esset: *om*. F_2

esset[1235]. Et cum habuisti summam, scilicet $\frac{1\ 5}{3\ 7}$ 37, debuisti cognoscere[1236] similiter, secundum quod superius demonstravimus, si illa divisio[1237] recta esset.

De eodem.[1238]

(1) Iterum[1239], si volueris multiplicare $\frac{1}{4}$ 16 per $\frac{2}{5}$ 27, descripta questione, multiplica[1240] 16 per eorum[1241] virgulam, scilicet per 4 et adde 1, erunt quarte 65[1242], quem numerum[1243] proba[1244] per pensam. Sic ut[1245] si per pensam septenarii probare volueris, divides 16 per 7, remanebunt 2 que multiplica per 4 de virgula et adde 1 quod est [V, f.20v] super[1246] 4, erunt 9 que divide per 7, remanent 2, et tot debet[1247] remanere de 65, si dividantur per 7, et tot[1248] remanent. (2) Ergo pensa de 65 est 2 que serva super ipsum[1249] 65. Deinde multiplica[1250] 27 per eorum virgulam[1251], erunt quinte 137 quas pone super $\frac{2}{5}$ 27, et vide, per pensam de 7, si ipsa[1252] 137 recta sint[1253], sicuti vidisti de[1254] 65. Et reperies quod pensa de[1255] 137 debet[1256] esse 4 et ita est, quia si diviseris[1257] 137 per 7, nimirum 4 remanebunt. (3) Quare servabis 4 super 137 pro ipsorum pensa. Deinde multiplicabis 65 per 137, erunt vigesime 8905.

1235 Esset F F_1NASV, essent R, *om*. F_2
1236 Per pensam-cognoscere F F_1 R NASV, *om*. F_2
1237 Divisio F F_1 F_2ARSVN_2, multiplicatio N_1
1238 De eodem F F_1 F_2NRV, *om*. A
1239 Iterum F F_1RNAV, Item S F_2
1240 Multiplica F_1F F_2ARS, multiplicabis NV
1241 Eorum F F_1 F_2ARSV, earum N
1242 Quarte 65 F F_1 F_2NASV, 65 quarte R
1243 Numerum F F_1 F_2ARSN, *om*. V
1244 Proba FARSN F_2, probam V, *om*. F_1
1245 sic ut F F_1 F_2A RS V, Sicut N,
1246 Super F F_1 F_2NASV, super ipsum R
1247 Debet F F_1 F_2ARSV, debent N
1248 Tot F F_1 F_2NASV, ita R
1249 super ipsum NAV F_1, Super FRS F_2
1250 Multiplica F F_1 F_2ARSV, multiplicata N
1251 Virgulam F F_1 F_2NASV, virgulam et super additis duobus R
1252 Ipsa F F_1 NASVR, suprascripta F_2
1253 Sint F F_1 F_2NSV, sit AR
1254 De FARSV F_2, *om*. N, *om*. F_1 *che però mostra uno spazio bianco*
1255 deFNRSV F_2 F_1, *om*.A
1256 Debet F F_2RNSVA, debent F_1
1257 Diviseris FRS F_2, divisis NAV F_1

<Probatio>

(1) Que multiplicatio si recta fuerit, ita per eandem septenarii pensam[1258] cognosces: multiplicabis servatam pensam de 65, scilicet 2, per pensam de 137 que est 4, erunt 8, que divides per 7, remanet[1259] 1. Et tot debet[1260] remanere de 8905 si dividatur[1261] per 7, et ita fit. Unde cognoscimus quod recta est illa multiplicatio. (2) Postea divide 8905 per ruptos qui sunt sub virgulis, hoc est per 4 et per 5 positos[1262] sub una virgula. Tamen divide prius per 5, ideo quia 8905 integraliter per 5[1263] dividuntur, exibunt $\frac{0\ \ 1}{5\ \ 4}$[1264]445 pro summa quesite multiplicationis.

(3) Que divisio si recta est, ita debet[1265] cognoscere[1266]: divides[1267] 445 per 7, remanent[1268] 4 que multiplica per 4 que sunt sub virgula[1269] post ipsa[1270] 445 et adde 1 quod est super ipsa 4, erunt 17. Que divide per 7, [N, f. 45r] remanent 3. Que multiplica[1271] per 5 que sunt sub virgula post 4, et adde ze[/S, f. 25v]phyrum quod est super 5, erunt 15. Que divide per 7, remanet 1, quod 1 cum sit pensa de 8905, scimus quod prescripta divisio recta est[1272]. (4) Et scias[1273] quia[1274] 5 que sunt sub virgula divisionis [R, f. 35r] post 4, cum super ipsa sit 0, nihil representant. Ergo decripta multiplicatio est $\frac{1}{4}$ 445. Posuimus enim ipsa 5 sub virgula ut inveniretur pensa.

(5) Aliter promtius[1275] potes hanc eandem multiplicationem evitando reperire, scilicet ut dividas 65 reperta [F_1, f.]per 5 que sunt sub virgula, exibunt 13, que multiplica per 137, et divides per

---

[1258] Pensam F F_1RNSVA, pensas F_2
[1259] Remanet F F_1 F_2ARSN, remanent V
[1260] Debet F F_1 F_2ARSV, debent N
[1261] Dividatur F_1 F_2FA, dividantur NRSV
[1262] Positos F F_2ARS, positas N F_1, posito V
[1263] Per 5 F F_1 F_2NASV, *om*. R
[1264] $\frac{0}{5}\frac{1}{4}$ F F_1 F_2ARV, $\frac{1}{5}\frac{0}{4}$ N, $\frac{1}{4}$ S
[1265] Debet F F_2ARV, debes NS F_1
[1266] Debet cognoscere F F_1 NRASV, cognoscere debet F_2
[1267] Divides F F_1 NRASV, divide F_2
[1268] Remanent F F_1 F_2RANV, remanet S
[1269] Virgula F F_1 F_2NRSV, virga A
[1270] Ipsa FRS, *om*. NAV F_1 F_2
[1271] Multiplica F F_1 F_2ARSV, multiplicata N
[1272] Est F F_1 F_2NASV, sit R
[1273] Scias F F_1 F_2ARSV, scies N
[1274] quia R, Quare F F_1 F_2ASV, quod N
[1275] Promtius FS, pro minus N F_1AV R (R *in realtà non si capisce bene potrebbe anche essere* promptius), *om*. F_2

4 de alia virgula[1276], exibunt similiter $\frac{1}{4}$445, ut superius reperta sunt. (6) Nam semper cum debemus aliquem numerum per 4 et per[1277] 5 dividere, hoc est per $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 5}$, si ipse numerus habuerit $\frac{1}{5}$, consuescimus ipsum prius per 5 quam per 4 dividere, propter integram[1278] ipsius divisionem[1279], sicuti[1280] modo fecimus de 8905. Et si numerus ipse per 4 integraliter dividitur[1281], consuevimus ipsum prius per 4 quam per 5 dividere. Et si numerus ille[1282] nec[1283] per 4 nec per 5 integraliter dividi possit, consuevimus ipsum dividere per $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 10}$[1284], ideo quia quattuor et[1285] quinque faciunt 20, quorum regula est $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 10}$. (7) Et hoc facimus propter pulchriorem locutionem: quia pulchrius est dicere $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 10}$ quam $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 5}$, quamvis [A, f.14r] idem sint[1286]. Similiter debes intelligere de quibusdam aliis numeris. Scilicet, cum debueris dividere aliquem numerum per 3 et per 4, hoc est per $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 4}$[1287]; qui numerus non dividatur per aliquem ipsorum[1288] integraliter, divides eum per $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 6}$quod est pulchrius. Item cum debueris dividere per 4 et per 4 hoc est per $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 4}$, divides eum per $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 8}$. Et cum[1289] debueris dividere per 3 et per 6, hoc est per $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 6}$, divides per $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 9}$, ideo quia tantum faciet multiplicatio de 2 in 9 quantum de 3 in 6. Item cum debueris dividere per 4 e per 6, hoc est per[1290] $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 6}$, divides per $\frac{1\ 0}{3\ 8}$. Et cum debueris dividere per $\frac{1\ 0}{6\ 6}$, divides per $\frac{1\ 0}{3\ 10}$. Et cum debueris dividere per $\frac{1\ 0}{5\ 8}$, divides per $\frac{1\ 0}{4\ 10}$. Et cum debueris dividere per $\frac{1\ 0}{6\ 6}$,

[1276] Virgula F F_1 F_2NASV, virgula et R
[1277] Per F F_1 F_2NASV, *om*. R
[1278] Integram F F_2ARSV, integrum N F_1
[1279] Divisionem F F_2 ARSV, divisorem N, *non si legge* F_1
[1280] Sicuti F F_2 ARSV, sicut N, *non si legge* F_1
[1281] Dividitur F F_2 F_1NRSV, dividatur A
[1282] Ille F F_1 F_2ARSV, ipse N
[1283] Nec F F_2 RNAVS, neque F_1
[1284] Ideo- $\frac{10}{210}$ F F_1NASV F_2, *om*. R
[1285] Et A, *om*. F F_1NSRV F_2
[1286] Sint F F_1 F_2NASV, sit R
[1287] $\frac{1\ 0}{3\ 4}$ F F_2ARSN F_1, $\frac{1\ 0}{4\ 3}$ V
[1288] Ipsorum F_2F F_1NRSV, ipsarum A
[1289] Cum F F_2ARSV, si N
[1290] Per F F_2ARSV, *om*. N F_1

divides per $\frac{1\ 0}{4\ 9}$, ideo quia[1291] utraque virgula, scilicet $\frac{1\ \ 0}{5\ \ 6}$ et $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 9}$, est regula de 36[1292]. (8) Sed nos diligimus plus[1293] extremos numeros qui sunt a decem et infra in compositionibus[1294] numerorum et ideo pulchrius est $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 9}$, quam $\frac{1\ \ 0}{6\ \ 6}$. Et hoc idem intelligas de precedentibus.

(9) [F_2, f. 21v] Verum si dividere volueris aliquem numerum per aliquos alios[1295] numeros[1296] infra decenarium existentes, preter hos quos superius coaptare docuimus [1297], cum ipsi coaptari non possint, divides [N, f. 45v] ipsum per ipsos[1298]. Ut, si debueris dividere eum per 5 et per 7, divides ipsum[1299] per $\frac{1\ \ 0}{5\ \ 7}$, et sic intelligas de reliquis.

<De multiplicatione de $\frac{3}{8}$ 18 per $\frac{4}{9}$ 24[1300]>

(1) Rursus[1301], si volueris multiplicare $\frac{3}{8}$ 18 per $\frac{4}{9}$ 24, descripta questione[1302], multiplica[1303] 18 per eorum[1304] virgulam, hoc est per[1305] 8[1306], et adde[1307] 3[1308], erunt 147. (2) Item multiplica[1309] 24 per 9[1310] et adde 4[1311], erunt 220. Que multiplica per 147[1312] [R, f. 35v] et divide per ruptos[1313], exibunt $\frac{4\ \ 1}{8\ \ 9}$ 449, quorum pensa est 0 per 11. (3) Nam si de $\frac{4\ \ 1}{8\ \ 9}$ que partes sint[1314] unius integri scire volueris,

[1291] Quia F F_1 F_2ARSV, quare N
[1292] 36 F F_2RSV, 369 NA F_1V (*in S dopo 36 c'è un segno forse per sed che può essere confuso con un 9*)
[1293] Plus FRSV, prius NA F_2, *non si legge in* F_1
[1294] Et-compositionibus F F_1NRSVA, in ista compositione F_2
[1295] Aliquos alios F F_2ARSVN, alios aliquos F_1
[1296] Numeros F F_1 F_2NASV, *om*. R
[1297] coaptare docuimus N F_1ARSV F_2, Docuimus coaptare F
[1298] Ipsos NARSV F_1 F_2, ipso F
[1299] Ipsum F NARSV F_1, eum F_2
[1300] De multiplicatione-24: de eodem N F_1 F_2
[1301] Rursus F F_1NASV F_2, Item R
[1302] Questione F F_1 F_2ARSV, divisione N
[1303] Multiplica F F_1 F_2NASV, ut hic ostenditur et multiplicabis R
[1304] Eorum F F_2AS, earum NV F_1
[1305] Eorum-per F F_1NAVS F_2, *om*. R
[1306] 8 F F_1 F_2NASV, 8 qui sub virgula R
[1307] Adde F_1 F_2FNASV, addes R
[1308] 3 F F_1 F_2NASV, 3 que sunt super ipsa 8 R
[1309] Multiplica FNAV F_1S F_2, multiplicabis R
[1310] 9 FNASV F_1 F_2, 9 que sunt sub virgula R
[1311] 4 FNASV F_1 F_2, 4 que sunt super ipsa 9 R
[1312] Que multiplica per 147 F F_1NASV F_2, multiplicabis ergo 147 per 220 R
[1313] Ruptos F F_1 F_2NASV, ruptos et R
[1314] Partes sint F_1F F_2NASV, pars sit R

multiplica 1 quod est super 9 per 8 et adde 4, erunt 12 que serva pro numero denominante[1315]. Et multiplica 9 per 8, que sunt sub virgula, erunt 72[1316] pro denominato que divide per serva[F_1/,f.35v]ta 12, exibunt 6 de quibus 6 dicas $\frac{1}{6}$, et talis pars sunt 12 de 72. Similiter talis[1317] $\frac{4}{8}\frac{1}{9}$ sunt $\frac{1}{6}$ [1318] unius integri. (4) Dicam hoc pulcrius quia ex multiplicatione de 8 in 9 surgunt[1319] 72, fac septuagesimas secundas de uno integro, erunt 72. De quibus accipe nonam et quattuor octavas unius[1320] none, erunt 8 et 4, scilicet 12, ut habentur ex multiplicatione de 1 quod est super 9 in 8, additis[1321] 4 que sunt[1322] super 8. Ergo $\frac{4}{8}\frac{1}{9}$ sunt $\frac{12}{72}$. Quare proportio de $\frac{4}{8}\frac{1}{9}$ ad unum integrum est sicut 12 ad 72. Sed proportio de 12 ad 72 est sicut propor[/V, f.21r]tio duodecime[1323] partis de 12 ad duodecimam partem[1324] de 72, hoc est de 1 ad 6. Quia, ut[1325] in Euclide reperitur, sicut[1326] totus[1327] ad totum, ita[1328] pars est[1329] ad partem, est enim 1 de[1330] 6 sexta pars, que[1331] habetur[1332] pro $\frac{4}{8}\frac{1}{9}$, ergo[1333] summa prescripte multiplicationis de $\frac{1}{6}$ 449.

<De evitatione>

[1315] Denominante F F_2ARS F_1V, determinante N
[1316] 72 FARSN F_1 F_2, 72 et V
[1317] Talis F F_1, *om.*NARSV F_2
[1318] $\frac{1}{6}$ F F_1ARSV F_2, 6 N
[1319] Surgunt F F_2ARSN F_1, surgit V
[1320] Unius F F_1 F_2NASV, R *non legge la parola e lascia dei punt*ini
[1321] Additis F F_1 F_2NASV, addas R
[1322] Sunt SRV F_1 F_2, *om.* FNA
[1323] Duodecime F F_2ARVS, decime N F_1
[1324] Partem F F_1 F_2ARSN, *om.* V
[1325] Quia ut F F_1 F_2ARSV, quare sicut N
[1326] Sicut F F_1 F_2NASV, ita R
[1327] totus NRSV, Totum F F_1A, *om.* F_2
[1328] Ita F F_1 F_2NAS, sicut R
[1329] Est F_1F F_2NAS, *om.* R
[1330] 1 de R F_1 F_2SV, De FNA
[1331] Que F_1F F_2RAS, quod N
[1332] Dicam-habetur F_1F NRAS , *lo sposta dopo* repertum est F_2
[1333] pro $\frac{4}{8}\frac{1}{9}$ ergo N F_1ARVS (*però R lo aggiunge a fine rigo, mentre S aggiunge in interlinea* $\frac{4}{8}\frac{1}{9}$ *e ha 'ergo' nel testo)*, Pro F

(1) Aliter possumus[1334] hanc eandem summam, evitando[1335], reperire. Scilicet[1336], cum debeas multiplicare 147 per 220 et postea dividere per 8 et per 9, multiplica tantum tertiam partem de 147[1337], que est 49, per quartam partem de 220, hoc est per 55, et divides summam per tertiam partem de 9, hoc est per 3, et per quartam[1338] de 8, hoc est per 2. Ergo divides eorum[1339] summam per 6, exibunt $\frac{1}{6}$ 449 ut superius repertum est[1340]. (2) Et nota[1341] cum numerus denominans comunicat cum denominato[1342] scilicet numerus qui est super virgam[1343] cum numero qui est sub virga[1344] tunc debent aptari dividendo eos per maiorem numerum qui est comunis utrisque a quo ipsi sunt comunicantes.

(3) Verbi gratia, habemus $\frac{6}{9}$. [S, f. 46r]Sunt enim 6 cum 9 comunicantes, et est eorum comunis mensura ternarius. Quare divides utraque[1345] eorum per 3, et quod ex divisione superioris provenerit, scilicet 2, pones super quandam virgam[1346]; et quod egredietur ex divisione inferioris pones[1347] sub ipsa[1348]. Et habebis $\frac{2}{3}$ pro $\frac{6}{9}$. (4) Item de $\frac{5}{10}$ est quinarius, scilicet numerus denominans comunis mensura eorum. Quare si dividantur utrique numeri per 5, scilicet 5 et 10, proveniet $\frac{1}{2}$ pro aptatione de $\frac{5}{10}$ et hoc intelligas in similibus.

(5) Est, enim, modus inveniendi maximam comunitatem quam inter se habent numeri comunicantes: ut dividas maiorem per minorem et si ex ipsa divisione nihil superaverit, tunc minor

---

1334 PossumusFARSVN, possimus F_1
1335 evitando NARSV F_1, Evitandi F
1336 Scilicet N F_1ARSV, sed F
1337 147 R F_1VS_2, 149 FNAS_1
1338 Quartam FA, quartam partem NRSV F_1
1339 Eorum FARSVN, eorum eorum F_1
1340 Repertum est F F_1NA, *om*. RS
1341 Nota FARSN, notandum V F_1
1342 Denominato F F_1NASV, numero denominato R
1343 Virgam F F_1NAS, virgulam RV
1344 Cum-Virga F F_1NAS, cum- virgula R, om. V
1345 Utraque FASV, utrumque NR F_1
1346 Virgam F F_1NASV, virgulam R
1347 Pones N F_1ARS, pone V, pones pones F
1348 Ipsa F F_1ARSN, ipso V

numerus erit maxima eorum comunis mensura, ut in $\frac{12}{72}$. (6) Et si ex[1349] ipsa divisione aliquid superfuerit, serva illud pro residuo primo in quo [R, f. 36r] divides minorem[1350] numerum. Ex qua divisione si nichil superfuerit tunc residuum primum[1351] erit communis mensura numerorum ut in $\frac{10}{22}$, quorum comunis mensura est 2[1352], quare[1353] divisis 22 per 10 remanent 2 in quibus 10 integraliter dividuntur. (7) Et si ex divisione minoris numeri per[1354] primum[1355] residuum aliquod[1356] superfuerit, vocabis illud residuum secundum, in quo [F_1,f. 36r]si maior numerus integraliter dividatur, tunc residuum secundum erit comunis mensura numerorum, ut in $\frac{12}{20}$, quorum comunis mensura[1357] est 4, quia, divisis 20[1358] per 12, remanent 8 in quibus, divisis[1359] 12, remanent 4, in quibus 12[1360] integraliter dividuntur, et si ex divisione maioris numeri aliquid superfuerit, vocabisque eum residuum tertium, in quo divides minorem numerum et sic semper facies[1361] donec aliquod residuum proveniat in maiori numero per quod integraliter dividatur minor vel donec in minori proveniat residuum per quod dividatur maior et illud residuum erit comunis mensura et maxima, ut in Euclide[1362] apertis[1363] demonstrationibus declaratur.

Pars secunda

De multiplicatione numerorum cum pluribus ruptis sub una virgula[1364].

1349 Ex FASV, in R, *om.*N F_1
1350 Minorem F F_1NASV, maiorem R
1351 Primum F F_1NASV, *om.* R
1352 2 FRSV, et NA, 2 et F_1
1353 Quare F F_1NASV, quia R
1354 Per F F_1ARSV, pro N
1355 Primum residuum FASV F_1, residuum primum R, residuum N
1356 Aliquod F F_1NASV, aliquid R
1357 Comunis mensura F F_1NASV, mensura comunis R
1358 20 V, 10 F F_1ARSN,
1359 Divisis FASV, divisis per N F_1
1360 12 F F_1NASV, 20 R
1361 Facies F_1FARSN, *om.* V
1362 Euclide F F_1ARSV, Euclidis N
1363 Apertis FRS, *om.* NAV F_1
1364 Pars-virgula: Explicit pars prima sexti capituli. Incipit secunda de multiplicatione numerorum cum pluribus ruptis sub una virgula FRNSV, Explicit pars prima sexti cspituli. Incipit secunda de multiplicatione numerorum cum pluribus ruptis sub una virga A, Explicit pars prima sexti cspituli. Incipit secunda de multiplicatione numerorum cum pluribus F_1, *om.* F_2

(1) Si autem 13 et tres octavas, et dimidium unius octave, quod sic scribuntur[1365] $\frac{1\ \ 3}{2\ \ 8}$ 13, volueris multiplicare per 24 et[1366] duas nonas, et tres quartas unius none, que sic scribuntur $\frac{3\ \ 2}{4\ \ 9}$ 24, describe questionem [N, f.46v] ut hic ostenditur. (2) Et multiplica 13 per 8, et adde 3, erunt octave 107[1367], que[1368] multiplica per 2 que sunt sub virgula post[1369] 8 et adde 1 quod est super ipsa 2 erunt[1370] sextedecime 215, quia 2 et 8, que sunt sub virgula, insimul multiplicata, faciunt 16: pone ergo 215 super $\frac{1\ \ 3}{2\ \ 8}$ 13. (3) Similiter multiplica 24 per eorum virgulam, scilicet per 9[1371] et adde 2 que sunt super[1372] 9, erunt none 218 que per 4 que sunt sub virgula post[1373] 9 et adde 3 que sunt super 4, erunt[1374] 875 trigesime sexte quas pone super $\frac{3\ \ 2}{4\ \ 9}$ 24, et multiplica 215 per 875[1375], et divide[1376] per numeros qui sunt sub virgulis utriusque numeri, hoc est per[1377] $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{2\ 4\ 8\ 9}$ vel per $\frac{1\ 0\ 0}{8\ 8\ 9}$ quod est pulchrius, exibunt $\frac{5\ 3\ 0}{8\ 8\ 9}$ 326.

(4) Et sic poteris[1378] [A, f 14v] multiplicare[1379] quemlibet numerum cum duobus ruptis sub una virgula per quemlibet numerum cum duobus[1380] ruptis sub alia.

(5) Item si 14 et tres undecimas et tres octavas unius undecime et dimidium octave unius undecime - que sic scribuntur $\frac{1\ 3\ 3}{2\ 8\ 11}$ 14 - multiplicare volueris per 25 et quattuor tredecimas et duas nonas unius tredecime et tertiam unius none de una tredecima - que sic scribuntur $\frac{1\ 2\ 4}{3\ 9\ 13}$ [1381]25 - describe questionem ut hic ostenditur et multiplica 14 per eorum[1382] virgulam, hoc est per 11[1383], et adde 3, que per 8, et adde 3 que sunt super 8 que per 2 et adde 1 erunt centesime septuagesime sexte

[1365] Scribuntur FRNSVA F_1, scribuntur seguito da un'altra frazione F_2
[1366] 24 et FRNSVA F_1, *om.* F_2
[1367] Octave 107 F F_1 F_2NSVA, 107 octave R
[1368] Que FRNSVA F_1, quia F_2
[1369] Post SVA F_1 F_2, per FNR
[1370] Erunt FRNSVA F_1, et erunt F_2
[1371] Per 9 FRNSVA F_1, per 9 qui est sub virgula post ipsum 18 F_2
[1372] Super FRNSVA F_1, super ipsum F_2
[1373] Post FRNSVA F_1, post ipsum F_2
[1374] Erunt N F_1ARSV F_2, cum F
[1375] Trigesime-875: F_2 *lo ripete due vol*te
[1376] Divide F F_1 F_2NRSA, dividimus V
[1377] Per F F_1 F_2NRV, *om.* S
[1378] Poteris F F_2RSVA, potes N F_1
[1379] Multiplicare N F_1RSA F_2, multiplicare per FV
[1380] Duobus F F_2NRSAV, duabus F_1
[1381] $\frac{1\ 2\ 4}{3\ 9\ 13}$, $\frac{1\ 2\ 4}{8\ 9\ 18}$ 25 F
[1382] Eorum F F_1 F_2RSVA, earum N
[1383] 11 FV, 13 RSNA F_1 F_2

2519 quas pone super $\frac{1\ 3\ 3}{2\ 8\ 11}$ [1384]14. (6) Similiter multiplica 25 per eorum[1385] virgulam[1386], erunt trecentesime[1387] quinquagesime prime 8890, quas pone super $\frac{1\ 2\ 4}{3\ 9\ 13}$[1388] 25, et multiplica 2519 per 8890, erunt [V, f.21v] 22393910 que divide per reliquos ruptos qui sunt sub utraque virgula, scilicet per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 8\ 9\ 18}$[1389] exibunt $\frac{1\ 5\ 4\ 6}{3\ 8\ 9\ 14}$[1390] 362[1391]: quia cum de $\frac{1}{6}$ evitatur $\frac{1}{2}$, remanet $\frac{1}{3}$[1392]. [1393][1394] (7) Quam multiplicationem si per pensam de 7 [S, f. 26v] probare volueris[1395], accipe pensam de $\frac{1\ 3\ 3}{2\ 8\ 11}$ 14 que sic accipitur: multiplicabis pensam de 14 que est 0 per pensam de 11 que est 4 et adde 3 que sunt super 11, erunt 3 que multiplica per pensam de 8 que est 1 et adde 3 que sunt super[1396] 8 erunt 6 que[1397] multiplica per 2 que sunt sub virgula et adde 1 quod est super 2 erunt 13 quorum pensa que est 6 est[1398] pensa de $\frac{1\ 3\ 3}{2\ 8\ 11}$ 14. Eademque via et ordine accipe pensam de $\frac{1\ 2\ 4}{3\ 9\ 13}$ 25 et invenias eam esse 0 que multiplica per 6 scilicet per pensam de $\frac{1\ 3\ 3}{2\ 8\ 11}$ 14 [N, f.47r] modo inventam[1399], erit 0[1400], quod est[1401] pensa[1402] summe multiplicationis. (8) Unde videas si pensa de $\frac{2\ 6\ 6\ 5\ 6}{6\ 8\ 9\ 11\ 13}$ 362 est 0, tunc recta erit multiplicatio, et intellige pensam de 14 et suis fractionibus, scilicet 6, esse[1403] pensa[1404] numerorum, scilicet[1405] de 2549[1406], et pensam[1407] de 25 et suis fractionibus, scilicet 0, est pensa de 8890, quare pensa que provenit de 6 in 0, scilicet 0[1408], est pensa multiplicationis de 2519 in 8890.

1384 $\frac{1\ 3\ 3}{2\ 8\ 11}$ FR, $\frac{1\ 3\ 3}{3\ 8\ 11}$ N F_1 F_2SVA
1385 Eorum F F_1 F_2RNSAV_2, eorum ergo V_1
1386 Virgulam F F_1 F_2RNSV, virgam A
1387 Trecentesime F, trigentesime NRSA F_1 F_2, trigesime V
1388 $\frac{1\ 2\ 4}{3\ 9\ 13}$, $\frac{1\ 2\ 4}{8\ 9\ 18}$ 25 F
1389 $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 8\ 9\ 18}$ F F_1 F_2RNSV, $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 8\ 9\ 13}$ A
1390 $\frac{1\ 5\ 4\ 6}{3\ 8\ 9\ 14}$, $\frac{2\ 5\ 4\ 6}{2\ 8\ 9\ 14}$ F
1391 362 FRS, 25 NVA F_1 F_2
1392 $\frac{1}{3}$ FV, 32NA F_1, *om.* F_2
1393 Quia-$\frac{1}{3}$: ante exibunt posuit S, *om.* F_2
1394 $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 8\ 9\ 18}$-$\frac{1}{3}$: $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{2\ 3\ 8\ 9\ 11\ 13}$ ut divide per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{6\ 8\ 9\ 11\ 13}$ et exibunt $\frac{2\ 6\ 6\ 4\ 6}{6\ 8\ 9\ 11\ 13}$ 362 S
1395 Volueris F F_1 F_2NSVA, vis R
1396 Super F F_1 F_2NSVA, super ipsorum R
1397 Que F F_1NSVAR, quia F_2
1398 Est F F_1 F_2RNSV, *om.* A
1399 Inventam FRSVA F_1 F_2, inventa N
1400 0 FRA F_2, 0 *in interlineam posuit* S, *om.* N F_1
1401 Est F F_2RNSVA, *om.* F_1
1402 Pensa F F_1 F_2RNSA, pensam V
1403 Esse F F_1 F_2NSVA, etiam R
1404 Pensa F_2R, pensam F NSVA F_1
1405 Scilicet F F_1 F_2NSVR, *om.* A

Incipit pars tertia[1409]

(1) Si vis multiplicare 15 et tertiam et quartam unius integri que sic scribuntur cum duabus separatis[1410] virgulis $\frac{1}{4},\frac{1}{3}$ per 26 et[1411] quintam et sextam que sic scribuntur $\frac{1}{6}\,\frac{1}{5}$ 26, describe questionem ut hic ostenditur et[1412] multiplica 15 per 3 que sunt sub[1413] prima virgula et adde 1 quod est super 3, erunt tertie 46 quas multiplica per 4 que sunt sub alia virgula, erunt duodecime 184, super quas adde multiplicationem[1414] de 1 quod est super 4 in 3. Quia quarta equatur tribus duodecimis erunt similiter duodecime 187 quas pone in questione[1415] super $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 15. (2) Similiter multiplica 26 per suas virgulas, hoc est per 5, et addes 1 quod est super 5, erunt XXX.^{me} 791 quas pone super $\frac{1}{6}\,\frac{1}{5}$ 26. (3) Et multiplica 187 per 791, erunt 147917, que divides per omnes numeros qui sunt sub virgulis, scilicet per $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{3\ \ 4\ \ 5\ \ 6}$ qui, coaptati[1416], revertuntur in $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{4\ \ 9\ \ 10}$, exibunt $\frac{1\ \ 7\ \ 8}{4\ \ 9\ \ 10}$ 410, ut in questione[1417] ostenditur.

<De eodem>

[R, f. 37r; F_2, f. 32v](1) Item[1418] si volueris multiplicare $\frac{2}{9}\,\frac{3}{5}$16 cum $\frac{2}{11}\frac{5}{8}$ 27, descripta questione, multiplica 16 per 5 et adde 3 que omnia multiplica per 9 et adde multiplicationem de 2 que sunt super 9 in 5, erunt 757 que pone super $\frac{2}{9}\,\frac{3}{5}$16. (2) Item multiplica 27 per suas virgulas, erunt 2442 per que multiplica 757[1419] et divides summam per omnes ruptos scilicet per $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{5\ \ 8\ \ 9\ \ 11}$ et, coapta ruptos, exibunt $\frac{2\ \ 8\ \ 4\ \ 8}{4\ \ 9\ \ 10\ \ 11}$[1420] 467. (3) Quam multiplicationem si per pensam de 7 probare volueris, accipe

[1406] 2549 FN, 2519 RSVA F_1 F_2
[1407] Pensam FN F_1SVA F_2, pensa R
[1408] Scilicet 0 F F_1NSV, *om*. RA F_2
[1409] Incipit-tertia R, *om*. FNSVA F_1 F_2
[1410] Separatis F F_1 F_2RSVA, superatis N
[1411] 26 et R F_2, _et F, *segno difficile da decifrare* S, *om*. NVA F_1
[1412] Et F F_1 F_2RSA, *om*. NV
[1413] Sub F F_1 F_2NRVA, super S
[1414] Multiplicationem F F_2RSV, multiplicantur N, multiplicant A F_1
[1415] Questione F $F_{1(a)}$ F_2RSVA, divisione N $F_{1(b)}$
[1416] Coaptati F F_2RA, coapti NSV F_1
[1417] Questione: *forse da emendare in* figura
[1418] Item FRANSV F_1, *om*. F_1
[1419] 757 F F_1 F_2RSVA, 257 N
[1420] $\frac{2\ \ 8\ \ 4\ \ 8}{4\ \ 9\ \ 10\ \ 11}$ F F_2NSVA, $\frac{3\ \ 8\ \ 4\ \ 8}{4\ \ 9\ \ 10\ \ 11}$ R F_1

pensam de $\frac{2}{9}\frac{3}{5}16$, que sic accipitur: multiplicatur pensa de 16, que est 2, per 5 de virgula et super adduntur[1421] 3 que sunt super 5, fi[/F_1, f.]unt 13, quorum pensa que est 6 multiplicatur per pensam de 9, que est 2, fiunt 12 super que additur[1422] multiplicatio de 2 que sunt super 9 in 5, fiunt 22, quorum pensa, que est 1, est pensa de $\frac{2}{9}\frac{3}{5}16$. Et tot debet esse pensa[1423] de 757 et ita est. (4) Item accipe pensam[1424] de $\frac{2}{11}\frac{5}{8}27$ que accipitur secundum quod accepimus ipsam de $\frac{2}{9}\frac{3}{5}16$[1425]: et invenies pensam ipsorum esse 4, que 4 sunt pensa de 2447[1426]. Multiplica ergo 1 per 4, [N, f.47v]erunt 4, que 4[1427] sunt pensa summe, scilicet de $\frac{3\;8\;4\;8}{4\;9\;10\;11}$ 467. (5) Et si $\frac{3\;8\;4\;8}{4\;9\;10\;11}$ in partes unius numeri reducere vis[1428], multiplica 11 per 10, et eorum summam multiplica per 9, et hoc totum[1429] per 4, erunt 3960, qui numerus est denominatus: pone ergo ipsum sub quadam virga[1430] et multiplica 8 que sunt sub[1431] 11 per 10 et addes[1432] 4 que sunt super 10, que[1433] omnia multiplica per 9 et adde 8 que sunt super 9 que per 4 et adde 3 que sunt super 4 erunt 3059, qui numerus est denominans[1434], quare pones eum super virgam, et habebis $\frac{3\;0\;5\;9}{3\;9\;6\;0}$[1435] pro re quesita[1436].

<*De eodem*>

(1) Item si vis multiplicare $\frac{4}{9}\frac{1}{8}$ 17 per $\frac{1}{17}\frac{1}{3}$ 28, multiplica integra per eorum virgas[1437] ordine suprascripto[1438]. Et habebis pro superiori numero 1241, et pro inferiori numero 1448, quos numeros

[1421] Adduntur F F_2SA, additur NRV F_1
[1422] Additur F F_1 F_2RNSA, addatur V
[1423] Pensa F F_1 F_2NSVA, pensam R
[1424] Pensam F F_1RNSA, pensa V F_2
[1425] 16 F F_1 F_2RNS, 10 VA
[1426] 2447 F F_2NSVAR, 447 F_1
[1427] 4 F F_1NSVA, *om.* R F_2
[1428] Vis F F_1 F_2RSVA, volueris N
[1429] Et hoc totum F F_2RVA, et hoc hoc S, hoc est totum N F_1
[1430] Virga F F_1NA, virgula RV F_2
[1431] Sub F F_1 F_2NA, super RSV
[1432] Addes F F_1 F_2RSVA, adde N
[1433] Que F F_2NRSVA, quo F_1
[1434] Denominans: Denominatus F F_1RNVA, denotatus F_2, denotatur S
[1435] $\frac{3\;0\;5\;9}{3\;9\;6\;0}$R, $\frac{2\;0\;5\;9}{3\;9\;6\;0}$ F F_1NSVA,
[1436] Re quesita F_1F F_2RA, requisita NSV
[1437] Virgas F F_2RSVA, virgulas N
[1438] Suprascripto F F_1 F_2RSA, supradicto N, demonstrato V

debes insimul multiplicare et summam[1439] per omnes[1440] ruptos dividere, scilicet per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 8\ 9\ 17}$. (2) Et quia comunicatio est[1441] inter numerum dividendum et dividentem, hoc est[1442] inter numeros multiplicantes et numeros qui sunt sub virga[1443], debes imitari modum evitationis supradictum, videlicet accipies $\frac{1}{17}$ de 1241, scilicet 73 pro uno ex multiplicationibus numeris, propter quod relinquemus 17[1444] que sunt sub virga. Item accipies $\frac{1}{8}$ de 1448, scilicet 181, pro alio et[1445] relinques[1446] $\frac{1}{8}$ de virgula. Ergo multiplicabis 73 per 181 et divides [S, f. 27r] summam per reliquos numeros qui sunt sub virga, scilicet per $\frac{1\ 0}{3\ 9}$, exibunt $\frac{1\ 3}{3\ 9}$ 489 pro quesita multiplicatione[1447]. (3) Cuius summae probam[1448] accipies ex proba de 73 et de 181, cum eorum multiplicationis[1449] summa sit divisa. (4) Nam pro $\frac{3}{9}$ dices $\frac{1}{3}$, pro $\frac{1\ 3}{3\ 9}$ [V, f. 22r]dices $\frac{1}{3}$ et tertiam none. Item habemus in quadam virga[1450] hoc[1451] $\frac{2\ 3\ 2\ 5}{4\ 6\ 8\ 10}$ quas pronuntiabis ita: pro $\frac{5}{10}$ dices $\frac{1}{2}$ et pro $\frac{2}{8}$ dices quartam decime et pro $\frac{3}{6}$ dices dimidium octave decima et pro $\frac{2}{4}$ dices[1452] dimidium sexte [R, f. 37v] octave decima, et hec contingunt propter comunitates quas habent superiores numeri cum inferioribus.

(5) Et notandum quod multe[1453] fractiones que sunt sub diversis virgis[1454] possunt reduci ad unam virgam[1455], scilicet ad partes unius numeri, ut in[1456] suo demonstrabitur loco. (6) Sed hic, qualiter due fractiones que sunt [F_1, f.] sub duabus virgis coniunguntur duxi necessarium[1457] demonstrare. Multiplicabis numerum qui fuerit sub prima[1458] virga per numerum qui fuerit sub secunda[1459] et quot

---

1439 Summam F F_1 F_2RNSA, summa V
1440 Omnes F F_1 F_2RNSA, omnis V
1441 Est R, *om*. FNSV F_1 A F_2
1442 Est F F_1 F_2RNSA, *om*. V
1443 Virga F F_1 F_2RNSV, virgula A
1444 17 R, 12 FRNVA F_1 F_2
1445 Et F F_1 F_2RNV, e A, *om*. S
1446 Relinques FRNSA F_1 F_2, relinquas V
1447 Quesita multiplicatione F F_1NRSVA, multiplicatione quesita F_2
1448 Probam F F_1 F_2RNSA, pensam V
1449 Multiplicationis F F_1 F_2RNSA, multiplicationes V
1450 virga NRSA F_1, Virgam F F_2, virgula V
1451 hoc FRNVA F_1 F_2, hec S
1452 Dices F F_2RS, *om*. NVA F_1
1453 Multe F F_1 F_2RNSA, cum multiplicate V
1454 Virgis F F_1 F_2NSVA, virgulis R
1455 Virgam F F_1 F_2RNSA, virgulam V
1456 In F F_1RSVA, *om*. N
1457 Duxi necessarium F F_1RNSAV, necessarium duxi F_2
1458 Prima F F_1 F_2RSVA, una N

proveniet pones sub quadam virga[1460]. Deinde multiplicabis numerum qui est super primam[1461] virgam[1462] per numerum qui est sub secunda et [N, f. 48r]numerum qui est super[1463] secundam multiplicabis[1464] per numerum qui est[1465] sub prima[1466] et has duas multiplicationes coniunges et quot provenerint[1467] pones super virgam et habebis optatum.

(7) Verbi gratia, volumus addere $\frac{1}{2}$ cum $\frac{2}{5}$, multiplica 2 per 5 que sunt sub virgis[1468], erunt 10[1469], que pone sub quadam virga[1470] et multiplica 1 quod est super 2 per 5 et 2 que sunt super 5 per 2 que sub virga, erunt 5 et 4, scilicet 9, que 9 pone super virgam, et habebis [A, f, 15r] $\frac{9}{10}$ pro $\frac{2}{5}\frac{1}{2}$[1471]. Aliter fac de uno integro decimas, erunt decime 10, quare pro $\frac{1}{2}$[1472] habebuntur $\frac{5}{10}$[1473], et pro[1474] $\frac{2}{5}$ habebuntur $\frac{4}{10}$ et sic pro $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{5}$ habebuntur[1475] $\frac{9}{10}$, ut pre[/F_2, f. 33r]diximus.

(8) Et quamvis per hos duos modos possunt quelibet due fractiones duarum virgarum ad unam reduci virgam, tamen, qualiter in fractionibus que habent sub virgis numeros comunicantes, subtilius procedere edocebo. (9) Ut si volueris $\frac{2}{9}\frac{1}{3}$ in unam virgam reducere, quia 3 et 9, que sunt sub virgis, comunicant[1476] inter se et est ternarius eorum comunicatio, divide unum ex ipsis numeris, scilicet 3, vel 9 per 3, scilicet per eorum communem mensuram et quod proveniet[1477] multiplica per alium numerum et provenient 9 pro numero denominato.

[1459] Secunda F F_2RSVAN, secundam F_1
[1460] Virga F F_2RSA, virgula V, virgula et N F_1
[1461] Primam FRSAVN F_1, prima F_2
[1462] Virgam F F_1RSA, virgulam NV, virga F_2
[1463] Super F F_2RSANV, super super F_1
[1464] Multiplicabis F F_2NA, multiplicabis super primam V, *om.* RS
[1465] Super secundam-qui est: *in mg. posuit* S
[1466] Prima F F_1 F_2RNSA, primam V
[1467] Provenerint F F_1 F_2, prevenerit N, proveniunt RV, proveniuntur S, *om.* A
[1468] Virgis F F_1 F_2RNSA, virgulis V
[1469] 10 F F_1 F_2RNSV, *om.* A
[1470] Virga F F_2RNSA, virgula V
[1471] $\frac{2}{5}\frac{1}{2}$ FRS F_2, $\frac{1}{2}\frac{2}{5}$ N F_1
[1472] $\frac{1}{2}$ FRSN F_1 F_2, medietate V
[1473] $\frac{5}{10}$ F F_1 F_2RSV, $\frac{5}{10}$ per $\frac{1}{2}\frac{2}{5}$ N, $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{5}$ A
[1474] Pro F F_1 F_2RNSV, *om.* A
[1475] Habebuntur F_1 F_2RNSVA, habentur F
[1476] Subtilius-comunicant F F_1 F_2RSVA, *om.* N
[1477] Proveniet F F_1 F_2RVA, provenit NS

(10) Verbi gratia, multiplica[1478] quidem[1479] tertia parte[1480] de 3, scilicet 1 per 9, vel multiplicata tertia parte[1481] de 9 per 3, nimirum[1482] ex qualibet multiplicatione[1483] predictarum 9 provenient[1484]. Ponas ea[1485] sub quadam virga[1486] et multiplica 1, quod est super 3 per tertiam partem de 9, erunt 3. Que serva in manu et multiplica 2 que sunt super 9 per tertiam partem de 3, scilicet per 1, erunt 2 que adde cum 3 servatis, erunt 5, que pone super virgam sub qua posita sunt 9, et habebis $\frac{5}{9}$ pro $\frac{2}{9}\frac{1}{3}$.

(11) Item volumus addere $\frac{5}{6}\frac{3}{4}$[1487]: quia binarius est comunis de 4 et de 6, multiplica dimidium de 4 per 6, vel dimidium de 6 per 4[1488], vel accipe dimidium multiplicationis de 4 in 6 et habebis 12, que pone sub quadam virga[1489] et multiplicabis 3 que sunt super 4 per dimidium de 6 <et multiplicabis 5> que sunt super 6, per dimidium de[1490] 4, et habebis 9 et 10 que insimul iunge, erunt 19. Que 19 ponenda esset[1491] super 12 positis sub virga, si esset[1492] minus quam 12. Sed quia sunt plus, divides 19 per 12[1493], exibunt $\frac{7}{19}$ 1 pro coniunctione[1494] de $\frac{5}{6}\frac{3}{4}$.

(12) [R, f. 38r]Et nota cum sub duabus virgulis ponuntur numeri comunicantes, vel ex quorum multiplicatione non proveniat ultra decem, tunc propter dictam[1495] doctrinam debes ipsas fracti[/F_1, f.]ones reducere ad unam virgam, et ipsarum habere loco illarum duarum virgularum[1496] ut in sequentibus demostrabo. (13) Sed ponam prius in subscriptis tabulis duas fractiones quas aptare debes,

---

[1478] Multiplica SA, multiplicata FN F_1 F_2RV
[1479] Quidem F F_2NSVA, *om*. R
[1480] Tertia parte F F_2NSV, tertiam partem F_1RA
[1481] Tertia parte F F_2NSV, tertiam partem F_1RA
[1482] Nimirum FRS, numerum F_1NVA
[1483] Multiplicatione F F_1 F_2NSV, multiplicationem R, multiplicant A
[1484] Provenient F F_1 F_2RSVA, proveniet N
[1485] Ea F F_1 F_2SVA, eas NR
[1486] Virga F F_2SVANR, virgula F_1
[1487] $\frac{5}{6}\frac{3}{4}$ F F_1 F_2RSVA, $\frac{3}{4}$ N
[1488] Vel-per 4 F F_2RSVA, om. N F_1
[1489] Virga FRSVA F_1 F_2, virgula N
[1490] 6 que sunt-dimidium de F F_1, 6 et 5 que sunt-dimidium de RSV (però V ha et 5 in mg), 6 per 5 que sunt-dimidium de F_2, 65 que sunt-dimidium de A , *om*. N
[1491] Esset F_1 F_2FRNV, Essent SA
[1492] Esset F F_1 F_2SVA, essent N, *om*. R
[1493] Positis-per12 F F_2NSVA F_1, *om*. R
[1494] Coniunctione F F_1 F_2RNVA, iunctione S
[1495] Dictam F_1F F_2RNSV, *om*. A
[1496] Virgularum F F_2RNSV, virgarum A

et ante eas [N, f. 48v] ponam aptationes[1497] earum[1498], et incipiam a[1499] $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ que sunt 1, deinde secuuntur $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ [1500]que sunt $\frac{5}{6}$ et cetera que in sequentibus tabulis[1501] describuntur[1502].

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1 sano		$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{10}$ 1 sano		$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{8}$ 1 sano
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{10}$ 1 sano		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$ 1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{5}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{8}$1		$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{4}{5}$ 1
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$ 1		$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{2}{5}$1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{10}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{7}{8}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{10}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$ 1		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$**1 sano**	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ **1**	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{9}$	$\boldsymbol{\frac{18}{29}}$ **1**
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\boldsymbol{\frac{1}{6}}$ **1sano**	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\boldsymbol{\frac{11}{12}}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\boldsymbol{\frac{8}{5}}$ **1**	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{9}$	$\boldsymbol{\frac{15}{29}}$ **1**
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$	$\boldsymbol{\frac{4}{9}}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\boldsymbol{\frac{7}{12}}$ **1**	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\boldsymbol{\frac{9}{10}}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\boldsymbol{\frac{10}{29}}$ **1**

[1497] Aptationes F F_2RSVA, actiones N F_1
[1498] Earum F F_2RNSA, eorum V F_1
[1499] A F F_2RNSA, sic V
[1500] $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ F F_2RSVA, $\frac{1}{2}$ N
[1501] Tabulis F F_2RSVAN, *om.* F_1
[1502] Describuntur F F_1RSVAN, inscribuntur F_2

$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\mathbf{\frac{5}{9}}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\mathbf{\frac{7}{8}}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{10}$	$\mathbf{\frac{1}{10}}$ **1**	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\mathbf{\frac{24}{35}}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\mathbf{\frac{7}{9}}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\mathbf{\frac{1}{8}1}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$ **1**	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{10}$	$\mathbf{\frac{20}{35}}$ **1**
$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\mathbf{\frac{8}{9}}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\mathbf{\frac{5}{8}1}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\mathbf{\frac{7}{10}}$ **1**	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{10}$	$\mathbf{\frac{22}{35}}$ **1**
$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\mathbf{\frac{1}{9}1}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\mathbf{\frac{7}{20}}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{9}{10}$	$\mathbf{\frac{22}{35}}$ **1**
$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\mathbf{\frac{2}{9}1}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\mathbf{\frac{1}{20}}$ **1**	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	**1**	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\mathbf{\frac{2}{9}1}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{10}$	$\mathbf{\frac{9}{20}}$ **1**	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\mathbf{\frac{12}{38}}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\mathbf{\frac{1}{3}1}$ **sa no**	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{10}$	$\mathbf{\frac{18}{20}}$ **1**	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\mathbf{\frac{14}{38}}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\mathbf{\frac{3}{4}}$
$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\mathbf{\frac{5}{6}}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\mathbf{\frac{2}{5}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\mathbf{\frac{16}{28}}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	**1**
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\mathbf{\frac{1}{2}1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\mathbf{\frac{3}{5}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\mathbf{\frac{1}{24}}$ **1**	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\mathbf{\frac{1\quad 2}{4\quad 10}}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\mathbf{\frac{7}{9}}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\mathbf{\frac{4}{5}}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\mathbf{\frac{12}{29}}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{10}$	$\mathbf{\frac{1\quad 3}{5\quad 10}}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\mathbf{\frac{8}{9}}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	**1**	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\mathbf{\frac{13}{29}}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{10}$	$\mathbf{\frac{1\quad 8}{4\quad 10}}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\mathbf{\frac{1}{9}1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\mathbf{\frac{3}{10}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\mathbf{\frac{15}{29}}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{10}$	$\mathbf{\frac{1}{10}}$ **1**
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\mathbf{\frac{2}{9}1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{9}$	$\mathbf{\frac{16}{29}}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\mathbf{\frac{3}{4}}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\mathbf{\frac{4}{9}1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\mathbf{\frac{9}{10}}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{9}$	$\mathbf{\frac{18}{29}}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	**1**

$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$1	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$ 1	$\frac{1}{6}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{18}$ 1	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{4}$ 1
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{85}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{8\quad 4}{4\quad 10}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{12}{85}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{8\quad 6}{4\quad 10}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$1	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{14}{85}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{40}$ 1
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{2}$1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{15}$ 1	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{10}$	—
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{8}$ 1	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3\quad 2}{4\quad 10}$ 1
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{10}$ 1	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{8}$	—	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{4}$ 1
$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{3}{10}$ 1	$\frac{5}{6}$	$\frac{8}{8}$	—	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1\quad 7}{4\quad 10}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$1	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$1	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{8}$	—	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1\quad 9}{4\quad 10}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$1	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{8}$		$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1\ 3}{4\ 10}$ 1
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{18}{29}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1\ 5}{4\ 10}$ 1
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$ 1	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$ 1
$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{3}{20}$1	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$ 1	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{12}{29}$ 1	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3\quad 9}{4\quad 10}$

(14) [R, f. 39r; S, f. 28r; V, f. 23r, A, f.15r] Notis, itaque, prescriptis virgularum attationibus[1503], et proponantur multiplicare $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ 11 per $\frac{1}{5}\frac{1}{2}$ 22, multiplicabis $\frac{5}{6}$ 11 per $\frac{7}{10}$ 22. Similiter si vis multiplicare $\frac{5}{6}\frac{3}{4}$ 12 per $\frac{1}{9}\frac{2}{3}$ 23, adde primum $\frac{3}{4}$ cum $\frac{5}{6}$, erunt $\frac{7}{12}$ 1[1504], hoc est $\frac{1\ \ 3}{2\ \ 6}$ [1505]1, quod adde cum 12, erunt $\frac{1\ \ 3}{2\ \ 6}$13: similiter adde $\frac{2}{3}$ cum[1506] $\frac{1}{9}$, erunt $\frac{7}{9}$. Ergo multiplicabis $\frac{1}{2}\frac{3}{6}$ 13 per $\frac{7}{9}$23. Et sic intelligas in similibus.

Pars quarta[1507]

(1) Si vis multiplicare 17[1508] et quinque octavas et dimidias octave et duas nonas et quintam none per 28 et[1509] quattuor un[/A, f.15r]decimas et tres[1510] octavas undecime et quintam et duas quintas quinte, scribe[1511] numeros ut in margine cernitur et multiplica 17 per suam[1512] primam virgam[1513] scilicet per 8 et adde 5, quod totum per 2 et adde 1, erunt 283 que multiplica per numeros qui sunt sub[1514] secunda virga[1515], scilicet per 9, et illud[1516] totum per 5 erunt 12735. (2) Nunc[1517] proba si recte multiplicasti. Scilicet pensam[1518] [N, f. 49v] de 17, que est 3, per septenarium multiplica per pensam de 8, que est 1 et adde 5 que sunt[1519] super 8 quorum pensa, scilicet 1, multiplica per 2 et adde 1 quod est super 2, erunt 3 que sunt pensa de 283 quam[1520] multiplica per pensam[1521] de 9, erunt 6 que multiplica per 5 que sunt sub virga[1522], erunt 30, quorum pensa est, scilicet 2, est pensa iaventi[1523]

[1503] Attationibus FRAS, aptationibus V, actionibus NF_1
[1504] $\frac{7}{12}$ 1 F F_1RSV, $\frac{5}{12}$ 1 A, $\frac{5}{121}$ N
[1505] $\frac{1\ \ 3}{2\ \ 6}$ F F_1RNSV, $\frac{1\ \ 3}{2\ \ 11}$ A
[1506] Cum N F_1SVA, *om*. F
[1507] Pars quarta: incipit pars quarta FSNA, incipit pars quarta quarta pars incipit R, *om*. V
[1508] 17 FRS, 12 VNF_1
[1509] Et RSV F_1, *om*. FN
[1510] Et tres F F_1RSN, 23 V
[1511] Scribe F F_1SVN, scribetur R
[1512] suam R, Quam F F_1SVN
[1513] Primam virgam FRNA F_1, primam virgulam V, virgam primam S
[1514] Sub F F_1RNSA, in V
[1515] Virga F F_1SNA, virgula RV
[1516] illud SRAN F_1, Illum FV
[1517] Nunc FARS , tunc F_1VN
[1518] Pensam F F_1RSVN, pensa A
[1519] Sunt FRSVA , est N F_1
[1520] Quam F F_1RSVA, que N
[1521] Pensam F F_1RSNA, pensa V
[1522] Virga F F_1SNAV, virgula R
[1523] inventi SRV F_1, Ianenti FAN

numeri, scilicet de 12735[1524]. (3) Deinde multiplica 2 que sunt[1525] super 9 per 5 et adde 1[1526] quod est super ipsa 5; que per 2, que per 8 que sunt sub prima virga[1527], erunt 176. De quibus accipe probam sic: multiplica 2 que sunt super 9 per 5 et adde 1, erunt 11; quorum probatio, scilicet 4, multiplica per 2, erunt 8, quorum proba, que est 1, multiplica per probam de 8, proveniet 1[1528], et tot debet esse proba de 176. Et quia ita est, scimus 176 recta esse: adde ergo ea cum 12735, erunt 12911, quorum proba est 3, que provenit[1529] ex additione probarum iunctorum numerorum: serva ergo ea[1530] super 17[1531]. Studeas ordine eodem multiplicare 28 per suas virgulas[1532] et provenient 63091. Serva ergo super 28 et probam eorum similiter, que est 0[1533], et multiplica 12911 per 63091 divide per[1534] omnes numeros qui sunt sub 4 virgis et apta virgulam[1535], et habebis quesitam summam, ut[1536] in questione ostenditum cuius summe[1537] proba est quod provenit[1538] ex multiplicatione servatarum probatarum in se.

Rursus si vis multiplicare $\frac{1\ 5\ 1}{2\ 6\ 8}\ \frac{2\ 2\ 8}{7\ 9\ 10}$ 19 per $\frac{1\ 2\ 1}{3\ 5\ 7}\ \frac{5\ 8\ 8}{6\ 8\ 9}$[1539] 23, et[1540] multiplica 19 per suas virgulas[1541], scilicet per 10, et adde 3 que sunt super 10 que per 9 et adde 2 que sunt super 9, que per 7 et adde 2[1542] que sunt super 7, erunt 12175, que multiplica per 8 que per 6 que per 2 que sunt sub secunda virga[1543] erunt 1168800 quorum proba per pensam de 11 est 6: serva ea[1544], et multiplica [R, f. 39v] 1, quod est super 8, per 6 et[1545] adde 5 que sunt super 6 que per 2[1546] et adde 1 quod est super 2 erunt 23 que multiplica per 7 que per 9 que per 10 que sunt sub prima virga[1547] erunt 14490[1548],

[1524] 12735 F F_1SANV, 12375 R
[1525] Sunt R F_1NAS(*in mg.*), *om*. FV
[1526] Et adde 1 F RSNAV, et adde 1 et adde 1 F_1
[1527] Virga F F_1SANR, virgula V
[1528] Erunt 11-proveniet 1 F F_1SAV, erunt 11- provenit 1N, *om*. R
[1529] Provenit FSAVR, proveniet N F_1
[1530] Ea F F_1SAR, eam VN
[1531] 17 FR, 17 et SANV F_1
[1532] Virgulas FSNV, virgas RA F_1
[1533] 0 F F_1SNVA, 9 R
[1534] Per F F_1RNVA, super S
[1535] Virgulam F F_1RSA, virgulas V, virgam N
[1536] Ut FRNVAS, *om*. F_1
[1537] Summe F F_1RSAV, *om*. N
[1538] Provenit F F_1RSAV, proveniet N
[1539] $\frac{5\ 8\ 8}{6\ 8\ 9}$ FSR, $\frac{5\ 1\ 9}{6\ 8\ 9}$ A, $\frac{5\ 3\ 2}{6\ 8\ 9}$ V, $\frac{5\ 3\ 3}{6\ 8\ 9}$ N F_1
[1540] Et F F_1SAVN, *om*. R
[1541] Virgulas FRSAV F_1, virgas N
[1542] Que per-adde 2 F F_1RSVN, *om*. A
[1543] Secunda virga F F_1RSAN, secundam virgula V
[1544] Ea FAVRS, ea 6 N F_1
[1545] Et F F_1RSVN, eo A
[1546] 2 F F_1RSN, 8 VA
[1547] Virga F_1FRSNV, virgula A

quorum proba per 11 est 3[1549]. Adde ergo 14490 cum servatis 1168800[1550], erunt 1183290, quorum proba est 9, ut colligitur ex 6 et 3, que sunt probe[1551] horum dictorum[1552] numerorum. Multiplica ergo 1183290 per 1070319 que proveniunt ex multiplicatione de 23 in suas virgas[1553] et eorum proba per[1554] 11 est 4. Et divides summam per numeros qui sunt sub omnibus[1555] quattuor virgis. Ut si vis evitare comunitatos[1556] quas[1557] habent numeri multiplicantes cum dividentibus, accipe $\frac{1}{10}$ de 1183290 [N, f. 50r] et de[1558] decima accipies tertiam partem, venient 39443. Similiter divide[1559] 1064809[1560] per 3 erunt 354953[1561] que multiplicabis per 39443 et divides summam per omnes ruptos predictos extractis ex eis $\frac{1\ 0\ 0}{3\ 5\ 10}$, hoc est $\frac{1\ 0}{9\ 10}$, et studebis aptare ruptos ordine suprascripto[1562], et habebis quesitam summam, ut in questione ostenditur. Et si ipsa[1563] probare volueris, multiplica probam de 39443 per probam de 354953[1564] et habebis probam quesite summe.

Incipit pars quinta

(1) Si vis multiplicare 21 et[1565] $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$ per 32 et $\frac{3}{7}$ et $\frac{2}{9}$[1566] et $\frac{1}{8}$, describe numeros ut in margine cernuntur[1567], et multiplica 21 per 3 et adde 1 quod est super 3, erunt 64 que per 4 que per 5 que sunt sub virgis[1568] vel in una multiplicatione. Multiplica 64 per 20 erunt 1289[1569] sexagesime et 1 quod est super 4 quod est quarta multiplica per 5 que sunt sub tertia virga que per 3[1570] que sunt sub

1548 14490 F F_1RSNA, 14400 V
1549 Per 11 est 3 FSNAV F_1, est 3 per 11 R
1550 1168800 FRS, 118800 NAV F_1
1551 ProbeFRSNAV, prope F_1
1552 Dictorum F F_1RSAV, duorum N
1553 Virgas F F_1RSAN, virgulas V
1554 Per FRSAV, *om.* N F_1
1555 Omnibus F F_1RSAV, *om.* N
1556 Comunitates FRSAV, comitates N F_1
1557 Quas F F_1RSVN, quos A
1558 De F F_1RSVA, *om.* N
1559 Divide F_1FRSA, divides V, *om.* N
1560 1064809 FRSA F_1, 1064869 V, *om.* N
1561 Similiter-39443 F F_1RSAV, *om.* N
1562 Suprascripto F F_1RAVN, suprascriptos S
1563 Ipsa F F_1RAVN, ipsam S
1564 De 39443-354953 F F_1SANV, de 354953 per probam de 39443 R
1565 Et F R F_1VAS, *om.* N
1566 $\frac{2}{9}$ F F_1NVSR, $\frac{3}{9}$ A
1567 Cernuntur FRSAN F_1, cernitur V
1568 Virgis FR S F_1AN, virgulis V
1569 1289 FAN, 1280 VRS F_1
1570 Per 3 FRSAV, per 3 que sunt 3 N F_1

prima, erunt sexagesime 15. Item 1, [S, f.28v] quod est super 5 quod est quinta, multiplica per 4 que sunt sub secunda virga. Que per 3 que sunt[1571] sub prima, erunt sexagesime 12: adde ergo 1280 et 15 et 12 sexagesimas erunt sexagesime 1307[1572] et tot sexagesime sunt in[1573] $\frac{1\ 1\ 1}{5\ 4\ 3}$ 21; quorum proba[1574] per 11 est 9, que habetur ordine quo multiplicantur numeri. Similiter fac sua minuta de $\frac{1\ 2\ 3}{8\ 9\ 7}$ 32, scilicet multiplica 32 per 7 et adde 3 que sunt super 7 que per 9 que per 8 erunt 10844[1575] quingentesime[1576] quarte. Item 2 que sunt super 9 multiplica per 8 que per 7 erunt 142[1577] similiter[1578] quingentesime[1579] quarte[1580]. Item 1 quod est super 8 multiplica per 9, erunt 9[1581] septuagesime secunde, quas multiplica per 7, erunt 63 quin[/V, f.23r]gentesime[1582] quarte quibus additis cum quingentesimis quartis 112 et cum 16341[1583], erunt 16519 quingentesime quarte[1584], quarum proba per 11 est[1585] 8: deinde multiplica 1307 per 16519 et divides summam per sexagies[1586] quingenta 4^{or}, hoc est per omnes numeros qui sunt sub sex virgis[1587], scilicet per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{8\ 4\ 5\ 7\ 8\ 9}$[1588] et apta eos, scilicet de $\frac{10}{40}$[1589] fac $\frac{1\ 0}{2\ 10}$, et de $\frac{10}{28}$[1590] fac 6[1591]; et sic habebis pro aptatione virgule $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{6\ 7\ 8\ 9\ 10}$. Et summa quesite multiplicationis est $\frac{5\ 3\ 7\ 5\ 9}{6\ 7\ 8\ 9\ 10}$ 713, ut in questione ostenditur. Et memento ut in similibus numquam ponas sub virgis unius lateris numeros sibi invicem comunicantes, et si ab aliquo tibi propositi[1592] fuerint, adde eos, scilicet redige eos[1593] in unam virgam si poteris, vel in duas, per doctrinam quam habes superius et per ea que sunt in tabulis

---

1571 Sunt F F_1AVSR, *om.* N
1572 1307 F F_1AVSR, 1407 N
1573 In F F_1AVSR, *om.* N
1574 Proba F_1 FAVSR, probatio N
1575 10844 FNAR, 16844 VS F_1
1576 Quingentesime F F_1RANVS_2, quinquagesime S_1
1577 142 FN, 112 AVSR
1578 Similiter FRASV, scilicet N
1579 Quingentesime FRAS_2, quinquagesima V, quinquagesime S_1, quinquagentesima N, quinquagentesime F_1
1580 Item2-quarte: ripetuto una seconda volta in F_1
1581 Erunt 9 F F_1ASVN, *om.* R
1582 Quingentesime FRAV S_2, quinquagesima N, quinquagesime S_1, quinquagentesime F_1
1583 16341 FV, 16344 ASRN F_1
1584 Quibus-quarte F RSF_1NA, *om.* V
1585 Est FR SF_1AV, est est N
1586 Sexagies FR F_1AVN, sexages S
1587 Virgis FRSAVN, virgibus F_1
1588 $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{8\ 4\ 5\ 7\ 8\ 9}$ F F_1AN, $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{3\ 4\ 5\ 7\ 8\ 9}$ VRS
1589 $\frac{10}{40}$ FAV, $\frac{1\ 0}{4\ 0}$ N F_1, $\frac{1\ 0}{4\ 5}$ RS
1590 $\frac{10}{28}$ FVN, $\frac{10}{23}$ A SRF_1
1591 6 FAN, $\frac{1}{6}$ VSR F_1
1592 Propositi FRS F_1NA, proposito V
1593 Redige eos FR SF_1NA, reddige eas V

suprascriptis. Sed [N, f. 50v] ut hoc[1594] melius intelligas, proponam quasdam aptationes[1595] virgularum. Ut si vis aptare $\frac{1\,1\,1}{6\,4\,3}$ de $\frac{1\;1}{6\;3}$ [1596]fac $\frac{1}{2}$ et de $\frac{1\;1}{4\;2}$[1597] fac $\frac{3}{4}$. Et sic pro $\frac{1\,1\,1}{6\,4\,3}$ habes $\frac{3}{4}$. Item pro $\frac{1\;1\,2}{10\,6\,5}$ habebis $\frac{2}{8}$[1598], quia[1599] $\frac{1\;2}{10\,9}$ [1600]sunt $\frac{1}{2}$ et $\frac{1\,1}{6\,2}$ sunt $\frac{2}{3}$. Rursus pro $\frac{1\,1\,1}{8\,4\,2}$ habetur[1601] $\frac{7}{8}$, et pro $\frac{1\,1\,1}{9\,6\,2}$ habentur $\frac{7}{9}$[1602]. Quia $\frac{1\,1}{6\,2}$[1603] sunt $\frac{2}{3}$ et $\frac{1\,2}{9\,3}$ sunt $\frac{7}{9}$. Et pro $\frac{1\,1\,1}{8\,5\,4}$ habentur $\frac{3\;4}{8\;5}$[1604], et[1605] pro $\frac{1\;\,1\,1}{10\,9\,3}$ habentur $\frac{1\;3}{10\;9}$ [1606]et pro $\frac{1\,1\,1}{8\,6\,4}$ habentur $\frac{2\;1}{8\;6}$[1607]. Et pro $\frac{3\;1}{8\;6}$[1608] habentur $\frac{13}{24}$[1609], hoc est $\frac{1\,3}{3\,8}$[1610], et si vis aptare $\frac{1\,1\,1}{9\,8\,6}$[1611], adde primum $\frac{1}{6}$ cum $\frac{1}{9}$, erunt $\frac{7}{18}$[1612]. Deinde adde $\frac{5\;1}{18\,8}$, scilicet multiplica dimidium de 8 per 18[1613], vel dimidium de 18 per 8, seu accipe dimidium multiplicationis de 8 in 18 et proveniunt[1614] 72[1615] quodcumque[1616] feceris de [F_1, f.80] predictis[1617] serva ea sub quadam virga[1618] pro numero denominato: deinde ut habeas numerum denominantem, multiplica 1, quod est super 8, per dimidium de 18 et 5 que sunt super 18 per dimidium de 8[1619], venient 9 et 20[1620], hoc est 28[1621] pro[1622] numero

---

[1594] Hoc SFRF_1AN, hic V
[1595] Aptationes FSRF_1AN, actiones V
[1596] $\frac{1\;1}{6\;3}$ FSRF_1AN, $\frac{1\,1}{6\,3}$ V
[1597] $\frac{1\;1}{4\;2}$ FS F_1AN, $\frac{1\;1}{4\;2}$ V, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$ R
[1598] $\frac{2}{8}$ FNR, $\frac{2}{3}$ V F_1AS
[1599] Quia F F_1NVAS, qua R
[1600] $\frac{2}{9}$ FRVA, $\frac{2}{5}$ NS F_1
[1601] Habetur FR F_1VAN, habentur S
[1602] $\frac{7}{9}$ FRSN, $\frac{6}{9}$ A, $\frac{}{9}$ V
[1603] $\frac{1\,1}{6\,2}$F F_1SNAV, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$ R
[1604] $\frac{3\;4}{8\;5}$ F F_1AV, $\frac{3\;1}{8\;5}$ NSR
[1605] Et FR S F_1VN, *om.* A
[1606] $\frac{1\;3}{10\;9}$ F F_1VA, $\frac{1\;4}{10\;9}$ NRS
[1607] $\frac{2\;1}{8\;6}$ F F_1VA, $\frac{3\;1}{8\;6}$ NRS
[1608] $\frac{3\;1}{8\;6}$ FRSF_1VN, $\frac{2\;1}{8\;6}$ A
[1609] $\frac{13}{24}$ FRSA F_1, $\frac{1\;3}{2\;4}$ V, $\frac{1\;2}{2\;4}$ N
[1610] $\frac{3}{8}$ FAV, $\frac{4}{8}$ N SRF_1
[1611] $\frac{1\,1\,1}{9\,8\,6}$ F F_1ARSN, $\frac{4\,1\,1}{9\,8\,6}$ V
[1612] $\frac{7}{18}$ F F_1AV, $\frac{5}{18}$ NS, $\frac{5}{8}$ R
[1613] Per 18 F F_1AVNS, per 18 erunt 72 R
[1614] Proveniunt FA, provenient VS, proveniet N F_1, erunt similiter R
[1615] 72 FRF_1AV, 75 N
[1616] Quodcumque FRA F_1V, quod cum N
[1617] Predictis F F_1RAVN, prescriptis S
[1618] Virga FS F_1AVN, virgulam R
[1619] 8 F SF_1VNR, 18 A
[1620] 20 F F_1VARS, 201 N
[1621] 28 FV, 29 ASRN F_1
[1622] Pro F F_1ANRS, de V

denominante. Pone ergo ea[1623] super 72 et habebis pro[1624] $\frac{29}{72}$[1625] pro $\frac{1}{9}\frac{1}{8}\frac{1}{6}$[1626]. Vel[1627] aliter invento numero denominato qui columna[1628] vocatur a multis, cum sit minimus[1629] qui[1630] integraliter dividere[1631] per 6 et per 8 et per 9, scilicet 72, accipe ex eis $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{3}$[1632] et $\frac{1}{9}$, exibunt 12 et 9 et 8[1633], scilicet 29 pro numero denominante. Et si $\frac{29}{72}$ redigere vis in partes partium de 72, divide 29 per regulam de 72, exibunt $\frac{52}{89}$ [1634]quam virgam[1635] habeas loco[1636] de $\frac{1}{9}\frac{1}{8}\frac{1}{6}$.

Item si vis aptare $\frac{1}{10}\frac{1}{8}\frac{1}{6}$[1637], invenias minimum mensuratum numerorum[1638] 6[1639] et[1640] 8 et 10, hoc est minor numerus qui integraliter dividatur[1641] per unum quemque eorum, eritque[1642] 120: pone eum sub quadam virga et accipe $\frac{1}{10}\frac{1}{8}\frac{1}{6}$[1643] de 120[1644], erunt 20 et 15 et 12, que adde simul erunt 47, que pone super virgam sic[1645] $\frac{47}{120}$. Et si ea in partes partium de 120 redigere vis, divide 47[1646] per regulam de 120, exibunt $\frac{1}{2}\frac{5}{6}\frac{3}{10}$, quam virgam habebis pro $\frac{1}{10}\frac{1}{8}\frac{1}{6}$[1647]. Comenda[1648] itaque hec omnia tenaciter memorie. Et sic revertarum[1649] ad propositum.

[1623] Ergo ea FANR, ea ergo VS F_1
[1624] Pro FN, *om.* AVS RF_1
[1625] $\frac{29}{72}$ FNS_2AV, $\frac{20}{72}$ F_1, $\frac{29}{72}$ hoc est RS_1
[1626] $\frac{1}{9}\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ F SF_1NV, $\frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ A
[1627] Vel F F_1NVAS, similiter R
[1628] Columna FNVA, columpna RS, colupna F_1
[1629] Minimus F F_1NVA, numerus R
[1630] Qui NS RF_1VA, *om.* F
[1631] Dividere NF RF_1VA, dividitur S
[1632] $\frac{1}{3}$ FA, $\frac{1}{8}$ VR F_1N
[1633] Et 9 et 8 FR, et 9 et 9 N F_1, et 29 V, et 9 A
[1634] $\frac{52}{89}$ FNVA, $\frac{53}{89}$ RF_1
[1635] Virgam F F_1NVA, virgulam R
[1636] Loco F F_1AVR, locum N
[1637] $\frac{1}{10}\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ F F_1VRN, $\frac{1}{10}\frac{1}{8}\frac{1}{9}$ A
[1638] Numerorum F_1FVAR, numerorum idest N
[1639] 6 F F_1VAR, 7 N
[1640] Et F F_1ANR, *om.* V
[1641] Dividatur F F_1AVR, dividitur N
[1642] Eritque F F_1VNR, erit itaque A
[1643] $\frac{1}{6}$ F F_1VAR, *om.* N
[1644] 120 F F_1VAR, 20 N
[1645] Sic F F_1VAN, de 120 erunt R
[1646] 47 F F_1VNR, 43 A
[1647] $\frac{1}{10}\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ F F_1VAR, $\frac{1}{0}\frac{1}{8}\frac{1}{1}$ N
[1648] Comenda F_1 FVA, commoda N, commendata R
[1649] Revertarum F_1FAV, revertamur NR

De multiplicatione[1650] integrorum [R, f.40v]cum tribus virgis et duobus ruptis sub virga.

(1) Si vis multiplicare 23 et duas septimas et duas tertias septime et [N, f. 51r] duas nonas et octavam none et quintam et duas quintas quinte per 32[1651] et quinque tredecimas[1652] et quartam[1653] tertie decime et tres decimas et duas quintas X^{e}[1654] et quinque septimas decimas et dimidiam[1655] septime X^{e}, pone numeros ut in margine cernuntur et multiplica 23 per primam suam virgam scilicet per 7 et adde 2, que per 3 et adde 2 que sunt super 3 erunt 491 que multiplica per 9 que per 8 que per 5, que per 5[1656], que[1657] sub reliquis duabus virgulis[1658], erunt 883800, quorum pensa per pensam de 11 est 5. Item multiplica 2 que sunt super 9 per 8 que sunt sub eadem virga et adde 1 quod est super 8 erunt 17, que multiplica per 5 que per 5 que sunt sub tertia virga erunt 425, que per 3, que per 7 que sunt sub prima virga erunt 8925, quorum proba est 4: post hec[1659] multiplica 1, quod est super 5, per 5 que sunt sub eis[1660] retro, et adde 2 erunt 7, que multiplica per 8, que[1661] per 9, que per 7[1662], que per 7 que sunt sub secunda et prima virga, erunt 10584, quorum[1663] pensa est 2. Adde primum tres inventas pensas, ut[1664] 7 et 4 et 2, erunt 11, quorum pensa[1665] est, scilicet 0: serva et adde postea tres inventos[1666] numeros erunt 903300[1667], quorum pensa est 0 quod servasti, quam pensam requires in predicto [F_1, f. 81] numero sic: divisis de primum 90, scilicet numerum duarum[1668] ultimarum figurarum per 11, remanent 2. Quibus copulatis cum tribus que sunt in quarto gradu, faciunt 23, quibus divisis per 11, remanent[1669] 1. Quo copulato[1670] cum 3 tertii gradus, faciunt 13. Quibus divisis per 11, remanent 2;

[1650] Multiplicatione F F_1ANR, divisione V
[1651] 32 F F_1AVR, 23 N
[1652] Tredecimas FNV F_1, tredicemas A, tertiadecimas R
[1653] Quartam F F_1ANR, quarta V
[1654] Xe F, decime F_1 ANR, decimas V
[1655] Dimidiam F F_1NVR, dimidium A
[1656] Que per 5 F F_1NVR, *om.* A
[1657] Que F F_1NVA, que sunt R
[1658] Virgulis FAV, virgis N F_1
[1659] Post hec F F_1AV, postea N
[1660] Eis FAV, eidem N F_1
[1661] Que F F_1AN, et V
[1662] 7 FA, 3 F_1VN
[1663] Quorum F F_1AN, et numerorum V
[1664] Ut F, scilicet VA, scilicet per N F_1
[1665] Pensa FAN, pensa que V F_1
[1666] Inventos FAV, inventas N F_1
[1667] 903300 F F_1, 903309 NA, 9033090V
[1668] Duarum F F_1NA, duorum V
[1669] Remanent FNAV, remanet F_1
[1670] Copulato F F_1NA, multiplicato V

quibus copulatis cum 0 secundi gradus, erunt 20, quibus divisis per 11, remanent[1671] 2[1672]; quibus copulatis cum 9 primi gradus faciunt 99. Quibus divisis per 11, remanent[1673] 0 ut oportet: et hic est modus investigandi probas in numeris. Serva ergo 903309 et eorum proba[1674] [V, f.24r]super 23. Deinde multiplica 32 per suas virgas ordine quo multiplicasti 23 per suas venient 2923156. Serva ea cum eorum pensa que erit 5 super 32. Et multiplica 903309 per 2923156 et divide per omnes[1675] numeros qui sunt sub virgas[1676], sed primum propter evitationem qua fieri potest, divide 903369[1677] per 3 venient 301103. Et divide 2025156[1678] per 4 [N, f.51r] venient 730789 que multiplica per 301103 et dele de divisione 3 que sunt sub prima superiorum et 4 que sunt sub prima virga inferiorum et reliquos numeros apta[1679] sub una virga, quorum aptatio est $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{2\ 7\ 9\ 10\ 10\ 10\ 10\ 13\ 17}$. Et[1680] sic habebis summam quesitam ut in questione ostenditur. Et quia hanc summam habuisti ex divisione numeri procreati ex multiplicatione de 301103 per 730789, debes pensam ipsius summe habere ex multiplicatione pense de 301103 que est 0, in pensa[1681] de 730789[1682] que est 4. Quare est summe pensa suprascripte[1683] est 0, quia multiplicato 0 per 4 facit 0.

De eodem cum tribus virgis sub unaquaque virga.

Item si tres ruptos sub unaquaque virgula[1684] ponere volueris et[1685] in hac in qua ponitur multiplicatio de $\frac{121}{355}\ \frac{123}{2910}$[1686] $\frac{115}{2717}$[1687] 11 in $\frac{251}{367}\ \frac{128}{579}$[1688] $\frac{135}{2810}$[1689] 22[1690], descripta questione,

[1671] Remanent FNAV, remanet F_1
[1672] 2 FA, 9 F_1VN
[1673] Remanent FNAV, remanet F_1
[1674] Et eorum proba F F_1NA, et eorum proba et eorum proba V
[1675] Omnes FNA, *om*. V, ominis F_1
[1676] Virgas FN, virgis AV F_1
[1677] 903369 FNAV, 903309 F_1
[1678] 2025156 FNV, 2923156 A F_1
[1679] Apta F F_1NV, acta A
[1680] Et FNAV, et et F_1
[1681] Pensa FA, pensam VN F_1
[1682] 730789 F F_1N, 739789 AV
[1683] Est summe pensa suprascripte F, est pensa suprascripte summe NA, pensa predicte summe F_1V
[1684] Virgula F F_1AV, virga N
[1685] Et FV, ut A F_1N
[1686] $\frac{123}{2910}$ F F_1VA, $\frac{123}{3910}$ N
[1687] $\frac{115}{2717}$ FN, $\frac{116}{2717}$ A F_1, $\frac{115}{2711}$ V
[1688] $\frac{128}{579}$ FAV, $\frac{122}{579}$ N F_1
[1689] $\frac{135}{2810}$ FAV, $\frac{123}{7810}$ N F_1
[1690] 22 F F_1NV, 27 A

multiplicabis 11 per primam suam virgulam[1691], erunt 2705, que multiplica per omnes numeros qui sunt sub aliis suis[1692] duabus virgulis, erunt 35517500[1693], que serva. Et multiplica 3 que sunt super 10 de secunda virgula[1694] per 9, et adde 2; que multiplica per 2[1695], et adde 1[1696], erunt 59, que[1697] multiplica per numeros qui sunt sub aliis duabus virgulis, scilicet sub tertia et sub prima, erunt 1053150 que serva: deinde accipe numerum tertie virgule, scilicet multiplica 1 quod est super 5 per alia 5, que sunt post ipsa, et adde 2 que per 2[1698], et adde 1, erunt 22 que multiplica per omnes[1699] numeros qui sunt sub aliis duabus virgulis[1700], scilicet sub secunda et sub prima, erunt 942480[1701]: adde ergo 942480 cum 1053150 et cum 36547500[1702], erunt 38513139[1703], que pone super 11 et suas virgulas[1704]: deinde multiplica 22 per suas virgulas, sicuti modo multiplicasti 11 per suas[1705], erunt in summa 145288710, que pone super 22 et suas virgulas[F_1, f. 82], et multiplica 38513130 per 145288710, et divides[1706] per omnes[1707] ruptos qui sunt sub omnibus virgulis[1708], et habebis summam quesite multiplicationis. Nam si evitare volueris[1709] ea que inde evitari possunt, divide 38513190[1710] per 10 que sunt sub secunda virgula[1711] in superiori[1712] latere ideo quia integraliter potes fieri, exibunt 3851313; que divide per 3[1713] que sunt sub tertia virgula superioris numeri, exibunt 1283771 que servabis; ideo quia non possunt dividi[1714] per aliquem numerum existentem sub aliqua suprascriptarum[1715] sex virgularum, et relinques quod[1716] divides per 3, [N, f. 52r] nec per 10, in

---

[1691] Virgulam F F_1NA, virgam V
[1692] Suis FV, *om.* AN
[1693] 35517500 F, 36517500 A F_1VN
[1694] Virgula F F_1AN, virga V
[1695] 2 FV, 21 F_1NV
[1696] Et adde 1 F, *om.* NVA F_1
[1697] Que F F_1AV, quam N
[1698] 2 F, 3 A F_1VN
[1699] Omnes FAVN, omnis F_1
[1700] Virgulis F F_1AV, virgis N
[1701] 942480 F F_1AV, 342480 N
[1702] 36547500 FV, 36517500 AN F_1
[1703] 38513139 FVAN, 38513130 F_1
[1704] Virgulas F F_1AV, virgas N
[1705] Suas FAVN, suos F_1
[1706] Divides FV, divide NA F_1
[1707] Omnes FVAN, omnis F_1
[1708] Virgulis F F_1AV, virgis N
[1709] Evitare volueris F F_1NV, volueris evitare A
[1710] 38513190 F F_1A, 38513130 N, 385130 V
[1711] Virgula F F_1, virge ANV
[1712] In superiori A F_1NV, inferiori F
[1713] 3 F, 7 N
[1714] Dividi N, dividere F
[1715] Suprascriptarum F, supradictarum N

quibus modo divisisti: deinde divide[1717] 145288710[1718] per 10, que sunt in prima virgula inferioris numeri, et per 7 et per 9 que sunt sub secunda virgula: quia in eis integraliter dividi possunt, exibunt 230617, que multiplia [B, f.59] per 1283771, erunt 296059416707; que divides per omnes alios numeros qui sunt sub prescriptis virgulis, scilicet per[1719] $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{2\ 2\ 2\ 3\ 5\ 5\ 6\ 6\ 7\ 7\ 8\ 9\text{[1720]}\ 17}$, quos apta secundum suprascriptum[1721] aptandi modum, exibunt $\frac{1\ 2\ 1\ 0\ 1\ 3\ 9\ 5\ 0\ 4}{2\ 7\ 7\ 8\ 9\ 9\ 10\ 10\ 10\ 17}$ 274 pro summa quesite multiplicationis.

Explicit pars quinta sexti capituli.

Incipit[1722] sexta de multiplicatione ruptorum[1723] sine sanis

Si volueris multiplicare $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{4}$, multiplica 1 quod est super 3, per 1 quod est super 4, erit 1, quod divide[1724] per 3 et per 4 que sunt sub virgulis[1725], hoc est per $\frac{10}{24}$ vel per $\frac{10}{26}$[1726] exibunt $\frac{10}{24}$[1727] vel $\frac{10}{26}$[1728], hoc est una pars de duodecim[1729] partibus unius integri: unde potes cognoscere quantum[1730] est si multiplicaveris $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{4}$ quantum si acceperis $\frac{10}{34}$ vel $\frac{10}{42}$[1731]; et hoc idem[1732] intelligas de omnibus ruptis; quia semper multiplicatio cuiuslibet rupti in quemlibet rupto[1733] facit quantum acceptio unius illorum ex alio: quia cum multiplicatur 1 per $\frac{1}{4}$[1734], tunc semel accipitur[1735] $\frac{1}{4}$. Ergo cum multiplicatur

[1716] Quod F, quod numero N
[1717] Divide N, dividet F
[1718] 145288710 N, 14528871 F
[1719] Per F, om. N
[1720] 9 F, 8 N
[1721] Suprascriptum F, om. N
[1722] Incipit F, incipit pars N
[1723] Ruptorum F, ruptos N
[1724] Divide F, divides N
[1725] Virgulis F, virgis N
[1726] $\frac{10}{26}$ F, $\frac{20}{10}$ N
[1727] $\frac{10}{24}$ F, $\frac{10}{34}$ N
[1728] $\frac{10}{26}$ F, $\frac{1\ 0}{2\ 6}$ N
[1729] Duodecim N, XII^{am} F
[1730] Quantum F, quod tantum N
[1731] $\frac{10}{42}$ F, $\frac{10}{43}$ N
[1732] Idem F, om. N
[1733] Rupto F, ruptum N
[1734] $\frac{1}{4}$ F, 4 N
[1735] Accipitur F, accipiatur N

tertia per quartam, tunc accipitur tertia quarte, et sic ex multiplicatione de tertia in quarta provenit XII[a].

De eodem

(1) Item si volueris multiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{3}{4}$, multiplica 2, que sunt super 3, per 3 que sunt super 4, erunt 6 que divide per 3 et per 4 que sunt sub virgulis, exibunt[1736] $\frac{1}{2}$ unius integri.

De eodem

(1) Item si volueris multiplicare $\frac{3}{7}$ per $\frac{4}{9}$, multiplica 3 per 4 qui sunt super virgulis, erunt 12, que divide per 7 et per 9 que sunt sub virgulis, exibunt $\frac{5\ 1}{7\ 9}$ unius integri, hoc est duodecim[1737] partes de sexaginta tribus partibus unius integri, que sunt quattuor partes de 21 unius integri. Et hoc invenies duplici modo. (2) Primus quidem modus est ut dividas 12 et 63 per 3, ideo quia hanc divisionem unusquisque eorum integraliter recipit, exibunt 4 et 21: unde si divideris 4 per 21, exibunt $\frac{4}{21}$ unius integri. (3) Vel aliter debuisti dividere 12 per $\frac{10}{79}$, divide prius 12 per 3, exibunt 4. Similiter divide 9 per 3, exibunt 3: in quibus etiam et in 7 divides 4, exibunt $\frac{1\ 3}{3\ 7}$ hoc est septima pars unius integri, et insuper tertia pars unius[1738] septime partis, quod tantum est [N, f.52v] quantum quattuor partes de 21[1739].

De eodem cum duobus[1740] ruptis sub una virgula[1741].

(1) Si volueris multiplicare $\frac{14}{27}$ per $\frac{23}{35}$ describe questionem ut hic ostenditur, et multiplicabis 4 que sunt super 7 de superiori virgula per 2 que sunt sub eadem virgula et adde 1 quod est super 2, erunt 9 que pone super $\frac{14}{27}$, similiter multiplica 3 que sunt super 5 de inferiori virgula per 3 que sunt sub

[1736] Exibunt F, exibit N
[1737] Duodecim N, XII[me] F
[1738] Unius N, ipsius F
[1739] De 21 F, om. N
[1740] Duobus N, tribus F
[1741] Virgula F, virga N

eadem virgula et adde 2 que sunt super ipsa 3, erunt 11, que pone super $\frac{23}{35}$; et multiplicabis 9 per 11, erunt 99; que divides per 2 et per 7 et per 3 et per 5 que sunt sub virgulis, exibunt $\frac{5\ \ 4}{7\ \ 10}$ unius integri.

De eodem cum tribus ruptis sub una virgula

(1) Item si volueris multiplicare tres ruptos sub una virgula per tres ruptos qui sint sub alia, ut dicamus $\frac{153}{2811}$[1742] per $\frac{147}{3913}$, describe questionem, et multiplicabis 3 qui est super 11 per suam virgulam, hoc est per 8 et adde 5, quem per 2 et adde 1, erunt 59, quem pone super $\frac{153}{2811}$. Deinde multiplica 7 que est super 13 per suam virgulam, hoc est per 9, et adde 4; que per 3 et adde 1, erunt 202, que pone super $\frac{147}{3913}$. Et multiplica 59 per 202, et divide per omnes numeros qui sunt sub[1743] utraque virgula[1744], quorum aptatio est $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{6\ 8\ 9\ 11\ 18}$[1745], exibunt $\frac{2\ 2\ 5\ 5\ 2}{6\ 8\ 9\ 11\ 18}$[1746]. [B, f.60]

De eodem cum duabus virgulis.

(1) Si volueris multiplicare $\frac{1}{4}\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{6}\frac{2}{5}$, describe questionem ut hic ostenditur, et multiplica 2 que sunt super 3, per 4 que sunt sub secunda virgula, erunt 8. Item multiplica 1 quod est super ipsa 4, per 3 que sunt sub prima virgula, erunt 3; que adde cum 8 erunt 11, que pone super $\frac{1}{4}\frac{2}{3}$ deinde accedas ad $\frac{1}{6}\frac{3}{5}$ et multiplica 3 que sunt super 5 per 6 et 1 quod est super 6 per 5 et adde insimul erunt 23, que pone super $\frac{1}{6}\frac{3}{5}$ [1747]et multiplica 11 per 23, erunt 253 que divide per omnes numeros qui sunt sub virgulis.

De eodem cum duobus ruptis sub unaquaque virgula[1748]

[1742] $\frac{153}{2811}$ F, $\frac{157}{2811}$ N
[1743] Sub F, sub eadem N
[1744] Utraque virgula F, virgula utraque N
[1745] $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{6\ 8\ 9\ 11\ 18}$ F, $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{6\ 8\ 9\ 11\ 13}$ N
[1746] $\frac{2\ 2\ 5\ 5\ 2}{6\ 8\ 9\ 11\ 18}$ F, $\frac{2\ 2\ 5\ 5\ 2}{6\ 8\ 9\ 11\ 13}$ N
[1747] Deinde- super $\frac{1}{6}\frac{3}{5}$ F, om. N
[1748] Virgula N, om. F

(1) Et si volueris ponere duos ruptos sub unaquaque virgula ut $\frac{13}{48}\frac{14}{27}$ cum $\frac{12}{611}$[1749] $\frac{15}{39}$, describe questionem, et multiplica 4[1750] que sunt super 7 per suam virgulam hoc est per 2 et adde 1, erunt 9, que multiplica per 8 et per 4, que sunt sub secunda virgula eiusdem lateris erunt 288 que serva et multiplica 3 que sunt super 8 per suam virgulam[1751] scilicet per 4 et adde 1, erunt 13, que multiplica per 2 et per 7 que sunt sub prima virgula, erunt 182, que adde cum 288, erunt 470, que pone super ipsas virgulas superiores et multiplica similiter eodem modo reliquas duas [N, 53r] virgulas inferiores et habebis, in eorum multiplicatione, 1407 que pone super ipsas virgulas. Et multiplica 470 per[1752] 1407 et divide per omnes numeros qui sunt sub virgulis et habebis quesita multiplicationem. Tamen si vis potes inde[1753] evitare, scilicet divides 1407 per 7 exibunt 201 que divide per 3, exibunt 67 que multiplica per 407[1754] erunt 31490 que divide per omnes numeros qui sunt sub virgulis preter quam per 7 et[1755] per 3 in quibus divididisti 1407. Et aptabis prescriptos ruptos sub una virgula, exibunt $\frac{1\ 0\ 0\ 1\ 9}{6\ 8\ 8\ 9\ 11}$: per hunc enim modum potes multiplicare, si sub virgulis ponerentur tres rupti vel plures.

De tribus virgulis[1756]

(1) Si volueris multiplicare $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$, per $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{7}$, describe questionem et incip.. multiplicare superiores virgulas, scilicet $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ in se ipsas sic[1757]: multiplicabis 1, que[1758] est super 3, per 4 que sunt sub secunda virgula; que per 5 que sunt sub tertia erunt 20; et multiplicabis 1 quod est super 4 de secunda virgula per 5 que sunt sub tertia[1759] et per 3 que sunt sub prima erunt 15. Et multiplicabis 1 quod est super 5 tertie virgule per 4 que sunt sub secunda et per 3 que sunt sub prima, erunt 12 que adde cum 15 et cum 20 servatis, erunt 47 que pone super $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ in questione. Post hec facies similiter de

---

[1749] $\frac{12}{611}$ F, $\frac{112}{611}$ N
[1750] 4 F, 8 N
[1751] Suam virgulam F, sua virgula N
[1752] Per F, et N
[1753] Inde F, om. N
[1754] 407 F, 470 N
[1755] Et F, et quo N
[1756] De tribus virgulis F, om. N
[1757] Sic F, sic et sic N
[1758] Que F, quod N
[1759] Tertia F, tertia virgula N

$\frac{1\,1\,2}{7\,6\,5}$ et habebis in eorum summa 149, que pone super $\frac{1\,1\,2}{7\,6\,5}$; multiplicabis[1760] 47[1761] per 149, erunt 7003; que divides per omnes ruptos, et apta eos, exibunt $\frac{1\ \ 1\ \ 5\ \ 5\ \ 5}{2\ \ 7\ \ 9\ \ 10\ \ 10}$[1762].

De eodem cum duobus ruptis sub unaquaque virgula[1763]

(1) Item si volueris ponere[1764] duos ruptos sub unaquaque virgula, ut $\frac{1\ \ 6}{2\ \ 11}$ et $\frac{2\ \ 3}{3\ \ 10}$ et $\frac{3\ \ 2}{4\ \ 9}$ cum $\frac{1\ \ 7}{2\ \ 13}$ et $\frac{12}{27}$[1765] et $\frac{41}{58}$, describe questionem, et multiplica primas superiores tres virgulas in se ipsas, hoc est 6, que sunt super 11, per 2[1766], et adde 1, erunt 13; que multiplica per 10 et per 3, que sunt sub secunda, que omnia per 9 et per 4, que sunt sub tertia erunt 14040 que serva. Et multiplica 3 que sunt super 10 de secunda virgula per 3 que sunt sub virgula post ipsa et adde 2 que sunt super ipsa 3, erunt 11 que multiplica per 9 et per 4 que sunt sub tertia virgula et per 2 et per 11 que sunt sub prima, erunt 8712 que serva et multiplica 2 que sunt super 9 de tertia virgula per 4 et adde [B, f.61] 3, erunt 11 que multiplica per 3 et per 10 que sunt sub secunda virgula et per 2 et per 11 que sunt sub prima erunt 7260 que adde cum 8712 et cum 14040 servatis, erunt 30012, que pone desuper in questione. [N, 53v] Deinde multiplica inferiores tres virgulas in se ipsas et erit[1767] eorum summa 27914 que pone super ipsas[1768] virgulas et multiplica 30012 per 27914 et divide summam multiplicationis per omnes ruptos qui sunt sub virgulis et habebis quesitam multiplicationem. Vel si volueris inde evitare facies secundum quod superius demostravimus, et habebis pro quesita multiplicatione $\frac{2\ \ 1\ \ 4\ \ 2\ \ 6\ \ 8\ \ 10\ \ 7}{3\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\ \ 10\ \ 11\ \ 13}$ 1. Si vero tres rupti sub unaquaque virgula ponerentur, vel si plures virgule similiter ponerentur cum integris, vel secundum integros, per prescriptum magisterium omnia poteris subtiliter operari.

Incipit pars septima de multiplicatione numerorum et ruptorum quorum virge terminantur in circulo.

[1760] Multiplicabis F, et multiplicabis N
[1761] 47 F, 42 N
[1762] $\frac{1\ \ 1\ \ 5\ \ 5\ \ 5}{2\ \ 7\ \ 9\ \ 10\ \ 10}$ FN_2, $\frac{1\ \ \ \ \ \ 5\ \ 5}{2\ \ 7\ \ 9\ \ 10\ \ 10}$ N_1
[1763] Virgula N_2 lo aggiunge di seconda mano, om. F N_1
[1764] Ponere F, multiplicare N
[1765] $\frac{12}{27}$ F, $\frac{13}{37}$ N
[1766] Per 2 F, om. N
[1767] Erit F, esset N
[1768] Ipsas F, ipsa N

Si vis 11 et quattuor nonas et quinque octavas quattuor nonarum et duas tertias quinque octavarum de quattuor nonis que sic scribuntur $\frac{2\ 5\ 4}{3\ 8\ 9}$° 11, multiplicare per 22, et sex septimas octo nonarum ex novem decimis, que sic scribuntur ° $\frac{6\ 8\ 9}{7\ 9\ 10}$ 22, describe questionem et multiplica 11 per suam virgulam que multiplicatio sic: multiplicantur 11 per 9 et adduntur 4 et sunt 103 none que multiplicantur per 8 et sunt 824 septuagesime secunde, quibus additur multiplicatio de 5 in 4 que sunt super virgam, erunt 844 septuagesime secunde. Quia cum multiplicantur 4 que sunt super 9 per 8 provenit numerus cuius proportio est ad numerum venientem ex ductis 9 in 8, sicut proportio de 4 ad 9. Ergo 32 sunt $\frac{4}{9}$ de 72. Item proportio numeri venientis ex ductis 5 in 4, scilicet 20, ad numerum venientem ex ductis 8 in 4, scilicet ad 32, est sicut proportio de 5 ad 8. Ergo 20 que procreantur ex 5 in 4 sunt quinque octave ex quattuor nonis de 72; et sic sunt 20 septuagesime secunde: deinde multiplicantur 844 per 3 et super adduntur 40 que proveniunt ex multiplicatione de 2 in 5 quam in 4 que sunt super virgam erunt 2572 ducesime sexte X^{e}: serva eas super 11, cum eorum proba que accipitur ordine eodem, scilicet multiplicatur proba 11 per probam de 9, et addatur 4, et sunt 103 none que multiplicantur per 8 et sunt 824 septuagesime secunde; quibus additur multiplicatio de 5 in 4 que sunt super virgam, erunt 844 septuagesime secunde: quia cum multiplicantur 4 que sunt super 9 per 8 provenit numerus cuius proportio est ad numerum venientem ex ductis 9 in 8 sicut proportio de 4 ad 9. Ergo 32 sunt $\frac{4}{9}$ de 72. Item proportio numeri venientis ex ductis 5 in 4, scilicet 20, ad numerum venientem ex ductis 8 in 4, scilicet ad 32 est sicut proportio de 5 ad 8. Ergo 20 que procreantur ex 5 in 4 sunt quinque octave ex quattuor nonis de 72, et sic sunt 20 septuagesime secunde, deinde multiplicantur 844 per 3 et super adduntur 40 que proveniunt ex multiplicatione de 2 in 5 quam in 4 que sunt super virgam erunt 2572 ducesime sexte Xe: serva eas super 11 cum eorum proba que accipitur ordine eodem scilicet multiplicatur proba 11 per probam de 9 et addatur 4 quorum proba multiplicatur per 8 et additur multiplicatio de 5 in 4 cuius summe proba multiplicatur per 3 et additur multiplicatio de 2 in 5 ducta in 4, cuius summe proba est proba de 2572 et est 9 per probam de 11 deinde multiplica 22 per suam virgam quod sic fit: multiplicatur 22 per 10, que summa multiplicatur per 9 que per 7 exibunt 13860 sexcentesime trigesime, quibus adde multiplicationem de 6in 8, que in 9 que sunt super virgam scilicet 432 erunt 14292 sexcentesime trigesime: serva eas super 22 cum eorum proba que est 3, et multiplica 2572 per 14292 et divides summam per omnes ruptos qui sunt sub ambabus virgis, tamen evitabilis que evitare poterunt, et habebis summam prescripte multiplicationis $\frac{10\ 11}{35\ 79}270$.

Et si $\frac{2\ 5\ 4}{3\ 8\ 9}\circ$ in partes unius numeri redigere vis, hoc dupliciter facere demonstrabo: multiplica primum 9 per 8, que per 3 erunt 216, de quibus fac columnam et accipe ex eis $\frac{4}{9}$ erunt 96 de quibus accipe $\frac{5}{8}$ erunt 60, de quibus accipe $\frac{2}{3}$, erunt 40. Adde itaque 96 et 60 et 40, erunt 196 que divide per 216 exibunt $\frac{49}{54}$ hoc est $\frac{18}{59}$, vel aliter multiplica 4 que sunt super 9 per 8 et adde multiplicationem de 5 in 4 erunt 52 que multiplica per 3 et adde multiplicationem de 2 in 5 quam in 4 scilicet 40 erunt similiter 196 per quartam de 8 que sunt sub virga et per 3 et per 9 exibunt similiter $\frac{13}{69}$. [B, f. 62]

Item si $\circ\frac{6\ 8\ 9}{7\ 9\ 10}$ in partes unius integri numeri redigere vis, multiplica 6 per 8 que per 9 scilicet ea que super virgam erunt 432 que divide per numeros qui sunt sub virga et evitabis quod evitari poterit, exibunt $\frac{24}{35}$, hoc est $\frac{44}{57}$. Et si $\frac{2\ 5\ 4}{2\ 8\ 9}\circ$ per $\circ\frac{6\ 8\ 9}{7\ 9\ 10}$ multiplicare vis pone ut in margine cernitur et multiplica inventa 196 scilicet numerum superioris virge per 432 scilicet per numerum inferioris et divide summam per omn.. numeros qui sunt sub utraque et evita exibunt $\frac{35}{59}$.

Si vis multiplicare 11 et septem decimas et quattuor nonas septem decimarum et tres octavas quattuor nonarum septem decimarum et quinque undecimas et quinque sext... quinque XIarum et tres quartas quinque sextarum quinque XIarum per 22 et tres octav... quattuor nonarum septem decimarum et tres quartas quinque sextarum quinque undecimarum describe hoc ut cernis in margine et multiplica 11 per 10 et adde 7 que per 9 et adde quater septem que per 8 et adde ter 4 vicibus 7 erunt 8732 que per 11 que per 6 que per 4 que sunt sub alia virgula erunt 2305248. Et multiplica 5 que sunt super 11 per 6 et adde quinquies 5 que per 4 et adde ter 5 quinquies scilicet multiplicationem numerorum qui sunt super virgam erunt 295, que multiplica per numeros qui sunt sub prima virga, scilicet per 8 que per 9 que per 10 erunt 2124... que adde cum alio invento numero, erunt 2517648 que pone super 11 quorum proba per 7 est 0 et multiplica 22 per suas virgas, scilicet per 10, que per 9, que per 8, et adde multiplicationem de 3 in 4 ductam in 7 scilicet 84 erunt 15924 que multiplica per ... que per 6, que per 4, erunt 4203936. Cum quibus adde multiplicationem numeri secund... virge in numeros qui sunt sub prima virga, scilicet de 75 in 8 que in 9 que in... Nam procreatur ex tribus ductis in 5, quibus in 5 que sunt super virgam erunt 54000 que adde cum 4203936 erunt 4257936 que serva super 22 quorum proba est ... deinde multiplica numerum positum super 11 per numerum positum super 22 et divide summam per omnes numeros qui sunt sub virgis et evitanda evita et habebis quesita ut in questione ostenditur.

Incipit pars septima sexti capituli de multiplicatione partium numerorum cum ruptis.

Si volueris multiplicare $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{7}$ 29, que sic scribuntur $\frac{4}{7}$ 29, $\frac{3}{5}$ cum $\frac{6}{11}$ de $\frac{2}{3}$ 38, que sic scribuntur $\frac{2}{3}$ 38 $\frac{6}{11}$: describe questionem ut hic ostenditur. Et multiplica 29 per suam virgulam que est eis retro, scilicet per 7 et adde 4 erunt 207, que multiplica per 3 que sunt super aliam virgulam que est ante ipsam scilicet super 5 erunt ... que pone super $\frac{4}{7}$ 29 $\frac{3}{5}$, similiter multiplica 38 per suam virgulam que est eis ret.. scilicet per 3 et adde 2 erunt 116 que multiplica per 6 que sunt super 11 erunt .. que pone super $\frac{2}{3}$ 38 $\frac{6}{11}$. Et multiplica 621 per tertiam de 696 et divides per omnes reliquos ruptos utriuque lateris scilicet per $\frac{1\ 0\ 0}{5\ 7\ 11}$ et habebis pro summa quesite multiplicationis $\frac{2\ 2\ 2}{5\ 7\ 11}$ 374.

De eodem

Item si $\frac{1}{5}\frac{3}{4}$ de $\frac{2\,5}{7\,9}$ 33, que sic scribuntur $\frac{25}{79}$ 33 $\frac{13}{54}$ volueris multiplicare per $\frac{13}{47}$ de $\frac{5}{6}$ 244, que sic scribuntur $\frac{1\ 5}{11\ 6}$ 244 $\frac{13}{47}$, describe ea ut in hac margine cernitur et multiplica 33 per suam virgulam que eis retro scilicet per 9 et adde 5 que per 7 et a .. 2 erunt 2116, deinde multiplica 3 que sunt super 4 per 5 et 1 quod est super 5, ... 4, erunt 19 quod est numerus ipsarum duarum virgularum, que sunt ante ipsa 33, [B, f. 63] per 19, multiplica 2116, erunt 40204 que super pone $\frac{25}{79}$ 33 $\frac{13}{54}$ quorum pensa per 13, ordine quo multiplicavimus accepta est 8 que 8 pone super 40204 in questione. Item multiplica 244 per suas virgulas que sunt retro eis scilicet per 6 et adde 5 que per 11 et adde multiplicationem de 1 quod est super 11 in 6 erunt 16165 que multiplica per numerum virgule que est ante ipsa 244 scilicet per 13 que surgunt ex multiplicatione de 3 que sunt super 7 in 4 ipso 1 super addito quod est super 4 erunt 210145 que pone super 244 et suas virgulas. Et super ipsa pone 6, quod est pensa ipsorum per

13, et multiplica 40304 per 210145 et divide summam multiplicationis per omnes ruptos qui sunt sub omnibus virgulis. Et sic habebis quesitam multiplicationem. Sed ut modus evitandi in hac retineatur multiplicatione divides 40204 per 4 que sunt sub una prescriptarum virgularum exibunt 10051 que serva cum non possit ex eis amplius evitari. Item divide 210145 per 5 que sunt sub alia virgula exibunt 42029 per que multiplica 10051 et divides per omnes alios ruptos exibunt $\frac{2\ 6\ 0\ 1\ 4\ 4}{3\ 7\ 7\ 8\ 9\ 11}$ 3628.

De eodem cum pluribus ruptis

Item si volueris multiplicare $\frac{2\ 3\ 5}{7\ 8\ 9}$ de $\frac{1}{13}\frac{2}{11}\frac{3}{5}$ 42 per $\frac{1}{9}\frac{1}{8}\frac{5}{7}$ de $\frac{2\ 0\ 3}{3\ 5\ 11}$ 23, describe questionem et incipias multiplicare 42 per suas virgulas que sunt eis retro, erunt 30644, et accipe $\frac{2\ 3\ 5}{7\ 8\ 9}$ et invenias numerum ipsorum ruptorum scilicet multiplica 5 que sunt super 9 per 8 et adde 3, que per 7 et adde 2 erunt 303 per que multiplica 30644 erunt 928..132, deinde ut invenias numerum inferioris lateris multiplicabis 331 per suam virgulam que est eis retro, videlicet per 11 et adde 3 que sunt super ipsa 11 que multiplica per 5 et per 3 qui sunt sub eadem virgula et desuper adde 2 que sunt super ipsa 3 erunt 54662 et reperias numerum de $\frac{1}{9}\frac{1}{8}\frac{5}{7}$ qui est 479 per quemultiplica 54662 erunt 26183098 que pone super 331 et suis virgulis et multiplica 9285132 per 26183098 et divide per omnes ruptos qui sunt sub omnibus virgulis et evita inde ea que evitari poterunt et habebis pro quesita multiplicatione ut hic ostenditur $\frac{1\ 5\ 6\ 2\ 7\ 7\ 7\ 4\ 3\ 7}{2\ 7\ 7\ 9\ 9\ 10\ 10\ 11\ 11\ 13}$ 8112.

Capitolo Sesto

La moltiplicazione fra numeri interi e frazionari.

(1) Orbene, qualora tu volessi moltiplicare un qualunque numero di qualunque grado con una o più parti frazionarie[1769] per un qualunque numero con una o più parti frazionarie, scrivi il numero maggiore con la sua parte frazionaria - o le parti frazionarie - sotto il numero minore con le sue frazioni[1770], vale a dire numero sotto numero e frazioni sotto frazioni. (2) E prendi il numero superiore con le sue frazioni e raccogli[1771] di lì le tali frazioni quali sono quelle che sono con tale numero. E similmente del numero inferiore raccogli le sue frazioni. (3) E moltiplicherai le frazioni raccolte del numero superiore per le frazioni raccolte del numero inferiore. E dividerai il prodotto per le frazioni di entrambi i numeri sotto una sola linea di frazione, vale a dire dopo averla accorpata, e otterrai i prodotti delle moltiplicazioni[1772] di qualsiasi numero con frazioni.

(4) E affinché ciò sia mostrato più chiaramente con esempi numerici, dividiamo questo capitolo in otto parti.

La prima di esse sarà sulla moltiplicazione dei numeri interi con un solo denominatore[1773] sotto una sola linea di frazione.

La seconda sulla moltiplicazione dei numeri con due e tre denominatori sotto una sola linea di frazione.

La terza sulla moltiplicazione dei numeri con due denominatori sotto due linee di frazione.

La quarta sulla moltiplicazione dei numeri con due linee di frazione con numerosi denominatori.

La quinta sulla moltiplicazione dei numeri con tre linee di frazione.

La sesta sulla moltiplicazione delle frazioni senza gli interi.

La settima sulla moltiplicazione dei numeri e frazioni la cui linea di frazione termina con un cerchietto.

[1769] Quolibet rupto vel ruptis: preferirei tradurre ‘con una o più parti frazionarie qualsiasi’. Da quello che si evince dal resto del capitolo si tratta dei nostri decimali (le cifre dopo la virgola), ad esempio $\frac{1}{2}$ 1 è 1,5. (1:2=0,5).

[1770] Minuta: Minuta è participio sostantivato da minuo, indica qualcosa di spezzettato, è forse usato come sinonimo di ruptus. Qui minuta indica propriamente i decimali, i numeri dopo la virgola, che però ai tempi di Fibonacci non esistevano ancora, quindi bisognerà tradurre ‘frazioni’.

[1771] Fac: Il verbo facio in Fibonacci finora indicava ‘risultare’ o ‘determinare come risultato’. Quindi va bene anche ‘calcolare’ nel senso di ‘fare i calcoli per determinare un risultato’. Questo paragrafo due è esemplificato numericamente nei paragrafi 2-4 della prima parte di questo capitolo: lì Fibonacci spiega precisamente cosa significa ‘fare’ i decimali. Ciononostante mi risulta difficile tradurre questa espressione in termini matematici.

[1772] Multiplicationes è brachilogia per ‘i prodotti delle moltiplicazioni’.

[1773] Per maggiore scorrevolezza chiameremo, con linguaggio matematico moderno, denominatore il numero che sta sotto la linea di frazione, e numeratore quello che sta sopra.

L'ottava sulla moltiplicazione delle parti dei numeri con frazioni.

Parte Prima

La moltiplicazione dei numeri interi con un solo denominatore sotto una sola linea di frazione.

(1) Se tu volessi moltiplicare 11 e un mezzo[1774] per 22 e un terzo[1775], scrivi il numero maggiore sotto il minore, vale a dire $\frac{1}{3}$ 22 sotto $\frac{1}{2}$ 11, come qui si mostra. (2) Poi calcola i mezzi[1776] di $\frac{1}{2}$ 11. Dal momento che la frazione che è con 11 è una metà, ciò avviene così: moltiplicherai l'11 per il 2 che è sotto la linea di frazione dopo tale 11 e addiziona in aggiunta l'1 che è sopra la linea di frazione del due, risulterà 23 mezzi, ovvero raddoppia $\frac{1}{2}$ 11, risulterà 23. Scrivi tale 23 sopra $\frac{1}{2}$ 11 come si mostra in figura. (3) Per la stessa ragione moltiplicherai il 22 per la sua frazione[1777], cioè per il 3 che è al denominatore davanti al 22, risulterà 66 terzi, al quale addiziona l'1 che è sopra il 3, risulterà 67 terzi, che devi riportare sopra $\frac{1}{3}$ 22. E questo significa[1778] triplicare $\frac{1}{3}$ 22. (4) E moltiplicherai il 23 mezzi per il 67 terzi, risulterà 1541 sesti che devi dividere per i denominatori di entrambi i numeri, vale a dire per 2 e per 3. (5) Questa divisione avviene così: moltiplica 2 per 3, risulterà 6 per il quale dividi 1541, risulterà perfettamente $\frac{5}{6}$ 256[1779] per la moltiplicazione richiesta, come si mostra nella figura scritta precedentemente. (6) Infatti a chi chiede perché dalla moltiplicazione delle metà per i terzi provengono i sesti, rispondi [che è] perché come quando si calcola una sola volta la terza parte - cioè quando si moltiplica 1 per la terza parte - proviene la terza parte, per questo quando si moltiplica la metà di uno solo per la terza parte - vale a dire quando si calcola la metà della terza parte - è necessario che provenga la sesta parte. E perciò dalla moltiplicazione delle metà per le terze parti provengono le seste parti. (7) Ancora, quando, secondo un altro metodo, abbiamo moltiplicato il doppio di $\frac{1}{2}$ 11, vale a dire 23, per il triplo di $\frac{1}{3}$ 22, vale a dire per 67, dimostrerò che allora si è ottenuto il sestuplo del prodotto della loro moltiplicazione. (8) Dalla moltiplicazione di $\frac{1}{3}$ 22 per $\frac{1}{2}$ 11 risulta senza dubbio il prodotto

---

[1774] S'intenda 11,5
[1775] S'intenda 22,3
[1776] Vedi nota precedente.
[1777] Questa volta, per metonimia, Fibonacci indica la parte frazionaria con il termine virgulam.
[1778] Fuit: traduciamo significa anche se in Fibonacci fuit non ha mai questa accezione. (forse fit).
[1779] Exibunt integra: vuol dire 'risulta preciso', dove integra si riferisce al numero anche se l'ho tradotto come avverbio.

cercato. Per questo se si moltiplicherà $\frac{1}{3}$ 22 per il doppio di $\frac{1}{2}$ 11, cioè per 23, risulta il doppio del prodotto cercato. Dunque se si moltiplicherà il triplo di $\frac{1}{3}$ 22, cioè 67, per 23, vale a dire per il doppio di $\frac{1}{2}$ 11, risulterà senza dubbio il triplo del doppio, cioè il sestuplo del prodotto cercato. Per questo la sesta parte del prodotto della loro moltiplicazione è il prodotto cercato, cosa che bisognava dimostrare. (9) E devi sapere che per questo abbiamo moltiplicato 2 per 3, dal momento che dobbiamo dividere per 2 e per 3, perché il prodotto della loro moltiplicazione non va oltre il numero dieci, e così devi fare di tutti i numeri dei quali i prodotti[1780] non vadano oltre il dieci.

(10) Per esempio, quando dovessi dividere un qualche numero per 2 e per 2, dividilo per 4, dal momento che due volte 2 fa 4; e se dovessi dividere lo stesso numero per 2 e per 4, dividilo per 8, e se per 2 e per 5, dividilo per 10, e se per 3 e per 3, dividilo per 9; e se volessi dividere un certo numero per 3 e per 5, dividilo per $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 5}$, dal momento che la moltiplicazione di 3 per 5 arriva a 15 che è un numero maggiore di 10. Per cui è meglio che tu lo divida per $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 5}$ anziché per 15.

Sullo stesso argomento

(1) Parimenti se volessi moltiplicare $\frac{1}{2}$ 12 per $\frac{3}{5}$ 23[1781], scrivi la traccia[1782] come qui si mostra e moltiplicherai il 12 per il 2 che è al denominatore e addizionerai l'1 che è al numeratore di tale 2, risulterà 25 mezzi. (2) Parimenti moltiplicherai il 23 per il 5 che è al denominatore e addizionerai il 3 che è al numeratore di tale 5, risulterà 118 quinti[1783], moltiplicherai i 25 mezzi per i 118 quinti, risulterà 2950 mezzi quinti, vale a dire decimi. Per questo dividerai per 2 e per 5, che sono al denominatore, cioè per 10, ovvero devi dividere 2950 per 10 - poiché dal doppio di $\frac{1}{2}$ 12 per il quincuplo di $\frac{3}{5}$ 23, vale a dire da 25 per 118, risulta il decuplo del prodotto di $\frac{1}{2}$ 12 per $\frac{3}{5}$ 23 - risulterà perfettamente 295 e niente di più, come si è mostrato più sopra nella traccia.

<Semplificazione[1784]>

[1780] Multiplicationes è metonimia per 'prodotti delle moltiplicazioni'.
[1781] Vale a dire 12,5 e 23,6.
[1782] Questionem: si è tradotto 'traccia' perché nel linguaggio matematico moderno si parla di 'traccia' di un problema.
[1783] 118:5=23,6.
[1784] Evitatio: per il momento traduco così il termine che compare più volte in questo VI capitolo e che nel latino classico significa semplicemente 'l'atto di evitare' 'fuga'. Fibonacci si riferisce a uno di quei procedimenti

(1) Certamente puoi trovare il prodotto della suddetta moltiplicazione in altro modo, vale a dire che prima di moltiplicare 25 per 118 dividi il 25 per il 5 della frazione. Dal momento che si può dividere perfettamente per esso, risulterà 5 che devi riportare e dividi il 118 per il 2 che è sotto la linea di frazione, dal momento che la sua metà è intera, risulterà 59 che devi moltiplicare per il 5 riportato - che era la quinta parte di 25 - risulterà 295 che è il prodotto della suddetta moltiplicazione, come più sopra si è trovato. (2) E deve essere tenuta di gran conto tale semplificazione per mezzo della quale si evita la fatica del moltiplicare e del dividere, infatti è più difficile moltiplicare 25 per 118, che 5 per 59, il cui prodotto, vale a dire di 5 per 59, non è necessario dividerlo per alcuna parte frazionaria. (3) Per cui qualora dovessi moltiplicare un numero per un numero e dovessi dividere il loro prodotto per uno o più numeri per il quale, o per i quali, uno di quei numeri è perfettamente divisibile, ti applicherai sempre a dividere quelli che potrai dividere perfettamente, prima di moltiplicarli. Poi moltiplicherai a vicenda il resto dei numeri e li dividerai per il denominatore - o i denominatori - che resteranno dalla semplificazione, cosa che ci preoccuperemo di spiegare nei paragrafi seguenti.

(4) Ma innanzitutto voglio spiegare da dove tale semplificazione prenda avvio. Poiché dalla moltiplicazione di 25 per 118 risulta il decuplo del prodotto di $\frac{1}{2}$ 12 per $\frac{3}{5}$ 23, come si ottiene in base a ciò che abbiamo detto per la moltiplicazione precedente, dunque dalla moltiplicazione della quinta parte di 25 per 118, risulterà la quinta parte del decuplo del prodotto di $\frac{1}{2}$ 12 per $\frac{3}{5}$ 23, vale a dire il doppio del prodotto stesso[1785]: per questo se si moltiplicherà la quinta parte di 25, vale a dire 5, per la metà di 118, vale a dire 59, risulterà il prodotto della moltiplicazione di $\frac{1}{2}$ 12 per $\frac{3}{5}$ 23.

Sullo stesso argomento

(1) Ancora, se volessi moltiplicare $\frac{2}{3}$ 13 per $\frac{5}{7}$ 24[1786], una volta scritti i numeri come qui si mostra, moltiplica il 13 per il 3 e addiziona il 2 che è al numeratore di tale 3, risulterà 41 terzi. Parimenti moltiplica il 24 per la sua frazione[1787], cioè per il 7 e addiziona il 5, risulterà

---

frequenti in matematica, come la razionalizzazione delle frazioni, che consentono di velocizzare le operazioni di calcolo 'evitando' alcuni passaggi.

[1785] La quinta parte di 25 è 5. Quindi: 5 x 118= 590 che è il doppio di 295, ovvero il prodotto di $\frac{1}{2}$ 12 x $\frac{3}{5}$ 23.

[1786] $\frac{2}{3}$ = 0,6; $\frac{5}{7}$ = 0,7 (in realtà i decimali sono approssimati). Quindi si tratta della moltiplicazione di 13,6 per 24,7 che risulta circa 336

[1787] *Virgulam* in questo caso è una metonimia per indicare la frazione posta davanti al numero, e in particolare sembra che qui ci si riferisca solo al numero posto sotto la linea di frazione.

173 settimi che devi moltiplicare con 41, risulterà 7093 ventunesimi[1788]. Dividilo per 3 e per 7 che sono al denominatore una volta postoli sotto una sola linea di frazione così $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 7}$, risulterà perfettamente $\frac{1\ \ 5}{3\ \ 7}$ 337. (2) In realtà di questa moltiplicazione non puoi semplificare nulla, dal momento che 41 o 173 non si possono dividere perfettamente nè per 3 nè per 7.

(3) Se poi tu volessi sapere attraverso la prova del nove se questa moltiplicazione è corretta oppure no, calcola la tale prova del nove[1789] di 13: questa è 4 e moltiplicala per 3 che è sotto la linea di frazione davanti a tale 13, risulterà 12 e addiziona il 2 che è sopra lo stesso 3, risulterà 14, del quale calcola la prova che è 5 e conservala. E osserva del 41 se la sua prova è 5, come or ora hai riportato, così allora capirai che tale 41 è corretto se la sua prova sarà 5. In effetti la prova di 41 è 5, com'è necessario: per questo riporterai il 5 sopra il 41, o davanti ad esso. (4) Dopo osserverai di 173, attraverso la medesima prova del nove, se è corretto, naturalmente moltiplicherai la prova del 24, che è 6, per il 7 che è al denominatore e addizionerai il 5 che è sopra il 7 stesso, risulterà 47, del quale conserva la prova, che è 2, poiché tale deve essere la prova del 173 e così è, per questo poni il 2 sopra il 173. (5) E moltiplicherai la prova di 41 per la prova di 173, vale a dire il 5 per il 2, risulterà 10. Da tale [dieci] sottrai la prova [del nove], resta 1 che è la prova del prodotto della moltiplicazione: riporterai infatti tale 1 sopra il prodotto della moltiplicazione, vale a dire sopra $\frac{1\ \ 5}{3\ \ 7}$ 337. E moltiplicherai la prova di 337 che è 4 per il 7 che è al denominatore davanti al 337, e in aggiunta addiziona il 5, risulterà 33, la cui prova, che è 6, moltiplicherai per il 3 che è sotto la stessa linea di frazione davanti al 7 e addiziona l'1 che è al numeratore di tale 3, risulterà 19, la cui prova è 1, come è stato riportato nella traccia sopra il 337 come prova del prodotto della moltiplicazione: dunque la moltiplicazione è detta corretta. (6) Infatti l'ordine del fare la verifica è che appena inizi a moltiplicare, devi iniziare a fare la verifica. Così in questa moltiplicazione, dal momento che hai ottenuto 41 dalla moltiplicazione di 13 per 3, una volta addizionato in aggiunta il 2[1790], hai dovuto immediatamente sapere attraverso la prova, se tale 41 fosse corretto, similmente anche quando hai ottenuto il 173, hai dovuto sapere attraverso la prova se fosse corretto. Di nuovo, quando hai moltiplicato 41 per 173, hai dovuto sapere attraverso la prova se il loro prodotto fosse corretto. E quando hai ottenuto il risultato, vale a dire $\frac{1\ \ 5}{3\ \ 7}$ 337, hai dovuto sapere similmente, in base a ciò che abbiamo dimostrato più sopra, se quella divisione fosse corretta.

[1788] $\frac{7093}{21}$ = 337,7 che è approssimativamente il risultato cercato.
[1789] Lett. Sarebbe: 'la prova di tale nove'.
[1790] 41= (13x3)+2

Sullo stesso argomento.

(1) Di nuovo, se tu volessi moltiplicare $\frac{1}{4}16$ per $\frac{2}{5}\ 27$[1791], una volta scritta la traccia, moltiplica il 16 per la sua parte frazionaria, vale a dire per 4 e addiziona l'1, risulterà 65 quarti, il quale numero verificalo attraverso la prova. Così se tu volessi verificarlo attraverso la prova del 7, dividi il 16 per il 7, resterà 2 che devi moltiplicare per il 4 della frazione e addiziona l'1 che è sopra il 4, risulterà il 9 che devi dividere per 7, resterà 2, e tanto deve rimanere da 65, se viene diviso per il 7, e tanto rimane. (2) Dunque la prova di 65 è il 2 che devi riportare sopra lo stesso 65. Poi moltiplica il 27 per la sua parte frazionaria, risulterà 137 quinti che devi porre sopra $\frac{2}{5}\ 27$, e osserva, attraverso la prova del 7, se questo 137 è corretto, come hai osservato del 65. E allora troverai che la prova del 137 deve essere 4 e così è, poiché se dividerai 137 per 7, senza dubbio resterà 4. (3) Per questo riporterai il 4 sopra il 137 come sua prova. Poi moltiplicherai 65 per 137, risulterà 8905 ventesimi[1792].

<Verifica>

(1) Se questa moltiplicazione sarà corretta, lo saprai attraverso la medesima prova del sette, così: moltiplicherai la prova riportata del 65, vale a dire il 2, per la prova del 137 che è 4, risulterà 8, che devi dividere per 7, resta 1. E tanto deve rimanere da 8905 se verrà diviso per 7, e così avviene. Di lì capiamo che quella moltiplicazione è corretta. (2) Poi dividi 8905 per i denominatori, cioè per il 4 e per il 5 posti sotto una sola linea di frazione. Tuttavia dividi prima per il 5, dal momento che 8905 si divide perfettamente per 5, risulterà $\frac{0\ \ 1}{5\ \ 4}\ 445$ come prodotto della moltiplicazione richiesta.

(3) Se questa divisione è corretta, devi capirlo così: dividi il 445 per il 7, resta il 4 che devi moltiplicare per il 4 che è al numeratore davanti al 445 e addiziona l'1 che è al numeratore di tale 4, risulterà 17. Dividilo per 7, resta 3. Moltiplicalo per il 5 che è al denominatore davanti al 4, e addiziona lo zero che è sopra il 5, risulterà 15. Dividi questo [15] per il 7, resta 1, dal momento che questo 1 è la prova di 8905, capiamo che la divisione assegnata è corretta.

(4) E devi sapere che il 5 che è al denominatore davanti al 4, dal momento che al suo numeratore c'è uno 0, non significa nulla. Dunque la moltiplicazione scritta sopra dà come risultato $\frac{1}{4}\ 445$. Abbiamo posto infatti lo stesso 5 sotto la linea di frazione per trovare la prova.

1791 $\frac{1}{4}$= 0,25; $\frac{2}{5}$ = 0,4. Quindi si tratta di 16,25 x 27,4=445,25

1792 $\frac{8905}{20}$ = 445,25

(5) In altro modo più prontamente puoi trovare questo stesso prodotto con la semplificazione, vale a dire quando dividerai il 65 trovato per il 5 che è al denominatore, risulterà 13 che devi moltiplicare per 137, e dividi per il 4 dell'altra linea di frazione, risulterà similmente $\frac{1}{4}$ 445, come più sopra è stato trovato. (6) Infatti quando dobbiamo dividere qualche numero per 4 e per 5, cioè per $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 5}$, se tale numero avrà $\frac{1}{5}$ [tra i suoi divisori], abituiamoci sempre a dividere tale numero prima per 5 che per 4, perché il quoziente di tale divisione[1793] è senza resti, come abbiamo appena fatto per 8905. E se lo stesso numero si dividesse integralmente per 4, abituiamoci a dividerlo prima per 4 che per 5. E se quel numero non si può dividere perfettamente nè per 4 nè per 5, abituiamoci a dividerlo per $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 10}$, dal momento che quattro per cinque risulta 20, la cui scomposizione in fattori è $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 10}$. (7) E facciamo ciò in ragione della maggiore eleganza dell'espressione verbale: perché è più bello dire $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 10}$ anziché $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 5}$, sebbene sia lo stesso. Similmente devi intendere di certi altri numeri. Vale a dire, qualora dovessi dividere per 3 e per 4, cioè per $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 4}$, un qualche numero che non si divide perfettamente per alcuno di essi, dividilo per $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 6}$, che è più bello. Parimenti quando dovrai dividere per 4 e per 4 cioè per $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 4}$, dividilo per $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 8}$. E qualora dovessi dividere per 3 e per 6, cioè per $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 6}$, dividi per $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 9}$, dal momento che la moltiplicazione di 2 per 9 dà lo stesso risultato di quella di 3 per 6. Parimenti qualora dovessi dividere per 4 e per 6, cioè per $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 6}$, dividi per $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 8}$. E qualora dovessi dividere per $\frac{1\ \ 0}{5\ \ 6}$, dividi per $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 10}$. E qualora dovessi dividere per $\frac{1\ \ 0}{5\ \ 8}$, dividi per $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 10}$. E qualora dovessi dividere per $\frac{1\ \ 0}{6\ \ 6}$, dividi per $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 9}$, perché entrambe le frazioni, vale a dire $\frac{1\ \ 0}{6\ \ 6}$ e $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 9}$, sono scomposizioni in fattori di 36. (8) Ma noi scegliamo i numeri più estremi che sono fino a dieci e nella scomposizione dei numeri e per questo è più bello $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 9}$ che $\frac{1\ \ 0}{6\ \ 6}$. E lo stesso devi intendere per gli esempi precedenti.

(9) Ma se volessi dividere un qualche numero per alcuni altri numeri che sono fino a dieci, oltre a quelli che più sopra abbiamo insegnato a raggruppare, dal momento che essi non possono essere raggruppati, dividilo per essi stessi. Così, se dovrai dividerlo per 5 e per 7, dividi lo stesso per $\frac{1\ \ 0}{5\ \ 7}$, e così devi intendere per gli altri.

[1793] *Divisionem* è brachilogia per 'il quoziente della divisione'. Lett: il quoziente della divisione di tale numero.

<La moltiplicazione di $\frac{3}{8}$ 18 per $\frac{4}{9}$ 24>[1794]

(1) E ancora, se vorrai moltiplicare $\frac{3}{8}$ 18 per $\frac{4}{9}$ 24, una volta scritta la traccia, moltiplica il 18 per il suo denominatore[1795], cioè per 8, e addiziona il 3, risulterà 147. (2) Parimenti moltiplica il 24 per il 9 e addiziona il 4, risulterà 220. Moltiplica questo [220] per 147 e dividi per i denominatori, risulterà $\frac{4\ \ 1}{8\ \ 9}$ 449, la cui prova per 11 è 0. (3) Infatti se volessi sapere quale parte di un intero sia $\frac{4\ \ 1}{8\ \ 9}$, moltiplica l'1 che è sopra il 9 per l'8 e addiziona il 4, risulterà 12 che devi conservare come denominatore. E moltiplica il 9 per l'8, che sono sotto la linea di frazione, risulterà 72 come numeratore che devi dividere per il 12 conservato, risulterà 6, del quale 6 dici $\frac{1}{6}$, e tale parte di 72 è 12[1796]. Similmente tale $\frac{4\ \ 1}{8\ \ 9}$ è $\frac{1}{6}$ di un intero. (4) Dirò questo più elegantemente poiché dalla moltiplicazione di 8 per 9 sib arriva 72, fai il settantaduesimo di un intero, risulta 72. Da questo calcola un nono e quattro ottavi di un nono[1797], risultano 8 e 4, vale a dire 12, come si ottiene dalla moltiplicazione dell'1 che è sopra il 9 per l'8, una volta addizionato il 4 che è sopra l'8. Dunque $\frac{4\ \ 1}{8\ \ 9}$ è $\frac{12}{72}$. Per questo la proporzione di $\frac{4\ \ 1}{8\ \ 9}$ ad un intero è come da 12 a 72. Ma la proporzione di 12 a 72 è come la proporzione della dodicesima parte di 12 alla dodicesima parte di 72, cioè di 1 a 6. Perché, come si trova in Euclide, come l'intero sta all'intero, così la parte sta alla parte, infatti l'1 è la sesta parte di 6, questo si ottiene in luogo di $\frac{4\ \ 1}{8\ \ 9}$, dunque il prodotto della moltiplicazione assegnata è $\frac{1}{6}$ 449.

<La semplificazione>

(1) In altro modo possiamo trovare questo stesso risultato attraverso la semplificazione. Vale a dire, qualora dovessi moltiplicare 147 per 220 e dopo dividere per 8 e per 9, moltiplica soltanto la terza parte di 147, che è 49, per la quarta parte di 220, cioè per 55, e dividi il prodotto per la terza parte di 9, cioè per 3, e per la quarta parte di 8, cioè per 2. Dunque dividi il loro prodotto per 6, risulterà $\frac{1}{6}$ 449 come più sopra è stato trovato. (2) E bada che quando il numeratore ha qualche fattore in comune con il denominatore, vale a dire il numero che è sopra la linea di frazione con il numero che è sotto la linea di frazione, allora

[1794] 18,375x24,444=449,16585

[1795] Per eorum virgulam: ancora una volta una metonimia.

[1796] $\frac{4\ \ 1}{8\ \ 9} = \frac{(1\, x\, 8)+4}{8\, x\, 9} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$

[1797] $\frac{1}{9}$ di 72 è 8, $\frac{4}{8}$ di 8 è 4.

devono essere semplificati[1798] dividendoli per il numero maggiore comune a entrambi a partire dal quale essi hanno un fattore in comune.

(3) Per esempio, abbiamo $\frac{6}{9}$. Infatti il 6 ha un fattore in comune con il 9, e il loro fattore in comune è il tre. Per questo dividi entrambe le parti frazionarie per 3, e ciò che risulterà dalla divisione del numero superiore, vale a dire 2, ponilo sopra una certa linea di frazione, e ciò che uscirà dalla divisione dell'inferiore ponilo sotto la stessa. E otterrai $\frac{2}{3}$ in luogo di $\frac{6}{9}$. (4) Parimenti di $\frac{5}{10}$ è il 5, vale a dire il numeratore, il loro fattore comune. Per questo se si dividono entrambi i numeri per 5, vale a dire il 5 e il 10, risulterà $\frac{1}{2}$, per la semplificazione di $\frac{5}{10}$, e così devi intendere in casi simili.

(5) C'è, invero, un metodo per trovare il massimo comun divisore che hanno tra loro i numeri 'comunicanti'[1799]: così dividi il maggiore per il minore e se da tale divisione non avanzerà nulla, allora il numero minore sarà il loro massimo comun divisore, come in $\frac{12}{72}$. (6) E se da tale divisione avanzerà un resto, conservalo come primo resto per il quale dividere il numero minore. Se da tale divisione non avanzerà nulla, allora il primo resto sarà il massimo comun divisore, come in $\frac{10}{22}$, il cui comun divisore è 2, perché una volta diviso il 22 per il 10 resta 2 per il quale il 10 si divide perfettamente[1800]. (7) E se dalla divisione del numero minore per il primo resto avanzerà qualcosa, lo chiamerai secondo resto, se per esso il numero maggiore si divide perfettamente, allora il secondo resto sarà il massimo comun divisore, come in $\frac{12}{20}$, il cui massimo comun divisore è 4, dal momento che, una volta diviso 20 per 12, resta 8 che, diviso per 12, dà come resto 4, per il quale il 12 si divide perfettamente, e se dalla divisione del numero maggiore avanzerà qualcosa lo chiamerai ancora terzo resto, per esso dividerai il numero minore e farai sempre così finché nel numero maggiore non risulti un resto per il quale il minore si divida perfettamente o finché nel numero minore non risulti un resto per il quale il maggiore si divida [perfettamente] e quel resto sarà il divisore comune e massimo, come in Euclide si espone con chiare dimostrazioni.

Parte Seconda.

La moltiplicazione dei numeri con più parti frazionarie sotto una sola linea di frazione.

[1798] Aptati: per ora si traduce 'semplificare' il verbo 'aptare'n che vale 'modificare'.
[1799] Per 'comunicanti' Fibonacci intende multipli e sottomultipli.
[1800] E dunque il 2 è il massimo comun divisore.

(1) Se poi vorrai moltiplicare 13 e tre ottavi e la metà di un ottavo - che si scrive così $\frac{1\ 3}{2\ 8}$ 13 - per 24 e due noni e tre quarti di un nono - che si scrive così $\frac{3\ 2}{4\ 9}$ 24 -, scrivi la traccia come si mostra in figura[1801]. (2) E moltiplica il 13 per l'8, e addiziona il 3 <al prodotto>, risulterà 107 ottavi che devi moltiplicare per il 2 che è sotto la linea di frazione dopo l'8 e addiziona l'1 che è sopra il 2 stesso, risulterà 215 sedicesimi, dal momento che 2 e 8, che sono sotto la linea di frazione, moltiplicati fra loro, realizzano 16: poni dunque il 215 sopra $\frac{1\ 3}{2\ 8}$ 13. (3) Similmente moltiplica il 24 per le sue frazioni, vale a dire per 9 e addiziona il 2 che è sopra il 9, risulterà 218 noni che devi moltiplicare per il 4 che è sotto la linea di frazione dopo il 9 e addiziona il 3 che è sopra il 4, risulterà 875 trentaseiesimi che devi porre sopra $\frac{3\ 2}{4\ 9}$ 24, e moltiplica 215 per 875 e dividi <il prodotto> per i numeri che sono sotto le linee di frazione di entrambi i numeri, cioè per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{2\ 4\ 8\ 9}$ o per $\frac{1\ 0\ 0}{8\ 8\ 9}$ che è più elegante, risulterà $\frac{5\ 3\ 0}{8\ 8\ 9}$ 326. (4) E così potrai moltiplicare qualunque numero con due parti frazionarie sotto una sola linea di frazione per qualunque numero con due parti frazionarie sotto un'altra.

(5) Parimenti se vorrai moltiplicare 14 e tre undicesimi e tre ottavi di un undicesimo e mezzo ottavo di un undicesimo - che si scrive così $\frac{1\ 3\ 3}{2\ 8\ 11}$ 14 - per 25 e quattro trecidesimi e due noni di un tredicesimo e un terzo di un nono di un trecidesimo - che si scrive così $\frac{1\ 2\ 4}{3\ 9\ 13}$ 25 - scrivi la traccia come qui si mostra e moltiplica il 14 per le sue parti frazionarie, cioè per 11, e addiziona il 3, < moltiplica il risultato> per 8 e addiziona il 3 che è sopra l'8 <moltiplica il risultato> per 2 e addiziona l'1, risulterà 2519 centosettantaseiesimi che devi porre sopra $\frac{1\ 3\ 3}{2\ 8\ 11}$ 14. (6) Similmente moltiplica il 25 per le sue parti frazionarie, risulterà 8890 trecentocinquantunesimi che devi porre sopra $\frac{1\ 2\ 4}{3\ 9\ 13}$ 25, e moltiplica il 2519 per l'8890, risulterà 22393910 che devi dividere per le restanti parti frazionarie che sono sotto entrambe le linee di frazione, vale a dire per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 8\ 9\ 18}$, risulterà $\frac{1\ 5\ 4\ 6}{3\ 8\ 9\ 14}$ 362: poichè quando da $\frac{1}{6}$ si 'evita' $\frac{1}{2}$ resta $\frac{1}{3}$.

(7) Se vorrai fare la verifica di questa moltiplicazione attraverso la prova del 7, calcola la prova di $\frac{1\ 3\ 3}{2\ 8\ 11}$ 14 che si calcola così: moltiplicherai la prova di 14 che è 0 per la prova di 11 che è 4 e addiziona il 3 che è sopra l'11, risulterà 3 che devi moltiplicare per la prova di 8 che è 1 e addiziona il 3 che è sopra l'8, risulterà 6 che devi moltiplicare per il 2 che è sotto la

---

[1801] $\frac{1\ 3}{2\ 8}13=\frac{3x2+1}{2x8}=\frac{7}{16}=0{,}4375$; $\frac{3\ 2}{4\ 9}24=\frac{2x4+3}{4x9}=\frac{11}{36}=0{,}3055$

linea di frazione e addiziona l'1 che è sopra il 2, risulta 13 la cui prova, che è 6, è la prova di $\frac{1\ 3\ 3}{2\ 8\ 11}$ 14. Attraverso la stessa strada e lo stesso ordine calcola la prova di $\frac{1\ 2\ 4}{3\ 9\ 13}$ 25 e troverai che essa è 0: moltiplicalo per 6, vale a dire per la prova di $\frac{1\ 3\ 3}{2\ 8\ 11}$ 14 or ora trovata, risulterà 0, che è la prova del prodotto della moltiplicazione. (8) Di lì vedi se la prova di $\frac{2\ 6\ 6\ 5\ 6}{6\ 8\ 9\ 11\ 13}$ 362 è 0, allora la moltiplicazione sarà corretta, e intendi che la prova di 14 con le sue parti frazionarie, vale a dire 6, sia la prova dei numeri, vale a dire di 2549, e la prova di 25 con le sue parti frazionarie, vale a dire 0, è la prova di 8890, per questo la prova che proviene da 6 per 0, vale a dire 0, è la prova del prodotto di 2519 per 8890.

Parte terza.

(1) Se vuoi moltiplicare 15 e un terzo e un quarto di un intero che si scrive così con due linee di frazione separate $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ per 26 e un quinto e un sesto che si scrive così $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ 26, scrivi la traccia come si mostra qui e moltiplica il 15 per il 3 che è sotto la prima linea di frazione e addiziona l'1 che è sopra il 3, risulterà 46 terzi che devi moltiplicare per il 4 che è sotto l'altra linea di frazione, risulterà 184 dodicesimi, a cui addiziona il prodotto della moltiplicazione dell'1 che è sopra il 4 per il 3. Dal momento che un quarto equivale a tre dodicesimi, risulterà similmente 187 dodicesimi che devi porre nella traccia sopra $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 15. (2) Similmente moltiplica il 26 per le sue parti frazionarie, cioè per 5, e addiziona l'1 che è sopra il 5, risulterà 791 trentesimi che devi porre sopra $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ 26. (3) E moltiplica il 187 per il 791, risulterà 147917, che devi dividere per tutti i numeri che sono sotto le linee di frazione, vale a dire per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 4\ 5\ 6}$ che, accorpati, si trasformano in $\frac{1\ 0\ 0}{4\ 9\ 10}$, risulterà $\frac{1\ 7\ 8}{4\ 9\ 10}$ 410, come si mostra nello svolgimento[1802].

<*Sullo stesso argomento*>

(1) Parimenti se volessi moltiplicare $\frac{2}{9}\frac{3}{5}$ 16 con $\frac{2}{11}\frac{5}{8}$ 27, una volta sccritta la traccia, moltiplica il 16 per il 5 e addiziona il 3, moltiplica tutto questo risultato per il 9 e addiziona il prodotto del 2 che è sopra il 9 per il 5, risulterà 757 che devi porre sopra $\frac{2}{9}\frac{3}{5}$ 16. (2) Parimenti moltiplica il 27 per le sue parti frazionarie, risulterà 2442 per il quale moltiplica 757 e dividi il prodotto per tutte le parti frazionarie, vale a dire per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{5\ 8\ 9\ 11}$ e, una volta aggregate le parti frazionarie, risulterà $\frac{2\ 8\ 4\ 8}{4\ 9\ 10\ 11}$ 467. (3) Se vorrai fare la verifica di questa moltiplicazione

[1802] *Questione*: è probabile che qui è necessari emendare in *figura* per analogia a passi analoghi.

attraverso la prova del 7, calcola la prova di $\frac{2\;3}{9\;5}$ 16, che si calcola così: si moltiplica la prova di 16, che è 2, per il 5 della linea di frazione e si addiziona in aggiunta il 3 che è sopra il 5, risulterà 13, la cui prova, che è 6, sia moltiplicata per la prova di 9, che è 2, risulterà 12 a cui deve essere addizionato il prodotto della moltiplicazione del 2 che è sopra il 9 per il 5, risulterà 22, la cui prova, che è 1, è la prova di $\frac{2\;3}{9\;5}$ 16. E tale deve essere la prova di 757 e così è. (4) Parimenti calcola la prova di $\frac{2\;\;5}{11\;8}$ 27, che si calcola secondo come abbiamo calcolato quella di $\frac{2\;3}{9\;5}$ 16: e troverai che la sua prova è 4, il quale 4 è la prova di 2447. Moltiplica dunque l'1 per il 4, risulterà 4, il quale 4 è la prova del prodotto, vale a dire di $\frac{3\;\;8\;\;4\;\;8}{4\;\;9\;\;10\;\;11}$ 467. (5) E se vorrai ridurre $\frac{3\;\;8\;\;4\;\;8}{4\;\;9\;\;10\;\;11}$ nelle parti di un solo numero, moltiplica l'11 per 10 e moltiplica il loro prodotto per 9 e tutto questo per 4, risulterà 3960 che è il denominatore: ponilo dunque sotto una linea di frazione e moltiplica l'8 che è sotto l'11 per il 10 e addiziona il 4 che è sopra il 10, moltiplicalo tutto per il 9 e addiziona l'8 che è sopra il 9, moltiplica il risultato per il 4 e addiziona il 3 che è sopra il 4, risulterà 3059 che è il numeratore, per questo ponilo sopra la linea di frazione e otterrai $\frac{3059}{3960}$ per l'operazione richiesta.

<*Sullo stesso argomento*>

(1) Parimenti se vuoi moltiplicare $\frac{4\;1}{9\;8}$ 17 per $\frac{1\;\;1}{17\;3}$ 28, moltiplica gli interi per le loro parti frazionarie nell'ordine descritto sopra. E otterrai per il numero superiore 1241, e per l'inferiore 1448, i quali numeri devi moltiplicare tra loro e devi dividere il loro prodotto per tutte le parti frazionarie, vale a dire per $\frac{1\;\;0\;\;0\;\;0}{3\;\;8\;\;9\;\;17.}$ (2) E poiché ci sono fattori in comune tra il dividendo e il divisore, cioè tra i numeri che si moltiplicano tra loro e i numeri che sono sotto la linea di frazione, devi imitare il metodo della semplificazione descritto sopra, vale a dire calcolerai $\frac{1}{17}$ di 1241, vale a dire 73 in luogo di uno dei numeri da moltiplicare, grazie a ciò tralasceremo il 17 che è sotto la linea di frazione. Parimenti calcolerai $\frac{1}{8}$ di 1448, vale a dire 181 in luogo dell'altro, e tralascerai $\frac{1}{8}$ dalla linea di frazione. Dunque moltiplicherai 73 per 181 e dividerai il prodotto per i restanti numeri che sono sotto la linea di frazione, vale a dire per $\frac{1\;\;0}{3\;\;9}$, risulterà $\frac{1\;\;3}{3\;\;9}$ 489 per la moltiplicazione richiesta. (3) Calcolerai la prova di questo prodotto dalla prova di 73 e di 181, dal momento che viene diviso il prodotto della loro moltiplicazione. (4) Infatti per $\frac{3}{9}$ calcola $\frac{1}{3}$, per $\frac{1\;\;3}{3\;\;9}$ calcola $\frac{1}{3}$ e tre noni. Parimenti abbiamo in

una certa linea di frazione questo $\frac{2}{4}\frac{3}{6}\frac{2}{8}\frac{5}{10}$ che pronuncerai così: in luogo di $\frac{5}{10}$ dirai $\frac{1}{2}$ e in luogo di $\frac{2}{8}$ dirai un quarto di un decimo e in luogo di $\frac{3}{6}$ dirai un mezzo di un ottavo di un decimo e in luogo di $\frac{2}{4}$ dirai un mezzo di un sesto di un ottavo di un decimo, e queste si fondono per i fattori comuni che i numeri superiori hanno con gli inferiori.

(5) E bisogna rilevare che molte frazioni che sono sotto diverse linee di frazione possono essere ricondotte ad un'unica frazione[1803], vale a dire alle parti di un solo numero, come sarà dimostrato a suo luogo. (6) Ma qui è necessario dimostrare in che modo si fondono le due frazioni che sono sotto due linee. Moltiplicherai il numero che si troverà sotto la prima linea di frazione per il numero che si troverà sotto la seconda e porrai il risultato[1804] sotto una linea di frazione. Poi moltiplicherai il numero che è sopra la prima linea di frazione per il numero che è sotto la seconda e moltiplicherai il numero che è sopra la seconda per il numero che è sotto la prima e addizionerai i prodotti delle due moltiplicazioni e porrai i risultati sopra la linea di frazione e otterrai ciò che cercavi.

(7) Per esempio, vogliamo addizionare $\frac{1}{2}$ con $\frac{2}{5}$, moltiplica il 2 per il 5 che sono sotto le linee di frazione, risulterà 10, che devi porre sotto una linea di frazione e moltiplica l'1 che è sopra il 2 per il 5 e il 2 che è sopra il 5 per il 2 che è sotto la linea di frazione, risulteranno 5 e 4, vale a dire 9, poni questo 9 sopra la linea di frazione e otterrai $\frac{9}{10}$ in luogo di $\frac{2}{5}\frac{1}{2}$. Altrimenti calcola i decimi di un intero, risulterà 10 decimi, per questo in luogo di $\frac{1}{2}$ si otterrà $\frac{5}{10}$, e in luogo di $\frac{2}{5}$ si otterrà $\frac{4}{10}$, e così in luogo di $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{5}$ si otterrà $\frac{9}{10}$, come abbiamo detto precedentemente.

(8) E sebbene attraverso questi due metodi, qualunque due frazioni di due linee di frazioni si riconducono ad una sola linea, tuttavia insegnerò come procedere più sottilmente nelle frazioni che hanno sotto le linee numeri con fattori in comune. (9) Così se vorrai ricondurre ad una sola frazione $\frac{2}{9}\frac{1}{3}$, dal momento che il 3 e il 9, che sono sotto le linee di frazione, hanno tra loro un fattore in comune e il loro fattore in comune è il numero 3, dividi uno di tali numeri, vale a dire il 3 o il 9, per il 3, vale a dire per il loro fattore in comune, e moltiplica il risultato per l'altro numero e risulterà 9 come denominatore.

(10) Per esempio, moltiplica la terza parte di 3, vale a dire 1 per 9, o moltiplica la terza parte di 9 per 3, certo da qualsiasi delle suddette moltiplicazioni risulta il 9. Ponilo sotto una certa linea di frazione e moltiplica l'1 che è sopra il 3 per la terza parte di 9, risulterà 3.

[1803] Virgam è qui chiaramente una metonimia per 'frazione'.
[1804] Quot proveniet: il risultato.

Riportalo sulla mano e moltiplica il 2 che è sopra il 9 per la terza parte di 3, vale a dire per 1, risulterà 2 che devi addizionare con il 3 riportato, risulterà 5 che devi porre sopra la linea di frazione sotto la quale è posto il 9, e otterrai $\frac{5}{9}$ in luogo di $\frac{2}{9}\frac{1}{3}$.

(11) Parimenti vogliamo addizionare $\frac{5}{6}\frac{3}{4}$: dal momento che il numero 2 è il fattore comune di 4 e 6, moltiplica la metà di 4 per 6 o la metà di 6 per 4, o calcola la metà della moltiplicazione di 4 per 6 e otterrai 12 che devi porre sotto una linea di frazione e moltiplicherai il 3 che è sopra il 4 per la metà di 6 e <moltiplicherai il 5> che è sopra il 6, per la metà di 4 e otterrai il 9 e 10 che devi addizionare insieme, risulterà 19. Questo 19 dovrebbe essere posto sopra il 12 posto sotto la linea di frazione, se fosse minore di 12. Ma poiché è maggiore, dividi il 19 per 12, risulterà $\frac{7}{19}$ 1 come unione di $\frac{5}{6}\frac{3}{4}$.

(12) E bada che quando sotto due linee di frazione si pongono numeri che hanno fattori in comune, o dalla cui moltiplicazione non proviene un numero maggiore di dieci, allora per il suddetto insegnamento devi ricondurre tali frazioni ad una sola frazione, e ottenerla in luogo di quelle due stesse frazioni come dimosterò nei paragrafi seguenti. (13) Ma prima porrò nelle tabelle sottostanti due frazioni che devi unire e davanti ad esse porrò la loro unione, e inizierò da $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ che risulta 1, poi seguono $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ che risulta $\frac{5}{6}$ e le altre che sono trascritte nelle seguenti tabelle.

(14) Pertanto, una volta conosciute le suddette unioni delle frazioni, e sia proposto di moltiplicare $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ 11 per $\frac{1}{5}\frac{1}{2}$ 22, moltiplicherai $\frac{5}{6}$ 11 per $\frac{7}{10}$ 22. Similmente se vuoi moltiplicare $\frac{5}{6}\frac{3}{4}$ 12 per $\frac{1}{9}\frac{2}{3}$ 23, addiziona innanzitutto $\frac{3}{4}$ con $\frac{5}{6}$, risulterà $\frac{7}{12}$ 1, cioè $\frac{1\ \ 3}{2\ \ 6}$ 1, che devi addizionare con 12, risulterà $\frac{1\ \ 3}{2\ \ 6}$ 13: similmente addiziona $\frac{2}{3}$ con $\frac{1}{9}$, risulterà $\frac{7}{9}$. Dunque moltiplicherai $\frac{1\ \ 3}{2\ \ 6}$ 13 per $\frac{7}{9}$. E così devi intendere in casi simili.

Parte quarta.

(1) Se vuoi moltiplicare 17 e cinque ottavi e mezzo ottavo e due noni e cinque noni per 28 e quattro undicesimi e tre ottavi di un undicesimo e un quinto e due quinti di un quinto, scrivi i numeri come si vede nel margine e moltiplica 17 per la sua prima parte frazionaria[1805], vale a dire per 8 e addiziona 5, moltiplica tutto questo per 2 e addiziona 1, risulterà 283 che devi moltiplicare per i numeri che sono sotto la seconda linea di frazione, vale a dire per 9, e tutto questo per 5 risulterà 12735. (2) Ora fai la prova se hai moltiplicato in modo corretto.

[1805] Con virgam o virgulam Fibonacci intende il numero sotto la linea di frazione.

Vale a dire moltiplica la prova del sette di 17, che è 3, per la prova di 8, che è 1 e addiziona il 5 che è sopra l'8, la cui prova, vale a dire 1, moltiplicala per 2 e addiziona l'1 che è sopra il 2, risulterà 3 che è la prova di 283 che moltiplica per la prova di 9[1806], risulterà 6 che moltiplica per 5 che è sotto la linea di frazione, risulterà 30, la cui prova, vale a dire 2, è la prova del numer trovato, vale a dire di 12735. (3) Poi moltiplica il 2 che è sopra il 9 per il 5 e addiziona l'1 che è sopra il 5, che moltiplica per 2 che moltiplica per 8 che è sotto la prima linea di frazione, risulterà 176. (4) Da qui calcola così la prova: moltiplica il 2 che è sopra il 9 per 5 e addiziona l'1, risulterà 11, la cui prova, vale a dire 4, moltiplicala per 2, risulterà 8, la cui prova, che è 1, moltiplicala per la prova di 8, risulta 1, e tanto deve essere la prova di 176. E poiché è così, sappiamo che 176 è un risultato corretto. Addizionalo dunque con 12735, risulterà 12911, la cui prova è 3, che risulta dall'addizione delle prove dei numeri addizionati: riportalo dunque sopra il 17. Applicati a moltiplicare nello stesso ordine il 28 per le sue frazioni[1807] e risulterà 63091. Riporta dunque sopra il 28 anche la sua prova similmente, che è 0, e moltiplica 12911 per 63091, dividi per tutti i numeri che sono sotto il 4 della linea di frazione e traccia[1808] la linea di frazione e avrai il prodotto cercato, così nella traccia è mostrato di quel prodotto è la prova che proviene dalla moltiplicazione delle prove riportate per se stesse.

(5) Ancora, se vuoi moltiplicare $\frac{1\ 5\ 1}{2\ 6\ 8}\frac{2\ 2\ 8}{7\ 9\ 10}19$ per $\frac{1\ 2\ 1}{3\ 5\ 7}\frac{5\ 8\ 8}{6\ 8\ 9}$ 23, e moltiplica 19 per le sue frazioni, vale a dire per 10, e addiziona il 3 che è sopra il 10 che si moltiplica per 9 e addiziona il 2 che è sopra il 9, che moltiplica per il 7 e addiziona il 2 che è sopra il 7, risulterà 12175 che moltiplica per 8 che moltiplica per 6 che moltiplica per il 2 che è sotto la seconda linea di frazione, risulterà 1168800 la cui prova per la prova dell'11 è 6. Riporta il 6 e moltiplica l'1 che è sopra l'8 per il 6 e addiziona il 5 che è sopra il 6 che moltiplica per 2 e addiziona l'1 che è sopra il 2, risulterà 23 che moltiplica per il 7 che moltiplica per il 9 che moltiplica per 10 che è sotto la prima linea di frazione, risulterà 14490, la cui prova per 11 è 3. (6) Addiziona, dunque, 14490 con il 1168800 riportato, risulterà 1183290, la cui prova è 9, come si ottiene dall'addizione di 6 e 3, che sono le prove di detti numeri. Moltiplica, dunque, 1183290 per 1070319 che risulta dalla moltiplicazione di 23 per le sue frazioni e la sua prova per 11 è 4. E dividi il risultato per i numeri che sono sotto tutte e quattro le linee di frazioni. Così se vuoi semplificare i fattori comuni che ci sono tra il moltiplicando e il dividendo, calcola $\frac{1}{10}$ di 1183290 e della decima parte calcola la terza parte, risulterà 39443. Similmente

[1806] La prova per 7 di 9 è 2
[1807] Virgulas è brachilogia per frazione
[1808] Apta: vedere meglio

dividi 1064809 per 3, risulterà 354953 che moltiplicherai per 39443 e dividi il prodotto per tutte le suddette frazioni sottratte da $\frac{1\ 0\ 0}{3\ 5\ 10}$, cioè $\frac{1\ 0}{9\ 10}$, e ti applicherai a sistemare le frazioni nell'ordine suddetto, e avrai il prodotto ricercato, come si vede nella traccia. (7) E se vorrai verificare quest'operazione, moltiplica la prova di 39443 per la prova di 354953 e avrai la prova del prodotto ricercato.

Parte Quinta

(1) Se vuoi moltiplicare 21 e $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ per 32 e $\frac{3}{7}$ e $\frac{2}{9}$ e $\frac{1}{8}$, scrive i numeri come si vede a margine, e moltiplica 21 per 3 e addiziona l'1 che è sopra il 3, risulterà 64: moltiplicalo per il 4 e poi per il 5 che sono sotto la linea di frazione oppure, in una sola moltiplicazione, moltiplica 64 per 20, risulterà 1289 sessantesimi, e l'1 che è sopra il 4 che è un quarto e moltiplica il 5 che è sotto la terza linea di frazione e poi per 3 che è sotto la prima, risulterà 15 sessantesimi. (2) Parimenti l'1, che è sopra il 5 che è un quinto, moltiplicalo per il 4 che è sotto la seconda linea di frazione che moltiplica per 3 che è sotto la prima, risulterà 12 sessantesimi: addiziona dunque 1280 e 15 e 12 sessantesimi, risulterà 1307 sessantesimi e tanti sessantesimi ci sono in $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 21, la cui prova per 11 è 9, che si ottiene nell'ordine in cui i numeri devono essere moltiplicati. (3) Similmente calcola le frazioni di $\frac{1}{8}\frac{2}{9}\frac{3}{7}$ 32, vale a dire moltiplica 32 per 7 e addiziona il 3 che sta sopra il 7 poi moltiplica per 9 poi per 8, risulterà 10844 cinquantaquattresimi. (4) Parimenti moltiplica il 2 che sta sopra il 9 per l'8 poi per il 7 risulterà similmente 142 cinquantaquattresimi. Parimenti moltiplica l'1 che è sopra l'8 per il 9, risulterà 9 settantaduesimi che devi moltiplicare per 7, risulterà 63 cinquantaquattresimi che, addizionato con 112 cinquantaquattresimi e con 16341, risulterà 16519 cinquataquattresimi, la cui prova per 11 è 8. Poi moltiplica 1307 per 16519 e dividi il risultato per i seicentocinquantaquattresimi, cioè per tutti i numeri che sono sotto le sei linee di frazione, vale a dire per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{8\ 4\ 5\ 7\ 8\ 9}$ e accorpali, vale a dire di $\frac{10}{40}$ fai $\frac{1\ 0}{2\ 10}$ e di $\frac{10}{28}$ fai $\frac{1}{6}$. E così avrai, come semplificazione della linea di frazione, $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{6\ 7\ 8\ 9\ 10}$. E il risultato della suddetta moltiplicazione è $\frac{5\ 3\ 7\ 5\ 9}{6\ 7\ 8\ 9\ 10}$ 713, come si mostra nella traccia. (5) E ricorda che in simili operazioni giammai devi porre sotto le linee di frazione di un solo lato i nomueri che hanno tra loro fattori in comune, e se si saranno stati proposti da qualcuno, addizionali, vale a dire

riducili in una sola linea di frazione se potrai, o in due, in base alla dottrina che hai <esposta> più sopra[1809] e in base a quegli schemi che sono nelle tabelle scritte precedentemente.

(6) Ma affinché tu lo comprenda meglio, ti proporrò alcune semplificazioni delle linee di frazione. Così se vuoi semplificare [1810]$\frac{1\ 1\ 1}{6\ 4\ 3}$, di $\frac{1\ \ 1}{6\ \ 3}$ fai $\frac{1}{2}$ e di $\frac{1\ \ 1}{4\ \ 2}$ fai $\frac{3}{4}$. E così per $\frac{1\ \ 1\ 2}{10\ 6\ 5}$ otterrai $\frac{2}{8}$, poiché $\frac{1\ \ 2}{10\ 9}$ sono $\frac{1}{2}$ e $\frac{1\ 1}{6\ 2}$ sono $\frac{2}{3}$. Di nuovo per $\frac{1\ 1\ 1}{8\ 4\ 2}$ si ottiene $\frac{7}{8}$ e per $\frac{1\ 1\ 1}{9\ 6\ 2}$ si ottiene $\frac{7}{9}$, poiché $\frac{1\ 1}{6\ 2}$ sono $\frac{2}{3}$ e $\frac{1\ 2}{9\ 3}$ sono $\frac{7}{9}$. E per $\frac{1\ 1\ 1}{8\ 5\ 4}$ si ottiene $\frac{3\ \ 4}{8\ \ 5}$, e per $\frac{1\ \ 1\ 1}{10\ 9\ 3}$ si ottiene $\frac{1\ \ 3}{10\ \ 9}$ e per $\frac{1\ 1\ 1}{8\ 6\ 4}$ si ottiene $\frac{2\ \ 1}{8\ \ 6}$. E per $\frac{3\ \ 1}{8\ \ 6}$ si ottiene $\frac{13}{24}$, cioè $\frac{1\ 3}{3\ 8}$, e se vuoi semplificare $\frac{1\ 1\ 1}{9\ 8\ 6}$, addiziona dapprima $\frac{1}{6}$ con $\frac{1}{9}$, risulterà $\frac{7}{18}$. Poi addiziona $\frac{5\ \ 1}{18\ 8}$, vale a dire moltiplica la metà di 8 per 18, o la metà del 18 per l'8, o calcola la metà della metà della moltiplicazione di 8 per 18 e risulta 72 e qualunque risultato otterrai dalle suddette operazioni, conservalo sotto una qualche linea di frazione in vece del numeratore. Poi, affinché tu abbia il denominatore, moltiplica l'1 che è sopra l'8, per la metà di 18 e il 5 che è sopra il 18 per la metà di 8, risulterà 9 e 20, cioè 29 come denominatore. Ponilo, dunque, sopra il 72 e otterrai $\frac{29}{72}$ per $\frac{1\ 1\ 1}{9\ 8\ 6}$. Oppure altrimenti, trovato il numeratore, che è chiamato 'colonna' da molti, dal momento che è il numero più piccolo che si può dividere perfettamente per 6 e per 8 e per 9, vale a dire 72, calcola di esso $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$, risulterà 12 e 9 e 8, vale a dire 29 come denominatore. E se vuoi ridurre $\frac{29}{72}$ in parti delle parti di 72, dividi 29 per la regola di 72, risulterà $\frac{52}{89}$ la quale frazione devi avere in luogo di $\frac{1\ 1\ 1}{9\ 8\ 6}$.

(7) Parimenti se vuoi semplificare $\frac{1\ \ 1\ 1}{10\ 8\ 6}$, trova il numero più piccolo misurabile 6 e 8 e 10, cioè il numero minore che si divida integralmente per ciascuno di essi, sarà 120: ponilo sotto una linea di frazione e calcola $\frac{1\ \ 1\ 1}{10\ 8\ 6}$ di 120, risulterà 20 e 15 e 12, addizionali insieme, risulterà 47, ponilo sopra la linea di frazione, così $\frac{47}{120}$. E se vuoi ridurre tale frazione in parti delle parti di 120, dividi il 47 per la regola di 120, risulterà $\frac{1\ \ 5\ \ 3}{2\ \ 6\ \ 10}$, la quale linea di frazione la otterrai in luogo di $\frac{1\ \ 1\ 1}{10\ 8\ 6}$. Pertanto affida tutte queste cose tenacemente alla memoria. E così ritorniamo a proposito sui nostri passi.

Sulla moltiplicazione dei numeri integri con tre linee di frazione e due frazioni sotto una sola linea.

[1809] Quam habes superius: che trovi esposta più sopra, che ti è stata esposta precedentemente
[1810] adattare

(1) Se vuoi moltiplicare 23 e due settimni e due terzi di un settimo e due noni e un ottavo di un nono e un quinto e due quinti di un quinto per 32 e cinque tredicesimi e un quarto di un terzo di un decimo e tre decimi e due quinti di un decimo e cinque settimi decimi e mezzo settimo di un decimo, poni i numeri come si vede in margine e moltiplica 23 per la sua prima frazione vale a dire per 7 e addiziona 2 che moltiplica per 3 e addiziona 2 che è sopra il 3 risulterà 491 che moltiplica per 9 che moltiplica per 8 poi per 5 poi per 5 che sono sotto le due restanti linee di frazione, risulterà 883800, la cui prova per la prova dell'11 è 5. (2) Parimenti moltiplica il 2 che sta sopra il 9 per l'8 che sta sotto la stessa linea di frazione e addiziona l'1 che è sopra l'8 risulterà 17 che devi moltiplicare per 5 che per 5 che sta sotto la terza linea di frazione, risulterà 425, che devi moltiplicare per 3, poi per 7 che sta sotto la prima linea di frazione, risulterà 8925, la cui prova è 4. Dopo di ciò moltiplica l'1, che è sopra il 5, per il 5 che sta sotto dietro, e addiziona il 2, risulterà 7, che devi moltiplicare per 8, poi per 9, poi per 7, poi per 7 che sta sotto la seconda e la prima linea di frazione, risulterà 10584, la cui prova è 2. (3) Addiziona innanzitutto le tre prove calcolate, vale a dire 7 e 4 e 2, risulterà 11, la cui prova, che è 0, conservala e aggiungila dopo i tre numeri calcolati, risulterà 903300, la cui prova è 0 che hai conservato, la quale prova hai ricercato nel suddetto numero così: diviso dapprima il 90, vale a dire il numero formato dalle ultime due cifre per 11, resta 2, che, unito con il 3 che è in quarto grado, determina 23 che, diviso per 11, dà come resto 1. Questounito con il 3 di terzo grado, realizza 13. Questo, diviso per 11, dà come resto 2. Questo, unito con lo 0 di secondo grado, darà come risultato 20, che, diviso per 11, dà come resto 9. Questo, unito con il 9 di primo grado, realizza 99. Questo diviso per 11, dà come resto 0 come è necessario. (4) E questo è il metodo di cercare le prove nei numeri. Riporta, dunque, 903309 e la sua prova[1811] sopra il 23. Poi moltiplica 32 per le sue frazioni nell'ordine in cui hai moltiplicato 23 per le sue, risulterà 2923156. Riportalo con la loro prova, che sarà 5, sopra il 32. E moltiplica 903309 per 2923156 e dividi per tutti i numeri che sono sotto le linee di frazione, ma innanzitutto, in virtù della semplificazione che può essere fatta, dividi 903369 per 3, risulterà 301103. E dividi 2025156 per il 4, risulterà 730789 che devi moltiplicare per 301103 e cancella dalla divisione il 3 che è sotto la prima delle superiori e il 4 che è sotto la prima linea di frazione delle inferiori e i restanti numeri, adattali sotto una linea di frazione, la quale adattazione è $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{2\ 7\ 9\ 10\ 10\ 10\ 10\ 13\ 17}$. E così otterrai il prodotto ricercato come si vede nella traccia. E poiché dai ottenuto questo prodotto dalla divisione del numero generato dalla moltiplicazione di 301103 per 730789, devi la prova di questo prodotto dalla moltiplicazione

[1811] Proba

della prova di 301103, che è 0, per la prova di 730789 che è 4. Per questo la prova del suddetto prodotto è 0, poiché la moltiplicazione di 0 per 4 risulta 0.

Sullo stesso argomento con tre frazioni sotto una sola linea.

(1) Pariment se tu volessi porre tre frazioni sotto una sola linea come in quella nella quale si pone la moltiplicazione di $\frac{1\,2\,1}{3\,5\,5}\ \frac{1\,2\,3}{2\,9\,10}\ \frac{1\,1\,5}{2\,7\,17}$ 11 per $\frac{2\,5\,1}{3\,6\,7}\ \frac{1\,2\,8}{5\,7\,9}\ \frac{1\,3\,5}{2\,8\,10}$ 22, una volta scritta la traccia, moltiplicherai l'11 per la sua prima frazione, risulterà 2705, che devi moltiplicare per tutti i numeri che sono sotto le altre due linee di frazione, risulterà 35517500, che devi conservare. E moltiplica il 3 che sta sopra il 10 della seconda linea di frazione per il 9 e addiziona il 2 che devi moltiplicare per 2 e addiziona l'1, risulterà 59 che devi moltiplicare per i numeri che sono sotto le altre due linee di frazione, vale a dire sotto la terza e sotto la prima, risulterà 1053150 che devi conservare. Poi calcola il numero della terza frazione, vale a dire moltiplica l'1 che è sopra il 5 per l'altro 5 che è dietro di esso e addiziona il 2 che devi moltiplicare per 2, e addiziona 1, risulterà 22 che devi moltiplicare per tutti i numeri che sono sotto le altre due linee di frazione, vale a dire sotto la seconda e sotto la prima, risulterà 942480: addiziona dunque 942480 con 1053150 e con 36547500, risulterà 38513139, che devi porre sopra l'11 e le sue linee di frazione. Poi moltiplica 22 per le sue frazioni, nello stesso modo in cui hai moltiplicato l'11 per le sue frazioni, risulterà nel prodotto 145288710, che devi porre sopra il 22 e le sue frazioni, e moltiplica 38513130 per 145288710, e dividi per tutte le frazioni che sono sotto tutte le linee di frazione, e otterrai il risultato della suddetta moltiplicazione. Infatti se vorrai semplificare ciò che di lì può essere semplificato, dividi 38513190 per il 10 che è sotto la seconda linea di frazione nel lato superiore per il fatto che può essere fatto integralmente, risulterà 3851313 che devi dividere per il 3 che sta sotto la terza linea di frazione del numero superiore, risulterà 1283771 che conserverai per il fatto che non può essere diviso per un numero esistente sotto una delle sei linee di frazione scritte precedentemente, e i restanti dividili per 3, e non per 10, nel quale modo li hai divisi. Poi dividi 14528871 per il 10 che sta sotto la prima linea di frazione del numero inferiore e moltiplica per 7 e per 9 che stanno sotto la seconda linea di frazione: poiché per essi si possono dividere perfettamente, risulterà 230617 che devi moltiplicare per 1283771, risulterà 296059416707 che devi dividere per tutti gli altri numeri che stanno sotto le linee di frazione scritte precedentemente, vale a dire per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{2\ 2\ 2\ 3\ 5\ 5\ 6\ 6\ 7\ 7\ 8\ 9\ 17}$ che devi adattare in base al metodo di adattazione descritto precedentemente, risulterà $\frac{1\ 2\ 1\ 0\ 1\ 3\ 9\ 5\ 0\ 4}{2\ 7\ 7\ 8\ 9\ 9\ 10\ 10\ 10\ 17}$ 274 come risultato ricercato della suddetta moltiplicazione.

Fine della quinta parte del sesto capitolo.

Parte sesta: la moltiplicazione delle frazioni senza interi.

Se vorrai moltiplicare $\frac{1}{2}$ per $\frac{1}{4}$, moltiplica l'1 che è sopra il 3, per l'1 che è sopra il 4, risulterà 1 che devi dividere per 3 e per 4 che sono sotto le linee di frazione, cioè per $\frac{10}{24}$ o per $\frac{10}{26}$, risulterà $\frac{10}{24}$ o $\frac{10}{26}$, cioè una parte della dodicesima parte di un intero: di lì potrai capire quanto è se moltiplicherai $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{4}$, quanto se calcolerai $\frac{10}{34}$ o $\frac{10}{42}$, e questo stesso capirai di tutte le frazioni, poiché la moltiplicazione di una frazione qualunque per una frazione qualunque realizza quanto il calcolo di una di esse dall'altra. Poiché quando si moltiplica 1 per $\frac{1}{4}$, si calcola ancora una volta $\frac{1}{4}$. Dunque quando si moltiplica un terzo per un quarto, allora si calcola un terzo di un quarto e così dalla moltiplicazione di un terzo per un quarto proviene un dodicesimo.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti se tu volessi moltiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{3}{4}$, moltiplica il 2 che è sopra il 3 per il 3 che sta sopra il 4, risulterà 6 che devi dividere per 3 e per 4 che sono sotto le linee di frazione, risulterà $\frac{1}{2}$ di un intero.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti se volessi moltiplicare $\frac{3}{7}$ per $\frac{4}{9}$, moltiplica il 3 per il 4 che stanno sopra le linee di frazione, risulterà 12 che devi dividere per 7 e per 9 che sono sotto le linee di frazione, risulterà $\frac{5\ 1}{7\ 9}$ di un solo intero, cioè la dodicesima parte di sessantatre parti di un intero che sono quattro parti di 21 di un intero. E questo lo trovi in due modi diversi. (2) Certo il primo metodo è che dividi 12 e 63 per 3, per il fatto che raccoglie integralmente questa divisione uno qualunque di essi, risulteranno 4 e 21: di lì se dividerai 4 per 21, risulterà $\frac{4}{21}$ di un intero. (3) O altrimenti dovresti dividere 12 per $\frac{10}{79}$, dividi prima 12 per 3, risulterà 4. Similmente devi dividere 9 per 3, risulterà 3: anche per esso e per il 7 devi dividere il 4, risulterà $\frac{1\ 3}{3\ 7}$, questa è la settima parte di un intero, e sopra la terza parte di quella settima parte, questo è tanto quanto quattro parti di 21.

Sullo stesso argomento con tre frazioni sotto una sola linea di frazione.

(1) Se volessi moltiplicare $\frac{14}{27}$ per $\frac{23}{35}$, scrivi la traccia come qui si mostra, e moltiplicherai il 4 che sta sopra il 7 della prima linea di frazione precedente per il 2 che sta sotto la stessa linea di frazione e addiziona l'1 che sta sopra il 2, risulterà il 9 che devi porre sopra $\frac{14}{27}$, similmente moltiplica il 3 che sta sopra il 5 della linea di frazione posteriore per il 3 che sta sotto la stessa linea di frazione e addiziona il 2 che sta sopra lo stesso 3, risulterà 11, che devi porre sopra il $\frac{22}{35}$, e moltiplicherai il 9 per l'11, risulterà 99, che devi dividere per 2 e per 7 e per 3 e per 5 che sono sotto le linee di frazione, risulterà $\frac{5\ 4}{7\ 10}$ di un solo intero.

Sullo stesso argomento con tre frazioni sotto una sola linea di frazione.

(1) Parimenti se volessi moltiplicare tre frazioni sotto una sola linea per tre frazioni che sono sotto altre, così diciamo $\frac{153}{2811}$ per $\frac{147}{3913}$, scrivi la traccia e moltiplicherai il 3 che è sopra l'11 per la sua frazione, cioè per 8 e addiziona il 5 che <devi moltiplicare> per il 2 e addiziona l'1, risulterà 59, che devi porre sopra il $\frac{153}{2811}$. Poi moltiplica il 7 che è sopra il 13 per la sua frazione, cioè per 9 e addiziona il 4 che <devi moltiplicare> per 3 e addiziona 1, risulterà 202, che devi porre sopra il $\frac{147}{3913}$. E moltiplica il 59 per il 202 e dividi per tutti i numeri che sono sotto entrambe le linee di frazione, il cui accorpamento è $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{6\ 8\ 9\ 11\ 18}$, risulterà $\frac{2\ 2\ 5\ 5\ 2}{6\ 8\ 9\ 11\ 18}$.

Sullo stesso argomento con due linee di frazione.

(1) Se vorrai moltiplicare $\frac{1}{4}\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{6}\frac{2}{5}$, scrivi la traccia come qui si mostra, e moltiplica il 2 che sta sopra il 3 per il 4 che sta sotto la seconda linea di frazione, risulterà 8. Parimenti moltiplica l'1 che sta sopra lo stesso 4 per il 3 che sta sotto la prima linea di frazione, risulterà 3 che devi addizionare con l'8, risulterà 11 che devi porre sopra il $\frac{1\ 2}{4\ 3}$, poi passa a $\frac{1}{6}\frac{3}{5}$ e moltiplica il 3 che sta sopra il 5 per il 6 e l'1 che è sopra il 6 per il 5 e addiziona insieme, risulterà 23 che devi porre sopra $\frac{1}{6}\frac{3}{5}$ e moltiplica 11 per 23, risulterà 253 che devi dividere per tutti i numeri che stanno sotto le linee di frazione.

Sullo stesso argomento con due frazioni sotto una sola <linea>.

(1) E se vorrai porre due frazioni sotto una sola linea come $\frac{13}{48}\frac{14}{27}$ con $\frac{12}{611}\frac{15}{39}$, scrivi la traccia, e moltiplica il 4 che sta sopra il 7 per la sua frazione cioè per 2 e addiziona l'1, risulterà 9, che devi moltiplicare per 8 e per 4, che sono sotto la seconda linea dello stesso lato, risulterà 288 che conserva e moltiplica il 3 che sta sopra l'8 per la sua linea di frazione, vale a dire per 4 e addiziona l'1, risulterà 13 che devi moltiplicare per 2 e per 7 che stanno sotto la prima linea di frazione, risulterà 182, che devi addizionare con 288, risulterà 470, che devi porre sopra le stesse frazioni superiori e moltiplica similmente nello stesso modo le altre due frazioni inferiori e otterrai, nel moltiplicarli, 1407 che devi porre sopra le linee di frazione. E moltiplica 470 per 1407 e dividi per tutti i numeri che sono sotto le linee di frazione e otterrai la moltiplicazione ricercata. Tuttavia se vuoi poi semplificare di lì, vale a dire dividi 1407 per 7, risulterà 201 che devi dividere per 3, risulterà 67 che devi moltiplicare per 407, risulterà 31490 che devi dividere per tutti i numeri che sono sotto le linee tranne che per 7 e per 3 per cui devi dividere 1407. E adatterai le frazioni suddette sotto una sola linea, risulterà $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 9}{6\ \ 8\ \ 9\ \ 11}$: infatti puoi moltiplicare attraverso questo metodo, se sotto le linee di frazioni saranno poste tre frazioni o di più.

Tre frazioni.

(1) Se vorrai moltiplicare $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ per $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{7}$, scrivi la traccia e comincia a moltiplicare le frazioni superiori, vale a dire $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ fra loro così: moltiplicherai 1, che è sopra il 3 per il 4 che è sotto la seconda linea di frazione che <moltiplicherai> per 5 che sta sotto la terza, risulterà 20. E moltiplicherai l'1 che è sopra il 4 della seconda linea di frazione per il 5 che sta sotto la terza e per il 3 che sta sotto la prima, risulterà 15. E moltiplicherai l'1 che è sopra il 5 della terza linea di frazione per il 4 che sta sotto la seconda e per il 3 che sta sotto la prima, risulterà 12 che devi addizionare con il 15 e con il 20 del riporto, risulterà 47 che devi porre sopra $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ nella traccia. Dopo di ciò farai similmente lo stesso di $\frac{1}{7}\frac{1}{6}\frac{2}{5}$ e otterrai per il loro prodotto 149 che devi porre sopra $\frac{1}{7}\frac{1}{6}\frac{2}{5}$. Moltiplicherai 47 per 149, risulterà 7003 che devi dividere per tutte le frazioni e adattali, risulterà $\frac{1\ \ 1\ \ 5\ \ 5\ \ 5}{2\ \ 7\ \ 9\ \ 10\ \ 10}$.

Sullo stesso argomento con due frazioni sotto una sola linea.

(1) Parimenti se vorrai porre due frazioni sotto una sola linea, come $\frac{1\ \ 6}{2\ \ 11}$ e $\frac{2\ \ 3}{3\ \ 10}$ e $\frac{32}{49}$ con $\frac{17}{213}$ e $\frac{12}{27}$ e $\frac{41}{58}$, scrivi la traccia e moltiplica le prime tre frazioni fra loro stesse, cioèil 6, che sta

sopra l’11, per il 2 e addiziona l’1, risulterà 13 che devi moltiplicare per 10 e per 3 che sta sotto la seconda linea di frazione, tutto questo moltiplicalo per 9 e per 4 che sta sotto la terza linea di frazione, risulterà 14040 che devi riportare. E moltiplica il 3 che sta sopra il 10 della seconda linea di frazione per il 3 che sta sotto la linea di frazione dopo di esso e addizione il 2 che sta sopra tale 3, risulterà 11 che devi moltiplicare per 9 e per 4 che sta sotto la terza linea di frazione e per 2 e per 11 che stanno sotto la prima, risulterà 8712 che devi conservare e moltiplica il 2 che sta sopra il 9 della terza linea di frazione per 4 e addiziona 3, risulterà 11 che devi moltiplicare per 3 e per 10 che stanno sotto la secondalinea e per 2 e per 11 che stanno sotto la prima, risulterà 7260 che devi addizionare con 8712 e con il 14040 riportato, risulterà 30012 che devi porre in alto nella traccia. Poi moltiplica fra loro le tre frazioni inferiori e il loro prodotto sarà 27914 che devi porre sopra tali frazioni e moltiplica 30012 per 27914 e dividi il prodotto della moltiplicazione per tutte le parti frazionarie che stanno sotto le linee di frazione e otterrai la moltiplicazione richiesta. Oppure se di lì vorrai semplificare opererai in base al metodo che abbiamo dimostrato sopra, e otterrai per la moltiplicazione richiesta $\frac{2\ 1\ 4\ 2\ 6\ 8\ 10\ 7}{3\ 7\ 8\ 9\ 10\ 10\ 11\ 13}$ 1. Se, invero, i tre denominatori sono posti sotto una sola linea di frazione, o se più linee di frazione similmente saranno poste con gli interi, o secondo gli interi, potrai accuratamente fare tutti i calcoli attraverso il metodo descritto sopra.

Parte settima: la moltiplicazione dei numeri e delle frazioni la cui linea di frazione termina con un cerchietto.

(1) Se vuoi moltiplicare 11 e quattro noni e cinque ottavi di quattro noni e due terzi e cinque ottavi di quattro noni, che si scrive così $\frac{2\ 5\ 4}{3\ 8\ 9}\circ$ 11, per 22 e sei settimi di otto noni di nove decimi, che si scrive così $\circ\frac{6\ 8\ 9}{7\ 9\ 10}$ 22, scrivi la traccia e moltiplica 11 per la sua parte frazionaria. La quale moltiplicazione è così: si moltiplica 11 per 9 e si addiziona il 4 e sono 103 noni che si moltiplica per 8 e sono 824 settantaduesimi, ai quali si addiziona la moltiplicazione di 5 per 4 che sono sopra la linea di frazione, risulterà 844 settantaduesimi. Poiché quando si moltiplica il 4 che sta sopra il 9 per l’8 risulta il numero la cui proporzione al numero risultante da 9 per 8 è come la proporzione di 4 a 9. Dunque 32 è $\frac{4}{9}$ di 72.

Parimenti, la proporzione del numero risultante da 5 moltiplicato per 4, vale a dire 20, con il numero risultante da 8 moltiplicato per 4, vale a dire 32, è come la proporzione fra 5 e 8. Dunque il 20 che proviene da 5 per 4 è cinque ottavi da quattro noni di 72, e così è 20 settantaduesimi. Poi si moltiplica 844 per 3 e si addizione da sopra il 40 che proviene dalla moltiplicazione di 2 per 5 per 4 che sono sopra la linea di frazione, risulterà 2572 dodicesimi sesti decimi. Riportalo sopra l'11, con la loro prova che si calcola nello stesso ordine, vale a dire si moltiplica la prova dell'11 per la prova del 9 e si addiziona il 4 e sono 103 noni che si moltiplica per 8 e sono 824 settantaduesimi. Ai quali si addiziona la moltiplicazione di 5 per 4 che sta sopra la linea di frazione, risulterà 844 settantaduesimi. Poiché quando si moltiplica il 4 che sta sopra il 9 per l'8 risulta un numero la cui proporzione con il numero risultante da 9 moltiplicato per 8 è come la proporzione di 4 a 9, dunque 32 è $\frac{4}{9}$ di 72. Parimenti la proporzione del numero risultante da 5 moltiplicato per 4, vale a dire 20, con il numero risultante da 8 moltiplicato per 4, vale a dire 32, è come la proporzione di 5 con 8. Dunque il 20 che si genera da 5 per 4 è cinque ottavi di quattro noni di 72, e così è 20 settantaduesimi, poi si moltiplica 844 per 3 e si addiziona il 40 che risulta dalla moltiplicazione di 2 per 5 per 4 che sta sopra la linea di frazione, risulterà 2572 dodicesimi sesti decimi, riportali sopra l'11 con la loro prova che si calcola nello stesso ordine, vale a dire si moltiplica la prova di 11 per la prova del nove e si addiziona il 4 la cui prova la si moltiplica per 8 e si addiziona la moltiplicazione di 5 per 4 la cui prova si moltiplica per 3 e si addiziona la moltiplicazione di 2 per 5 moltiplicato per 4, la prova del cui prodotto è la prova di 2572 ed è 9, per la prova dell'11. Poi moltiplica il 22 per la sua linea di frazione, cosa che avviene così: si moltiplica il 22 per il 10, il quale prodotto si moltiplica per il 9 poi per il 7, risulterà 13860 seicentotrentesimi, a cui si addiziona la moltiplicazione di 6 per 8, che per 9 che sta sopra la linea di frazione, vale a dire 432, risulterà 14292 seicentotrentesimi. Riportalo sopra il 22 con la sua prova che è 3, e moltiplica 2572 per 14292 e dividi il prodotto per tutti i denominatori che sono sotto entrambe le linee di frazione, poi semplificherai ciò che si può semplificare, e otterrai il prodotto della moltiplicazione assegnata $\frac{10\ \ 11}{35\ \ 79}270$.

E se vorrai ridurre $\frac{2\ 5\ 4}{3\ 8\ 9}{}^{\circ}$ nelle parti di un solo numero, ti mostrerò come farlo in due modi. Moltiplica innanzitutto il 9 per l'8 poi per il 3, risulterà 216, di questo fai 'colonna' e calcola di esso $\frac{4}{9}$, risulterà 96 di cui calcola i $\frac{5}{8}$, risulterà 60, di cui calcola i $\frac{2}{3}$, risulterà 40. Addiziona, pertanto, 96 e 60 e 40, risulterà 196 che devi dividere per 216, risulterà $\frac{49}{54}$, cioè $\frac{18}{59}$, o altrimenti moltiplica il 4 che sta sopra il 9 per 8 e addiziona la moltiplicazione di 5 per 4, risulterà 52 che devi moltiplicare per 3 e addiziona la moltiplicazione di 2 per 5 per 4, vale a dire 40, risulterà similmente 196 per la quarta parte di 8 che sta sotto la linea di frazione e per 3 e per 9, risulterà similmente $\frac{13}{69}$.

Parimenti se vorrai ridurre $\circ\frac{6\ 8\ 9}{7\ 9\ 10}$ nelle parti di un solo numero intero, moltiplica il 6 per l'8 poi per il 9, vale a dire per i numeratori, risulterà 432, che devi dividere per i denominatori e semplificherai ciò che può essere semplificato, risulterà $\frac{24}{35}$, cioè $\frac{44}{57}$. E se vuoi moltiplicare $\frac{2\ 5\ 4}{3\ 8\ 9}\circ$ per $\circ\frac{6\ 8\ 9}{7\ 9\ 10}$, disponili come si vede in margine e moltiplica il 196 trovato, vale a dire il numero della linea di frazione superiore, per 432, vale a dire per il numero della linea di frazione inferiore, e dividi il prodotto per tuttii denominatori di entrambe e semplifica, risulterà $\frac{35}{59}$.

Se vuoi moltiplicare 11 e sette decimi e quattro noni di sette decimi e tre ottavi di quattro noni di sette decimi e cinque undicesimi e cinque settimi e cinque undicesimi e tre quarti di cinque sesti di cinque undicesimi per 22 e tre ottavi di quattro noni di sette decimi e tre quarti di cinque sesti di cinque undicesimi, scrivi ciò come vedi in margine e moltiplica 11 per 10 e addiziona il 7 che moltiplica per 9 e addiziona quattro settimi che moltiplica per 8 e addiziona 3 quarti per 7, risulterà 8732 che moltiplica per 11 poi per 6 poi per 4 che stanno sotto l'altra linea di frazione, risulterà 2305248. E moltiplica il 5 che sta sopra l'11 per il 6 e addiziona cinque quinti per 4 e addiziona tre cinque quinti vale a dire la moltiplicazione dei numeri che sono sopra la linea di frazione, risulterà 295 che devi moltiplicare per i denominatori della prima linea di frazione, vale a dire per 8 poi per 9 poi per 10, risulterà 212400 che devi addizionare con l'altro numero trovato, risulterà 2517648, che devi porre sopra l'11 la cui prova per 7 è 0 e moltiplica il 22 per le sue frazioni, vale a dire per 10, poi per 9, poi per 8 e addiziona la moltiplicazione di 3 per 4 moltiplicato per 7, vale a dire 84, risulterà 15924 che devi moltiplicare per .. poi per 6, poi per 4, risulterà 4203936. Con questi addiziona la moltiplicazione del numero della seconda frazione per i denominatori della prima linea di frazione, vale a dire di 75 per 8 poi per 9 poi per... Infatti si genera da tre moltiplicato per 5 poi per 5 che sta al numeratore, risulterà 54000 che devi addizionare con 4203936, risulterà 4257936 che riporta sopra il 22 la cui prova è... Poi moltiplica il numero posto sopra l'11 per il numero posto sopra il 22 e dividi il prodotto per tutti i numeri che sono al denominatore e semplifica ciò che si deve semplificare e otterrai il risultato cercato come si mostra nella traccia.

Parte settima del sesto capitolo sulla moltiplicazioni delle parti dei numeri con le frazioni.

(1) Se vorrai moltiplicare $\frac{3}{5}$ di $\frac{4}{7}$ 29, che si scrive così $\frac{4}{7}$ 29 $\frac{3}{5}$, con $\frac{6}{11}$ di $\frac{2}{3}$ 38, che si scrive così $\frac{2}{3}$ 38 $\frac{6}{11}$, scrivi la traccia come qui si mostra. E moltiplica il 29 per la sua frazione, quella che è dietro di esso, vale a dire per 3 e addiziona il 2, risulterà 116 che devi moltiplicare per 6 che sta a denominatore dell'11, risulterà ... che devi porre sopra $\frac{2}{3}$ 38 $\frac{6}{11}$. E moltiplica 621 per la terza parte di 696 e dividi per tutte le restanti frazioni di entrambi i lati, vale a dire per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{5\ \ 7\ \ 11}$ e otterrai, come prodotto della moltiplicazione cercata, $\frac{2\ \ 2\ \ 2}{5\ \ 7\ \ 11}$ 374.

Sullo stesso argomento.

Parimenti se vorrai moltiplicare $\frac{1}{5}\frac{3}{4}$ di $\frac{2}{7}\frac{5}{9}$ 33, che si scrive così $\frac{25}{79}$ 33 $\frac{13}{54}$, per $\frac{13}{47}$ di $\frac{5}{6}$ 244, che si scrive così $\frac{1}{11}\frac{5}{6}$ 244 $\frac{13}{47}$, scrivili come si vede in questo margine e moltiplica il 33 per la frazione che è dietro, vale a dire per 9 e addiziona il 5 che devi moltiplicare per 7 e addiziona il 2, risulterà 2116, poi moltiplica il 3 che sta sopra il 4 per il 5 e per l'1 che sta sopra il 5, addiziona il 4, risulterà 19 che è il numero di entrambe le frazioni che stanno davanti allo stesso 33, moltiplica 2116 per 19, risulterà 40204, che devi porre sopra il $\frac{25}{79}$ 33 $\frac{13}{54}$ la cui prova per 13, nell'ordine in cui abbiamo moltiplicato, è stata calcolata come 8, questo 8 ponilo sopra il 40204 nella traccia. Parimenti moltiplica il 244 per la frazione che è dietro di esso, vale a dire per 6 e addiziona il 5 che moltiplica per 11 e addiziona la moltiplicazione di 1 che è sopra l'11 per il 6, risulterà 16165 che devi moltiplicare per il numero della frazione che è davanti a tale 244, vale a dire per 13 che risulta dalla moltiplicazione del 3 che sta sopra il 7 per il 4, una volta addizionato l'1 che sta sopra il 4, risulterà 210145 che devi porre sopra il 244 e le sue frazioni. E sopra di esso poni il 6, che è la sua prova per 13, e moltiplica il 40304 per 210145 e dividi il prodotto della moltiplicazione per tutti i denominatori che sono sotto tutte le linee di frazione. E così otterrai la moltiplicazione ricercata. Ma affinché si tracci il metodo di semplificazione in questa moltiplicazione dividi 40204 per il 4 che sta sotto una sola delle frazioni scritte precedentemente, risulterà 10051 che devi riportare dal momento che di essa non può essere semplificato nulla di più. Parimenti dividi 210145 per il 5 che sta sotto un'altra linea di frazione, risulterà 42029 per il quale devi moltiplicare 10051 e dividi per tutte le altre frazioni, risulterà $\frac{2\ \ 6\ \ 0\ \ 1\ \ 4\ \ 4}{3\ \ 7\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 11}$ 3628.

Sullo stesso argomento con più frazioni.

(1) Parimenti se vorrai moltiplicare $\frac{2\ 3\ 5}{7\ 8\ 9}$ di $\frac{1}{13}\frac{2}{11}\frac{3}{5}$ 42 per $\frac{1}{9}\frac{1}{8}\frac{5}{7}$ di $\frac{2\ 0\ 3}{3\ 5\ 11}$ 23, scrivi la traccia e inizia a moltiplicare il 42 per le sue frazioni che stanno dietro di esso, risulterà 30644 e calcola $\frac{2\ 3\ 5}{7\ 8\ 9}$ e trova il numero delle stesse frazioni, vale a dire moltiplica il 5 che sta sopra il 9 per l'8 e addiziona il 3 che moltiplica per 7 e addiziona il 2, risulterà 303 per il quale moltiplica 30644, risulterà 928..132, poi affinché tu trovi il numero del lato inferiore, moltiplicherai 331 per la sua frazione che è dietro, ovvero per 11 e addiziona il 3 che sta sopra tale 11 che devi moltiplicare per 5 e per 3 che sta sotto la stessa linea di frazione e sopra addiziona il 2 che sta sopra lo stesso 3, risulterà 54662 e troverai il numero di $\frac{1}{9}\frac{1}{8}\frac{5}{7}$ che è 479 per il quale moltiplica 54662, risulterà 26183098 che devi porre sopra il 331 e le sue frazioni e moltiplica 9285132 per 26183098 e dividi per tutti i denominatori di tutte le frazioni e semplifica di lì ciò che può essere semplificato e otterrai per la moltiplicazione richiesta come qui si mostra $\frac{1\ 5\ 6\ 2\ 7\ 7\ 7\ 4\ 3\ 7}{2\ 7\ 7\ 9\ 9\ 10\ 10\ 11\ 11\ 13}$ 8112.

Il Capitolo Settimo

[R, 44v, N55r]

Capitulum septimum de aditione[1812] *et extractione* [S, 31 r] *et divisione numerorum cum ruptis et de reductione plurium*[1813] *partium*[1814] *in singulis partibus*[1815].

(1) Septimum itaque capitulum in partes sex dividimus.

In prima quarum ad[/N, 55v]dictionem[1816] unius virgule[1817] cum alia, nec non extractionem[1818] unius virgule[1819] de alia demonstrabimus et divisionem[1820] unius virgule[1821] per aliam.[V, 26r]

In secunda addictionem[1822] et[1823] extractionem duarum virgularum cum duabus, et de divisione[1824] earum ad invicem.

In tertia divisionem integrorum numerorum[1825] per integros et ruptos et eorum[1826] contrarium.

In quarta additionem[1827] et extractionem et divisionem integrorum numerorum cum ruptis cum integris et ruptis.

In quinta autem addictationes extractiones seu divisiones partium numerorum cum ruptis edocebimus[1828].

In ultima quoque reductiones plurium partium in singulis partibus ostendemus.

Pars Prima

De aditione[1829]$\frac{1}{3}$ *cum* $\frac{1}{4}$.[1830]

[1812] Aditione FF_1, additione RN, addictione AS, om. V
[1813] Plurium F F_1RAS, principatum N, om. V
[1814] partium A F_1RN, Parcium F, om. V
[1815] Capitulum-partibus: Incipit capitulum-partibus ASN F_1, Explicit capitulum sextum incipit-partibus R, om. V
[1816] Addictionem F F_1RSN, additionem AV
[1817] Virgule F F_1RSNV, virge A
[1818] Extractionem FRSAV F_1, extractione N
[1819] Virgule F F_1RSV, virge AN
[1820] Divisionem F_1FRSAV, divisione N
[1821] Virgule F F_1RNV, virge AS
[1822] Addictionem FARV F_1, additionem SN
[1823] Et FARSV, om. N F_1
[1824] De divisione F F_1SNV, divisionem AR
[1825] Integrorum numerorum FASNV F_1, numerorum integrorum R
[1826] Eorum FRSN, earum A F_1V
[1827] Additionem F F_1RSN, addictionem AV
[1828] In quinta-edocebimus F F_1, In quinta autem addictiones-edocebimus V, In quinta autem additionem et divisionem et extractionem-edocebimus N, In quinta autem divisiones et extractiones seu divisionem-edocebimus R, In quinta autem addictationes seu-edocebimus S, *om.* A
[1829] Aditione FV, additiones N, adictione R F_1, addictione AS
[1830] Pars Prima-$\frac{1}{4}$: de-$\frac{1}{4}$incipit pars prima S, de-$\frac{1}{4}$ F F_1ARN, om. V

(1) Si volueris addere $\frac{1}{3}$ cum $\frac{1}{4}$, hoc te[1831] dupliciter facere docemus: primum quidem secundum vulgi modum[1832]. Invenias in quo numero reperiatur $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$, qui numerus sic invenitur: multiplica 3 per 4, que sunt sub virgulis[1833], erunt 12, in [F, f.27r] quibus reperiuntur $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$; et ideo accipe tertiam[1834] partem eorum, que est 4, et quartam partem, que est 3; et adde ea insimul, erunt 7. Que divide per 12, exibunt $\frac{7}{12}$, hoc est[1835] septem partes de[1836] duodecim partibus unius integri. [F_1 45v; B, 64] Item aliter describe $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ in hunc modum, et multiplica 1, quod est super 3 per[1837] 4, erunt 4 que pone super $\frac{1}{3}$, et 1, quod est super 4, multiplica[1838] per 3, erunt 3 que pone super $\frac{1}{4}$[1839] , et adde ea insimul, erunt 7, que divide per 3 et per 4 que sunt sub virgulis, hoc est per 12, exibunt similiter $\frac{7}{12}$ pro eorum iunctione: et scias quia tale est addere $\frac{1}{3}$ cum $\frac{1}{4}$, quale est dicere[1840] $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$,[1841] que partes sunt unius integri: sunt enim $\frac{7}{12}$ unius integri; et sic intelligas de omnibus ruptorum additationibus[1842].

De extratione $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$.[1843]

(1) Et[1844] si volueris $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$ extrahere, tria que sunt super[1845] $\frac{1}{4}$, hoc est quartam de 12, extrahe de 4 que sunt super[1846] $\frac{1}{3}$, hoc est de[1847] tertia de 12, remanebit 1; quod divide per 12 inventa, vel per 3 et per 4 que sunt sub virgis[1848], exibit pro residuo dicte extractionis $\frac{1}{12}$, hoc

[1831] Te F F_1ANV, om. R, tibi S
[1832] Modum FRSNV F_1, *om.* A
[1833] Sunt-virgulis F F_1RSNV, sub virgulis sunt A
[1834] Tertiam FRSNVA, tertia F_1
[1835] Est F F_1RSNV, *om.* A
[1836] partes de ARSV F_1, Partes FN,
[1837] per F F_1ARSN, erunt V
[1838] multiplica FASNV F_1, om. R
[1839] $\frac{1}{4}$F F_1ARSN, 4 V
[1840] Dicere FARSN F_1, addere V
[1841] $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ F F_1ASN, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$ R, $\frac{1}{4}$ cum $\frac{1}{3}$
[1842] Additationibus F F_1SNV, addictationibus R, addictionibus A
[1843] De- $\frac{1}{3}$ FRS, om. ANV
[1844] Et FRSAN, Item V
[1845] Super FNRSV, om. A
[1846] Super FNRSV, om. A
[1847] De FARSV, om. N
[1848] Virgis FARSN, virgulis V

est $\frac{1\ 0}{2\ 6}$[1849]. Et si[1850] $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{4}$ dividere vis, divide 4 que sunt super $\frac{1}{3}$ per 3, et habebis[1851] $\frac{1}{3}$ 1[1852] pro eo quod contigit integre[1853] parti.

(2) Verbi gratia, proportio de $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{4}$ est sicut proportio duodecupli de $\frac{1}{3}$ ad duodecuplum[1854] de $\frac{1}{4}$, hoc est sicut 4 est ad 3, ita $\frac{1}{3}$ est ad $\frac{1}{4}$[1855]. Quare divisio $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{4}$ provenit illud quod ex divisis 4 per 3: vel aliter, cum dicitur[1856]: divide $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{4}$, tunc intelligitur[1857] quarte parti contigere[1858] tertiam integri. Quare quadruplo quarte partis[1859], scilicet[1860] parti integre contigit quadruplum unius tertie, scilicet $\frac{1}{3}$ 1[1861], ut predixi. Et si $\frac{1}{4}$ per $\frac{1}{3}$[N, 56r] dividere vis ut scias quid[1862] inde contingat uni parti integre, divide 3 posita super $\frac{1}{4}$[1863] per 4[1864] posita super $\frac{1}{3}$, exibunt $\frac{3}{4}$. Nam proportio de $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{3}$ est sicut proportio de 3 ad 4, vel cum tertie parti contingit[1865] $\frac{1}{4}$ tribus tertiis, scilicet parti integre contingent $\frac{3}{4}$.

Item si volueris addere $\frac{2}{3}$ cum $\frac{4}{5}$, invenias similiter in quo numero reperiantur $\frac{4\ 2}{5\ 3}$ sic: multiplicabis 3 per 5 que sunt sub virgulis, erunt 15, et in ipso numero reperiuntur $\frac{4\ 2}{5\ 3}$. Quare accipe $\frac{2}{3}$ de 15, que sunt 10, et $\frac{4}{5}$ de 15, que sunt 12, et adde insimul, erunt 22, que divide per 15, exibit[1866] $\frac{7}{15}$ 1[1867] pro adiunctione de $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$.

Aliter de eodem.[1868]

[1849] $\frac{1\ 0}{2\ 6}$ FARSV, $\frac{1\ 1}{2\ 6}$ N
[1850] Si FARNV, om. S
[1851] habebis FARNV, habebit S
[1852] $\frac{1}{3}$ 1 FARSV, $\frac{1}{13}$ N
[1853] Integre FARSV, integri N
[1854] Duodecuplum FARSV, unodecuplum N
[1855] Est sicut-ad $\frac{1}{4}$: in mg. Inferiore V
[1856] Dicitur FARSV, diceretur N
[1857] Intelligitur FNRSV, intelligatur A
[1858] Contingere ANRSV, configere F
[1859] Partis FNRV, parti A, om. S
[1860] Scilicet FNRAV, om. S
[1861] $\frac{1}{3}$ 1 FARSV, $\frac{1}{2}$ 1 N
[1862] Quid FARSV, quod N
[1863] $\frac{1}{4}$ FNRSV, 4 A
[1864] 4 FNRSA, $\frac{1}{4}$ V
[1865] Contingit FNRSV, contigat A
[1866] Exibit FNSV, exibunt AR
[1867] $\frac{7}{15}$ 1 FNRSA, 1$\frac{7}{15}$ V
[1868] Aliter-eodem S, om. FNARV

Item aliter describes $\frac{4}{5}\frac{2}{3}$ ut in margine ostenditur et multiplica 2 que sunt super 3 per 5, erunt 10, que pone super $\frac{2}{3}$ et 4 que sunt super 5 per 3, erunt 12 que pone super $\frac{4}{5}$ in questione. Adde ergo 10 cum 12, erunt 22 ut supra; que divide per ruptos qui sunt sub virgulis, scilicet per $\frac{1\ 0}{3\ 5}$, exibunt $\frac{12}{35}$ 1, ut in questione ostenditur, hoc est $\frac{7}{15}$ 1, ut per alium modum repertum est.

Verum si $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ extrahere volueris, invenies 10 et 12 superius repertis per qualem volueris modum descriptis duobus modis; et extrahe 10 de 12, remanent 2 que divide per ruptos, videlicet[1869] per $\frac{1\ 0}{3\ 5}$[1870], exibunt[1871] $\frac{20}{35}$, hoc est $\frac{2}{15}$ pro residuo quesite extractionis. Et si $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$ dividere vis, di[/S 32r]vide[1872] 12 per 10, exibit[1873] $\frac{1}{5}$ 1 et tot contigit uni[1874] parti integre ex ipsa divisione. Et si $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$ dividere vis, divide 10 per 12, exibunt $\frac{5}{6}$[1875].

Additio de $\frac{5}{6}$ cum $\frac{7}{10}$.[1876]

(1) Item si volueris addere $\frac{5}{6}$ cum $\frac{7}{10}$, reperies similiter in quali numero reperiantur $\frac{5}{6}$ et $\frac{7}{10}$[1877]: multiplicabis ergo 6 per 10, erunt 60: reperiuntur enim et[1878] in minori numero qualem 60. Et hoc[1879] contingit propter comunitatem quam habet 6 cum 10, videlicet $\frac{1}{2}$; quia uterque numerus integraliter per 2 dividitur[1880]. Unde dividas 60 per 2, exibunt 30, in quibus[1881] etiam reperiuntur $\frac{5}{6}$ et $\frac{7}{10}$[1882], potes enim hec 30 aliter reperire, videlicet ut multiplices 6 per medietatem de 10, scilicet per 5, et erunt 30; vel multiplica 10 per medietatem de 6. Hoc est

[1869] Videlicet FARSN, scilicet V
[1870] $\frac{1\ 0}{3\ 5}$ FARSN, $\frac{1}{3}$ et $\frac{0}{5}$ V
[1871] Exibunt FARSV, et exibunt N
[1872] Vis divide FARSV, om. N
[1873] Exibit FAS, exibunt NRV
[1874] uni NRSV, Unius F, in A
[1875] $\frac{5}{6}$ FRS, non si legge in A, om. NV
[1876] Additio-$\frac{7}{10}$ FNS, om. ARV
[1877] Reperies-$\frac{7}{10}$ FNSAR, om. V
[1878] Enim Et FA, etiam NR, etiam et SV
[1879] Hoc NRSV, hic FA
[1880] Integraliter Per 2 dividitur FANS, integraliter dividitur per 2 R, per 2 integraliter dividitur V
[1881] Quibus FANSV, quo R
[1882] $\frac{5}{6}$ et $\frac{7}{10}$ FNRSV, $\frac{7}{10}$ et $\frac{5}{6}$ A

per 3, et[1883] erunt similiter 30, et accipe $\frac{5}{6}$ de 30 que sunt 25 et adde cum $\frac{7}{10}$[1884]de 30, que sunt 21[1885], erunt 46 que divide per 30, exibit[1886]$\frac{16}{30}$ 1, hoc est $\frac{8}{15}$ 1. [B, 65; N,56v]

De eodem aliter.[1887]

(1) Item aliter describe sic $\frac{7\ 5}{10\ 6}$, et quia 6 cum 10, que sunt sub virgulis, habent comunem regulam, scilicet 2, divide[1888] 10 per 2, [V, 26v]exibunt 5[1889] in quibus[1890] multiplica 5 que sunt super 6, erunt 25, sicuti[1891] superius pro $\frac{5}{6}$ de 30 reperta fuerunt. Item divide 6 per eadem 2[1892], exibunt 3[1893] que pone sub[1894] 6 in quibus multiplica 7 que sunt super 10, exibunt 21 pro $\frac{7}{10}$ de 30: adde ergo 21 cum 25, erunt 46 que divide per medietatem de 10, et per 6. Hoc est per $\frac{1\ 0}{5\ 6}$, vel per[1895] medietatem de 6 et per 10, hoc est per $\frac{1\ 0}{3\ 10}$ exibit[1896]$\frac{1\ 5}{3\ 10}$ 1, quod tantum est quantum[1897]$\frac{16}{30}$ 1, vel quantum $\frac{8}{15}$ 1. [N, 56v]

Extractio $\frac{7}{10}$ de $\frac{5}{6}$[1898]. [R, 45v]

(1) Verum si $\frac{7}{10}$ de $\frac{5}{6}$ extrahere volueris, reperies prescripta 21 et 25, et extrahe 21 de 25, remanent 4 que divide per 30[1899] vel per ipsorum regulam que est $\frac{1\ 0}{3\ 10}$, exibit[1900]$\frac{1\ 1}{3\ 10}$ pro

[1883] Et FANSV, om. R
[1884] $\frac{7}{10}$ FANSR, $\frac{7}{10}$ decenis V
[1885] 21 FNRSV, 12 A
[1886] Exibit FANS, exibunt RV
[1887] De-aliter F, Aliter de eodem NRF_1, om. VSA
[1888] Divide FVSRA, et divide NF_1
[1889] 5 $FVNRF_1$, 5 que pone sub 10 S
[1890] In Quibus FF_1VNS, quibus A, in quo R
[1891] Sicuti FF_1VSR, sicut NA
[1892] 2 FASR, om. VF_1N
[1893] Exibunt 3 AFSR, 3 exibunt VF_1N
[1894] Sub FF_1SVRA, super N
[1895] Per FF_1SNRA, om. V
[1896] Exibit FSRA, exibunt VNF_1
[1897] Quantum FSN, quantum est F_1VA, om. R
[1898] extractio $-\frac{5}{6}$ SNF_1,Extractio de $\frac{7}{10}$ de $\frac{5}{6}$ FR, , om. VA
[1899] 30 FF_1VNA, 3 S
[1900] Exibit FF_1SNA, exibunt VR

residuo quesite[1901] extractionis[1902]. Et si $\frac{5}{6}$ per $\frac{7}{10}$ dividere vis, divide 25 per 21, exibit[1903] $\frac{1\ 1}{3\ 7}$ 1. Et si $\frac{7}{10}$ vis dividere per $\frac{5}{6}$[1904], divide 21 per 25, exibunt $\frac{1\ 4}{5\ 5}$.

Additio $\frac{1}{6}$ cum $\frac{5}{9}$[1905].

(1) Rursus si volueris addere $\frac{1}{6}$ cum $\frac{5}{9}$, invenias in quo numero reperiuntur $\frac{1}{6}$ et $\frac{5}{9}$[1906], quod sic [F, 27v] invenitur: quia 3 sunt comunis regula de 6 et de 9, divide 6 per 3, exibunt 2, que multiplica per 9, erunt 18; vel divide 9[1907] per 3, exibunt 3, que multiplica per 6, erunt similiter 18 in quibus reperiuntur $\frac{5}{9}\frac{1}{6}$: unde[1908] accipe $\frac{1}{6}$ de 18, que est 3, et [F_1, 46v]adde cum $\frac{5}{9}$[1909] de 18, que sunt 10, erunt 13 que divide per regulam de 18 exibunt $\frac{1\ 6}{2\ 9}$. Vel, aliter, describe ruptos ut hic ostenditur, et multiplica 1[1910], quod est super 6, per tertiam de 9 propter comunem regulam ipsorum, erunt 3, que pone super $\frac{1}{6}$; et multiplica 5 que sunt super 9 per tertiam de 6, scilicet per 2, erunt 10, que pone super $\frac{5}{9}$ et adde 3 cum 10, erunt 13 que divide per tertiam multiplicationis de 6 in 9, hoc est per 18, exibunt $\frac{16}{29}$ pro iunctione ipsorum, ut in questione ostenditur.

Extractio $\frac{1}{6}$ de $\frac{5}{9}$.[1911]

(1) Verum si $\frac{1}{6}$ de $\frac{5}{9}$ extrahere volueris, reperies prescripta 3 et 10, et extrahe 3 de 10, remanebunt[1912] 7, que prescripta ratione divide per 18, vel per ipsorum regulam que est $\frac{1\ 0}{2\ 9}$[1913], exibunt $\frac{13}{29}$ pro residuo dicte extractionis. Et si $\frac{5}{9}$ per $\frac{1}{6}$ dividere vis, divide 10 per 3,

---

[1901] Quesite FSR, quesito VNAF_1
[1902] Extractionis FAF_1VNR_2, extractionis additio $\frac{1}{6}$ cum $\frac{5}{9}$ SR_1
[1903] Exibit FAF_1SV, exibunt NR
[1904] Vis-$\frac{5}{6}$ FAF_1SVN, per $\frac{5}{6}$ vis dividere r
[1905] Additio- $\frac{5}{9}$ FAF_1NR_2(R_2: addictio de-$\frac{5}{9}$), om. V, *posuit supra post* quesite extracionis S R_1
[1906] Invenias-$\frac{5}{9}$ FAF_1SVR, om. N
[1907] 9 FAF_1SNR, om. V
[1908] Unde F_1FSRA, item V, nam N
[1909] $\frac{5}{9}$ FASVR, $\frac{5}{6}$ NF_1
[1910] 1 FAF_1SVR, om. N
[1911] Extractio-$\frac{5}{9}$ FSNR, extractio de $\frac{1}{9}$de $\frac{5}{9}$$F_1$, om.VA
[1912] Remanebunt FF_1NRA, remanent VS
[1913] $\frac{1\ 0}{2\ 9}$ FSNRVF_1, $\frac{7\ 0}{2\ 9}$ A

que sunt super $\frac{1}{6}$, exibunt $\frac{1}{3}$ 3. Et si $\frac{1}{6}$ per $\frac{5}{9}$ dividere vis, divide 3[1914] per 10, exibunt $\frac{3}{10}$.[N, f.57r]

Pars secunda.

De additione et extractione duorum ruptorum adinvicem[1915] et de eorum divisione[1916]. [A, f. 41]

(1) Si volueris addere[1917] $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ cum $\frac{1}{7}\frac{1}{5}$, vide[1918] de $\frac{1}{7}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ in quo numero reperiantur, quod sic videndum est: multiplica insimul numeros qui sunt sub virgulis, videlicet 3 per 4, que per 5, que per 7, erunt 420[1919], que est minimus[1920] commensuratus prescriptorum numerorum, hoc est quod est minor numerus in quo reperiuntur prescripti rupti; ideo quia non habent aliquam comunem regulam ad invicem. (2) Accipe ergo $\frac{1}{3}$ de 420, que est 140, et adde cum[1921] quarta de eisdem 420, que est[1922] 105, et cum quinta que est 84, et cum septima que est 60, erunt 389, quem divide per 420, exibunt $\frac{389}{420}$ pro iunctione prescriptorum ruptorum. Et est idem cum queritur de $\frac{1}{7}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ que partes sint[1923] unius integri. (3) Possumus enim[1924] aliter secundum magisterium numerorum addere $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$[1925] cum $\frac{1}{7}\frac{1}{5}$, videlicet quod describantur rupti [S, f.32v] secundum quod hic cernuntur, et multiplica 1 quod est super 3 per 4, et 1 quod est super 4 per 3, erunt 7, que multiplica per 5, et per 7, que [B, 66] sunt sub aliis duabus virgulis[1926] alterius lateris, erunt 245, que sunt $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ de 420[1927], ut superius invenimus[1928]. Pone ergo 245[1929] super $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$[1930] in questione[1931].(4) Deinde accedas ad $\frac{1}{7}\frac{1}{5}$[1932]: multiplica[1933] 1, quod

[1914] 3 FSAVR, $\frac{1}{3}$ N$\frac{5}{9}$
[1915] Ad invicem NSRVAF$_1$, adiunctione F
[1916] Pars-divisione F F$_1$SNRA, om. V
[1917] Addere F F$_1$SNRA, dividere V
[1918] Vide F F$_1$SNRA, divide V
[1919] 420 F F$_1$SNRA, 40 V
[1920] Minimus FNSVA F$_1$, numerus R
[1921] Cum F F$_1$NSRA, om. V
[1922] Est N F$_1$SRVA, in F
[1923] Sint FNSRAV, sunt F$_1$
[1924] Enim F F$_1$NSRA, om. V
[1925] $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ F F$_1$NSVA, $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ R
[1926] Virgulis FNSVR F$_1$, virgis A
[1927] 420 F F$_1$NSRA, 40 V
[1928] Que sunt-invenimus F F$_1$NSVA, *post* $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ *posuit* R
[1929] 245 F F$_1$SRVA, 425 N
[1930] $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ F F$_1$NSVA, $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ R
[1931] In questione F F$_1$NSVA, om. R
[1932] $\frac{1}{7}\frac{1}{5}$ F F$_1$NSRA, $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{5}$ V

est [R, f. 46r] super 5 per 7, et 1 quod est super 7 per 5, erunt 12, que multiplica per 3 et per 4, que sunt sub virgulis[1934], erunt 144, que sunt $\frac{1}{7}\frac{1}{5}$ de 420. Pone, ergo, 144 super $\frac{1}{7}\frac{1}{5}$ et adde 144 cum 245, erunt 389 que divide per ruptos, videlicet[1935] per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 4\ 5\ 7}$[1936] et apta prescriptos ruptos, exibunt $\frac{5\ 1\ 9}{6\ 7\ 10}$, que equatur[1937] $\frac{389}{420}$. [F_1, f..]

Extractio de $\frac{1}{7}\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$.[1938]

(1) Si vero[1939] $\frac{1}{7}\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ extrahere volueris[1940], reperies prescripta 245 et 144 per qualem[1941] volueris modum de duobus prescriptis modis et[1942] extrahe 144 de 245, remanebunt 101que, suprascripta[1943] ratione, divide per $\frac{1\ 0\ 0}{6\ 7\ 10}$[1944], exibunt $\frac{5\ 2\ 2}{6\ 7\ 10}$ pro residuo dicte extractionis. (2) Et si $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$[1945] per $\frac{1}{7}\frac{1}{5}$ dividere vis[1946], divide 245 per regulam de[1947] 144[1948], exibunt[1949] $\frac{1\ 2\ 6}{2\ 8\ 9}$[1950] 1. Et si[1951] 144[1952] per regulam de 245 diviseris, habebis $\frac{4\ 0\ 5}{5\ 7\ 7}$ pro eo quod contigit integre parti ex divisione $\frac{1}{7}\frac{1}{5}$ in $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, ut in questione ostenditur.

Additio[1953] de $\frac{2}{7}\frac{3}{5}$ cum $\frac{2}{9}\frac{3}{8}$.[1954]

(1) Item si volueris addere $\frac{2}{7}\frac{3}{5}$ cum $\frac{2}{9}\frac{3}{8}$[1955], reperies numerum in quo reperiantur [N, 57v] rupti, eritque 2520 qui exiit ex multiplicatione quattuor numerorum qui sunt sub

---

1933 Multiplica F, et multiplica N F_1SRVA
1934 Virgulis F F_1NSRV, virgis A
1935 Videlicet F F_1SNRA, scilicet V
1936 $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 4\ 5\ 7}$ F F_1SRVA, $\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{5}\frac{1}{7}$ N
1937 Equatur FNSVA, equantur F_1R
1938 Extractio-$\frac{1}{3}$ F F_1SNRA, om. V
1939 Vero FSRVA, volueris N F_1
1940 Volueris FSRVA, *om.* N F_1
1941 Qualem F_1NSRVA, equalem F
1942 Et F F_1SNRA, om. V
1943 Suprascripta N F_1SRVA, supra prescripta F
1944 $\frac{1\ 0\ 0}{6\ 7\ 10}$ F F_1SRVA, $\frac{1}{6}\frac{1}{7}\frac{0}{10}$ N
1945 $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ F F_1SNRA, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$ V
1946 Vis F F_1SNRV, volueris A
1947 Regulam de FS F_1NVA, om. R
1948 144 F F_1SNVA, 144 vel per eorum regulam R
1949 Exibunt FNRVA, exibit S F_1
1950 $\frac{1\ 2\ 6}{2\ 8\ 9}$ F F_1NRVA, $\frac{1\ 2\ 6}{2\ 7\ 9}$ S
1951 Si F F_1NRVS, om. A
1952 144 S F_1NRVA, om. F
1953 Additio FRNA, addictione F_1, om. SV
1954 Additio-$\frac{3}{8}$ F F_1RNA, om. SV

virgulis[1956] et non reperiuntur in minore numero, eo quod non habent aliquam comunem regulam ad invicem. Et accipe $\frac{3}{5}$de 2520 que sunt 1512 et adde cum $\frac{2}{7}$ de 2520 que sunt 720[1957], erunt 2232, que serva. Item accipe $\frac{2\ 3}{9\ 8}$ de 2520, que sunt 1505, que adde cum 2232 serva[V 27r]tis, erunt 3737 que divide per regulam de 2520, que est $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{4\ \ 7\ \ 9\ \ 10}$, exibit[1958] $\frac{1\ \ 3\ \ 7\ \ 4}{4\ \ 7\ \ 9\ \ 10}$[1959]1. (2) Item aliter describe ruptos, ut inferius cernitur, et incipias a $\frac{2\ 3}{7\ 5}$ sic: multiplicabis 3, que sunt super 5, per 7, que sunt sub virgula, erunt 21. Item multiplicabis 2, que sunt super 7, per 5, erunt 10, que addes[1960] cum 21, erunt 31, que multiplicabis per alios ruptos, videlicet[1961] per 8 et per 9, hoc est per 72, exibunt 2232, ut per $\frac{2\ 3}{7\ 5}$ de 2520[1962] superius reperta sunt. Pone ergo[1963] 2232 super $\frac{2\ 3}{7\ 5}$ et accedas ad $\frac{2\ 3}{9\ 8}$ et multiplica 3 que sunt super 8 per 9 et 2 que sunt super 9 per 8 et adde insimul, erunt 43[1964] que multiplica per alios ruptos videlicet per 5 et per 7, erunt 1505, ut superius pro $\frac{2\ 3}{9\ 8}$ de 2520 invenimus. Pone ergo 1505[1965] super $\frac{2\ 3}{9\ 8}$, deinde adde 1505 cum 2232, erunt 3737 que divide per omnes numeros qui sunt sub virgulis, et aptabis eos, exibit[1966] similiter $\frac{1\ \ 3\ \ 7\ \ 4}{4\ \ 7\ \ 9\ \ 10}$1.

Extractio $\frac{2\ 3}{9\ 8}$ *de* $\frac{2\ 3}{7\ 5}$.[1967]

(1) Si autem $\frac{2\ 3}{9\ 8}$ de $\frac{2\ 3}{7\ 5}$ extrahere volueris[1968], reperies prescripta 2232 et 1505, et extrahes 1505 de 2232, remanebunt 727 que prescripta ratione divide per $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{4\ \ 7\ \ 9\ \ 10}$, exibunt $\frac{3\ \ 6\ \ 7\ \ 2}{4\ \ 7\ \ 9\ \ 10}$ ut in hac[1969] alia cernitur descriptione. Et si $\frac{2\ 3}{7\ 5}$ per $\frac{2\ 3}{9\ 8}$ dividere vis, divide[1970] 2232 per

---

1955 Addere-$\frac{3}{8}$ F F_1RSAV, $\frac{2\ 3}{7\ 5}$ cum $\frac{2\ 3}{9\ 8}$ addere N
1956 Virgulis F F_1SNAV, virgis R
1957 Que sunt 720 FSNRV F_1, om. A
1958 Exibit F F_1SNRA, exibunt V
1959 $\frac{1\ \ 3\ \ 7\ \ 4}{4\ \ 7\ \ 9\ \ 10}$F S F_1A, $\frac{1\ \ 2\ \ 7\ \ 4}{4\ \ 7\ \ 9\ \ 10}$ RNV
1960 Addes F F_1SAV, adde RN
1961 Videlicet F F_1SARN, scilicet V
1962 De 2520 F F_1SNAV, om. R
1963 pone ergo RAV F_1,Pone FNS
1964 43 FNSRAV, 4 F_1
1965 Ut superius-1505 FASRV, *om.* N F_1
1966 Exibit F F_1SRAV, exibunt N
1967 Extractio-$\frac{3}{5}$ FRN, extractio de-$\frac{3}{5}$$F_1$, *om.* SAV
1968 Volueris F F_1SNAV, vis R
1969 In hac F F_1SNRA, hac in V
1970 Divide F F_1SNRV, *om.* A

regulam de 1505, et si vis[1971] contrarium facies contrarium et habebis optata, ut in questione cernitur. [R, f.46v]

Additio $\frac{1\,1}{4\,3}$ *cum* $\frac{1\,1}{6\,5}$.[1972]

(1) Item si volueris addere $\frac{1\,1}{4\,3}$ cum $\frac{1\,1}{6\,5}$[1973], invenies numerum in quo reperiantur prescripti rupti. Eritque 60, qui numerus reperitur ex multipli[F_1,]catione de 3 in 4 et in 5, et non oportet ut multiplicentur 60 per 6 propter comunitatem regule quam habent 6 cum 3 et[1974] 4: tota[1975] enim 3 sunt comunia eisdem[1976] 6: quare non opportet ut multiplicentur 60[1977]nisi per tertiam de 6, que est 2, nec etiam per ipsa 2 oportet 60 multiplicare, quia 2 sunt in regula de 4, et ut hoc dicam promptius: regula de 6 est $\frac{1\,0}{2\,3}$. Ideo non repetimus 3, neque 2 in multiplicatione, que sunt regula de 6 propter 3 et 4[1978], que multiplicavimus 4 cum habuimus 60. In omni enim numero, [N, f.58v] in quo reperiuntur $\frac{1\,1}{4\,3}$, reperietur[1979] etiam $\frac{1}{6}$: accipe itaque [B, 67]$\frac{1\,1\,1\,1}{6\,5\,4\,3}$ de 60 et adde insimul erunt 57 que divide per 60, exibunt $\frac{57}{60}$[1980], sed quia 57 cum 60 habent comunem regulam, scilicet $\frac{1}{3}$, possumus has $\frac{57}{60}$[1981][S, f.33r] pulchrius dicere[1982], videlicet ut dividas 57 per 3, exibunt 19: similiter divide[1983] 60 per eadem[1984] 3, exibunt 20 in quibus divide 19 exibunt $\frac{19}{20}$, que sunt unum integrum minus vigesima. Item aliter describe[1985] ruptos ut hic ostenditur et incipias a $\frac{1\,1}{4\,3}$[1986], et[1987] multiplicabis 1, quod est super 3, per 4, et 1, quod est super 4, per 3, erunt 7 que multiplica per 5[1988] que sunt sub

[1971] si vis R F_1SNAV, Primus F
[1972] Additio- $\frac{1}{5}$ FN F_1S, *om*. RAV
[1973] $\frac{1\,1}{6\,5}$ F F_1NSRV, $\frac{1\,1}{5\,6}$ A
[1974] Et F, et cum F_1RSNA, *om*. V
[1975] Tota F F_1SNA, presenta 4 punti R
[1976] Eisdem F F_1SAN, eiusdem R, *om*. V
[1977] Per 6-60 F F_1SANR, *om*. V
[1978] 4 F F_1SNRV, *om*. A
[1979] Reperietur F F_1SNRA, reperietur $\frac{1\,1}{4\,3}$ reperietur V
[1980] $\frac{57}{60}$ F F_1SRAV, $\frac{1\,7}{6\,0}$ N
[1981] Sed-$\frac{57}{60}$ FSRAV F_1, *om*. N
[1982] Dicere F F_1SRAV, dicetur N
[1983] Divide F F_1SNA, dividas V, *om*. R
[1984] Eadem F F_1SNAV, *om*. R
[1985] Describe FSR, describere N, debes describere AV F_1
[1986] incipias a $\frac{1\,1}{4\,3}$ F F_1SRAN, invenias 7 $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{3}$
[1987] Et F F_1SRAV, *om*. N
[1988] 5 FSNARV, 7 F_1

virgula, erunt 35 que deberes[1989] multiplicare per 6 nisi relinqueres propter comitatem[1990] quam habes[1991] 6 cum $\frac{1\ 1}{4\ 3}$. Pone ergo 35 super $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ que sunt $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ de 60, deinde multiplica 1, quod est super 5, per 6 et 1 quod est super 6 per 5, erunt 11, que deberes[1992] multiplicare per 3 et per 4, sed relinques quod non multiplicabis per 3; quia sunt in regula de 6, neque per 2, que[1993] sunt in regula de 4, cum sint similiter in regula de 6, ergo multiplicabis prescripta 11 per 2 que remanent de 4, erunt 22, que sunt $\frac{1\ 1}{6\ 5}$ de 60: pones ergo 22 super $\frac{1\ 1}{6\ 5}$ et addes 22, cum 35 erunt 57 ut superius invenimus, et divide ipsa per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{3\ \ 4\ \ 5}$, quia per 6 non debes dividere[1994], eo quia nos relinquimus ea in multiplicatione utriusque lateris et aptabis prescriptos ruptos exibunt $\frac{1\ \ 9}{2\ \ 10}$, hoc est $\frac{19}{20}$, ut in questione ostenditur.

Dicam aliter et apertius in reperiendis suprascriptis[1995] 35 et 22. Multiplica 3 per 4, que sunt sub virgis[1996] ab una parte, erunt 12. Serva ea in manu dextera et multiplica 5 per 6 que sunt sub aliis duabus virgis[1997] alterius lateris erunt 30 que serva in sinistra et divide utrumque numerorum servatorum in manibus per maximam comunem mensuram[1998] eorum que est 6, exibunt in manu dextra 2 et in sinistra 5: pones 2 sub $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ et 5 sub $\frac{1\ 1}{6\ 5}$ et multiplicabis reperta 7[1999] per 5 posita sub $\frac{1\ 1}{6\ 5}$ et 11[2000] per 2 posita sub[2001] $\frac{1\ 1}{4\ 3}$[2002], et habebis 35 et 22, quorum summam[2003], scilicet 57[2004], divide per numeros qui sunt sub virgis[2005] [F_1 48r] unius lateris, et[2006] per numerum positum sub aliis, scilicet per 5 et per 6 et per 2 aut per 3 et per 4 et per 5 hoc est per regulam de 60.

Extratio[2007] $\frac{1\ 1}{6\ 5}$ *de* $\frac{1\ 1}{4\ 3}$.[2008]

[1989] Deberes FSNAR, debes V F_1
[1990] Comitatem FSNAR, comunitatem V F_1
[1991] Habes FAF_1SV, habet RN
[1992] Deberes FF_1ASRN, debes V
[1993] Que $FAVF_1SN$, quia R
[1994] Dividere $SVARNF_1$, dividere Eos F
[1995] Suprascriptis $FVAF_1SR$, ipsis N
[1996] Virgis FAF_1SR, virgulis VN
[1997] Virgis FAF_1SR, virgulis VN
[1998] Comunem mensuram FF_1ASRN, comunitatem V
[1999] Et-reperta 7 FAF_1SNV, deinde adde simul 4 et 3 erunt 7 que multiplica R
[2000] Et 11 FF_1SNAV, erunt 35 et postea adde 5 et 6 erunt 11 que multiplica R
[2001] Sub FF_1SNRV, om. A
[2002] $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ FF_1SNAV, $\frac{1\ 1}{3\ 4}$ R
[2003] Summam FF_1, summa SVAN, om. R
[2004] Et habebis-57 $FVAF_1SN$, erunt 22 que adde cum [R, 47r] 35 erunt 57 que
[2005] Virgis FF_1SNRA, virgulis V
[2006] Et FASRV, om. NF_1
[2007] Extratio FNS, extratio de RF_1, om. AV

(1) Si autem $\frac{1\ 1}{6\ 5}$ de $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ extrahere volueris[2009], reperies prescripta 35[2010] et 22 et extrahes 22 de 35, remanebunt 13 que divide[2011] suprascripta ratione per $\frac{1\ \ 0}{6\ \ 10}$, exibunt $\frac{1\ \ 2}{6\ \ 10}$[2012] pro residuo dicte extractionis. [N, f. 58v; A, 15v]

Additio $\frac{1\ 2}{7\ 3}$ cum $\frac{1\ 3}{9\ 5}$[2013].

(1) Item si[2014] volueris[2015] addere $\frac{1\ 2}{7\ 3}$ cum $\frac{1\ 3}{9\ 5}$[2016], reperias numerum in quo reperiantur rupti prescripti, eritque 315, qui numerus[2017] exit ex multiplicatione ruptorum, evitatis tamen inde 3 que sunt comunis regula de 9 et de[2018] 3 que non oportet repetere in multiplicatione, ideo quia $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{9}$ reperiuntur in 9: unde omnis numerus qui habet $\frac{1}{9}$, habet similiter et[2019] $\frac{1}{3}$: accipe ergo $\frac{2}{3}$ de 315, que sunt 210 et adde cum $\frac{1}{7}$ eorumdem, [V, 24v]que est[2020] 45, erunt 255 que serva. Et accipe $\frac{1\ 3}{9\ 5}$[2021] de eisdem[2022] 315 que sunt 234 et adde cum 255, erunt 489, que divide per regulam de 315, que est $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{5\ \ 7\ \ 9}$, exibit[2023] $\frac{4\ \ 6\ \ 4}{5\ \ 7\ \ 9}$ 1.

(2) Aliter secundum artem describe ruptos ut hic ostenditur, et incipias a $\frac{1\ 2}{7\ 3}$: multiplica 2 que sunt super 3 per 7 et 1 quod est super 7 per 3 et adde insimul, erunt 17, que multiplica per 5, erunt 85, que multiplica per tertiam de 9, hoc est per 3, propter comitatem[2024] regule quam habet[2025] 3, que sunt sub virgula[2026] cum 9, eritque[2027] multiplicatio illa 255, que sunt $\frac{1\ 2}{7\ 3}$de 315, ut[2028] superius invenimus. Pones ergo 255 super $\frac{1\ 2}{7\ 3}$, et accedas ad $\frac{1\ 3}{9\ 5}$ multiplicando

---

2008 Extratio- $\frac{1}{3}$ FF$_1$NSRV, om. A
2009 Volueris FF$_1$SRNV, vis A
2010 Prescripta 35 FF$_1$SRNA, 35 prescripta V
2011 Divide FF$_1$SRNA, adde V
2012 $\frac{1\ \ 2}{6\ \ 10}$ FSR, $\frac{1\ \ 2}{3\ \ 10}$NVAF$_1$
2013 Additio-$\frac{3}{5}$, FF$_1$SRN, *om*. AV
2014 Item si FARF$_1$SV, autem N
2015 Volueris FF$_1$SRNV, vis A
2016 Volueris-$\frac{3}{5}$ FARF$_1$SV, $\frac{1\ 2}{7\ 3}$ cum $\frac{1\ 3}{9\ 5}$ volueris addere N
2017 Qui numerus FF$_1$RSNV, om. A
2018 De FF$_1$RSNV, om. A
2019 Et FAF$_1$SNV, om. R
2020 Est FAF$_1$SNV, sunt R
2021 $\frac{1\ 3}{9\ 5}$ FF$_1$RSNV, $\frac{1}{9}$ et $\frac{3}{5}$ A
2022 Eisdem A FF$_1$SNV, eiusdem R
2023 Exibit FF$_1$SASNR, exibunt V
2024 Comitatem FVANS, comunitatem RF$_1$
2025 Habet FAVN, habent SRF$_1$
2026 Virgula FVF$_1$SN, virgaA R
2027 Eritque SVRAF, erit NF$_1$
2028 Ut FAVRF$_1$S, que N

3, que sunt super 5, per 9 et 1[2029], que sunt[2030] super 9, per 5, erunt 32, que multiplica per 7, erunt 234, ut superius pro $\frac{1}{9}\frac{3}{5}$ de 315 reperta sunt [B, 68] que 234 non oportet multiplicare per 3 que sunt sub virgula propter comitatem[2031] predictam quam habet[2032] 3 cum 9, pones[2033]ergo[2034] 234 super $\frac{1}{9}\frac{3}{5}$ et adde 234 cum 255 erunt 489 que divide per $\frac{1}{5}\frac{0}{7}\frac{0}{9}$, que sunt sub virgulis et relinquas[2035] 3 quod non divides per ipsa ideo quia in multiplicatione utrarumque partium reliquisti quod non multiplicasti[2036] per 3[2037]: quare summam iunctionis ipsarum[2038] partium non debes dividere per 3, sed debes eam dividere per alios ruptos, cum per[2039] ipsos multiplicasti, exibit $\frac{464}{579}$ 1, ut superius.

Extractio $\frac{1}{9}\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{7}\frac{2}{3}$.[2040]

(1) Si autem $\frac{1}{9}\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{7}\frac{2}{3}$ extrahere volueris[2041], reperies prescripta 255 et 234, extrahes[2042] 234 de 255, remanebunt 21[2043], que divide suprascripta ratione per $\frac{1}{5}\frac{0}{7}\frac{0}{9}$ tantum[2044] prius dividas per 7 et per 9 quam per 5: ideo quia 21 integraliter dividitur per 7 et per 3, que sunt de regula ipsorum 9[2045], exibunt $\frac{3}{9}\frac{0}{5}$ pro residuo dicte extractionis, hoc est $\frac{1}{3}\frac{0}{5}$[F_1, f.48v]de[2046] divisione autem eorum[2047] ad invicem fac ut supra.

Additio de $\frac{1}{5}\frac{3}{4}$ cum $\frac{1}{10}\frac{2}{9}$[2048].

(1) Rursus si volueris[2049] addere $\frac{1}{5}\frac{3}{4}$ cum $\frac{1}{10}\frac{2}{9}$, multiplica numeros, qui sunt sub virgulis, scilicet 4 per 5, erunt 20, que per 9, erunt 180. Que 180[2050] non oportet multiplicare per 10,

---

[2029] 1 FR, 2 S, 3 NVAF_1
[2030] Sunt FAVF_1SN, est R
[2031] Comitatem FAF_1SN, comunitatem VR
[2032] Habet FAVNS, habent RF_1
[2033]pones SAVRNF_1,Ponas F
[2034]ergo SRAV NF_1,Igitur F
[2035] Relinquas FARN, relinquesS VF_1
[2036] Multiplicasti FAVRNF_1, multiplicata S
[2037] 3 FRNSVF_1, om. A
[2038] Ipsarum FVRNS, ipsorum AF_1
[2039] Per FAVRS, om. NF_1
[2040] Extractio-$\frac{2}{3}$ FAF_1SN, om. RV
[2041] Volueris FF_1SNRV, vis A
[2042] Extrahes FARF_1, et extrahes VSN
[2043] 21 FARF_1SV, 25 N
[2044] Tantum FAF_1SNV, cum R
[2045] 9 FAF_1SNV, om.R
[2046] De FAF_1SNV, in R
[2047] eorum F ASV, illorum NF_1, om. R
[2048] Additio- $\frac{2}{9}$ FF_1SN, om. ARV

[R, f.47r] cum in 180 reper[N, 59r]iatur $\frac{1}{10}$. Quare accipies[2051]$\frac{1}{5}\frac{3}{4}$ de 180, scilicet 171, et addes eacum $\frac{1}{10}\frac{2}{9}$ de 180 scilicet cum[2052] 58, erunt 229, que divide per 180, exibit $\frac{1\ \ 6\ \ 2}{2\ \ 9\ \ 10}$[2053] 1.

Aliter describe ruptos et multiplica 3, que sunt super 4, per 5 et 1, quod est super 5 per 4, erunt 19, que multiplica per 9, erunt 171, que relinque multiplicare per 10 propter comitatem[2054] quam habent cum[2055] 5 et cum 4[2056]: pone ergo 171 super $\frac{1\ \ 3}{5\ \ 4}$, quia ipsa sunt $\frac{1}{5}\frac{3}{4}$[2057] de 180: deinde multiplica 2, que sunt super 9, per 10 et 1, quod est super 10 per 9, erunt 29 que multiplica per 2 et relinques[2058] comitatem[2059] quam habet 10 cum 4 et cum 5, erunt 58, que sunt $\frac{1}{10}\frac{2}{9}$ de 180. Adde ergo 58 cum 171, erunt 229 que divide per ruptos, qui sunt in uno latere, et per ruptum alterius lateris, qui multiplicatur in multiplicatione[2060], hoc est, aut per 4 et per 5 que sunt in uno latere, et per 9 que sunt in alio latere, in quibus multiplicamus[2061] superius 19, vel divides[2062] per 9 et per 10 que sunt ex altero[2063] latere, et per 2 que sumpsimus ex alio latere in multiplicatione, in quibus videlicet multiplicavimus 29. Nam $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{4\ \ 5\ \ 9}$ vel $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 9\ \ 10}$ unum est, et unaqueque ipsarum virgularum est regula de 180, exibit $\frac{1\ \ 6\ \ 2}{2\ \ 9\ \ 10}$ 1.

Nam si $\frac{1}{10}\frac{2}{9}$ de $\frac{1}{5}\frac{3}{4}$ extrahere volueris, reperies prescripta 171 et 58 et extrahes 58 de 171, remanebunt 113 que divide suprascripta ratione per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 9\ \ 10}$ exibunt $\frac{1\ \ 2\ \ 6}{2\ \ 9\ \ 10}$[2064] pro residuo dicte extractionis. Et si ea ad invicem[2065] dividere vis, fac ut supra. Volo demostrare modum inveniendi minimum mensuratum datorum quotlibet numerorum: ut si vis invenire numerum, in quo reperiantur $\frac{1}{10}\frac{1}{9}\frac{1}{8}\frac{1}{7}\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$[2066] $\frac{1}{2}$[2067], multiplica maiorem numerum qui est sub virga per

---

[2049] Volueris FF$_1$SRNV, vis A
[2050] 180 FRASV, om. NF$_1$
[2051] Accipies FAF$_1$SNV, accipias R
[2052] Cum FARF$_1$SV, om. N
[2053] $\frac{1\ \ 6\ \ 2}{2\ \ 9\ \ 10}$ FRF$_1$S, $\frac{1\ \ 6\ \ 2}{7\ \ 9\ \ 10}$ V, $\frac{2\ \ 6\ \ 2}{2\ \ 9\ \ 10}$ N, $\frac{2\ \ 0\ \ 2}{2\ \ 9\ \ 10}$ A
[2054] Comitatem FAF$_1$NSV, comunitatem R
[2055] Cum FANSR, om. VF$_1$
[2056] 5-4 FF$_1$ANSR, om. V
[2057] $\frac{1}{5}\frac{3}{4}$ FF$_1$NSVR, $\frac{1}{3}\frac{3}{4}$ A
[2058] Relinques FVRF$_1$SA, relinquens N
[2059] Comitatem FSA, comunitatem NVRF$_1$
[2060] Multiplicatione FF$_1$SARN, multiplicatione in V
[2061] Multiplicamus FAF$_1$SV, multiplicavimus RN
[2062] Divides FF$_1$RSNV, divide A
[2063] Altero FF$_1$RSNA, alio V
[2064] $\frac{1\ \ 2\ \ 6}{2\ \ 9\ \ 10}$ FRSV, $\frac{1\ \ 4\ \ 6}{2\ \ 9\ \ 10}$ NF$_1$ $\frac{1\ \ 2\ \ 0}{2\ \ 9\ \ 10}$ A
[2065] Ea-invicem FRS, ad invicem ea VNAF$_1$
[2066] $\frac{1}{3}$FRSV, om. NAF$_1$

sequentem, cum non sint comunicantes, scilicet 10 per 9, erunt 90. Que multiplica per comitatem[2068] quam habent cum 8, scilicet per medietatem[2069] eorum, cum binarius sit eorum comunis mensura, erunt 360 que multiplica per 7, cum nulla sit evitatio inter ea, erunt 2520, que non oportet multiplicare per 6 cum ipsorum regula[2070] sit $\frac{1\ 0}{2\ 3}$[2071]que partes sunt ex partibus[2072] numerorum multiplicatorum. Nam $\frac{1}{2}$est de regula de 10, que regula est $\frac{1\ 0}{2\ 5}$ et $\frac{1}{3}$ est[2073] de regula de 9: neque etiam[2074] multiplicanda sunt 2520 per 5[2075] cum 5 sint[2076] de[2077] regula de 10, neque[2078] etiam per 4 vel per 2 sunt multiplicanda cum sint in[2079] regula de 8. Similiter neque[2080] per 3 oportet multiplicare [F_1, 49r; N, 59v]2520 cum sint[2081] de regula de 9: ergo in 2520 reperiuntur omnes suprascripti rupti, et est minimus[2082] commensuratus omnium numerorum, qui[2083] sunt sub prescriptis[2084] virgis[2085]. [B.69; V, 28r]

Incipit pars tertia de divisione integrorum numerorum per integros cum ruptis etiam, et[2086] de eorum contrario.

(1) Cum volueris dividere aliquem integrum numerum per aliquem integrum numerum[2087][R, 48r] cum uno rupto, vel pluribus, vel econtra integrum numerum cum ruptis per alium integrum numerum, fac ruptos de utroque numero[2088] quales fuerit[2089] ille, vel[2090] illi qui fuerint positi[2091] cum uno numerorum: deinde divide summam ruptorum illius numeri

---

[2067] $\frac{1}{2}$ FF_1RSNA, om. V
[2068] Comitatem FAVF_1SN, comunitatem R
[2069] Medietatem FARF_1S, comitatem NV
[2070] Regula FAF_1SNV, regulam R
[2071] $\frac{1\ 0}{2\ 3}$ SF_1NAV, $\frac{1\ 0}{2\ 8}$FR
[2072] Ex partibus FARSV, om. NF_1
[2073] Est FAF_1SNV, om.R
[2074] Etiam FF_1ASNR, om. V
[2075] 5 SFRV, 7 ANF_1
[2076] Sint FARF_1S,V sit N
[2077] De FARF_1SV, om. N
[2078] neque ASRNVF_1,Nec F
[2079] In FRAF_1SV, om. N
[2080] neque SVARNF_1,Nec F
[2081] Sint FRAVF_1S, sit N
[2082] Minimus FVARF_1S, minus N
[2083] Qui FARSV, que NF_1
[2084] Prescriptis FVARF_1S, ipsis N
[2085] Virgis FF_1SARN, virgulis V
[2086] Etiam et FSANV, et etiam R, etiam F_1
[2087] Per-numerum VRS, per aliquem integrorum numerorum N F_1, om. F, lo traspone aggiungendolo in secondo momentoA (quindi ci deve essere un problema nel suo antigrafo che è forse lo stesso di V solo che V - essendo anche meno attento - non se ne accorge e omette).
[2088] Numero F F_1VANS, numero tales R
[2089] fuerit F F_1VANS, fuerint R
[2090] Ille Vel F F_1VANS, om. R
[2091] Positi F F_1VANS, prepositi R

per summam ruptorum alterius, et habebis qualem volueris divisionem. Et ut hoc melius ad oculum deprehendas, quorumdam numerorum divisiones[2092] in sequentibus demonstrare[2093] procurabimus[2094].

Divisio de 83 per $\frac{2}{3}$ 5[2095].

Si volueris dividere 83 per $\frac{2}{3}$ 5, fac tertias de unoquoque numero sic: multiplicabis 5 per 3, que sunt sub virgula[2096], et adde 2, erunt tertie[2097] 17. Et multiplica 83 per 3, ut facias tertias ex ipsis, erunt tertie[2098] 249. Divide ergo 249 per 17, exibunt $\frac{11}{17}$ 14 pro quesita divisione.

Ex hoc ergo[2099] manifestum est quod eadem est divisio de 83 in[2100] $\frac{2}{3}$ 5, quam de 249 in[2101] 17, et hoc est quod Euclides peritissimus geometra in suo libro declarat[2102]. Quod quam proportionem habet quilibet numerus[2103] ad quemlibet numerum, eandem proportionem habent equa[2104] quelibet[2105] multiplicia illorum[2106], que[2107] multiplicia ergo sunt 17 de $\frac{2}{3}$ 5, tam multiplicia sunt[2108] 249 de 83: sunt enim 17 tripla de $\frac{2}{3}$ 5, et 249 tripla[2109] de 83.

Et si econtra[2110] volueris dividere $\frac{2}{3}$ 5 per 83, divide 17 per regulam de 249, que est $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 83}$[2111], exibunt $\frac{2\ \ 5}{3\ \ 82}$[2112]pro quesita divisione.

Divisio de 94 per $\frac{2}{5}$ 6[2113].

[2092] Divisiones F F_1VANS, divisiones numerorum R
[2093] Demonstrare FVAR F_1S, monstrare N
[2094] Procurabimus FS, procuramus V F_1AN, procuravimus R
[2095] Divisio-5 F F_1 SAN, om. RV
[2096] Virgula F F_1ARSN, virga V
[2097] Tertie FV SANF_1, om. R
[2098] Tertie FV SANF_1, om. R
[2099] Ergo F VANSF_1, enim R
[2100] In FV ASNF_1, per R
[2101] In F VASNF_1, per R
[2102] Declarat FVNA SF_1, declaravit R
[2103] Quilibet numerus FVRN, quemlibet numerum SAN_1F_1
[2104] Equa FARSV F_1 , om. N
[2105] Quelibet FVAS NF_1, om. R
[2106] Illorum FAV NSF_1, ipsorum numerorum inter se R
[2107] Que F, quam SAVNF_1, tam R
[2108] Tam-sunt FAS VNF_1, que R
[2109] De-Tripla F VNSF_1, de- etiam tripla R, om. A
[2110] Econtra FVA F_1SR, contra N
[2111] $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 83}$ RANVS, $\frac{10}{283}$ F F_1
[2112] Exibunt $\frac{2\ \ 5}{3\ \ 82}$ RNSF_1, exibunt $\frac{2\ \ 5}{3\ \ 83}$ FV , om. A
[2113] Divisio-6 FSA NF_1, om. RV

Item si volueris dividere 94 per $\frac{2}{5}$ 6[2114], si materiam prescriptam secundum huius artis magisterium retinere volueris, describe numeros[2115] ut hic ostenditur et multiplica 6 per suam virgulam[2116] hoc est per 5, et adde 2, erunt quinte 32, quas pone super $\frac{2}{5}$ 6; et multiplica 94[2117] per eadem 5, erunt quinte 470, quas pone super 94 et divide 470 per regulam de[2118] 32[2119] que est $\frac{1\ 0}{4\ 8}$, exibunt $\frac{1\ 5}{2\ 8}$ [2120]14 pro quesita divisione. Et si 32 per regulam de 470 diviseris, habebis $\frac{2\ \ 3}{10\ \ 47}$ pro divisione de $\frac{2}{5}$ 6 in 94, ut superius in descriptione ostenditur. Verum si 113 per $\frac{13}{28}$ 11[2121] dividere volueris, [N, 60r]ut hic cernuntur[2122], numeros describe: quibus descriptis[2123], multiplica 11 per suam virgulam, erunt sexte[2124] decime 183, quas pone super $\frac{13}{28}$ 11. [F_1, f. 49v]Deinde multiplica 113 per 8 e per 2, que sunt sub virgula[2125], hoc est per 16, [A, f. 19r] erunt similiter sexte decime 1808 quas pone super 113. Divide ergo 1808 per regulam de 183, exibunt $\frac{2\ 5\ 3}{3\ 6\ 1}$ 9 pro quesita divisione. Et si diviseris 183 per regulam de 1808, habebis $\frac{1\ \ 3\ \ 11}{2\ \ 8\ \ 113}$[2126] pro divisione de $\frac{13}{28}$ 11 in[2127] 113. Et iam[2128] si plures rupti ponerentur sub eadem virgula[2129], similiter posses operari.

Divisio de 217 per $\frac{1\,2}{4\,3}$ 13[2130].

Si volueris dividere[2131] 217 per $\frac{1\,2}{4\,3}$ 13, describe numeros et multiplica 13 per suas virgulas[2132], erunt 167 duodecime, quas pone super $\frac{1\,2}{4\,3}$ 13. Deinde multiplica [R, f.48v] 217 per numeros qui sunt sub virgulis, videlicet per 3 et per 4, vel, in una multiplicatione, per 12,

---

[2114] $\frac{2}{5}$ 6 F F_1SANR, 6 $\frac{2}{5}$V
[2115] Numeros FSAR VF_1, om. N
[2116] Virgulam FSANRV, virgam F_1
[2117] 94 F F_1SANR, om. V
[2118] Regulam de FANSV F_1, om. R
[2119] 32 F ANSVF_1, 32 vel per suam regulam R
[2120] $\frac{1\ 5}{2\ 8}$ FASR, $\frac{1\ 5}{4\ 8}$ NVF_1
[2121] 11 FNA SVF_1, om. R
[2122] Cernuntur FS F_1R, cernitur AVN
[2123] Descriptis FSNA VF_1, descriptis multiplin R
[2124] Sexte F F_1SRAV, septe N
[2125] Virgula F F_1SNV, virga A, virgulis R
[2126] $\frac{1\ \ 3\ \ 11}{2\ \ 8\ \ 113}$F F_1SRAV, $\frac{1\ \ 2\ \ 11}{2\ \ 8\ \ 113}$ N
[2127] In F NSAVF_1, per R
[2128] Et iam F, etiam SAVNRF_1
[2129] Virgula F F_1SRNV, virga A
[2130] Divisio-13 F SNF_1, om. ARV
[2131] Dividere FSNRAV, divide F_1
[2132] Virgulas FSNRV, virgas AF_1

erunt similiter duodecime 2604[2133], quas pone super 217 et divide 2604[2134] per 167[2135], exibunt $\frac{52}{167}$ pro quesita divisione et si 167 per regulam de 2604[2136] diviseris exibunt[2137] $\frac{1\ \ 3\ \ 6\ \ 1}{2\ \ 6\ \ 7\ \ 31}$[2138] pro divisione de $\frac{1\ 2}{4\ 3}$ 13 in 217, ut in eadem superiori descriptione ostenditur.

Divisio de 323 per $\frac{1\ 5}{9\ 6}$[2139] *14*[2140].

Item si volueris dividere 323 per $\frac{1\ 5}{9\ 6}$[2141] 14, quamvis hanc divisionem[2142], secundum demon [/B, 70]stratum modum facere possis, tamen qualiter evitando comitatem[2143] ruptorum fieri debeat, ostendamus. Primum describe questionem, deinde multiplica 14 per suas[2144] virgulas[2145] evitando tantum sic. Multiplicabis 14 per 6 et adde[2146] 5, erunt sexte[2147] 89, quas multiplica per tertiam de 9 propter comitatem[2148] regule quam habet[2149] 6 cum 9. sunt enim 3 communis regula ipsorum, erunt octave decime 267[2150] super quas adde multiplicationem de[2151] 1 quod est super 9, in tertiam[2152] de 6 que sunt sub virgula[2153], hoc est in 2, erunt octave decime 269[2154]. Vel aliter adde[2155] $\frac{5}{6}$[2156] cum $\frac{1}{9}$, erunt $\frac{17}{18}$[2157]. Quare multiplica[2158] 14 per 18 et adde 17, erunt similiter 269[2159] octave decime, quas pone super $\frac{1\ 5}{9\ 6}$ 14, et multiplica 323 aut

---

[2133] 2724 F ANSVF_1, 2604 R
[2134] 2724 F ANSVF_1, 2604 R
[2135] 167 F AF_1SRV, 217 N
[2136] 2724 F ANSVF_1, 2604 R
[2137] Exibunt FA F_1, exibit SNVR
[2138] $\frac{1\ \ 3\ \ 6\ \ 1}{2\ \ 6\ \ 7\ \ 31}$ FV AF_1, $\frac{1\ \ 3\ \ 5\ \ 1}{2\ \ 6\ \ 7\ \ 31}$ RS, $\frac{11\ \ 61}{26\ \ 731}$ N
[2139] $\frac{5}{6}$ FA F_1SR, $\frac{1}{6}$ N
[2140] Divisio-14 F F_1SRNA, om. V
[2141] $\frac{5}{6}$ F AF_1SRV, $\frac{1}{6}$ N
[2142] Divisionem FRASNV, divisione F_1
[2143] Comitatem F ANSF_1, comunitatem R V
[2144] Suas FA F_1SRV, suos N
[2145] Virgulas FRSV, virgasA F_1, integros N
[2146] Adde FN F_1, addas S, addes ARV
[2147] Sexte F AF_1SR, om.NV
[2148] Comitatem FANS F_1, comunitatem RV
[2149] Habet FANSV F_1, habent R
[2150] 267 FASRV, 269N F_1
[2151] Adde-de FASVR, multiplicaN F_1
[2152] Tertiam FASRV, tertia F_1
[2153] Virgula F AF_1SR, virga N
[2154] 269 FRSV, 2691 A, 289 NF_1
[2155] Adde F ANVSF_1, tre puntini esibisce R
[2156] $\frac{5}{6}$ FSA VNF_1, $\frac{1}{6}$ R
[2157] $\frac{17}{18}$ SNF_1,$\frac{1}{18}$ F, $\frac{1}{7}$ A,$\frac{3}{2}$ V, tre puntini esibisce R
[2158] multiplica SANVF_1, Numeri F, om. R
[2159] 14-269 F SNF_1, 14-309 AV, esibisce vari puntini R

per 6 et per tertiam de 9, aut per 9 et per tertiam de 6 propter comitatem[2160] regule ipsorum. Ergo multiplicabis in una multiplicatione 323 per 18, quod idem est, erunt octave decime 5814[2161] quas pone super 323. Deinde divide 5814 per 269, exibunt $\frac{1\ \ 6\ \ 5}{2\ \ 6\ \ 9}$ 21 pro quesita divisione. Nam si 269 per regulam de 5814 diviseris, reperies $\frac{18\ \ 14\ \ 0}{29\ \ 17\ \ 19}$ [N, 59v]pro divisione [V, f.28v]de $\frac{1}{9}\frac{5}{6}$ 14 in[2162] 323, ut superius in descriptione[2163] ostenditur.

Divisio de 1357 per $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 83[2164].

(1) Si autem volueris dividere 1357 per $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 83, describe numeros et multiplica 83 per suas virgulas[2165], erunt sexagesime 5027. Pone ergo 5027 super $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 83, et proba ea secundum quod in multiplicationibus per ruptum tibi demostrabimus[2166]. (2) Est enim pensa ipsorum 1 per septena[F$_1$, 50r]rium, ut oportet: quam pensam pone super 5027[2167]. Deinde multiplica 1357 per numeros qui sunt sub virgulis[2168] post 83, hoc est per 3 que per 4 que per 5, vel, in una multiplicatione, per 60, erunt sexagesime 81420, quos[2169] pone super 1357. Et super ipsos pone pensam ipsorum[2170] per septenarium que est 3. Deinde divide 81420 per regulam de 5027[2171], que est $\frac{1\ \ 0}{11\ \ 457}$, exibunt $\frac{9\ \ 89}{11\ \ 457}$ 16 pro quesita divisione. Quare si multiplicavereris ipsa per[2172] [S, 34v]$\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 83, eadem 1357 provenerint, et est pensa ipsius divisionis 3 per 7[2173] sicuti est pensa de 81420. Et si 5027 per regulam de 81420[2174] diviseris, habebis $\frac{5\ \ 7\ \ 14\ \ 3}{6\ \ 10\ \ 23\ \ 59}$[2175] pro divisione de $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 83[2176] in[2177] 1357, cuius divisionis pensa est 1 per 7, sicuti[2178] sunt de 5027. Et [R, 49r] sic intelligas de pensis quarumlibet divisionum similium.

[2160] Comitatem FA NSF$_1$, comunitatem RV
[2161] 5814 F AF$_1$SRV, 2814 N
[2162] In F F$_1$AVSN, per R
[2163] In descriptione FAVSR, om. N F$_1$
[2164] Divisio-83 F F$_1$S, de divisione-83 N, om. VAR
[2165] Virgulas FVNSR, virgas A
[2166] Demostrabimus FS, demostravimus F$_1$VAR, demostratum est N
[2167] 5027 F F$_1$NASR, 5037 V
[2168] Virgulis F F$_1$VNSR, virgis A
[2169] Quos F F$_1$VNSA, quas R
[2170] Ipsorum F F$_1$VNSR, ipsarum A
[2171] 5027 F F$_1$VNSR, 5023 A
[2172] Per FVASR, om. N F$_1$
[2173] 7 F F$_1$VNS, 2 A
[2174] 81420 FANSR F$_1$, 51420 V
[2175] $\frac{5\ \ 7\ \ 14\ \ 3}{6\ \ 10\ \ 23\ \ 59}$ F F$_1$VASR, $\frac{1\ \ 7\ \ 14\ \ 3}{6\ \ 10\ \ 23\ \ 59}$N
[2176] 83 F F$_1$ANSR, om. V
[2177] In F F$_1$VNSA, per R
[2178] Sicuti F F$_1$VNSR, et sicuti A

Divisio 2456 per $\frac{1}{10}\frac{2}{9}\frac{5}{6}$ *15*[2179].

(1) Item aliam huiusmodi[2180] cum tribus ruptis proponamus divisionem, qui ad invicem comunem habeant[2181] regulam, ut modum evitandi melius intelligas. Proponimus[2182] enim tibi ut dividas 2456 per $\frac{1}{10}\frac{2}{9}\frac{5}{6}$ 15. Describe questionem, et multiplica 15 per suas virgulas[2183] evitando sic: multiplicabis 15 per 6[2184] et addes[2185] 5, erunt sexte 95, quas multiplica per tertiam de 9 que sunt sub virgula[2186] quia, propter comitatem[2187] quam habet[2188] 9[2189] cum 6, non oportet per ipsa tota[2190] multiplicare. Erunt, itaque, octave decime 285[2191] quas multiplica per 5 que sunt medietas de 10 propter 2 que sunt comunis regula de 10 et de 6[2192], erunt nonagesime 1425. Item multiplica 2, que sunt super 9 que sunt none 2[2193] [F, f. 29v], per 10[2194], erunt nonagesime[2195] 20, quas non oportet multiplicare per 6, quia tota 6 comunia sunt regularum[2196] de 9 et de 10. Nam regula de 6 est $\frac{1\ 0}{2\ 3}$ et $\frac{1}{2}$ istius[2197] regule est de regula de 10, que est $\frac{1\ 0}{2\ 5}$. Et $\frac{1}{3}$, que remanet[2198] de 6, sunt in regula de 9, cum ipsa sit $\frac{1\ 0}{3\ 3}$. Deinde multiplica 1, quod est super 10, per[2199] 9[2200], erunt nonagesime 9, quas non oportet per 6, propter comitatem[2201] predictam, multiplicare. Adde ergo nonagesimas[2202] 9 inventas[2203] cum nonagesimis 20 et cum nonagesimis 1425, erunt nonagesime 1454, quorum pensa[2204] per

---

[2179] Divisio-15 FS, divisio de-15 F_1N, om. VAR
[2180] Huiusmodi F F_1VNS, om. AR
[2181] Habeant F F_1ANSV, habent R
[2182] Proponimus F F_1ANSR, proponamus V
[2183] Virgulas F F_1VNSR, virgas A
[2184] 6 FSR, $\frac{1}{6}$ V F_1AN
[2185] Addes F F_1SVAN, adde R
[2186] Virgula F F_1SRVN, virga A
[2187] Comitatem FASVN F_1, comunitatem R
[2188] Habet FASVN, habent R, habemus F_1
[2189] 9 FASVNR, om. F_1
[2190] Ipsa tota FAS, ipsam totam V F_1N, ipsum totum R
[2191] 285 FSR, 26 V, 265 AN F_1
[2192] De 10-6 F F_1AVSN, de 6 et de 10 R
[2193] none 2 S, None F F_1AVR, om. N
[2194] 10 FVASR, 5 F_1, om. N
[2195] 1425-nonagesime FVASR F_1, om. N
[2196] Regularum FVASR, regula F_1N
[2197] istius AVNSR F_1,Sequentis F
[2198] Remanet F F_1AVN, remanent SR
[2199] Per FASR, de V, om. N
[2200] Sunt-per 9 F F_1VASR, om. N
[2201] Comitatem F F_1ASVN, comunitatem R
[2202] Nonagesimas FASVNR, nonegesimos F_1
[2203] Inventas FASR, inventis V, invenietis N F_1
[2204] Pensa F F_1VASR, pensa est N

septe[/N, 61r]narium est 5. Pone ergo 1454 super 15 et super ruptos suos, et 5 pro pensa pone desuper.

(3) Potes enim aliter de $\frac{1\ 2\ 5}{10\ 9\ 6}$ 15 nonagesima[2205] [B, 71] facere: tamen notandum est primam[2206], quare inde nonagesime fieri debeant. Debent enim fieri propter $\frac{1\ 2\ 5}{10\ 9\ 6}$ que reperiuntur[2207] in 90. Et est minor numerus, in quo ipse fractiones[2208] reperiuntur[2209]: quare multiplica 15 per 90, erunt nonagesime 1350[2210]. Super [F_1, 50v]quas adde $\frac{1\ 2}{10\ 9}$[2211] $\frac{5}{6}$ de 90, que sunt nonagesime 104, erunt similiter nonagesime 1454. Postea fac nonagesimas de 2456, erunt nonagesime 221040, quas pone super 2456 et divide 221040[2212] per regulam de 81454, exibunt $\frac{0\ 16}{27\ 27}$ 152 pro quesita divisione. Et si 1454 per regulam de 221040 diviseris, habebis divisionem de $\frac{1\ 2\ 5}{10\ 9\ 6}$[2213] 15 in 2456. Que divisio est $\frac{61\ 0\ 2}{39\ 10\ 307}$[2214], ut superius in questione ostenditur.

Incipit pars quarta de aditione et[2215] extratione seu divisione integrorum numerorum cum ruptis.

(1) Cum autem aliquem numerum cum uno rupto, vel pluribus addere volueris cum quolibet alio numero, similiter cum uno[2216] rupto vel pluribus[2217], vel minorem ipsorum cum suo rupto, vel ruptis de maiori cum suo rupto, vel ruptis[2218] extrahere, seu aliquem ipsorum per alterum dividere[2219], describe minorem numerum cum suo rupto, vel ruptis in dextera tabule parte, maiorem vero cum suis ruptis in eadem linea versus [R, 49v]sinistram, sicuti in precedenti parte demonstravimus. Et multiplica minorem numerum per suam virgulam vel virgulas[2220], sicuti superius docuimus, et summam per omnes numeros, qui fuerint[2221] sub

[2205] Nonagesimas FANSR, nonagesimis F_1V
[2206] Primam FAV, primum F_1NSR
[2207] Reperiuntur FAVRSN, recipiuntur F_1
[2208] Fractiones FAVSR, fractionis F_1N
[2209] Reperiuntur FAVSR, om. N F_1
[2210] 1350 F F_1AVSR, 1360 N
[2211] $\frac{2}{9}$ FN F_1, $\frac{3}{9}$ VASR
[2212] Quas-221040 F F_1VASR, om. N
[2213] $\frac{5}{6}$ F F_1VNSR, $\frac{7}{6}$ A
[2214] $\frac{61\ 0\ 2}{39\ 10\ 307}$ FV, $\frac{61\ 0\ 2}{89\ 10\ 307}$ N F_1ASR
[2215] et S F_1NRVA, om. F
[2216] Uno FASR, om. VN F_1
[2217] Addere-vel pluribus FASRV, om. N F_1
[2218] De maiori-ruptis F F_1ASRN, om. V
[2219] Dividere FSRVA, divide N F_1
[2220] vel virgulas S F_1ANRV, om. F

virgula, vel virgulis[2222] maioris[2223] numeri multiplica. Et multiplicatio que evenerit[2224] super prescriptum numerum minorem reserva. Deinde maiorem numerum per suam virgulam, vel virgulas, et per[2225] omnes numeros qui sunt sub virgula, vel virgulis[2226] minoris numeri multiplica. Et summam super ipsum[2227] maiorem numerum describe. (2) Et tunc si[2228] volueris addere, addes[2229] ipsos numeros repertos, et coadunatam summam per omnes ruptos qui[2230] fuerint in positione divide, et habebis additationem ipsorum. (3) Et si minorem[2231] de maiori[2232] extrahere volueris, extrahes repertum numerum, et positum super minorem numerum de reperto numero, et posito super maiorem[2233], re[/V, 29r]siduumque per omnes ruptos similiter divide, et habebis residuum quos[2234] est inter maiorem et minorem. (4) Et si maiorem per[2235] minorem dividere [S, 35r] volueris, maiorem repertum[2236] numerum per minorem repertum numerum divide. (5) Et si minorem per maiorem dividere volueris[2237], divide minorem repertum[2238] numerum [N, 61v] per mai[/A, 19v]orem repertum numerum, et sic habebis qualem volueris ipsorum divisionem. (6) Et ut hec omnia apertius[2239] intelligantur, singulariter ea cum positionibus numerorum presentialiter proponimus demonstrare.

Additio de $\frac{1}{3}$ 12 cum $\frac{3}{4}$ 126[2240].

(1) Si volueris addere $\frac{1}{3}$ 12 cum $\frac{3}{4}$ 126, describe numeros ut hic ostenditur, et multiplica 12[2241] per suam[2242] virgulam[2243], erunt tertie 37, quas[2244] multiplica per 4, que sunt sub[2245]

[2221] Fuerint F F_1ASRN, sunt V
[2222] Virgulis F F_1ASRN, virgulas V
[2223] Maioris F F_1ASNV, minoris R
[2224] Evenerit FASRV, evenitur N F_1
[2225] Per FASRV, om. N F_1
[2226] Virgulis F F_1ASRN, virgule V
[2227] Ipsum F F_1SANV, om. R
[2228] Si FASRV, om. N F_1
[2229] Addes F F_1ASRV, adde N
[2230] Qui F F_1ASRN, quem V
[2231] Minorem SANRV F_1, maiorem FR_1
[2232] Maiori F F_1ANSV, maiore R
[2233] Maiorem FASRV, maiorem numerum F_1N
[2234] Quos FASRV, quod N F_1
[2235] Per FASRV, vel F_1N
[2236] Repertum FASRV, ruptum A, om. N F_1
[2237] Maiorem repertum-dividere volueris FS, maiorem repertum numerum per minorem divide-volueris R, maiorem repertum numerum V, om. N F_1
[2238] Repertum F F_1SRNV, ruptum A
[2239] Omnia apertius FSRNA F_1, apertius omnia V
[2240] Additio-126 FF_1ASRN, om. V
[2241] 12 F F_1ASRV, ea 12 N, (ma si noti che in F_1 la lettura di *ca* di *multiplica* è ambigua: potrebbe anche trattarsi di *ea*)
[2242] Suam FASRV, suas N F_1
[2243] Virgulam FASRV, virgulas N F_1
[2244] Quas FASRV, quos N F_1

virgula post 126, erunt duodecime 148, quas pone super $\frac{1}{3}$ 12. Deinde multiplica[2246] 126 per suam virgula[2247], erunt quarte 507 quas multiplica per 3 que sunt sub virgula post 12, erunt duodecime 1521, quas pone super $\frac{3}{4}$ 126. Adde itaque duodecimas[2248] 148 cum duodecimis[2249] 1521[2250], erunt duodecime 1669 quas divide per utrumque ruptum, videlicet per 3 et per 4, vel in una divisione per 12, exibunt $\frac{1}{12}$ 139, ut in questione ostenditur.

De eodem[2251].

(1) Potes enim hanc eamdem additationem[2252] aliter reperire, ut addas integra cum integris, videlicet 12 cum 126, erunt 138. Deinde adde ruptos in unum, scilicet $\frac{1}{3}$ cum $\frac{3}{4}$, sicuti[2253] superius in prima parte huius capituli demonstravimus, erit[2254] $\frac{1}{12}$ 1 que adde cum 138, erunt $\frac{1}{12}$ 139, ut modo pro suprascripta[2255] iunctione invenimus.

Extractio de[2256] $\frac{1}{3}$ *12 de* $\frac{3}{4}$ *126*[2257].

(1) Verum si $\frac{1}{3}$ 12 de $\frac{3}{4}$ 126 extrahere volueris, describes questionem ut supra, et reperies prescripta[2258] 148 et 1521 et[2259] extrahes 148 de 1521, remanebunt duodecime 1373, quas divide suprascripta ratione per 12[2260], exibunt integre[2261] $\frac{5}{12}$ 114 pro residuo dicte extractionis ut in questione ostenditur.[R, 50r]

(2) Vel aliter, extrahe integra de integris, videlicet 12 de 126, remanent 114. Deinde extrahe $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$[2262], remanent $\frac{5}{12}$, quas adde cum 114, erunt $\frac{5}{12}$ 114 similiter. Et si dividere

---

2245 Sub FARSV, om. N F_1
2246 Multiplica F F_1ARSN, om. V
2247 Virgula FNAS, virgulam RV F_1
2248 Duodecimas F F_1NSR, duodecimis AV
2249 Duodecimis F F_1ASNV, duodecimas R
2250 1521 FASRV, 1521 deinde multiplica per suam virgulam erunt quarte... quas multiplica per... que sunt sub virgula post... N F_1
2251 De eodem FNA F_1, om. ARV
2252 Additationem FAS, addictionem V, addimitationem F_1N, divisionem R
2253 Sicuti FASV, sicut NR F_1
2254 Erit F F_1ANRV, eritque S
2255 Suprascripta FA, prescripta NSRV F_1
2256 De F F_1NS, om. ARV
2257 Extractio-126 F F_1ANS, om. RV
2258 Prescripta FNARVS, prescriptam F_1
2259 Et F F_1NARV, om. S
2260 12 FASRV, 3 N F_1
2261 Integre FANV, integra SR F_1
2262 $\frac{3}{4}$ FRVAS F_1, $\frac{1}{4}$ N

volueris $\frac{3}{4}$ 126 per $\frac{1}{3}$ 12, divides 1521 per regulam de 148[2263], que est $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 37}$[2264], exibunt $\frac{1\ \ 10}{4\ \ 37}$ 10 pro quesita divisione, ut in sua[2265] demonstrabitur[2266] descriptione[2267].

(4) Item si minorem per maiorem[2268] dividere volueris, scilicet[2269] $\frac{1}{3}$ 12 per $\frac{3}{4}$ 126[2270] repertis[2271], quidem 148 et 1521, divides 148 per regulam de 1521, que est $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{9\ \ 13\ \ 13}$, [N, 62r]exibit $\frac{4\ \ 3\ \ 1}{9\ \ 13\ \ 13}$ unius integri pro quesita divisione.

Addictio de $\frac{3}{4}$ 13 cum $\frac{2}{5}$ 171[2272].

(1) Si, vero, $\frac{3}{4}$ 13 cum $\frac{2}{5}$ 171 addere volueris, describe numeros ut prediximus[2273] et multiplica 13 per 4 et adde 3 que sunt super 4, erunt quarte 55 quas multiplica per 5[2274] que sunt sub virgula post 171, erunt vigesime 275, quas pone super $\frac{3}{4}$ 13, et multiplica 171 per suam[2275] virgulam, scilicet per 5 et adde 2, erunt quinte 857 quas multiplica per 4 que sunt sub virgula post 13, erunt vigesime 3428, quas pone super $\frac{2}{5}$ 171: deinde adde 275 cum 3428, erunt vigesime 3703 quas divide per ruptos, scilicet per 4 et per 5 qui[2276] sunt sub virgulis utriusque numeri, exibunt $\frac{11}{210}$ 185 pro quesita iunctione. [F_1, 51v]

Probatio suprascripte[2277] *iunctionis*[2278].

(1) Que iunctio, si recta est, ita per 7 cognoscitur[2279]. Pensa de 13, que[2280] est 6[2281], per 4 multiplica[2282], et de super adde 3 que sunt super 4, erunt 27, quorum pensa que est 6 iterum

[2263] Regulam de 148 F F_1VNAS, 148 vel per eorum regulam R
[2264] Que-$\frac{1\ \ 0}{4\ \ 37}$ FRVN SF_1, om. A
[2265] Sua FRAVS, summa N
[2266] Demonstrabitur F, demonstratur SARN F_1, om. V
[2267] Descriptione FRS, descriptione descriptione per $\frac{3}{4}$ 126 N (om. Descriptione)AF_1
[2268] Minorem per maiorem FAS, maiorem per minorem N F_1, om. VR
[2269] Scilicet F F_1AVNS, om. R
[2270] Per $\frac{3}{4}$ 126 FRS, om. AN (oppure è al rigo di sopra? Però non c'è rimando chiaro e poi c'è descriptione), om. V
[2271] Repertis F F_1ANVS, reperies R
[2272] Addictio-171 FS, om. AN VRF_1
[2273] Demostra(bi)tur-prediximus F AF_1NRS, om. V
[2274] 5 FA VRSF_1, quinque 5 N
[2275] Suam F_1 FRVAS, sua N
[2276] Qui FRS, que AV N F_1
[2277] Suprascripte FR, istius N F_1 , om. VAS
[2278] Probatio- iunctionis F F_1NR, om. VAS
[2279] Per 7 cognoscitur F F_1NVRS, cognoscitur per 7 A
[2280] Que F F_1NVRS, om. A
[2281] 6 F F_1NVRS, 6 multiplica ea A
[2282] Multiplica F F_1NVRS, om. A

per 5, que sunt sub virgula multiplica, erunt 30, quorum pensa, que est 2, est pensa de 275. (2) Similiter studeas reperire pensam de 3428 per ipsorum originem sic. Pensam[2283] de 171[2284] que est 3 per septenarium, multiplica per 5 que sunt sub virgula et adde 2 que sunt super[2285] 5, erunt 17, quorum pensa que est 3 multiplica per 4 que sunt sub virgula, erunt 12[2286], quorum pensa, que est 5, debet esse pensa de 3428 et[2287] quia[2288] scimus recte precessisse[2289] cum habuimus ipsa 3428[2290] ita est[2291]: quam pensam[2292] pone super 3428 deinde adde pensa[2293] de[2294] 275, videlicet 2, cum pensa de 3428, scilicet cum 5, erunt 7 quorum pensam[2295], [S. 35v] que est 0, habeas pro pensa summe iunctionis.

De eorumdem additione[2296].

(1) Potes enim prescriptam iunctionem aliter invenire. Videlicet ut addas 13 cum 171[2297], erunt 184[2298]. Et $\frac{3}{4}$ cum $\frac{2}{5}$, erit[2299] $\frac{1\ 1}{2\ 10}$ 1, que adde[2300] cum 184[2301], erunt $\frac{1\ 1}{2\ 10}$ 185, ut per eorum iunctionem[2302] repertum est.

Extractio de[2303] $\frac{3}{4}$ *13 de* $\frac{2}{5}$ *171*[2304].

(1) Et si $\frac{3}{4}$ 13 de $\frac{2}{5}$ 171 extrahere volueris, extrahe 275 de 3428, remanent 3153 que divide per ruptos, exibunt $\frac{1\ 6}{2\ 10}$ 157 pro residuo quesite extractionis.

(2) Quod residuum, si rectum sit[2305], ita per 7 cognoscitur[2306]: pensam de 275, que est 2, de pensa de 3428[2307], que est 5, extrahe. Residuum vero, quod est 3, habeas pro pensa de $\frac{1\ 6}{2\ 10}$[2308].

[2283] Pensam F F_1NVRS, pensa A
[2284] 171 F F_1NVRS, 17 A
[2285] SuperFA F_1NRS, sub V
[2286] 12 FA F_1NRS, 13 V
[2287] Et FRS, et 9 AV N F_1
[2288] Quia F F_1NAVS, quia ita est R
[2289] Precesisse VRA F_1FN, percesisse S
[2290] 3428 V SRAF F_1, 1428 N
[2291] Ita est F F_1NAV, om. RS
[2292] Pensam FS F_1NAR, pensa V
[2293] Pensa FN, pensam ASRVF_1
[2294] De FS F_1NVR, om. A
[2295] Pensam AFNVR, pensa SF_1
[2296] De-additione FNRS, om. VAS
[2297] 171 N RF_1, 271 ASF, in V sono indecisa perché tende a confondere 1 e 2
[2298] 184 N RF_1, 284 ASF, in V sono indecisa perché tende a confondere 1 e 2
[2299] Erit FSR F_1NV, om. A
[2300] Adde ASRF, addes N F_1
[2301] Erit-184 F F_1NARS, om. V
[2302] Iunctionem F F_1NARV, iunctione S
[2303] De FRS, om. N F_1
[2304] Extractio-171 F F_1R, om. AV

(3) Possumus enim $\frac{3}{4}$ 13 aliter de $\frac{2}{5}$ 171 extrahere, videlicet ut extrahas 13 et $\frac{3}{4}$[2309] de 171, rema[R, 50v]net $\frac{1}{4}$ 157, cum quibus adde $\frac{2}{5}$, erunt $\frac{1\ 2}{4\ 5}$ 157, hoc est $\frac{1\ \ 6}{2\ \ 10}$ 157.

Divisio[2310] $\frac{2}{5}$ *171 per* $\frac{3}{4}$ *13*[2311].

(1) Et si $\frac{2}{5}$ 171 per $\frac{3}{4}$ 13 dividere volueris, divide 3428 per regulam de[2312] 275, que est $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{5\ \ 5\ \ 11}$ [B, 73] exibunt $\frac{3\ \ 0\ \ 5}{5\ \ 5\ \ 11}$ 12 pro quesita divisione, quorum pensa debet esse 5 per 7, sicut est de 3428 que dividuntur[2313]. (2) Et si $\frac{3}{4}$ 13 per $\frac{2}{5}$ 171 dividere volueris[2314], divide 275 [V, 29r]per regulam de 3428, que est $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 857}$[2315], exibunt $\frac{3\ \ 67}{4\ \ 857}$[2316] unius integri, quorum ruptorum pensa per septenarium est 2, sicuti fuit de 275.

Addictio de $\frac{5}{6}$ *14 cum* $\frac{2}{9}$ *231*[2317].

(1) Item si volueris addere $\frac{5}{6}$ 14 cum $\frac{2}{9}$ 231, describe numeros ut hic ostenditur. Et quamvis hanc iunctionem per suprascriptum modum facere possis, tamen propter comitatem[2318] quam habent $\frac{5}{6}$ cum $\frac{2}{9}$, qualiter hoc cum evitatione fieri debeat, indicemus. (2) Multiplicabis itaque 14 per 6, et addes 5, erunt sexte 89 quas [F_1, 52r]multiplica per 3, scilicet per tertiam partem de 9 propter comitatem[2319] quam habet[2320] 6 cum 9, erunt XVIII.me 267, quas pone super $\frac{5}{6}$ 14 et proba eas per pensam quamlibet. Est enim pensa ipsarum 7 per 13, quam pone super 267[2321]. Deinde multiplica 231[2322] per 9 et adde 2, erunt none[2323] 2081

[2305] Sit FNSV F_1, est RA
[2306] Per 7 cognoscitur FRSV F_1, cognoscitur per 7 A
[2307] 3428 F F_1RSVA, 2428 N
[2308] $\frac{1\ \ 6}{2\ \ 10}$ F, $\frac{1\ \ 6}{2\ \ 10}$ 157 RSV F_1
[2309] 13 et $\frac{3}{4}$ F F_1SV, $\frac{3}{4}$ 13 R
[2310] Divisio F F_1SA, divisio de R
[2311] Divisio-13 FR, om. VS
[2312] De FSVAR, om. F_1
[2313] Dividuntur FSVAR, dividitur F_1
[2314] Volueris F F_1SVA, vis R
[2315] $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 857}$ F F_1RVA, $\frac{1\ \ 0}{5\ \ 857}$ S
[2316] $\frac{3\ \ 67}{4\ \ 857}$ FRVA, $\frac{3\ \ 68}{4\ \ 857}$ S F_1
[2317] Addictio-231 F F_1SR, om. VA
[2318] Comitatem FS F_1A, comunitatem RV
[2319] Comitatem F F_1SA, comunitatem RV
[2320] Habet FSA, habent R F_1V
[2321] 267 F F_1RVA, 67 S
[2322] 231 FSR, 9231 VA, 2/9 231 F_1
[2323] None F F_1SVA, om. R

quas[2324] multiplica per tertiam de 6, hoc est per 2, erunt similiter XVIII.me 4162, quas pone super $\frac{2}{9}$ 231, et super eas[2325] pone pensam ipsarum inventam similiter per [F, 30v] 13 que est 2. Post hec adde 267 cum 4162, erunt 4429 que divide per unum[2326] ex ruptis qualem volueris et per partem comitatis[2327] alterius hoc est aut divides per 6 et per tertiam de 9, scilicet[2328] per 3, aut divides[2329] per 9 et per tertiam de 6 videlicet per 2[2330], exibunt $\frac{1\ 0}{2\ 9}$ 246 pro quesita iunctione, cuius summe pensa est 9 per 13, que exit ex iunctione pense de 267, que est 7, et de 4162[2331], que est 2. Et ut hoc intelligibilius fiant, divide 6 et 9 per comitatem[2332] eorum, scilicet per 3, exibunt 2 et 3. Pone itaque 2 sub 6 et 3 sub 9 et multiplica inventa 89 per 3 posita sub 9[2333] et 2081 per 2 posita sub 6 et habebis numeros suprascriptos quorum additionem[2334] divide per unum[2335] ex numeris qui sunt sub virgis[2336] et per numerum positum sub alio scilicet per 6 et per 3, vel per 9 et per 2. Potes enim aliter $\frac{5}{6}$ 14 cum $\frac{2}{9}$ 231 addere, videlicet ut [A, f.30v]addas primum 14 cum 231[2337], erunt 245, deinde adde $\frac{5}{6}$ cum $\frac{2}{9}$ erit[2338] $\frac{1}{13}$ [2339]1, que adde cum 245, erunt $\frac{1\ 0}{2\ 9}$ 246, ut superius per priorem modum reperta[2340] sunt.

Extractio[2341] $\frac{5}{6}$ 14 de $\frac{2}{9}$ 231[2342].

(1) Et si $\frac{5}{6}$ 14 de $\frac{2}{9}$ 231 extrahere volueris[2343], extrahes 267 de 4162, remanebunt 3895, quorum pensa est 8 per 13, que sic reperitur[2344], scilicet cum non possis extrahere 7, que sunt pensa de 267 de pensa de 4162, hoc est de 2, debes addere numerum pense, videlicet 13 cum

---

2324 Quas F F_1SVA, que R
2325 Super-pone FSRA F_1, om. V
2326 Unum F F_1SVA, numerum R
2327 Comitatis F_1FSRA, comunitatis V
2328 Scilicet F F_1SVA, om. R
2329 Divides F F_1SVA, om. R
2330 Per 2 F F_1SVA, aut per 6 et per 3 aut per 9 et per 2 R
2331 4162 F F_1RVA, 462 S
2332 Comitatem FVA F_1, comunitatem RS
2333 9 FS F_1VA, 9 erunt R
2334 Additionem FS F_1VA, aiunctione R
2335 Unum F F_1SVA, numerum R
2336 Virgis F F_1SA, virgulis RV
2337 231 F F_1SRV, om. A
2338 Erit F F_1SVA, erunt R
2339 $\frac{1}{13}$ FR, $\frac{1}{18}$ SVA F_1
2340 Reperta F F_1RVAS_2, repertum S_1
2341 Extractio FS, extractio de F_1R, om. VA
2342 Extractio-231 F F_1SR, om. VA
2343 Volueris F F_1SVA, vis R
2344 Sic reperitur F, reperitur sic R F_1SVA

2 prescriptis[2345], faciunt 15 de quibus extrahe predictam 7, remanent 8 pro pensa de 3895 ut prediximus [R, 51r]divides itaque 3895 per $\frac{10}{29}$ suprascripta ratione exibunt $\frac{1\ 3}{2\ 9}$ 216 pro residuo dicte extractionis.

(2) Aliter extrahe 14 de $\frac{2}{9}$ 231, remanent $\frac{2}{9}$ 217, de quibus extrahes $\frac{2}{9}$ 1. Cum[2346] non possis $\frac{5}{6}$ de $\frac{2}{9}$ extrahere, remanebunt 216[2347], et extrahes $\frac{5}{6}$ de $\frac{2}{9}$ 1 faciens xviii.as ex eis, remanebunt[2348] $\frac{7}{18}$; quibus additis cum 216, faciunt $\frac{13}{29}$ 216, ut superius reperta sunt.

Divisio de $\frac{2}{9}$ 231 per $\frac{5}{6}$ 14.[2349] [S, 36r]

(1) Verum si $\frac{2}{9}$ 231 per $\frac{5}{6}$ 14 dividere volueris, divide 4162 per regulam de[2350] 267, exibunt $\frac{1\ 5\ 2}{3\ 8\ 9}$ 15 pro quesita divisione.

Divisio de $\frac{5}{6}$ 14 per $\frac{2}{9}$ 231[2351].

(1) Item si $\frac{5}{6}$ 14 dividere volueris per $\frac{2}{9}$ 231[2352], divide 267[2353] per regulam de 4162, exibunt[2354] $\frac{1}{2}$ $\frac{133}{2081}$ pro quesita divisione. [B, 74; F_1 52v]

Additio de $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 15 cum $\frac{1}{7}\frac{3}{5}$ 322[2355].

(1) Item si $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 15 cum $\frac{1}{7}\frac{3}{5}$ 322 addere volueris, describe numeros ut hic ostenditur. Et multiplica 15 per suas virgulas, scilicet per 3, et adde 1, que per 4 et adde multiplicationem de 1, quod est super 4 in 3, erunt XIIe 187, quas multiplica per numeros qui sunt sub virgulis post 322, scilicet per 5 et per 7, erunt quadrigentesime vigesime 6545, quas pone super $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 15. Deinde multiplica 322 per suas virgulas, erunt trigesime quinte 11296, quas multiplica per numeros qui sunt sub virgulis post 15, erunt quadrigentesime vigesime 135552, quas pone

2345 Prescriptis FSVAR, descriptis F_1
2346 Cum FSVA, cum inde R
2347 216 F F_1SR, 266 VA
2348 Remanebunt FSRV F_1, remanent A
2349 Divisio-14 F F_1SR, om. VA
2350 4162-de FS F_1RA, om. V
2351 Divisio-231 F F_1SRA, om. V
2352 Dividere-231 F F_1SVA, per $\frac{2}{9}$ 231 dividere volueris R
2353 267 FSVAR, 262 F_1
2354 Exibunt F F_1SR, exibit V
2355 Additio-322 FSV, o. A

super $\frac{1}{7}\frac{3}{4}$[2356] 322. Deinde adde 6545 cum 135552, erunt CCCCXX. 142097[2357], quas divide per 420, hoc est per omnes[2358] numeros qui sunt sub virgulis et aptabis ipsos, exibunt $\frac{5\ \ 1\ \ 3}{6\ \ 7\ \ 10}$ 338 pro quesita iunctione, cuius pensa est[2359] 10 per 11.

Aliter iunge 15 cum 322, erunt 337 et adde $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ cum $\frac{1}{7}\frac{1}{3}$[2360], secundum quod docuimus in secunda parte huius capituli, erit $\frac{5\ \ 1\ \ 3}{6\ \ 7\ \ 10}$ 1, que adde cum 337[2361], erunt $\frac{5\ \ 1\ \ 3}{6\ \ 7\ \ 10}$ 333[2362], ut prediximus.

Extractio de $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 15 de $\frac{1}{7}\frac{3}{5}$ 322[2363].

(1) Et[2364] si $\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$ 15 de $\frac{1}{7}\frac{3}{5}$ 322 extrahere volueris, extrahe 6545 de 135552, remanebunt 129007, que divides suprascripta demonstratione per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{6\ \ 7\ \ 10}$, exibunt $\frac{1\ \ 4\ \ 1}{6\ \ 7\ \ 10}$ 307 pro residuo quesito[2365] extractionis.

(2) Aliter extrahe 15 de 332, remanebunt 307[2366], et extrahe $\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$ de $\frac{1}{7}\ \frac{3}{5}$, remanebunt $\frac{1\ \ 4\ \ 1}{6\ \ 7\ \ 10}$ [V, 30r] que adde cum 307, erunt $\frac{1\ \ 4\ \ 1}{6\ \ 7\ \ 10}$ 307, ut prediximus. Verum si $\frac{1}{7}\ \frac{3}{5}$ 322 per $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$[2367] 15 dividere volueris, divide 135552 per regulam de 6545, exibunt $\frac{2\ \ 60\ \ 12}{6\ \ 711\ \ 17}$ 20 pro quesita divisione.

Divisio $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 15 per $\frac{1}{7}\frac{3}{5}$ 322[2368].

(1) Item si $\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$ 15 per $\frac{1}{7}\frac{3}{5}$ 322 dividere volueris, divide 6545 per regulam de 135552, exibunt $\frac{5\ \ 2\ \ 0\ \ 17}{6\ \ 8\ \ 8\ \ 352}$[2369] pro quesita divisione: et sic secundum prescriptum modum quoslibet numeros cum duobus ruptis addere et extrahere et dividere potes: tamen alias quasdam

---

[2356] $\frac{3}{4}$ FS, $\frac{3}{5}$ VA
[2357] $\frac{142097}{420}$ S
[2358] Omnes FSV, suos A
[2359] Pensa est FSA, pensem V
[2360] $\frac{1}{3}$FS, $\frac{3}{5}$ VA
[2361] 337 FSV, 332 A
[2362] 333 FSV, 338 A
[2363] Extractio-322 F, om. SVA
[2364] Et FSV, Item A
[2365] Quesito FSV, dicte A
[2366] 307 FSV, 317 A
[2367] 322-$\frac{1}{3}$ FSV, om. A
[2368] Divisio-322 FS, om. VA
[2369] $\frac{5\ \ 2\ \ 0\ \ 17}{6\ \ 8\ \ 8\ \ 352}$FSV, $\frac{5\ \ 2\ \ 0\ \ 17}{6\ \ 8\ \ 8\ \ 353}$A

questiones, ex quibus evitare possumus comitatem regule ruptorum, ad presens proponimus demonstrare.

Additio[2370] $\frac{1}{5}\frac{3}{4}$ *16 cum* $\frac{1}{9}\frac{4}{5}$ *422*[2371].

(1) Si volueris addere $\frac{1}{5}\frac{2}{4}$[2372]16 cum $\frac{1}{9}\frac{4}{5}$422[2373], descriptis numeris, multiplica primum 16 per suas virgulas, erunt (F, 31r] XXe 339, quas cum debeas multiplicare per 5 et per 9 que sunt sub aliis virgulis nun multiplicabis nisi tantum per 9 propter aliam[2374] 5, que sunt sub virgulis[2375] post $\frac{3}{4}$ 16, erunt CcLXXXme 3051, quas serva super $\frac{1}{5}\frac{3}{4}$ 16: deinde multiplica 442 per suas virgulas, erunt XLV 19931, quas multiplica tantum per 4, que sunt sub virgula post 16 quare[2376] relinques quod non[2377] multiplicare per 5 supradicta ratione, erunt similiter CcLXXXme 79724[2378], quas pone super $\frac{1}{9}\frac{4}{5}$442, deinde adde 3051 cum 79724, erunt[2379] CeLXXXe 82775, quas divide per[2380] 180 vel per omnes numeros qui sunt sub virgis, preter quam per unum ex duobus quinariis, quia sicuti relinquuntur quinque in multiplicatione unius cuiusque duorum numerorum prescriptorum, ita debent relinqui in divisione summe iunctionis ipsorum ergo divide[2381] 882775[2382] per $\frac{1\;\;0\;\;0}{4\;\;5\;\;9}$, et evitabis inde $\frac{1}{5}$, exibunt $\frac{3\;\;7}{4\;\;9}$ 459 pro quesita iunctione.

Vel potes addere integra cum integris et quintam cum quintis, et $\frac{3}{4}$ cum $\frac{1}{9}$, ut in precedentibus docuimus, et habebis similiter summam eiusdem iunctionis.

Extractio $\frac{1}{5}\frac{3}{4}$ *16 de* $\frac{1}{9}\frac{4}{5}$ *442*[2383].

(1) Iterum si $\frac{1}{5}\frac{3}{4}$ 16 de $\frac{1}{9}\frac{4}{5}$ 442 extrahere volueris, extrahes 3051 de 79724, remanebunt 76673 quesita[2384] ratione divides per $\frac{1\;\;0\;\;0}{2\;\;9\;\;10}$[2385], exibunt $\frac{1\;\;5\;\;9}{2\;\;9\;\;10}$ 425 pro residuo quesite[2386]

[2370] Additio F, additio de S
[2371] Additio-422 FS, om. VA
[2372] $\frac{2}{4}$ FSA, $\frac{3}{4}$ V
[2373] 422 FSV, 442 A
[2374] Aliam F, alia SV
[2375] Virgulis F, virgula SVA
[2376] Quare FVA, quia S
[2377] Quod non FVA, om. S
[2378] 79724FS, 29724 VA
[2379] Erunt FSA, erunt similiter V
[2380] Divide per FS, pone super VA
[2381] Divide F, divides SVA
[2382] 882775 F, 82775 SVA
[2383] Extractio-442 FS, om. VA
[2384] Quesita F, que suprascripta SVA

extractionis [B, 75] vel extrahe $\frac{1}{5}$ 16[2387] de $\frac{1\ 4}{9\ 5}$ 442, remanet[2388] $\frac{1\ 3}{9\ 5}$ 426[2389]; et tunc extrahes $\frac{3}{4}$ de $\frac{1\ 3}{9\ 5}$ de $\frac{1\ 3}{9\ 5}$, si possibile esset[2390]. Sed quia possibile non est, extrahe $\frac{1\ 3}{9\ 5}$ 1 de $\frac{1\ 3}{9\ 5}$ 426, remanent 425: deinde extrahes $\frac{3}{4}$ de prescripto[2391] $\frac{1\ 3}{9\ 5}$ 1, remanebunt $\frac{1\ \ 5\ \ 9}{2\ \ 9\ \ 10}$ amplius de 425 pro eodem residuo.

Rursus si $\frac{1\ 4}{9\ 5}$ 442 per $\frac{1\ 3}{5\ 4}$ 16[2392] dividere volueris, divide 79724 per regulam de 3051, [S, 36v] exibunt $\frac{2\ \ 6\ \ 11}{3\ \ 9\ \ 113}$[2393] 26 pro quesita divisione. Et si $\frac{1\ 3}{5\ 4}$ 16 per $\frac{1\ 4}{9\ 5}$ 442 dividere volueris, divide 3051 per regulam de 79724, exibunt $\frac{3\ \ 762}{4\ \ 19931}$ pro quesita divisione.

Additio $\frac{1\ 2}{6\ 5}$ *17 cum* $\frac{1\ \ 7}{10\ 9}$ *523*[2394].

(1) Si vero $\frac{1\ 2}{6\ 5}$ 17 cum $\frac{1\ \ 7}{10\ 9}$ 523 addere volueris, descriptis numeris, multiplica 3 per 6, que sunt sub virgis, erunt 30 et 9 per 10 que sunt sub aliis virgis alterius lateris erunt 90, tene 30 in manu dextera et 90 in sinistra et divide ea per maiorem cumitatem quam habent ad invicem, scilicet per 30, exibit 1 in manu dextera et 3 in sinistra. Pone ergo 1 sub $\frac{1\ 2}{6\ 5}$ et 3 sub $\frac{1\ \ 7}{10\ 9}$, ut in questione iacent, et multiplica 17 per suas virgas, erunt 527 xxxe, quas multiplica per 3 posita sub $\frac{1\ \ 7}{10\ 9}$, erunt 1581 nonagesime, quas pone super $\frac{1\ 2}{6\ 5}$ 17, deinde multiplica 523 per suas virgas, erunt similiter nonagesime 47149, quas multiplica per 1 positum sub $\frac{1\ 2}{6\ 5}$, erunt similiter 47149 nonagesime, quas pone super $\frac{1\ \ 7}{10\ 9}$ 523 et adde ea cum 1581, erunt 48730 que divide per numeros qui sunt sub virgis unius lateris et per numerum positum sub virgis alterius, hoc est per 5, et per 6, et per 3, vel per 9, et per 10, et per 1, et sic cadet divisio in 90, quia oportet ut summa predicta nonagesimarum reintegretur, exibunt pro quesita iunctione $\frac{4}{9}$ 541, hunc enim modum studeas tenere in omnibus similibus cum sit precautior ceteris et melior.

[2385] $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 9\ \ 10}$ FA, $\frac{2\ \ 0\ \ 0}{3\ \ 9\ \ 10}$ SV
[2386] Quesite FSV, dicte A
[2387] 16 FSV, 10 A
[2388] Remanet FSA, remanent V
[2389] 426 FSV, 446 A
[2390] Esser FSV, erunt A
[2391] Prescripto FSA, predicto V
[2392] 16 FSV, 18 A
[2393] $\frac{2\ \ 6\ \ 11}{3\ \ 9\ \ 113}$ FSV, $\frac{2\ \ 6\ \ 18}{3\ \ 9\ \ 113}$ A
[2394] Additio-523 F, om. A

Et si $\frac{1\ 2}{6\ 5}$ 17 de $\frac{1\ \ 7}{10\ 9}$ 523 extrahere volueris, extrahes quidem 1581 de 47149, residua vero que sunt 45568, divides suprascripta ratione per $\frac{1\ \ 0}{9\ 10}$, exibunt $\frac{4\ 2}{5\ 9}$ 506 pro residuo quesite extractionis. Vel extrahes 17 de 523, remanebunt 506 et extrahes $\frac{1\ 2}{6\ 5}$ de $\frac{1\ \ 7}{10\ 9}$, remanebunt $\frac{4\ 2}{5\ 9}$, ut prediximus.

Divisio de $\frac{1\ \ 7}{10\ 9}$ *523 per* $\frac{1\ 2}{6\ 5}$ *17.*

(1) Nam si $\frac{1\ \ 7}{10\ 9}$ 523 per $\frac{1\ 2}{6\ 5}$ 17 dividere volueris, divides 47149 per 1581, et si diviseris 1581 per 47149, habebis divisionem de $\frac{1\ 2}{6\ 5}$ 17 in $\frac{1\ \ 7}{10\ 9}$ 523, ut in precdentibus singulariter demonstravimus.

Incipit pars quinta de additatione et extratione seu divisione partium numerorum integrorum cum ruptis.

(1) Si volueris addere $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$ 29 cum $\frac{5}{7}$ de $\frac{2}{9}$ 128, describes numeros ut hic ostenditur et multiplica 29 per 5 et adde 2, erunt 147 que multiplica per 3 que sunt super 4 erunt 441 que multiplica per 7 et per 9 que sunt sub virgula alterius numeri erunt 27783 erunt 441 que multiplica per 7 et per 9 que sunt sub virgula alterius numeri, erunt 27783 que pone super $\frac{2}{5}$ 29, quorum pensa est 8 per 11, que reperitur secundum quod multiplicavimus, deinde multiplica 128 per 9 et adde 2 que per 5 que sunt super 7, erunt 5770 que multiplica per 5 et per 4 que sunt sub virgulis alterius primi numeri, erunt 115400, que pone super $\frac{2}{9}$ 128 $\frac{5}{7}$, et est pensa ipsorum 10 per 11, adde ergo 27783 cum 115400, erunt 143183 que divide per omnes ruptos, scilicet per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{4\ 5\ 7\ 9}$, exibunt $\frac{1\ 2\ 3\ 6}{2\ 7\ 9\ 10}$ 113 pro quesita [F, 31v] iunctione.

Extractio de $\frac{2}{5}$ 29 $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{9}$ 128 $\frac{5}{7}$.

(1) Et si $\frac{2}{5}$ 29 $\frac{3}{4}$ extrahere vis de $\frac{2}{9}$ 128 $\frac{5}{7}$, extrahes 27733 de 115400, remanent 37617, que similiter divide per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{2\ 7\ 9\ 10}$, exibunt $\frac{1\ 2\ 3\ 5}{2\ 7\ 9\ 10}$ 69 pro residuo quesite extractionis. [B, 76]

Divisio de $\frac{2}{9}$ *128* $\frac{5}{7}$ *per* $\frac{2}{5}$ *29* $\frac{2}{4}$.

(1) Rursus si $\frac{2}{9}$ 128 $\frac{5}{7}$ per $\frac{2}{5}$ 29 $\frac{2}{4}$ dividere volueris, repertis prescriptis numeris, scilicet 27783 et 115400, studeas invenire regulam de 27783, que est $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{7\ 7\ 7\ 9\ 9}$ et divide per ipsarum 115400, exibunt $\frac{5\ 0\ 3\ 3\ 1}{7\ 7\ 7\ 9\ 9}$ 4 pro quesita divisione.

(2) Adhuc si $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$ 29 per $\frac{5}{7}$ de $\frac{2}{9}$ 128 dividere volueris, divides 27783 per regulam de 115400, exibunt $\frac{1\ 1\ 9\ 1\ 2\ 8}{2\ 10\ 10\ 5\ 7\ 7}$ pro quesita divisione.

(3) Si autem $\frac{1}{5}\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{7}\frac{5}{9}$ 33 cum $\frac{13}{47}$ de $\frac{1}{11}\frac{5}{8}$ 244 addere volueris, describes numeros, ut hic ostenditur et multiplica 33 per 9 et adde 5 que sunt super 9, que per 7 et adde 2 erunt LeXIIIe 2116. Item multiplica 3, que sunt super 4 per 5, et 1, quod est super 5, per 4 et adde insimul erunt XXe 19; quas multiplica per LXasIIIas 2116 inventas, erunt M.eCC.eLXe 40204, quarum pensa per 13, ut multiplicavimus, accepta est 8, quem numerum, scilicet 40204, cum debeas ipsum multiplicare per omnes ruptos, qui sunt sub virgulis alterius lateris, scilicet per 7 et per 4, que sunt sub prima virgula illius lateris et per 6 et per 11, relinques primum quod non multiplicabis per 7, nec per 4 propter 7 et 4, que sunt sub virgulis primi lateris. Et relinques iterum quod non multiplicabis per 3, que sunt in regula de dictis 6 propter 3, que sunt in regula de 9, que 9 sunt sub ultima virgula primi lateris. Ergo multiplicabis 40204 per 2, que remanent de virgula dictorum 6 et per 11, hoc est in una multiplicatione per 22, erunt XXeVIIe.DCCe.XXe 884488 quas pone super $\frac{2\ 5}{7\ 9}$ 33 $\frac{1}{5}\frac{3}{4}$, et desuper pone pensam ipsarum que est 7. Deinde multiplica 244 per 6, que sunt sub virgula, et adde 5 que sunt super 6, erunt sexte 1469 quas multiplica per 11, et super adde multiplicationem de 1, quod est super 11 in 6, erunt LXXeIe 16165 quarum pensa similiter per 13 est 6. Item multiplica 3, que sunt super 7, pone 4, et adde 1, quod est super ipsa 4, erunt XXe.VIIIe 13, quas multiplica LXasVIas 1616 erunt MeDCCCeXLeVIIIe 210145. Quas cum debeas multiplicare per omnes numeros, qui sunt sub virgulis primi lateris, relinques suprascriptis dispositis quod non multiplicabis ex eis nisi tantum per 3, que remanent de regula de 9, et per 5, hoc est in una multiplicatione per 15, erunt similiter XXeVIIeDCCeXXe 3152175, sicuti fuerunt ille alterius lateris. Que.. pones iterum super $\frac{1}{11}\frac{5}{6}$ 244 $\frac{13}{47}$ et desuper pone earum pensam que est 0. Deinde adde 884488 cum 3152175, erunt 4036663, que divides per omnes ruptos unius cuiuslibet lateris et per ruptos qui accipiuntur in multiplicatione ex altero latere. Ut pote per 4, ... per 5, et per 9, et per 7, que sunt in primo latere, et per 2, que sunt in regula de 6, et per 11 alterius lateris, que accipiuntur in multiplicatione primi numeri, vel per 7, et per 4, et per 6, et per 11, que sunt in secundo

latere, et per 3, que sunt in regula de 9, et per 5, que sunt in altero latere, exibunt $\frac{3\ 3\ 4\ 8\ 6}{4\ 7\ 9\ 10\ 11}$ 145 pro quesita iunctione.

Extractio de $\frac{1}{5}\frac{3}{4}\frac{25}{79}$ 33 de $\frac{1}{11}\frac{5}{6}$ 244 $\frac{13}{47}$.

(1) Nam si de $\frac{13}{47}$ de $\frac{1}{11}\frac{5}{6}$ 244 volueris extrahere $\frac{1}{5}\frac{3}{4}$ de $\frac{25}{79}$ 33, vel aliquem ipsorum per reliquum dividere, reperies suprascripto modo et ordine prescripta 884488 et 3152175; ex ipsis operabis secundum quod superius in hoc capitulo in extractione et divisio docuimus.

Item si volueris addere $\frac{2\ 3\ 5}{7\ 8\ 9}$ de $\frac{1}{13}\frac{2}{11}\frac{3}{5}$ 42 cum $\frac{1}{9}\frac{3}{8}\frac{5}{7}$ de $\frac{2\ 0\ 3}{3\ 5\ 11}$ 331, describe numerum ut hic ostenditur. Et incipias multiplicare 42 per suas virgulas, que sunt ei retro, erunt 30644. Et accipe $\frac{2\ 3\ 5}{7\ 8\ 9}$, et multiplicas 5, que sunt super 9 per 8, et adde 3; que per ... et adde 2, erunt 303, que multiplica cum 30644, erunt 9285132 que cum debeas multi[/B, p. 77]plicare per omnes numeros, qui sunt sub omnibus virgulis alterius lateris, scilicet per 7, et per 8, et per 9, que sunt sub tribus virgulis illius lateris, et per 11, et per 5, et per 3, que sunt sub una virgula, relinques quod non repetes ea, multiplicando que iterum sunt in hoc primo latere: ergo, relictis illis, restat quod non multiplicabis 9285132 ex prescriptis, nisi tantum per 3, que multiplicatio ascendit in 27855396, quem numerum pone super primum latus: deinde ut invenias numerum alterius lateris, multiplicabis 331 per suam virgulam, que est ei retro, erunt 54662. Et reperies numerum reliquarum suaram [F, 32r] trium virgularum, scilicet de $\frac{1}{9}\frac{1}{8}\frac{5}{7}$, fiunt 479, per quem multiplica 54462, erunt 26183098: que cum debeas multiplicare per omnes numeros qui sunt sub omnibus virgulis primi lateris, scilicet per 13, et per 11, et per 5, que sunt sub tribus virgulis illius primi lateris, scilicet per 13, et per 11, et per 5, que sunt sub tribus virgulis illius primi lateris, et per 7, et per 8, et per 9, que sunt sub alia virgula, relinques quod non multiplicabis ex prescriptis, nisi tantum per 13 propter comitatem, quam habent rupti utriusque lateris ad invicem. Multiplicatio itaque de 26183098 in 13 ascendit in 340380274, que ponas super secundum latus. Et adde ipsa cum numero posito super primum latus, scilicet cum 27855396, erunt 368235670, que divide per omnes numeros qui sunt sub virgulis primi lateris, et per 3 que sunt sub una virgularum secundi lateris, hoc est sicuti multiplicavimus cum habuimus numerum primi lateris. Vel divides ea per omnes ruptos qui sunt sub virgulis secundi lateris, et per 13 que sunt sub una virgularum primi lateris, hoc est secundum quod multiplicavimus cum habuimus numerum secundi lateris: ergo divides ipsa per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{2\ 5\ 7\ 8\ 9\ 11\ 13}$ 340 pro quesita iunctione, quorum pensa per 17 est 13.

Alia extratio.

(1) Et si $\frac{1}{12}\frac{2}{11}\frac{3}{5}$ 42 $\frac{2\ 3\ 5}{7\ 8\ 9}$ extrahere volueris de $\frac{2\ 0\ 3}{3\ 5\ 11}$ 331 $\frac{1}{9}\frac{1}{8}\frac{5}{7}$, reperies suprascripto ordine prescripta 27855396 et 340380274, extrahes minorem ipsorum de maiori, remanebunt 312524878, que divides similiter suprascripte iunctionis ratione per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{2\ 5\ 7\ 8\ 9\ 11\ 13}$, exibunt $\frac{0\ 5\ 1\ 6\ 2\ 1\ 1}{2\ 6\ 7\ 9\ 10\ 11\ 13}$ 289 pro residuo quesite extractionis.

(2) Nam si per regulam 27855396 diviseris 340380274, habebis divisionem maioris positi numeri per minorem: contrarium itaque reddit contrarium. Si vis addere $\frac{3\ 2}{5\ 9}$ cum $\frac{2}{9}$, fac eadem virgula terminare in circulo ab alia parte; et habebis quesitum, scilicet $\frac{3\ 2}{5\ 9}$, que rediges ad partes unius numeri per doctrinam supradictam, erunt $\frac{16}{45}$, hoc est $\frac{13}{59}$. Et si $\frac{3\ 2}{5\ 9}$ de ... extrahere vis, si de $\frac{5\ 2}{5\ 9}$, hoc est de $\frac{2}{9}$, extraxeris $\frac{3\ 2}{5\ 9}$, nimirum $\frac{2\ 2}{5\ 9}$ remanebunt, hoc est $\frac{4}{45}$: vel accipe $\frac{2}{9}$ de 45, erunt 10, de quibus extrahe $\frac{3}{5}$ ipsorum, remanebunt 4, quibus divisis per 45, habentur similiter $\frac{4}{45}$ pro residuo dicte extractionis. Similiter si $\frac{30}{46}$ vis extrahere de ..., extrahe $\frac{30}{46}$ de $\frac{40}{46}$, scilicet de $\frac{1}{6}$, remanet $\frac{10}{46}$. Nam de quacumque re extrahuntur $\frac{3}{4}$ eiusdem rei remanere necesse est. Et si ex aliqua re extrahuntur $\frac{3}{5}$, ex eadem remanent $\frac{2}{5}$. Unde si $\frac{34}{57}$ extraxeris, remanebunt $\frac{24}{57}$ et sic intelligas de omnibus similibus. Similiter si $\frac{4\ 5}{9\ 7}$ vis de $\frac{5}{7}$ extrahere, remanebunt $\frac{5\ 5}{9\ 7}$, scilicet $\frac{2\ 5}{6\ 8}$, quia de quacumque re extrahuntur $\frac{4}{9}$, ex eadem re $\frac{5}{9}$ remanere necesse est, cum $\frac{4}{9}$ et $\frac{5}{9}$ faciunt unum integrum.

Incipit pars sexta septimi capituli de disgregatione partium in singulis partibus.

(1) In prima et in secunda parte huius capituli diversorum numerorum partes in partes unius numeri aggregare docuimus. In hac vero plures partes unius numeri in singulas partes disgregare docemus, ut intelligibilius rupti cuiuslibet virgule, que pars vel partes [B, f.78] sint unius integri cognoscere valeas. Dividitur enim hoc opus in septem distinction... Quarum prima est quando maior numerus, qui est sub virgula, dividitur per minore... scilicet per ipsum, qui est sub virgula. Cuius differentie regula est, ut dividas maior... per minorem et habebis partem que minor est de maiori. Verbi gratia, volumus sc... de $\frac{3}{12}$ que pars sint unius integri, divisis quidem 12 per 3, reddunt 4, pro quibus div.. $\frac{1}{4}$; et talis pars est $\frac{3}{12}$ ex uno integro. Eademque ratione $\frac{4}{20}$ sunt $\frac{4}{5}$ unius integri, sunt $\frac{1}{20}$, quia 100 divisis per 5 reddunt 20, quod idem intelligas de similibus.

Dividitur quidem hec differentia in tres partes, quarum prima est simplex, secundum composita, tertia revoluta composita nominatur. Simplex est illa, de qua modo feci mentionem. Composita est quando simplex refertur ad partes alterius numeri, ut $\frac{20}{49}$: feruntur enim $\frac{2}{4}$ que sunt de prima differentia simplice ad partes de 9: quare ... $\frac{20}{49}$ habetur $\frac{10}{29}$, scilicet $\frac{1}{18}$, et pro $\frac{20}{49}$ habetur $\frac{1\ 0}{3\ 9}$ et pro $\frac{3\ 0}{9\ 10}$ habetur $\frac{1\ 0}{3\ 10}$, cum simpliciter sint $\frac{1}{3}$ composite cum $\frac{1}{10}$, erunt $\frac{1\ 0}{3\ 10}$ quod idem intelligas de similibus: prima revol... composita sunt $\frac{2\ 0}{5\ 9}$, cum sint ea ad $\frac{2\ 0}{9\ 5}$, que sunt $\frac{1\ 0}{3\ 5}$: similiter intelligas de $\frac{4\ 0}{7\ 8}$, que rev...untur in $\frac{4\ 0}{8\ 7}$, scilicet in $\frac{1\ 0}{2\ 7}$, et pro $\frac{5\ 0}{9\ 10}$ habentur $\frac{5\ 0}{10\ 2}$, scilicet $\frac{1\ 0}{2\ 0}$.

De secunda differentia.

(1) Secunda differentia est quando maior numerus non dividitur per minorem, sed minori possunt fieri tales partes quod per quamlibet ipsarum maior dividitur, cuius ...ferentie regula est ut de minori facias partes, per quas maior dividi possit et divida maior per unamquamque ipsarum partium et habebis singulares partes que minor fu.. ex maiore. (2) Verbi gratia, volumus disgregare $\frac{5}{6}$ in singulas partes unius integri, quia 6 non dividuntur per 5, negatur $\frac{5}{6}$ ex prima esse differentia: sed quia 5 dividuntur duas partes, scilicet in 3 et in 2, per quamlibet quarum maior, scilicet 6, dividitur, firmatur esse $\frac{5}{6}$ de secunda esse differentia. (3) Unde divisis 6 per 3 et per 2, reddunt 2 et 3, pro quibus 2 accipitur $\frac{1}{2}$ et pro 3 accipe $\frac{1}{3}$, ergo $\frac{5}{6}$ sunt $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ unius integri, vel aliter, disgregatis $\frac{5}{6}$ in $\frac{3}{6}$ et $\frac{2}{6}$ erit unaqueque illarum duarum virgularum. De prima differentia, scilicet $\frac{3}{6}$ sunt $\frac{1}{2}$. Et $\frac{2}{6}$ sunt $\frac{1}{3}$ unius $\frac{5}{6}$ sunt $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$, ut prediximus. Similiter si $\frac{7}{8}$ resolueris in $\frac{4}{8}$ et in $\frac{2}{8}$ et in $\frac{1}{8}$, habebis $\frac{1}{2}$ pro $\frac{4}{8}$ et $\frac{1}{4}$ pro $\frac{2}{8}$ et $\frac{1}{8}$ pro $\frac{1}{8}$, hoc est per $\frac{7}{8}$, habebis $\frac{1}{8}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$, habet enim hec secunda differentia similiter partem compositam et partem revolutam compositam: de parte quidem composita sunt $\frac{3\ 0}{4\ 10}$, quia $\frac{3}{4}$ pro secunda differentia sunt $\frac{1}{4}\frac{1}{2}$, quare per $\frac{3\ 0}{4\ 10}$ habentur composite $\frac{1\ 0}{2\ 10}$ et $\frac{1\ 0}{4\ 10}$ hoc est $\frac{1}{20}$ et $\frac{1}{40}$, similiter pro $\frac{5\ 0}{8\ 9}$ habentur $\frac{1\ 0}{2\ 9}$ et $\frac{1\ 0}{8\ 9}$; cum $\frac{5}{8}$ sint $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{8}$ sed pro $\frac{5\ 0}{8\ 10}$, cum sint de prima differentia revoluta non resolves in $\frac{1\ 0}{2\ 10}$ et $\frac{1\ 0}{8\ 10}$, cum per primam differentia revolvantur in $\frac{5\ 0}{10\ 8}$ que sunt $\frac{1\ 0}{2\ 8}$ et hoc continget propter comitatem quam habent 5 que sunt super 8 cum 10 de parte quidem revoluta composita huius differentie sunt $\frac{3\ 0}{5\ 10}$ que revolvuntur in $\frac{3\ 0}{10\ 5}$ que sunt $\frac{1\ 0}{5\ 5}$ et in $\frac{1\ 0}{5\ 10}$, similiter

pro $\frac{5\ 0}{7\ 8}$ habentur $\frac{5\ 0}{8\ 7}$, scilicet $\frac{1\ 0}{2\ 7}$ et $\frac{1\ 0}{8\ 7}$, et sic intelligas in similibus. Sed quia partes prime et secunde differentie pre ceteris in negotiationibus necessarias esse cognoscimus in quibusdam tabulis disgregationes partium quorumdam numerorum ostendere presentialiter procuramus quas cordetenus addiscere studeas ut que in hac parte dicere volumus melius intelligas.

Tabula Disgregationis.

Partes de 6

1 de 6 est $\frac{1}{6}$

2 $\frac{1}{3}$

3 $\frac{1}{2}$

4 $\frac{1}{6}\frac{1}{2}$

5 $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$

Partes de 8

1 de 8 est $\frac{1}{8}$

2 $\frac{1}{4}$

3 $\frac{1}{8}\frac{1}{4}$

4 $\frac{1}{2}$

5 $\frac{1}{8}\frac{1}{2}$

6 $\frac{1}{4}\frac{1}{2}$

7 $\frac{1}{8}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$

Partes de 12

1 de 12 est $\frac{1}{12}$

2 $\frac{1}{6}$

3 $\frac{1}{4}$

4 $\frac{1}{3}$

5 $\frac{1}{6}\frac{1}{4}$

6 $\frac{1}{2}$

7	$\frac{1}{4}\frac{1}{3}$
8	$\frac{1}{6}\frac{1}{2}$
9	$\frac{1}{4}\frac{1}{2}$
10	$\frac{1}{3}\frac{1}{2}$
11	$\frac{1}{6}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$

Tertia differentia disgregationum.

(1) Tertia quidem differentia est cum uno plus maiori numero dividitur per minorem cuius differentie regula est, ut numerum qui fuerit plus maiori dividas per minorem 5, quot ex divisione exierit, talis pars unius integri erit minor de maiori et insuper eadem pars partis que 1 est de minori numero. (2) Verbi gratia, volumus facere singulares partes de $\frac{2}{11}$ que sunt ex hac differentia cum uno plus de 11, scilicet 12 dividantur per 2, que sunt super virgulam ex qua divisione cum eveniant 6, reddunt $\frac{1}{6}$ et insuper sextam partem de 11, scilicet $\frac{1\ 0}{6\ 11}$ pro singularibus partibus de $\frac{2}{11}$, eadem ratione pro $\frac{3}{11}$ habebis quartam et $\frac{1\ 0}{4\ 11}$ hoc est $\frac{1}{44}\frac{1}{4}$. Et pro $\frac{4}{11}$ habebis tertiam et $\frac{1\ 0}{3\ 11}$, hoc est $\frac{1}{33}\frac{1}{3}$; et pro $\frac{6}{11}$ habebis dimidium et $\frac{1\ 0}{2\ 11}$, hoc est $\frac{1}{22}\frac{1}{2}$, et pro $\frac{5}{19}$ habebis $\frac{1\ 0}{4\ 19}$ hoc est $\frac{1}{76}\frac{1}{4}$, cum 5 que sunt super 19 sint $\frac{1}{4}$ de 20 que sunt 1 plus 19. Componitur etiam et bis tertia differentia ut $\frac{2\ 0}{3\ 7}$ que sunt $\frac{1\ 0}{2\ 7}$ et $\frac{1\ 0}{6\ 7}$, cum $\frac{2}{3}$ sint $\frac{1}{6}\frac{1}{2}$. Similiter $\frac{4\ 0}{7\ 9}$ sunt $\frac{1\ 0}{2\ 9}$ et $\frac{1\ 0}{14\ 9}$, quia $\frac{4}{7}$ sunt $\frac{1}{14}\frac{1}{2}$, et revolvitur etiam hec eadem differentia, ut $\frac{3\ 0}{7\ 11}$ vel $\frac{3\ 0}{7\ 8}$: nam $\frac{3\ 0}{7\ 11}$ sunt $\frac{3\ 0}{11\ 7}$ que $\frac{3}{11}$ per tertiam differentiam sunt $\frac{1}{44}\frac{1}{4}$, quare $\frac{3\ 0}{11\ 7}$ sunt $\frac{1\ 0}{4\ 7}$ et $\frac{1\ 0}{44\ 7}$, similiter $\frac{3\ 0}{7\ 8}$ revolvuntur in $\frac{3\ 0}{8\ 7}$, que sunt ex duabus differentiis compositis scilicet ex secunda et ex tertia. Secundum quidem secundam differentiam compositam $\frac{3\ 0}{8\ 7}$ sunt $\frac{1\ 1\ 0}{8\ 4\ 7}$, scilicet $\frac{1\ 0}{4\ 7}$ et $\frac{1\ 0}{8\ 7}$, secundum quoque tertiam differentiam compositam $\frac{3\ 0}{8\ 7}$ sunt $\frac{1\ 1\ 0}{24\ 3\ 7}$ cum pro $\frac{3}{8}$ habeantur $\frac{1}{24}\frac{1}{3}$ et hoc idem intelligas de similibus.

De eadem differentia

(1) Sunt enim ex hac eadem differentia quando de minori numero qui est super virgulam possunt fieri due partes per quamlibet quarum uno plus maiori integraliter dividitur ut $\frac{8}{11}$ et

$\frac{9}{10}\frac{9}{10}$ nam de $\frac{8}{11}$ possunt fieri due partes scilicet $\frac{6}{11}$ et $\frac{2}{11}$, unde pro $\frac{6}{11}$ habemus secundum hanc rationem duas singulares partes, scilicet $\frac{1}{22}\frac{1}{2}$ et pro $\frac{2}{11}$ habemus $\frac{1}{66}\frac{1}{6}$, ergo pro $\frac{8}{11}$ habemus $\frac{1}{66}\frac{1}{22}\frac{1}{6}\frac{1}{2}$, similiter pro $\frac{9}{11}$, quare solvuntur in $\frac{6}{11}$ et in $\frac{3}{11}$ habemus $\frac{1}{44}\frac{1}{22}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$ et pro $\frac{10}{11}$ habemus $\frac{1}{33}\frac{1}{22}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$, cum 10 que sunt super 11 sint $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ de 12, que 12 sunt uno plus quam 11, que sunt sub virgula.

De quarta differentia disgregationis.

(1) Quarta differentia est quando maior est sine regula et uno plus maiori dividitur per 1 minus minori ut $\frac{5}{11}$ et $\frac{7}{11}$, huius differentie regula est ut extrahas 1 de minori ex qua facies unam singularem partem unius integri, videlicet talem qualis fuerit numerus qui est sub virgula, et tunc remanebunt tibi partes tertie differentie ut si de $\frac{5}{11}$ extraxeris $\frac{1}{11}$, remanebunt $\frac{4}{11}$ pro quibus $\frac{4}{11}$ habebis singulares partes per tertiam differentiam $\frac{1}{33}\frac{1}{11}\frac{1}{3}$, eademque ratione pro $\frac{7}{11}$ habebis $\frac{1}{22}\frac{1}{11}\frac{1}{2}$ et pro $\frac{3}{7}$ habebis $\frac{1}{28}\frac{1}{7}\frac{1}{4}$ et pro $\frac{6}{19}$ habebis $\frac{1}{76}\frac{1}{19}\frac{1}{4}$, et pro $\frac{7}{29}$ habebis $\frac{1}{5}\frac{1}{29}\frac{1}{145}$, hoc est $\frac{1}{145}\frac{1}{29}\frac{1}{5}$.

De quinta differentia.

(1) Quinta differentia est cum maior numerus fuerit par duo plus maiori dividuntur per 2 minus maiori, huius differentie regula est, ut de minori numero extrahas 2, que 2 erunt ex prima differentia, residuum vero erit de tertia ut $\frac{11}{26}$, ex quibus extraxeris $\frac{2}{26}$ que sunt $\frac{1}{13}$ secundum regula prime differentie, remanent $\frac{9}{26}$, que sunt $\frac{1}{3}\frac{0}{26}\frac{1}{3}$ hoc est $\frac{1}{78}\frac{1}{3}$ cum quibus adde $\frac{1}{13}$ erunt $\frac{1}{78}\frac{1}{13}\frac{1}{3}$ pro singularibus partibus de $\frac{11}{26}$, eademque ratione pro $\frac{11}{62}$ habebis $\frac{1}{7}\frac{0}{62}\frac{1}{31}\frac{1}{7}$.

[p.81]

De sexta differentia.

(1) Sexta differentia est quando maior numerus dividitur integraliter per 3 et uno plus maiori dividitur per 3 minus minori ut $\frac{17}{27}$, cuius regula est, ut ex ipsis partibus extrahes tres partes, hoc est quod de

Capitolo VII[2395]

L'addizione, la sottrazione e la divisione dei numeri con parti frazionarie e la riduzione di più parti frazionarie in una sola frazione.

(1) Dividiamo il settimo capitolo in sei parti[2396].

Nella prima di esse mostreremo l'addizione di una frazione con l'altra, la sottrazione di una frazione dall'altra e la divisione di una frazione per l'altra.

Nella seconda l'addizione e la sottrazione di due frazioni con due, e la loro divisione reciproca.

Nella terza la divisione di numeri interi per interi con frazioni e il loro contrario (divisione di interi con frazioni per numeri interi senza parti frazionarie).

Nella quarta l'addizione e la sottrazione e la divisione di numeri interi con parti frazionarie.

Nella quinta, poi, insegneremo le addizioni, le sottrazioni e le divisioni delle parti dei numeri con le frazioni.

Nell'ultima, ancora, mostreremo come ricondurre più parti (frazionarie) ad un'unica frazione.

Parte prima

L'addizione di $\frac{1}{3}$ con $\frac{1}{4}$.

4	3
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{7}{12}$	addizione

(1) Se tu volessi addizionare $\frac{1}{3}$ con $\frac{1}{4}$, ti insegneremo a farlo secondo due metodi differenti: dapprima, certo, secondo il metodo comune[2397]. Devi calcolare[2398] in quale numero si ritrovino $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, questo numero si calcola così: moltiplica il 3 per il 4, che sono i

[2395] Il capitolo VII inizia a pag.63 dell'edizione di Boncompagni.

[2396] La traduzione 'Dividiamo, pertanto, il settimo capitolo in sei parti' ricalca meglio l'originale latino dando ragione dell'*itaque* che io invece non ho tradotto perché lo sento superfluo in un stile moderno (per le osservazioni sulle particolarità dello stile e della lingua latina, rimando alla mia nota introduttiva).

[2397] Secundum vulgi modum: è il metodo 'vulgato', cioè quello più comune.

[2398] Invenio e reperio sono quasi sinonimi, invenio ha una sfumatura legata anche alla ricerca, mentre reperio potrebbe essere tradotto anche come 'è contenuto'.

denominatori, risulterà 12, nel quale si ritrovano $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, e per questo calcola la sua terza parte che è 4, e la quarta parte, che è 3, e addiziona insieme, risulterà 7. Dividilo per 12, risulterà $\frac{7}{12}$, cioè sette parti di dodici parti di un intero.

(2) Parimenti, secondo l'altro metodo, scrivi $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ in questo modo e moltiplica l'1 che è sopra il 3 per il 4, risulterà 4 che devi porre sopra $\frac{1}{3}$, e moltiplica l'1, che è sopra il 4, per il 3, risulterà 3 che devi porre sopra $\frac{1}{4}$, e addizionali insieme, risulterà 7, che devi dividere per 3 e per 4 che sono i denominatori, cioè per 12, risulterà similmente $\frac{7}{12}$ per la loro addizione, e sappi che addizionare $\frac{1}{3}$ con $\frac{1}{4}$ è lo stesso che addizionare $\frac{1}{4}$ con $\frac{1}{3}$,[2399] poiché sono le parti di un solo intero: sono infatti $\frac{7}{12}$ di un intero. E così intendi per le addizioni di tutte le frazioni.

La sottrazione di $\frac{1}{4}$ da $\frac{1}{3}$.

(1) E se volessi sottrarre $\frac{1}{4}$ da $\frac{1}{3}$, sottrai il 3 che è sopra $\frac{1}{4}$[2400], cioè un quarto di 12, da 4 che è sopra $\frac{1}{3}$, cioè da un terzo di 12, resterà 1 che devi dividere per il 12 trovato, ovvero per il 3 e per il 4 che sono i denominatori, risulterà come resto della suddetta sottrazione $\frac{1}{12}$, cioè $\frac{1\ 0}{2\ 6}$.

(2) E se vuoi dividere $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{4}$, dividi il 4 che sta sopra $\frac{1}{3}$ per 3, e otterrai $\frac{1}{3}$ 1 per ciò che concerne la parte di un intero[2401].

(3) Esemplificando, la proporzione di $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$ è come la proporzione di 12 volte $\frac{1}{3}$ a 12 volte $\frac{1}{4}$, cioè come 4 sta a 3, così $\frac{1}{3}$ sta a $\frac{1}{4}$. Per questo la divisione di $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{4}$ dà lo stesso quoziente che risulta da 4 diviso per 3. O, altrimenti, quando si dice: dividi $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{4}$, allora s'intenda di calcolare la quarta parte di un terzo di un intero. Per questo al quadruplo della quarta parte, vale a dire alla parte intera, sta il quadruplo di un terzo, vale a dire $\frac{1}{3}$ 1, come ho detto precedentemente. (4) E se vuoi dividere $\frac{1}{4}$ per $\frac{1}{3}$ affinché tu sappia cosa di lì stia a una parte intera, dividi il 3 posto sopra $\frac{1}{4}$ per il 4 posto sopra $\frac{1}{3}$, risulterà $\frac{3}{4}$. Infatti la proporzione di

[2399] Si è in questo caso accettata la lezione di V (quale est addere $\frac{1}{4}$ cum $\frac{1}{3}$) contro quella degli altri manoscritti (quale est dicere $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$) perché ritengo che qui Fibonacci introduca il concetto della proprietà commutativa dell'addizione.

[2400] Qui Fibonacci rimanda allo schema a margine utilizzato precedentemente per l'addizione.

[2401] $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$ X 4= $\frac{4}{3}$ = 1, 33333; $\frac{1}{3}$ = 0,33333; quindi $\frac{1}{3}$ 1 = 1 + 0,33333= 1,33333.

$\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{3}$ è come la proporzione di 3 a 4, e come $\frac{1}{4}$ sta a un terzo, $\frac{3}{4}$ sta a tre terzi, vale a dire alla parte intera.

(4) Parimenti se tu volessi addizionare $\frac{2}{3}$ con $\frac{4}{5}$, cerca similmente in quale numero si trovino $\frac{4\ 2}{5\ 3}$. Fai così: moltiplicherai 3 per 5 che sono i denominatori, risulterà 15, e in questo numero si trovano $\frac{4\ 2}{5\ 3}$. Per questo calcola $\frac{2}{3}$ di 15, che è 10, e $\frac{4}{5}$ di 15, che è 12, e addizionali insieme, risulterà 22, che devi dividere per 15, risulterà $\frac{7}{15}$ 1 per l'addizione di $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{4}{5}$.

Sullo stesso argomento secondo un altro metodo.

12	10
$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1\ 2}{3\ 5}$ 1	

(1) Parimenti, secondo un altro metodo, scrivi $\frac{4\ 2}{5\ 3}$ come si mostra a margine e moltiplica il 2 che sta sopra il 3 per il 5, risulterà 10 che devi porre sopra $\frac{2}{3}$, e il 4 che sta sopra il 5 per il 3, risulterà 12 che devi porre sopra $\frac{4}{5}$ nello schema. Addiziona quindi il 10 con il 12, risulterà 22 come sopra. Dividilo per i denominatori, cioè per $\frac{1\ 0}{3\ 5}$, risulterà $\frac{1\ 2}{3\ 5}$ 1, come si vede nello schema, cioè $\frac{7}{15}$ 1, come si è trovato secondo l'altro metodo.

(2) Invero, se tu volessi sottrarre $\frac{2}{3}$ da $\frac{4}{5}$, hai trovato il 10 e il 12 - trovati più sopra attraverso qual tu voglia dei due metodi descritti – e sottrai 10 da 12, resta 2 che devi dividere per i denominatori, vale a dire per $\frac{1\ 0}{3\ 5}$, risulterà $\frac{2\ 0}{3\ 5}$, cioè $\frac{2}{15}$ come resto della sottrazione cercata. E se vuoi dividere $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$, dividi 12 per 10, risulterà $\frac{1}{5}$ 1e da tale divisione tanto sta ad una parte intera. E se vuoi dividere $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$, dividi 10 per 12, risulterà $\frac{5}{6}$.

Addizione di $\frac{5}{6}$ con $\frac{7}{10}$.

(1) Parimenti se tu volessi addizionare $\frac{5}{6}$ con $\frac{7}{10}$, trova similmente in quale numero si trovino $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{10}$. Moltiplicherai, dunque, 6 per 10, risulterà 60: si trovano invero anche in un numero più piccolo che 60[2402], e questo avviene per il fattore che il 6 ha in comune con il 10,

[2402] Cioè in 30. In effetti se noi volessimo fare il minimo comune multiplo tra 6 e 10, esso è 3x2x5=30.

vale a dire $\frac{1}{2}$, dal momento che entrambi i numeri si dividono esattamente per 2. Per cui dividi 60 per 2, risulterà 30, anche nel quale si trovano $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{10}$. In effetti si può trovare questo 30 in un altro modo, vale a dire quando moltiplichi il 6 per la metà del 10, vale a dire per 5, e risulta 30. O moltiplica 10 per la metà di 6, cioè per 3, e risulterà similmente 30. E calcola $\frac{5}{6}$ di 30 che è 25 e addiziona con $\frac{7}{10}$ di 30, che è 21, risulterà 46 che devi dividere per 30, risulterà $\frac{16}{30}$ 1, cioè $\frac{8}{15}$ 1.

Sullo stesso argomento secondo un altro metodo.

(1) Parimenti, in un altro modo, scrivi così $\frac{7}{10}\frac{5}{6}$, e poiché il 6 e il 10, che sono i denominatori, hanno un fattore in comune, vale a dire il 2, dividi il 10 per il 2, risulterà 5 per il quale moltiplica il 5 che sta sopra il 6, risulterà 25, come più sopra è stato calcolato come $\frac{5}{6}$ di 30. Parimenti dividi il 6 per il 2, risulterà 3 che devi porre sotto il 6 per il quale devi moltiplicare il 7 che sta sopra il 10, risulterà 21 come i $\frac{7}{10}$ di 30: addiziona dunque 21 con 25, risulterà 46 che devi dividere per la metà di 10 e per 6, cioè per $\frac{1\ \ 0}{5\ \ 6}$, o per la metà di 6 e per 10, cioè per $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 10}$, risulterà $\frac{1\ \ 5}{3\ \ 10}$ 1, che è tanto quanto $\frac{16}{30}$ 1, o quanto $\frac{8}{15}$ 1.

Sottrazione di $\frac{7}{10}$ da $\frac{5}{6}$.

(1) Invero se tu volessi sottrarre $\frac{7}{10}$ da $\frac{5}{6}$, trova il 21 e il 25 scritti precedentemente e sottrai 21 da 25, resta 4 che devi dividere per 30 o per i suoi fattori che sono $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 10}$, risulterà $\frac{1\ \ 1}{3\ \ 10}$ come resto della sottrazione richiesta.

(2) E se vuoi dividere $\frac{5}{6}$ per $\frac{7}{10}$, dividi 25 per 21, risulterà $\frac{1\ \ 1}{3\ \ 7}$ 1. E se vuoi dividere $\frac{7}{10}$ per $\frac{5}{6}$, dividi 21 per 25, risulterà $\frac{1\ \ 4}{5\ \ 5}$.

Addizione di $\frac{1}{6}$ con $\frac{5}{9}$.

1	3
0	
$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{6}$

$\frac{1\ 6}{2\ 9}$	Risult ato

(1) Ancora, se tu volessi addizionare $\frac{1}{6}$ con $\frac{5}{9}$, cerca in quale numero si trovino $\frac{1}{6}$ e $\frac{5}{9}$, cosa che si trova così: dal momento che il 3 è il fattore comune di 6 e 9, dividi il 6 per il 3, risulterà 2 che devi moltiplicare per 9, risulterà 18. Oppure dividi il 9 per il 3, risulterà 3 che devi moltiplicare per 6, risulterà similmente 18, nel quale si trovano $\frac{5\,1}{9\,6}$. Per cui calcola $\frac{1}{6}$ di 18, che è 3, e addiziona con $\frac{5}{9}$ di 18, che è 10, risulterà 13 che devi dividere per i fattori di 18, risulterà $\frac{1\ 6}{2\ 9}$. (2) O, secondo l'altro metodo, scrivi le frazioni come si mostra qui a margine, e moltiplica l'1, che è sopra il 6, per la terza parte di 9 – in virtù del fattore che essi hanno in comune – risulterà 3 che devi porre sopra $\frac{1}{6}$. E moltiplica il 5 che sta sopra il 9 per la terza parte di 6, vale a dire per 2, risulterà 10 che devi porre sopra $\frac{5}{9}$. E addiziona il 3 con il 10, risulterà 13 che devi dividere per un terzo del prodotto di 6 per 9, cioè per 18, risulterà $\frac{1\ 6}{2\ 9}$ per la loro addizione, come si mostra nello schema.

Sottrazione di $\frac{1}{6}$ *da* $\frac{5}{9}$.

1 0	3
$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1\ 3}{2\ 9}$	Risultato della sottrazione

(1) Invero se tu volessi sottrarre $\frac{1}{6}$ da $\frac{5}{9}$, trova il 3 e il 10 scritti precedentemente, e sottrai il 3 dal 10, resterà 7, che, in base alla dottrina scritta precedentemente, devi dividere per 18, o per i suoi fattori che sono $\frac{1\ 0}{2\ 9}$, risulterà $\frac{1\ 3}{2\ 9}$ come resto della suddetta sottrazione. (2) E se vuoi dividere $\frac{5}{9}$ per $\frac{1}{6}$, dividi 10 per 3 che sta sopra $\frac{1}{6}$, risulterà $\frac{1}{3}$ 3. E se vuoi dividere $\frac{1}{6}$ per $\frac{5}{9}$, dividi 3 per 10, risulterà $\frac{3}{10}$.

Parte seconda.

Addizione e sottrazione di due frazioni a vicenda e loro divisione.

1	245
4	
4	
$\frac{1}{7}\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}\frac{1}{3}$
$\frac{5\ \ 1}{6\ \ 7\ \ 1}$	Risultato

(1) Se tu volessi addizionare $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ con $\frac{1}{7}\frac{1}{5}$, osserva in quale numero si trovino $\frac{1}{7}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, cosa che si deve calcolare così: moltiplica tra loro i denominatori, vale a dire il 3 per il 4 per il 5 per il 7, risulterà 420 che è il minimo comune multiplo dei numeri scritti precedentemente[2403], questo è il numero più piccolo in cui si ritrovano le frazioni scritte precedentemente dal momento che non hanno alcun fattore in comune tra loro. (2) Calcola dunque $\frac{1}{3}$ di 420, che è 140, e addizionalo con la quarta parte del 420, che è 105, e con la quinta che è 84, e con la settima che è 60, risulterà 389, che devi dividere per 420, risulterà $\frac{389}{420}$ come addizione delle frazioni scritte precedentemente. Ed è lo stesso quando si chiede quali parti di un intero siano $\frac{1}{7}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$. (3) Possiamo tuttavia secondo un altro insegnamento della matematica[2404] addizionare $\frac{1}{7}\frac{1}{5}$ con $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$. Vale a dire: si scrivono le frazioni secondo come si vede qui. Poi moltiplica l'1 che è sopra il 3 per il 4, e l'1 che è sopra il 4 per il 3, risulterà 7 che devi moltiplicare per 5 e per 7, che sono i denominatori delle altre due frazioni dall'altro lato, risulterà 245, che sono $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di 420, come abbiamo calcolato più sopra. Scrivi, dunque, il 245 sopra $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ nello schema. (4) Poi passa a $\frac{1}{7}\frac{1}{5}$: moltiplica l'1, che è sopra il 5 per il 7, e l'1 che è sopra il 7 per il 5, risulterà 12, che devi moltiplicare per il 3 e il 4, che sono i denominatori, risulterà 144, che è $\frac{1}{7}\frac{1}{5}$ di 420. Poni, dunque, il 144 sopra $\frac{1}{7}\frac{1}{5}$ e addiziona il 144 con il 245, risulterà 389 che devi dividere per le frazioni, vale a dire per $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{3\ \ 4\ \ 5\ \ 7}$ e raggruppa le parti frazionarie scritte precedentemente, risulterà $\frac{5\ \ 1\ \ 9}{6\ \ 7\ \ 10}$ che è uguale a $\frac{389}{420}$.

[2403] In questo caso i numeri non hanno fattori in comune tra loro, quindi il loro prodotto ci dà il m.c.m.

[2404] Appunto: Sigler traduce 'possiassiamo addizionare i numeri ... secondo la dottina... ma numerorum è genitivo... e poi c'è aliter...

Sottrazione di $\frac{1\,1}{7\,5}$ *da* $\frac{1\,1}{4\,3}$.

1	245
4	
4	
$\frac{1\,1}{7\,5}$	$\frac{1\,1}{4\,3}$
$\frac{5\;2}{6\;7\;1}$	Risultato

(1) Se poi tu volessi sottrarre $\frac{1\,1}{7\,5}$ da $\frac{1\,1}{4\,3}$, trova il 245 e il 144 scritti precedentemente attraverso quello che preferisci de due metodi descritti precedentemente e sottrai 144 da 245, resterà 101 che, in base alla dottrina descritta precedentemente, devi dividere per $\frac{1\;0\;0}{6\;7\;10}$, risulterà $\frac{5\;2\;2}{6\;7\;10}$ come differenza della suddetta sottrazione. (2) E se vuoi dividere $\frac{1\,1}{4\,3}$ per $\frac{1\,1}{7\,5}$, dividi 245 per la scomposizione di 144, risulterà $\frac{1\;2\;6}{2\;8\;9}1$. E se tu dividessi 144 per la scomposizione di 245, avresti $\frac{4\;0\;5}{5\;7\;7}$ per ciò che concerne la parte intera dalla divisione di $\frac{1\,1}{7\,5}$ per $\frac{1\,1}{4\,3}$, come si vede nello schema.

Addizione di $\frac{2\,3}{7\,5}$ *con* $\frac{2\,3}{9\,8}$.

1505	2232
$\frac{2\,3}{9\,8}$	$\frac{2\,3}{3\,5}$
$\frac{1\;3\;7\;4}{4\;7\;9\;10}$	Risultato

(1) Parimenti se tu volessi addizionare $\frac{2\,3}{7\,5}$ con $\frac{2\,3}{9\,8}$, cerca il numero in cui si ritrovino i denominatori[2405], e sarà 2520 che viene fuori[2406] dalla moltiplicazione dei quattro denominatori e non si trovano in un numero più piccolo dal momento che non hanno alcun fattore in comune tra loro. (2) E calcola i $\frac{3}{5}$ di 2520 che è 1512 e addizionalo con i $\frac{2}{7}$ di 2520

[2405] Ovvero si richiede di trovare il numero che abbia come fattori i denominatori delle frazioni date.

[2406] *Exiit*: normalmente del risultato di un'operazione diciamo che 'risulta' in corispondenza di erit e erunt utilizzati da Leonardo. Dal momento che in questo caso ha utilizzato un sinonimo, *exiit* appunto, si è preferito rendere questa *variatio* anche nella traduzione.

che è 720, risulterà 2232 che devi riportare. Parimenti calcola i$\frac{2\ 3}{9\ 8}$ di 2520, che è 1505 e addizionalo con il 2232 riportato, risulterà 3737 che devi dividere per i divisori di 2520 che sono $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{4\ \ 7\ \ 9\ \ 10}$, risulterà $\frac{1\ \ 3\ \ 7\ \ 4}{4\ \ 7\ \ 9\ \ 10}$ 1. (3) Parimenti scrivi le frazioni in un altro modo, come si vede più in basso e inizia da $\frac{2\ 3}{7\ 5}$, così: moltiplicherai il 3, che sta sopra il 5, per il 7, che è a denominatore, risulterà 21. Poi moltiplicherai il 2 che sta sopra il 7, per il 5, risulterà 10, che addizionerai con 21, risulterà 31 che moltiplicherai per le altre frazioni, vale a dire per 8 e per 9, cioè per 72, risulterà 2232, come è stato trovato più sopra per i $\frac{2\ 3}{7\ 5}$ di 2520. (4) Poni, dunque, 2232 sopra $\frac{2\ 3}{7\ 5}$ e passa a $\frac{2\ 3}{9\ 8}$ e moltiplica il 3 che sta sopra l'8 per il 9 e il 2 che sta sopra il 9 per l'8 e addizionali insieme, risulterà 43 che devi moltiplicare per le altre frazioni, vale a dire per 5 e per 7, risulterà 1505, come sopra abbiamo trovato per $\frac{2\ 3}{9\ 8}$ di 2520. Scriv1, dunque, il 1505 sopra i $\frac{2\ 3}{9\ 8}$, poi addiziona 1505 con 2232, risulterà 3737 che devi dividere per tutti i numeri che stanno sotto la linea di frazione e li devi raggruppare, risulterà similmente $\frac{1\ \ 3\ \ 7\ \ 4}{4\ \ 7\ \ 9\ \ 10}$ 1.

Sottrazione di $\frac{2\ 3}{9\ 8}$ *da* $\frac{2\ 3}{7\ 5}$.

2232	1505
$\frac{2\ 3}{7\ 5}$	$\frac{2\ 3}{9\ 8}$
$\frac{3\ \ 6\ \ 7\ \ 2}{4\ \ 7\ \ 9\ \ 10}$	Risultato

(1) Se tuttavia tu volessi sottrarre $\frac{2\ 3}{9\ 8}$ da $\frac{2\ 3}{7\ 5}$, calcola il 2232 e il 1505 scritti precedentemente, e sottrai 1505 da 2232, resterà 727 che, in base alla dottrina scritta precedentemente, devi dividere per $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{4\ \ 7\ \ 9\ \ 10}$, risulterà $\frac{3\ \ 6\ \ 7\ \ 2}{4\ \ 7\ \ 9\ \ 10}$ come si vede in quest'altra figura. (2) E se vuoi dividere $\frac{2\ 3}{7\ 5}$ per $\frac{2\ 3}{9\ 8}$, dividi 2232 per i divisori di 1505, e se vuoi il contrario fai il contrario e otterrai il risultato desiderato, come si vede nello schema.

Addizione di $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ *con* $\frac{1\ 1}{6\ 5}$.

22	35

$\frac{1}{6}\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}\frac{1}{3}$
$\frac{1\ \ 9}{2\ \ 10}$	Risultat o

(1) Parimenti se tu volessi addizionare $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ con $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$, cerca il numero nel quale si trovino le frazioni scritte precedentemente, e risulterà 60. Questo numero si trova dalla moltiplicazione di 3 per 4 e per 5 e non occorre che si moltiplichi il 60 per il 6 in virtù del fattore in comune che il 6 ha con il 3 e con il 4: infatti il 3 è contenuto intero nel 6, per questo non occorre moltiplicare il 60 che per la terza parte di 6, che è 2, e non occorre moltiplicare il 60 neanche per il 2, perché esso è tra i fattori del 4. E affinché io dica ciò più prontamente: la scomposizione di 6 è $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 3}$, per questo, nella moltiplicazione, non ripetiamo il 3 né il 2 che costituiscono la scomposizione del 6 in virtù del 3 e del 4, per il quale 4 abbiamo moltiplicato quando abbiamo ottenuto 60. Infatti in ogni numero nel quale si trovino $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, si troverà anche $\frac{1}{6}$. Calcola pertanto $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di 60 e addizionali insieme, risulterà 57 che devi dividere per 60, risulterà $\frac{57}{60}$, ma poiché il 57 ha un fattore in comune con il 60, vale a dire $\frac{1}{3}$, possiamo esprimere il $\frac{57}{60}$ più elegantemente. Vale a dire: se dividi il 57 per il 3, risulterà 19; similmente devi dividere il 60 per il 3, risulterà 20 per il quale devi dividere 19, risulterà $\frac{19}{20}$, che equivale a un intero meno un ventesimo.

(2) Parimenti, scrivi le frazioni in un altro modo come qui si mostra e inizia da $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, e moltiplicherai l'1, che è sopra il 3, per il 4 e l'1, che è sopra il 4, per il 3, risulterà 7 che devi moltiplicare per il 5 che è a denominatore, risulterà 35 che dovrai moltiplicare per il 6 se non lo tralascerai per il fattore in comune che il 6 ha con $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$. Scrivi, dunque, il 35 sopra $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ che sono $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di 60, poi moltiplica l'1, che è sopra il 5, per il 6 e l'1, che è sopra il 6, per 5, risulterà 11 che dovresti moltiplicare per 3 e per 4, ma trascurerai ciò: non moltiplicherai per il 3 poiché è nella scomposizione di 6, né per il 2, poiché è nella scomposizione di 4, dal momento che[2407] sono similmente nella scomposizione di 6. Dunque moltiplicherai il suddetto 11 per il 2 che resta da 4, risulterà 22 che è $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ di 60. Scrivi dunque il 22 sopra $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ e addiziona il 22 con il 35, risulterà 57, come abbiamo trovato più sopra, e dividilo per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{3\ \ 4\ \ 5}$ dal momento

[2407] anziché 'dal momento che' 'ed è similmente nella scomposizione...' controllare se ammissibile.

che non devi dividerlo per 6 - poiché lo abbiamo tralasciato nella moltiplicazione di entrambi i gruppi di frazioni - e raggrupperai le suddette frazioni. Risulterà $\frac{1\ \ 9}{2\ \ 10}$, cioè $\frac{19}{20}$, come si mostra nello schema.

(3) Descriverò un altro metodo e più chiaro per ricavare i suddetti 35 e 22. Moltiplica il 3 per il 4 che sono a denominatore da una parte, risulterà 12. Conservalo sulla mano destra e moltiplica il 5 per il 6 che sono gli altri due denominatori dall'altra parte, risulterà 30 che devi conservare sulla mano sinistra e dividi entrambi i numeri riportati sulle mani per il loro Massimo Comun Divisore che è 6, risulterà sulla mano destra 2 e sulla sinistra 5. Scrivi il 2 sotto $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ e il 5 sotto $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ e moltiplicherai il 7 trovato per il 5 posto sotto $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ e l'11 per il 2 posto sotto $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, e otterrai 35 e 22, la cui somma, vale a dire 57, devi dividerla per i denominatori di un lato e per il numero posto sotto le altre linee, vale a dire per 5 e per 6 e per 2 o per 3 e per 4 e per 5, vale a dire per la scomposizione di 60.

Sottrazione di $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ *da* $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$.

22	35
$\frac{1}{6}\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}\frac{1}{3}$
$\frac{1\ \ 2}{6\ \ 10}$	Risultat o

(1) Se tuttavia tu volessi sottrarre $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ da $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, troverai il suddetto 35 e 22 e sottrarrai il 22 dal 35, resterà 13 che devi dividere, in base alla suddetta dottrina, per $\frac{1\ \ 0}{6\ \ 10}$, risulterà $\frac{1\ \ 2}{6\ \ 10}$ come differenza della suddetta sottrazione.

Addizione di $\frac{1}{7}\frac{2}{3}$ *con* $\frac{1}{9}\frac{3}{5}$.

(1) Parimenti se tu volessi addizionare $\frac{1}{7}\frac{2}{3}$ con $\frac{1}{9}\frac{3}{5}$, cerca il numero nel quale si ritrovano le frazioni suddette, e sarà 315, il quale numero viene fuori dalla moltiplicazione dei denominatori, semplificato tuttavia di lì il 3 che è un fattore comune di 9 e di 3 che non occorre ripetere nella moltiplicazione dal momento che $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ si trovano nel 9, per cui ogni numero che ha tra i suoi fattori $\frac{1}{9}$, ha similmente anche $\frac{1}{3}$. Calcola[2408] dunque i $\frac{2}{3}$ di 315, che è

[2408] oppure 'prendi'? controllare...

210 e addizionalo con il suo $\frac{1}{7}$, che è 45, risulterà 255 che devi conservare. E calcola $\frac{1\;3}{9\;5}$ di tale 315 che è 234 e addizionalo con il 255, risulterà 489, che devi dividere per la scomposizione di 315, che è $\frac{1\;\;0\;\;0}{5\;\;7\;\;9}$, risulterà $\frac{4\;\;6\;\;4}{5\;\;7\;\;9}$ 1.

(2) Secondo un altro metodo, scrivi le frazioni come qui si mostra e inizia da $\frac{1\;2}{7\;3}$. Moltiplica il 2 che sta sopra il 3 per il 7 e l'1 che sta sopra il 7 per il 3 e addizionali insieme, risulterà 17 che devi moltiplicare per 5, risulterà 85, che devi moltiplicare per un terzo di 9, cioè per 3, in virtù del fattore in comune che il 3 del denominatore ha con il 9, e il prodotto di quella moltiplicazione sarà 255, che sono $\frac{1\;2}{7\;3}$ di 315, come abbiamo già calcolato più sopra. Poni dunque il 255 sopra i $\frac{1\;2}{7\;3}$ e passa a $\frac{1\;3}{9\;5}$: moltiplicando il 3, che sta sopra il 5, per il 9 e l'1, che sta sopra il 9, per il 5, risulterà 32, che devi moltiplicare per 7, risulterà 234, come più sopra è stato trovato per i $\frac{1\;3}{9\;5}$ di 315. Non occorre moltiplicare questo 234 per il 3 a denominatore in virtù del suddetto fattore in comune che il 3 ha con il 9. Poni dunque il 234 sopra $\frac{1\;3}{9\;5}$ e addiziona il 234 con il 255, risulterà 489 che devi dividere per $\frac{1\;\;0\;\;0}{5\;\;7\;\;9}$, che sono a denominatore e tralascia il 3, cioè non dividere per esso dal momento che nella moltiplicazioni di entrambi i gruppi frazionari lo hai tralasciato, cioè non hai moltiplicato per 3: per questo la somma delle addizioni di quelle frazioni non devi dividerla per 3, ma devi dividerla per le altri parti frazionarie per le quali le hai moltiplicate, risulterà $\frac{4\;\;6\;\;4}{5\;\;7\;\;9}$, come sopra.

Sottrazione di $\frac{1\;3}{9\;5}$ da $\frac{1\;2}{7\;3}$.

(1) Se poi tu volessi sottrarre $\frac{1\;3}{9\;5}$ da $\frac{1\;2}{7\;3}$, trova i suddetti 255 e 234 e sottrai 234 da 255, resterà 21 che, in base alla dottrina scritta precedentemente, devi dividere soltanto per $\frac{1\;\;0\;\;0}{5\;\;7\;\;9}$, dividerai per 7 e per 9 prima che per 5, per il fatto che 21 si divide esattamente per il 7 e per il 3 che è un fattore di 9, risulterà $\frac{3\;\;0}{9\;\;5}$, come differenza della suddetta sottrazione, cioè $\frac{1\;\;0}{3\;\;5}$. Per la loro divisione a vicenda fai come sopra.

Addizione di $\frac{1\;3}{5\;4}$ con $\frac{1\;\;2}{10\;9}$.

(1) Parimenti se tu volessi addizionare $\frac{1\;3}{5\;4}$ con $\frac{1\;\;2}{10\;9}$, moltiplica i denominatori, vale a dire 4 per 5, risulterà 20, per 9, risulterà 180. Non occorre moltiplicare questo 180 per 10, dal

momento che in 180 si trova $\frac{1}{10}$. Per questo calcola $\frac{1\ 3}{5\ 4}$ di 180, vale a dire 171 e addizionalo con $\frac{1\ 2}{10\ 9}$ di 180, vale a dire con 58, risulterà 229 che devi dividere per 180, risulterà $\frac{1\ \ 6\ \ 2}{2\ \ 9\ \ 10}1$.

(2) Secondo un altro metodo, scrivi le frazioni e moltiplica il 3, che sta sopra il 4, per il 5 e l'1, che sta sopra il 5, per il 4, risulterà 19 che devi moltiplicare per 9, risulterà 171, che devi tralasciare di moltiplicare per 10 in virtù dei fattori in comune che il 10 ha con il 5 e con il 4. Scrivi dunque il 171 sopra $\frac{1\ 3}{5\ 4}$, poiché esso è i $\frac{1\ 3}{5\ 4}$ di 180. Poi moltiplica il 2, che sta sopra il 9, per il 10 e l'1, che sta sopra il 10, per il 9, risulterà 19 che devi moltiplicare per il 2, e tralascia i fattori in comune che il 10 ha con il 4 e con il 5, risulterà 58, che sono i $\frac{1\ 2}{10\ 9}$ di 180. Addiziona dunque il 58 con il 171, risulterà 229 che devi dividere per i denominatori che sono da un lato e per la frazione dell'altro lato che è stata moltiplicata nella moltiplicazione, cioè, o per 4 e per 5 che stanno in un lato e per il 9 che sta nell'altro lato, per il quale abbiamo moltiplicato più sopra il 19, o dividi per il 9 e per il 10 che sono dall'altro lato e per il 2 che abbiamo usato dall'altro lato nella moltiplicazione, per il quale, cioè, abbiamo moltiplicato il 29. Infatti $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{4\ \ 5\ \ 9}$ o $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 9\ \ 10}$ è la stessa cosa, e una qualunque di quelle frazioni è la scomposizione di 180, risulterà $\frac{1\ \ 6\ \ 2}{2\ \ 9\ \ 10}1$.

Infatti se tu volessi sottrarre $\frac{1\ 2}{10\ 9}$ da $\frac{1\ 3}{5\ 4}$, trova i suddetti 171 e 58 e sottrai 58 da 171, resterà 113 che devi dividere per la scomposizione scritta precedentemente $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 9\ \ 10}$, risulterà $\frac{1\ \ 2\ \ 6}{2\ \ 9\ \ 10}$, come differenza della suddetta sottrazione.

E se tu vuoi dividerli a vicenda fra loro, fai come sopra.

(3) Voglio mostrare il metodo per trovare il minimo comune multiplo di qualunque numeri dati. Così se vuoi calcolare il numero nel quale si trovino $\frac{1}{10}\frac{1}{9}\frac{1}{8}\frac{1}{7}\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$, moltiplica il denominatore maggiore per il seguente, purché non abbiano fattori in comune, cioè 10 per 9, risulterà 90[2409] che devi moltiplicare per il fattore in comune che ha con l'8, cioè per la sua metà, dal momento che il numero due è il loro fattore comune, risulterà 360 che devi moltiplicare per il 7 dal momento che non si può semplificare nulla tra loro, risulterà 2520 che non occorre moltiplicare per 6 dal momento che la sua scomposizione è $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 3}$ che sono fattori che si ritrovano tra i fattori dei numeri già moltiplicati. Infatti $\frac{1}{2}$è un fattore di 10, la cui scomposizione è $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 5}$ e $\frac{1}{3}$ è un fattore di 9. Inoltre non bisogna moltiplicare 2520 per 5, dal

[2409] Sigler traduce diversamente: poi moltiplica il numero più grande che è sotto la frazione con il vicino, vale a dire il 10 per il 9, essi non hanno fattori in comune e il prodotto è 90.

momento che 5 è un fattore di 10, e neanche bisogna moltiplicarlo per 4 o per 2 dal momento che essi si ritrovano nella scomposizione di 8. Similmente non occorre moltiplicare il 2520 neanche per 3 dal momento che esso è fra i fattori del 9. Dunque in 2520 si ritrovano tutte le suddette frazioni ed esso è il minimo comune multiplo di tutti i suddetti denominatori.

[p.69]

Parte terza.

La divisone dei numeri interi per interi con parti frazionarie e viceversa.

(1) Se tu volessi dividere un numero intero per un numero intero con una o più parti frazionarie, o, viceversa, un numero intero con parti frazionarie per un altro numero intero, considera parti frazionarie di entrambi i numeri quella o quelle che sono state poste con uno solo dei numeri. Poi dividi la somma delle frazioni di un numero per la somma delle frazioni dell'altro, e otterrai il quoziente di qualsiasi divisione. E affinché ciò si chiarisca meglio davanti agli occhi, nelle pagine seguenti procureremo di esemplificare le divisioni di alcuni numeri.

Divisione di 83 per $\frac{2}{3}$ *5*[2410].

(1) Se tu volessi dividere 83 per $\frac{2}{3}$ 5, trasforma ciascun numero in una frazione a denominatore tre, così: moltiplicherai il 5 per il 3 del denominatore, poi addiziona il 2, risulterà 17 terzi. E moltiplica l'83 per il 3 in modo da calcolare la sua frazione a denominatore 3, risulterà 249 terzi. Dividi dunque il 249 per il 17, risulterà $\frac{11}{17}$ 14[2411] per la divisione richiesta.

(2) Da ciò risulta evidente che la divisione di 83 per $\frac{2}{3}$ 5 è la stessa di quella di 249 per 17, e questo è quanto chiarisce nel suo libro l'espertissimo geometra Euclide[2412]: cioè che la proporzione tra un numero qualunque verso un numero qualunque è la stessa che c'è tra i loro multipli per lo stesso numero. Come 17 è multiplo di $\frac{2}{3}$ 5 tanto 249 lo è di 83: infatti 17 è il triplo di $\frac{2}{3}$ 5 e 249 è il triplo di 83.

[2410] Ovvero 83: 5,66666= 14,64

[2411] Ovvero 14,64

[2412] I codici hanno *peritissimus geometra*, anche se un aggettivo come *peritissimus* si adatterebbe meglio a un ablativo come *geometria*. Si può anche pensare a una corruzione del testo e alla necessità di emendarlo.

(3) E se, viceversa, tu volessi dividere $\frac{2}{3}5$ per 83, dividi il 17 per la scomposizione di 249, che è $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 83}$, risulterà $\frac{2\ \ 5}{3\ \ 82}$ per la divisione richiesta.

Divisione di 94 per $\frac{2}{5}6$.

32	470
$\frac{2}{5}6$	94
$\frac{2\ \ 5}{4\ \ 8}14$	

32	470
$\frac{2}{5}6$	94
	$\frac{2\ \ 3}{10\ \ 47}$

(1) Parimenti se tu volessi dividere 94 per $\frac{2}{5}6$[2413], se avrai voluto apprendere la dottrina scritta precedentemente, in base all'insegnamento di quella tecnica, scrivi i numeri come qui si mostra e moltiplica il 6 per la sua parte frazionaria, cioè per 5, e addiziona il 2, risulterà 32 quinti che devi scrivere sopra $\frac{2}{5}6$ e moltiplica il 94 per il 5, risulterà 470 quinti che devi scrivere sopra il 94. Poi dividi il 470 per la scomposizione di 32, che è $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 8}$, risulterà $\frac{1\ \ 5}{2\ \ 8}14$ per la divisione richiesta. (2) E se tu volessi dividere 32 per la scomposizione di 470, otterresti $\frac{2\ \ 3}{10\ \ 47}$ per la divisione di $\frac{2}{5}6$ per 94, come più sopra si mostra in figura.

1808	183
113	$\frac{1\ \ 3}{2\ \ 8}11$
	$\frac{2\ \ 53}{3\ \ 61}9$

(3) Se poi tu volessi dividere 113 per $\frac{1\ \ 3}{2\ \ 8}11$, scrivi i numeri come si vede qui, una volta che li hai scritti, moltiplica l'11 per la sua parte frazionaria, risulterà 183 sedicesimi, che devi scrivere sopra $\frac{1\ \ 3}{2\ \ 8}11$. Poi moltiplica il 113 per l'8 e per il 2 che stanno sotto la linea di frazione, cioè per il 16, risulterà similmente 1808 sedicesimi che devi porre sopra il 113.

[2413] Ovvero 94:6,4=14,68

Dividi dunque il 1808 per la scomposizione di 183, risulterà $\frac{2\ \ 53}{3\ \ 61}9$ per la divisione richiesta. (4) E se dividessi 183 per la scomposizione di 1808, otterresti $\frac{1\ \ 3\ \ 11}{2\ \ 8\ \ 113}$ per la divisione di $\frac{1\ \ 3}{2\ \ 8}11$ per 113. Anche se più frazioni fossero poste lungo la stessa linea potresti procedere calcolando similmente.

Divisione di 217 per $\frac{1\,2}{4\,3}$ 13.

167	2604
$\frac{1\,2}{4\,3}13$	217
$\frac{99}{167}$ 15	

167	2604
$\frac{1\,2}{4\,3}13$	217
$\frac{1\ \ 5\ \ 6\ \ 1}{2\ \ 6\ \ 7\ \ 31}$	

(1) Se tu volessi dividere 217 per $\frac{1\,2}{4\,3}$ 13, scrivi i numeri e moltiplica il 13 per le sue frazioni, risulterà 167 dodicesimi che devi scrivere sopra $\frac{1\,2}{4\,3}$ 13. Poi moltiplica il 217 per i denominatori, vale a dire per 3 e per 4, o, in una sola moltiplicazione, per 12, risulterà similmente 2604 dodicesimi che devi porre sopra 217 e devi dividere 2604 per 167, risulterà $\frac{52}{167}$[2414] per la divisione cercata. (2) Se poi tu dividessi 167 per la scomposizione di 2604, risulterebbe $\frac{1\ \ 5\ \ 6\ \ 1}{2\ \ 6\ \ 7\ \ 31}$ come divisione di $\frac{1\,2}{4\,3}$ 13 per 217, come si mostra nella figura più sopra.

Divisione di 323 per $\frac{1\,5}{9\,6}$ 14.

269	5814
$\frac{1\,5}{9\,6}14$	323
$\frac{165}{269}$ 21	Divisio ne del maggio

[2414] controllare: sigler ha altri numeri

$\frac{1\ 8\ 14\ (}{2\ 9\ 17\ 1}$	re Divisio ne del minore

(1) Parimenti se tu volessi dividere 323 per $\frac{1\ 5}{9\ 6}$ 14, sebbene tu possa calcolare questa divisione secondo il metodo dimostrato, tuttavia mostreremo in che modo ci si debba regolare con la semplificazione se i denominatori hanno fattori in comune. Innanzitutto schematizza il problema, poi moltiplica il 14 per i suoi denominatori, semplificando solo così: moltiplicherai il 14 per il 6 e addiziona il 5, risulterà 89 sesti che devi moltiplicare per un terzo di 9 in virtù del fattore in comune che la scomposizione del 6 ha con quella del 9. Infatti è 3 il loro fattore comune, risulterà 267 diciottesimi al quale devi addizionare il prodotto dell'1 che è a numeratore del 9 per un terzo di 6 che è a denominatore, cioè per 2, risulterà 269 diciottesimi. (2) O, secondo un altro metodo, addiziona $\frac{5}{6}$ con $\frac{1}{9}$, risulterà $\frac{17}{18}$. Per questo moltiplica il 14 per il 18 e addiziona il 17, risulterà similmente 269 diciottesimi che devi scrivere sopra $\frac{1\ 5}{9\ 6}$ 14, e moltiplica 323 o per 6 e per un terzo di 9, o per 9 e per un terzo di 6, in virtù del loro fattore in comune. Dunque moltiplicherai, in una sola moltiplicazione, 323 per 18, che è lo stesso, risulterà 5814 diciottesimi che devi scrivere sopra il 323. Poi dividi 5814 per 269, risulterà $\frac{1\ 6\ 5}{2\ 6\ 9}$ 21 per la divisione richiesta. (2) Invece[2415] se tu dividessi 269 per la scomposizione di 5814, troveresti $\frac{1\ 8\ 14\ 0}{2\ 9\ 17\ 19}$ per la divisione di $\frac{1\ 5}{6\ 6}$ 14 per 323, come più sopra si è mostrato in figura.

Divisione di 1357 per $\frac{1\ 1\ 1}{5\ 4\ 3}$ 83.

(1) Se poi tu volessi dividere 1357 per $\frac{1\ 1\ 1}{5\ 4\ 3}$ 83, scrivi i numeri e moltiplica 83 per le sue parti frazionarie, risulterà 5027 sessantesimi. Scrivi dunque il 5027 sopra $\frac{1\ 1\ 1}{5\ 4\ 3}$83, e fai la verifica in base all'insegnamento che ti abbiamo mostrato nella moltiplicazione per una frazione. (2) Infatti la sua prova per 7 è 1, come è necessario: scrivi questa prova sopra il 5027. Poi moltiplica il 1357 per i denominatori davanti all'83, cioè per 3 e per 4 e per 5, o, in una sola moltiplicazione, per 60, risulterà 81420 sessantesimi, che devi scrivere sopra il 1357. E sopra di esso scrivi la sua prova per 7 che è 3. Poi dividi 81420 per la scomposizione di

[2415] Nam è di solito asseverativo, anche se può avere una sfumatura avversativa quindi non è necessario ipotizzare la necessità di emendare.

5027 che è $\frac{1\ \ 0}{11\ 457}$, risulterà $\frac{9\ \ 89}{11\ 457}$ 16 per la divisione richiesta. Per questo se la moltiplicherai per $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}83$ risulterà lo stesso 1357, ed è la prova della stessa divisione di 3 per 7 come è la prova di 81420. E se dividerai 5027 per la scomposizione di 81420, otterrai $\frac{5\ \ 7\ \ 14\ \ 3}{6\ \ 10\ \ 23\ \ 59}$ per la divisione di $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 83 per 1357: la prova per 7 di questa divisione è 1, come lo è di 5027. E così devi intendere per le prove di qualsiasi divisione simile.

Divisione di 2456 per $\frac{1}{10}\frac{2}{9}\frac{5}{6}$ *15.*

1454	221040
$\frac{1}{10}\frac{2}{9}\frac{5}{6}15$	2456
$\frac{6\ \ 1\ \ 0\ \ 2}{8\ \ 9\ \ 10\ \ 3}$	

(1) Parimenti proponiamo un'altra divisione di tal genere con tre frazioni che abbiano tra loro un fattore in comune in modo che tu comprenda meglio il metodo per semplificare. Ti prononiamo infatti di dividere 2456 per $\frac{1}{10}\frac{2}{9}\frac{5}{6}$ 15. Schematizza il problema e moltiplica il 15 per la sua parte frazionaria, semplificando così: moltiplicherai il 15 per il 6 e addizionerai il 5, risulterà 95 sesti che moltiplicherai per un terzo di 9 al denominatore perché, in virtù del fattore in comune che il 9 ha con il 6, non occorre moltiplicarlo per tutto il 9. Risulterà, pertanto, 285 diciottesimi che devi moltiplicare per 5 che è la metà di 10 in virtù del 2 che è il fattore in comune di 10 e di 6, risulterà 1425 novantesimi. (2) Parimenti moltiplica il 2 che sta sopra il 9 di due noni, per 10, risulterà 20 novantesimi che non occorre moltiplicare per 6 dal momento che il 6 è interamente contenuto nelle scomposizioni di 9 e di 10. Infatti la scomposizione di 6 è $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 3}$ e $\frac{1}{2}$ di questa scomposizione appartiene alla scomposizione di 10 che è $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 5}$. E $\frac{1}{3}$, che rimane da 6, sta nella scomposizione di 9, dal momento che essa è $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 3}$. Poi moltiplica l'1 che sta sopra il 10 per il 9, risulterà 9 novantesimi che non occorre moltiplicare per 6 in virtù dei suddetti fattori in comune. Addiziona, dunque, i 9 novantesimi trovati con i 20 novantesimi e con i 1425 novantesimi, risulterà 1454 novantesimi, la cui prova per 7 è 5. Scrivi, dunque, il 1454 sopra il 15 e sopra le sue frazioni, e scrivi sopra il 5 come prova.

(3) Puoi in verità calcolare in un altro modo i novantesimi di $\frac{1}{10}\frac{2}{9}\frac{5}{6}$ 15. Tuttavia bisogna innanzitutto spiegare perché di lì devono essere calcolati i novantesimi: devono essere

calcolati in virtù del fatto che $\frac{1\ 2\ 5}{10\ 9\ 6}$ si ritrovano nel 90 e esso è il numero più piccolo nel quale si trovano queste frazioni. Per questo moltiplica il 15 per il 90, risulterà 1350, al quale devi addizionare i $\frac{1\ 2\ 5}{10\ 9\ 6}$ di 90 che sono 104 novantesimi, risulterà similmente 1454 novantesimi. Dopo calcola i novantesimi di 2456, risulterà 221040 novantesimi, che devi scrivere sopra 2456 e dividi 221040 per la scomposizione di 81454[2416], risulterà $\frac{0\ 16}{27\ 27}$ 152 per la divisione richiesta. E se dividerai 1454 per la scomposizione di 221040, otterrai la divisione di $\frac{1\ 2\ 5}{10\ 9\ 6}$ 15 per 2456. Questa divisione è $\frac{6\ 1\ 0\ 2}{8\ 9\ 10\ 307}$, come più sopra si è mostrato nello schema del problema.

Parte quarta. Addizione, sottrazione e divisione di numeri interi con frazioni.

(1) Qualora poi tu volessi addizionare un qualunque numero con una o più parti frazionarie con un qualunque altro numero similmente con una o più parti frazionarie, ovvero sottrarre il minore tra loro con la sua o le sue parti frazionarie dal maggiore con la sua o le sue parti frazionarie, ovvero dividere uno qualunque dei due per l'altro, scrivi il numero minore con la sua o le sue parti frazionarie nella parte destra della tavoletta, e scrivi invece il maggiore con le sue parti frazionarie sulla stessa linea verso sinistra, come abbiamo esemplificato nella parte precedente. E moltiplica il numero minore per la sua o le sue parti frazionarie, come più sopra abbiamo insegnato e moltiplica il prodotto per tutti i numeri che si trovano lungo la linea o le linee del numero maggiore. E riporta il prodotto della moltiplicazione sopra il suddetto numero minore. Poi moltiplica il numero maggiore per la sua o le sue parti frazionarie e per tutti i numeri che sono lungo la linea o le linee del numero minore. E scrivi il prodotto sopra il medesimo numero maggiore. (2) E poi se vorrai addizionare, addiziona quei numeri trovati e dividi la somma calcolata[2417] per tutte le parti frazionarie che sono state poste e otterrai la loro addizione. (3) E se vorrai sottrarre il minore dal maggiore, sottrai il numero trovato e il numero scritto sopra il minore dal numero trovato e scritto sopra il maggiore, e similmente dividi la differenza per tutte le frazioni e otterrai la differenza che c'è tra il maggiore e il minore. (4) E se tu volessi dividere il maggiore per il minore, dividi il numero maggiore trovato per il numero minore trovato. (5) E se volessi dividere il minore per il maggiore, dividi il numero minore trovato per il numero maggiore trovato e così otterrai il risultato di qualsivoglia divisione tra loro. (6) E affinché ciò s'intenda

[2416] Controllare: Sigler ha 1454
[2417] Coadunata: questo participio viene dal verbo coaduno che significa 'riunire'.

più chiaramente, ci proponiamo immediatamente di esemplificare caso per caso ponendo i numeri negli schemi.

Addizione di $\frac{1}{3}$ 12 con $\frac{3}{4}$ 126.

1521	148
$\frac{3}{4}126$	$\frac{1}{3}12$
Risultato dell'addizione	$\frac{1}{12}139$

(1) Se tu volessi addizionare $\frac{1}{3}$ 12 con $\frac{3}{4}$ 126, scrivi i numeri come qui si mostra, e moltiplica il 12 per la sua frazione, risulterà 37 terzi che devi moltiplicare per il 4 che è a denominatore davanti a 126, risulterà 148 dodicesimi, che devi scrivere sopra $\frac{1}{3}$ 12. Poi moltiplica il 126 per la sua frazione, risulterà 507 quarti che devi moltiplicare per il 3 che sta a denominatore davanti al 12, risulterà 1521dodicesimi che devi scrivere sopra $\frac{3}{4}$ 126. Addiziona pertanto i 148 dodicesimi con i 1521 dodicesimi, risulterà 1669 dodicesimi, che devi dividere per entrambi i denominatori, vale a dire per 3 e per 4 o, in una sola divisione, per 12. Risulterà $\frac{1}{12}$ 139, come si mostra nello schema.

Sullo stesso argomento.

(1) Puoi invero calcolare questa stessa addizione in un altro modo, così addizioni gli interi con gli interi, vale a dire il 12 con il 126, risulterà 138. Poi addizioni le frazioni in una sola, vale a dire $\frac{1}{3}$ con $\frac{3}{4}$, come più sopra abbiamo mostrato nella prima parte di questo capitolo, risulterà $\frac{1}{12}$ 1 che devi addizionare con 138, risulterà $\frac{1}{12}$ 139, come or ora abbiamo calcolato per la addizione scritta precedentemente.

Sottrazione di $\frac{1}{3}$ 12 da $\frac{3}{4}$ 126.

1521	148
$\frac{3}{4}126$	$\frac{1}{3}12$

Risultato della sottrazione	$\frac{5}{12}114$

(1) Se poi tu volessi sottrarre $\frac{1}{3}$ 12 da $\frac{3}{4}$ 126, schematizza il problema come sopra, e calcola il 148 e il 1521 scritti precedentemente e sottrai il 148 dal 1521, resterà 1373, che in, base al metodo descritto precedentemente, devi dividere per 12, risulterà interamente $\frac{5}{12}$ 114 come differenza della suddetta sottrazione come si vede nello schema.

(2) O, altrimenti, sottrai l'intero dall'intero, vale a dire 12 da 126, resta 114. Poi sottrai $\frac{1}{3}$ da $\frac{3}{4}$, resta $\frac{5}{12}$ che devi addizionare con 114, risulterà similmente $\frac{5}{12}$ 114.

1521	148
$\frac{3}{4}126$	$\frac{1}{3}12$
Schema della divisione del maggiore per il minore	$\frac{1\ \ 10}{4\ \ 37}114$

(3) E se tu volessi dividere $\frac{3}{4}$126 per $\frac{1}{3}$ 12, dividi 1521 per la scomposizione di 148, che è $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 37}$, risulterà $\frac{1\ \ 10}{4\ \ 37}$ 10 per la divisione richiesta, come si dimostrerà nella sua figura.

1521	148
$\frac{3}{4}126$	$\frac{1}{3}12$
Divisione del minore per il maggiore	$\frac{4\ \ 3\ \ 1}{9\ \ 13\ \ 13}$

(4) Parimenti se tu volesso dividere il numero minore per il maggiore, vale a dire $\frac{1}{3}$ 12 per $\frac{3}{4}$ 126 trovati, vale a dire 148 e 1521, dividi 148 per la scomposizione di 1521 che è $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{9\ 13\ 13}$, risulterà $\frac{4\ \ 3\ \ 1}{9\ 13\ 13}$ di un intero per la divisione richiesta.

Addizione di $\frac{3}{4}$ 13 con $\frac{2}{5}$ 171.

3428	275
$\frac{2}{5}171$	$\frac{3}{4}13$
Addizione	$\frac{1\ \ 1}{2\ 10}185$

(1) Se, invero, tu volessi addizionare $\frac{3}{4}$ 13 con $\frac{2}{5}$ 171, scrivi i numeri come abbiamo detto precedentemente e moltiplica il 13 per il 4 e addiziona il 3 che sta sopra il 4, risulterà 55 quarti che devi moltiplicare per il 5 che sta sotto la linea di frazione davanti al 171, risulterà 275 ventesimi che devi riportare sopra $\frac{3}{4}$ 13, e addiziona il 171 alla sua parte frazionaria, vale a dire moltiplica per 5 e addiziona 2, risulterà 857 quinti che devi moltiplicare per il 4 che sta sotto la linea di frazione davanti a 13, risulterà 3428 ventesimi che devi porre sopra $\frac{2}{5}$ 171, poi addiziona 275 con 3428, risulterà 3703 ventesimi che devi dividere per le parti frazionarie, cioè per il 4 e i 5 che sono sotto le linee di frazione davanti ai due numeri, risulterà $\frac{1\ 1}{2\ 10}$ 185 per l'addizione richiesta.

Verifica dell'addizione scritta sopra.

(1) Verificherai attraverso la prova per 7 se questa addizione è corretta. Moltiplica la prova di 13, che è 6, per 4, e in aggiunta addiziona il 3 che sta sopra il 4, risulterà 27, la cui prova, che è 6, moltiplicala di nuovo per il 5 che sta a denominatore, risulterà 30, la cui prova, che è 2, è la prova di 275.

(2) Similmente applicati a trovare la prova di 3428 attraverso i numeri che lo generano. Fai così: moltiplica la prova per 7 di 171 per il 5 che sta sotto la linea di frazione e addiziona il 2 che sta sopra il 5, risulterà 17 la cui prova, che è 3, moltiplicala per il 4 che sta sotto la linea di frazione, risulterà 12, la cui prova, che è 5, deve essere la prova di 3428. E poiché sappiamo di aver proceduto rettamente quando abbiamo ottenuto questo 3428, fai così: poni questa prova sopra 3428, poi addiziona la prova di 275, vale a dire 2, con la prova di 3428,

vale a dire con 5, risulterà 7, la cui prova, che è 0, la devi conservare come prova del risultato dell'addizione.

La stessa addizione.

(1) Puoi calcolare in un altro modo l'addizione descritta sopra. Vale a dire, se addizioni 13 con 171, risulterà 184 e se addizioni $\frac{3}{4}$ con $\frac{2}{5}$, risulterà $\frac{1\ \ 1}{2\ \ 10}$ 1, che devi addizionare con 184, risulterà $\frac{1\ \ 1}{2\ \ 10}$ 185, come è già stato calcolato per la loro addizione.

Sottrazione di $\frac{3}{4}$ *13 da* $\frac{2}{5}$ *171.*

$\frac{2}{5}171$	$\frac{3}{4}13$
$\frac{1\ \ 6}{2\ \ 10}157$	Schema della sottrazi one

(1) E se tu volessi sottrarre $\frac{3}{4}$ 13 da $\frac{2}{5}$ 171, sottrai 275 da 3428, resta 3153 che devi dividere per le parti frazionarie, risulterà $\frac{1\ \ 6}{2\ \ 10}$ 157 come differenza della sottrazione richiesta.

(2) Verificherai attraverso la prova del 7 se questa differenza è corretta, così: sottrai la prova di 275, che è 2, dalla prova di 3428, che è 5. Poi tieni la differenza, che è 3, come prova di $\frac{1\ \ 6}{2\ \ 10}$.

(3) Infatti possiamo sottrarre $\frac{3}{4}$ 13 da $\frac{2}{5}$ 171 in un altro modo, vale a dire sottrai 13 e $\frac{3}{4}$ da 171, resta $\frac{1}{4}$ 157 al quale addiziona $\frac{2}{5}$, risulterà $\frac{1}{4}\frac{2}{5}$, vale a dire $\frac{1\ \ 6}{2\ \ 10}$ 157.

Divisione di $\frac{2}{5}$ *171 per* $\frac{3}{4}$ *13.*

$\frac{2}{5}171$	$\frac{3}{4}13$
$\frac{3\ \ 0\ \ 5}{5\ \ 5\ \ 11}12$	Schema della division e

(1) E se tu volessi dividere $\frac{2}{5}$ 171 per $\frac{3}{4}$ 13, dividi 3428 per la scomposizione di 275, che è $\frac{1\ 0\ 0}{5\ 5\ 11}$, risulterà $\frac{3\ 0\ 5}{5\ 5\ 11}$ 12 per la divisione richiesta, la cui prova per 7 deve essere 5, come lo è del 3428 che viene diviso. (2) E se tu volessi dividere $\frac{3}{4}$ 13 per $\frac{2}{5}$ 171, dividi 275 per la scomposizione di 3428 che è $\frac{1\ 0}{4\ 857}$, risulterà $\frac{3\ 67}{4\ 857}$ di un intero, la prova per 7 di queste parti frazionarie è 2, come lo era di 275.

Addizione di $\frac{5}{6}$ 14 con $\frac{2}{9}$ 231.

(2)	(7)
4162	267
$\frac{2}{9}231$	$\frac{5}{6}14$
3	2
$\frac{1\ 0}{2\ 9}245$	

(1) Parimenti se tu volessi addizionare $\frac{5}{6}$ 14 con $\frac{2}{9}$ 231, scrivi i numeri come qui si mostra. E sebbene questa addizione si possa risolvere attraverso il metodo descritto sopra, tuttavia dal momento che $\frac{5}{6}$ e $\frac{2}{9}$ hanno un fattore in comune, indicheremo in che modo questa operazione debba essere svolta con la semplificazione. (2) Pertanto moltiplicherai il 14 per il 6 e addizionerai il 5, risulterà 89 sesti che devi moltiplicare per 3, vale a dire per la terza parte di 9 in virtù del fattore in comune che il 6 ha con il 9, risulterà 267 ventottesimi, che devi riportare sopra $\frac{5}{6}$ 14 e verificalo attraverso la prova che preferisci. Infatti la sua prova per 13 è 7 che devi riportare sopra il 267. Poi moltiplica 231 per 9 e addiziona il 2, risulterà 2081 noni che devi moltiplicare per la terza parte di 6, cioè per 2, risulterà similmente 4162 diciottesimi, che devi porre sopra $\frac{2}{9}$ 231, e sopra di esso riporta similmente la sua prova per 13, che è 2. Dopo di ciò addiziona 267 con 4162, risulterà 4429 che devi dividere per una qualunque delle parti frazionarie e per la parte privata del fattore in comune dell'altro numero, cioè o dividi per 6 e per un terzo di nove, ovvero per 3, o dividi per 9 e per un terzo di 6, vale a dire per 2, risulterà $\frac{1\ 0}{2\ 9}$ 246 per l'addizione richiesta, la prova per 13 di questo risultato è 9, che risulta dall'addizione della prova di 267, che è 7, e di 4162, che è 2. E affinché ciò sia fatto con più criterio, dividi il 6 e il 9 per il loro fattore comune, vale a dire per 3, risulteranno 2 e

3. Poni pertanto il 2 sotto il 6 e il 3 sotto il 9 e moltiplica l'89 calcolato per il 3 posto sotto il 9 e il 2081 per il 2 posto sotto il 6 e otterrai i numeri scritti precedentemente, la somma dei quali devi dividerla per uno dei numeri che sono sotto le linee di frazione e per un numero posto sotto un altro, vale a dire per 6 e per 3, ovvero per 9 e per 2. (3) Puoi, in verità, addizionare in altro modo $\frac{5}{6}$ 14 con $\frac{2}{9}$ 231. Vale a dire, innanzitutto addizioni 14 con 231, risulterà 245, poi addizioni $\frac{5}{6}$ con $\frac{2}{9}$, risulterà $\frac{1}{13}$ 1, che devi addizionare con 245, risulterà $\frac{1\ 0}{2\ 9}$ 246, come sopra è stato calcolato con il metodo precedente.

Sottrazione di $\frac{5}{6}$ 14 da $\frac{2}{9}$ 231.

(1) E se tu volessi sottrarre $\frac{5}{6}$ 14 da $\frac{2}{9}$ 231, sottrai 267 da 4162, resterà 3895, la cui prova per 13 è 8, che si trova così: dal momento che non si può sottrarre 7, che è la prova di 267 dalla prova di 4162, cioè da 2, devi addizionare 13 con il 2 scritto precedentemente, risulterà 15 da cui devi sottrarre il suddetto 7, resta 8 come prova di 3895 come abbiamo detto, dividi pertanto 3895 per $\frac{1\ 0}{2\ 9}$, in base alla regola descritta precedentemente, risulterà $\frac{1\ 3}{2\ 9}$ 216 come differenza della suddetta sottrazione.

(2) Altrimenti sottrai il 14 da $\frac{2}{9}$ 231, resterà $\frac{2}{9}$ 217, da cui devi sottrarre $\frac{2}{9}$1. Dal momento che non puoi sottrarre $\frac{5}{6}$ da $\frac{2}{9}$, resterà 216, e sottrai $\frac{5}{6}$ da $\frac{2}{9}$ trasformandoli in diciottesimi, resterà $\frac{7}{18}$, questi addizionati con 216, risulta $\frac{13}{29}$ 216, come è stato calcolato precedentemente.

Divisione di $\frac{2}{9}$ 231 per $\frac{5}{6}$ 14.

(1) Poi se tu volessi dividere $\frac{2}{9}$ 231 per $\frac{5}{6}$ 14, dividi 4162 per la scomposizione di 267, risulterà $\frac{1\ 5\ 2}{3\ 8\ 9}$ 15 per la divisione richiesta.

Divisione di $\frac{5}{6}$ 14 per $\frac{2}{9}$ 231.

(1) Parimenti se tu volessi dividere $\frac{5}{6}$ 14 per $\frac{2}{9}$ 231, dividi 267 per la scomposizione di 4162, risulterà $\frac{1}{2}\frac{133}{2081}$ per la divisione richiesta.

Addizione di $\frac{1\,1}{4\,3}$ 15 con $\frac{1\,3}{7\,5}$ 322.

(1) Parimenti se tu volessi addizionare $\frac{1\,1}{4\,3}$ 15 con $\frac{1\,3}{7\,5}$ 322, scrivi i numeri come si vede qui. E moltiplica il 15 per le sue parti frazionarie, vale a dire: moltiplica per 3 e addiziona 1, che devi moltiplicare per 4 e addiziona la moltiplicazione di 1 che è sopra il 4 per il 3, risulterà 187 dodicesimi che devi moltiplicare per i numeri che sono sotto le linee di frazione davanti al 322, vale a dire per 5 e per 7, risulterà 6545 quattrocentoventesimi che devi porre sopra $\frac{1\,1}{4\,3}$ 15. (2) Poi moltiplica il 322 per le sue parti frazionarie, risulterà 11296 trecentocinquesimi, che devi moltiplicare per i numeri che sono sotto le linee di frazione davanti al 15, risulterà 135552 quattrocentoventesimi, che devi porre sopra il $\frac{1\,3}{7\,5}$ 322. Poi addiziona 6545 con 135552, risulterà 142097 quattrocentoventesimi, che devi dividere per 420, cioè per tutti i numeri che sono sotto le linee di frazione e li unirai, risulterà $\frac{5\ 1\ 3}{6\ 7\ 10}$ 338 per l'addizione richiesta, la cui prova per 11 è 10.

(3) Secondo un altro metodo addiziona 15 con 322, risulterà 337 e addiziona $\frac{1\,1}{4\,3}$ con $\frac{1\,1}{7\,3}$, secondo il metodo che abbiamo nella seconda parte di questo capitolo, risulterà $\frac{5\ 1\ 3}{6\ 7\ 10}$ 1, che devi addizionare con 337, risulterà $\frac{5\ 1\ 3}{6\ 7\ 10}$ 333, come abbiamo detto precedentemente.

Sottrazione di $\frac{1\,1}{4\,3}$ *15 da* $\frac{1\,3}{7\,5}$ *322.*

(1) E se tu volessi sottrarre $\frac{1\,1}{4\,3}$ 15 da $\frac{1\,3}{7\,5}$ 322, sottrai 6545 da 135552, resterà 129007 che devi dividere, in base alla dimostrazione descritta precedentemente, per $\frac{1\ 0\ 0}{6\ 7\ 10}$ 307, risulterà $\frac{1\ 4\ 1}{6\ 7\ 10}$ 307 come differenza della suddetta sottrazione.

(2) Secondo l'altro metodo, sottrai il 15 dal 332, resterà 307, e sottrai $\frac{1\,1}{4\,3}$ da $\frac{1\,3}{7\,5}$, resterà $\frac{1\ 4\ 1}{6\ 7\ 10}$ che devi addizionare con 307, risulterà $\frac{1\ 4\ 1}{6\ 7\ 10}$ 307, come abbiamo detto precedentemente.

(3) In verità se tu volessi dividere $\frac{1\,3}{7\,5}$ 322 per $\frac{1\,1}{4\,3}$ 15, dividi 135552 per la scomposizione in fattori di 6545, risulterà $\frac{2\ 60\ 12}{6\ 711\ 17}$ 20 per la divisione richiesta.

Divisione $\frac{1\,1}{4\,3}$ *15 per* $\frac{1\,3}{7\,5}$ *322.*

(1) Parimenti se tu volessi dividere $\frac{1\,1}{4\,3}$ 15 per $\frac{1\,3}{7\,5}$ 322, dividi 6545 per la scomposizione in fattori di 135552, risulterà $\frac{5\ 2\ 0\ 17}{6\ 8\ 8\ 352}$ per la divisione richiesta. (2) E così, in base al metodo

prescritto, puoi addizionare e sottrarre e dividere qualsiasi numero con due parti frazionarie. Tuttavia ci proponiamo di esemplificare qualche altro problema in cui si può semplificare qualche frazione per la comunanza dei fattori.

Addizione di $\frac{1\ 3}{5\ 4}$ 16 con $\frac{1\ 4}{9\ 5}$ 422.

(1) Se tu volessi addizionare $\frac{1\ 3}{5\ 4}$ 16 con $\frac{1\ 4}{9\ 5}$ 422, una volta scritti i numeri, moltiplica innanzitutto il 16 per le sue parti frazionarie, risulterà 339 ventesimi che devi moltiplicare per 5 e per 9 che sono sotto altre linee linee di frazione non li moltiplicherai se non solo per 9 per l'altro 5 che sono sotto le linee di frazione davanti a $\frac{3}{4}$ 16, risulterà 280esimi 3051 che devi conservare sopra $\frac{1\ 3}{5\ 4}$ 16. Poi moltiplica 442 per le sue frazioni, risulterà 19931 quarantacinquesimi che devi moltiplicare solo per 4, che sta sotto la linea di frazione davanti al 16 per questo tralascerai di moltiplicare per 5 per la suddetta ragione, risulterà similmente 79724280esimi che devi porre sopra il $\frac{1\ 4}{9\ 5}$ 422. Poi addiziona 3051 con 79724, risulterà 82775 280esimi che devi dividere per 180 o per tutti i numeri che sono sotto le linee di frazione tranne che per uno dei due 5, poiché come si è tralasciato un cinque nella moltiplicazione di uno dei due numeri scritti precedentemente, così devono essere tralasciati nella divisione del risultato della loro addizione, dunque dividi 882775 per $\frac{1\ 0\ 0}{4\ 5\ 9}$ e semplifica di lì $\frac{1}{5}$, risulterà $\frac{3\ 7}{4\ 9}$ 459 per l'addizione richiesta.

(2) O puoi addizionare gli interi con gli interi e i quinti con i quinti e $\frac{3}{4}$ con $\frac{1}{9}$, come abbiamo insegnato nei paragrafi precedenti, e otterrai similmente il risultato di tale addizione.

Sottrazione di $\frac{1\ 3}{5\ 4}$ 16 da $\frac{1\ 4}{9\ 5}$ 442.

(1) Parimenti se tu volessi sottrarre $\frac{1\ 3}{5\ 4}$ 16 da $\frac{1\ 4}{9\ 5}$ 442, sottrai 3051 da 79724, resterà 76673, che - secondo il metodo descritto - devi dividere per $\frac{1\ 0\ 0}{2\ 9\ 10}$, risulterà $\frac{1\ 5\ 9}{2\ 9\ 10}$ 425 come differenza della sottrazione richiesta. (2) Oppure potresti sottrarre $\frac{1}{5}$ 16 da $\frac{1\ 4}{9\ 5}$ 442, [p.75] resta $\frac{1\ 3}{9\ 5}$ 426. Poi dovresti sottrarre $\frac{3}{4}$ di $\frac{1\ 3}{9\ 5}$ da $\frac{1\ 3}{9\ 5}$ se fosse possibile. Ma poiché non è possibile, sottrai $\frac{1\ 3}{9\ 5}$ 1 da $\frac{1\ 3}{9\ 5}$ 426, resta 425. Poi sottrai $\frac{3}{4}$ dal suddetto $\frac{1\ 3}{9\ 5}$ 1, resterà $\frac{1\ 5\ 9}{2\ 9\ 10}$ più 425 come differenza.

(3) E ancora se vorrai dividere $\frac{1}{9}\frac{4}{5}$ 442 per $\frac{1}{5}\frac{3}{4}$ 16, dividi 79724 per la scomposizione di 3051, risulterà $\frac{2\ 6\ 11}{3\ 9\ 113}$ 26 per la divisione richiesta. (4) E se vorrai dividere $\frac{1}{5}\frac{3}{4}$ 16 per $\frac{1}{9}\frac{4}{5}$ 442, dividi 3051 per la scomposizione di 79724, risulterà $\frac{3\ 762}{4\ 19931}$ come quoziente della divisione richiesta.

Addizione di $\frac{1}{6}\frac{2}{5}$ 17 con $\frac{1}{10}\frac{7}{9}$ 523.

(1) Se poi vorrai addizionare $\frac{1}{6}\frac{2}{5}$ 17 con $\frac{1}{10}\frac{7}{9}$ 523, una volta schematizzato il problema, moltiplica il 5 e il 6 che stanno sotto le linee di frazione, risulterà 30; poi moltiplica il 9 e il 10 che stanno sotto le altre linee di frazione dall'altro lato, risulterà 90. (2) Tieni il 30 nella mano destra e il 90 nella mano sinistra e dividili per il Massimo Comune Denominatore che hanno tra loro, vale a dire per 30, risulteranno 1 sulla mano destra e 3 sulla mano sinistra. (3) Scrivi dunque l'1 sotto $\frac{1}{6}\frac{2}{5}$ e il 3 sotto $\frac{1}{10}\frac{7}{9}$, come sono scritti nello schema del problema. Poi moltiplica il 17 per le sue parti frazionarie, risulterà 527 trentesimi che devi moltiplicare per il 3 posto sotto $\frac{1}{10}\frac{7}{9}$, risulterà 1581 novantesimi che devi porre sopra $\frac{1}{6}\frac{2}{5}$ 17. (4) Poi moltiplica il 523 per le sue parti frazionarie, e addiziona il prodotto con 1581, risulterà 48730 che devi dividere per i numeri che sono a denominatore da un lato e per i numeri che sono a denominatore dall'altro lato, cioè per 5 e per 6 e per 3 o 9 per 10 e per 1, e così la divisione è per 90 poiché è necessario che il suddetto risultato espresso in novantesimi sia trasformato in un numero intero. Per la divisione richiesta risulta $\frac{4}{9}$ 541. (5) Applicati a utilizzare questo metodo in tutti i casi simili perché è più sicuro e migliore di altri.

(6) E se vorrai sottrarre $\frac{1}{6}\frac{2}{5}$ 17 da $\frac{1}{10}\frac{7}{9}$ 523, sottrai 1581 da 47149, e dividi poi la differenza, che è 45568, per $\frac{1\ 0}{9\ 10}$ in base al suddetto insegnamento. Risulterà $\frac{4\ 2}{5\ 9}$ 506 come differenza della suddetta sottrazione. Oppure sottrai il 17 dal 523, resterà 506 e sottrai $\frac{1}{6}\frac{2}{5}$ da $\frac{1}{10}\frac{7}{9}$, resterà $\frac{4\ 2}{5\ 9}$, come abbiamo detto precedentemente.

Divisione di $\frac{1}{10}\frac{7}{9}$ 523 per $\frac{1}{6}\frac{2}{5}$ 17.

(1) Invero, se vorrai dividere $\frac{1}{10}\frac{7}{9}$ 523 per $\frac{1}{6}\frac{2}{5}$, dividi 47149 per 1581. E se dividerai 1581 per 47149, otterrai la divisione di $\frac{1}{6}\frac{2}{5}$ 17 per $\frac{1}{10}\frac{7}{9}$ 523, come nei paragrafi precedenti abbiamo esemplificato caso per caso.

(10)	(8)
115400	27783
$\frac{2}{9}128\frac{5}{7}$	$\frac{2}{5}29\frac{3}{4}$
Addizione	$\frac{1\ 2\ 3\ 5}{2\ 7\ 9\ 10}1$
Sottrazione	$\frac{1\ 2\ 3\ 5}{2\ 7\ 9\ 10}6$

(1) Se vorrai addizionare $\frac{3}{4}$ di $\frac{2}{5}$ 29 con $\frac{5}{7}$ di $\frac{2}{9}$ 128, scrivi i numeri come qui si mostra e moltiplica il 29 per il 5 e addiziona il 2, risulterà 147 che devi moltiplicare per il 3 che sta sopra il 4, risulterà 441 che devi moltiplicare per il 7 e per il 9 che stanno sotto la linea di frazione dell'altro numero, risulterà 27783 che devi porre sopra $\frac{2}{5}$ 29, la cui prova per 11 è 8 che viene trovato in base a ciò che abbiamo moltiplicato. (2) Poi moltiplica il 128 per il 9 e addiziona il 2, poi moltiplica per il 5 che sta sopra il 7, risulterà 5770 che devi moltiplicare per il 5 e per il 4 che stanno sotto le linee si frazione dell'altro numero, il primo, risulterà 115400 che devi porre sopra $\frac{2}{9}$ 128 $\frac{5}{7}$, e la prova per 11 è 10. (3) Addiziona dunque 27783 con 115400, risulterà 143183 che devi dividere per tutte le parti frazionarie, vale a dire per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{4\ 5\ 7\ 9}$, risulterà $\frac{1\ 2\ 3\ 6}{2\ 7\ 9\ 10}$ 113 come somma dell'addizione richiesta.

Sottrazione di $\frac{2}{5}$ 29 $\frac{3}{4}$ da $\frac{2}{9}$ 128 $\frac{5}{7}$.

(1) E se vuoi sottrarre $\frac{2}{5}$ 29 $\frac{3}{4}$ da $\frac{2}{9}$ 128 $\frac{5}{7}$, sottrai 27733 da 115400, resta 37617 che similmente devi dividere per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{2\ 7\ 9\ 10}$, risulterà $\frac{1\ 2\ 3\ 5}{2\ 7\ 9\ 10}$ 69 come differenza della suddetta sottrazione.

Divisione di $\frac{2}{9}$ 128 $\frac{5}{7}$ per $\frac{2}{5}$ 29 $\frac{2}{4}$.

Divisione del maggiore per il minore

$\frac{5\ 0\ 3\ 3\ 1}{7\ 7\ 7\ 9\ 9}$
Divisione del minore per il maggiore
$\frac{1\ 1\ 9\ 13}{2\ 10\ 10\ 5}$

(1) E ancora se vorrai dividere $\frac{2}{9}$ 128 $\frac{5}{7}$ per $\frac{2}{5}$ 29 $\frac{2}{4}$, trovato a quanto corrispondono i suddetti numeri, vale a dire 27783 e 115400, applicati a trovare la scomposizione di 27783 che è $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{7\ 7\ 7\ 9\ 9}$, e dividi per essa il 115400, risulterà $\frac{5\ 0\ 3\ 3\ 1}{7\ 7\ 7\ 9\ 9}$ 4 come quoziente della divisione richiesta.

(2) E ancora se vorrai dividere i $\frac{3}{4}$ di $\frac{2}{5}$ 29 per i $\frac{5}{7}$ di $\frac{2}{9}$ 128, dividi 27783 per la scomposizione di 115400, risulterà $\frac{1\ 1\ 9\ 1\ 2\ 8}{2\ 10\ 10\ 5\ 7\ 7}$ per la divisione richiesta.

(0)	(7)
3152175	884488
$11\frac{5}{6}244\frac{1\ 3}{4\ 7}$	$\frac{2}{5}33\frac{1\ 3}{5\ 4}$
Resto della prova per 13	(7)
$\frac{3\ 3\ 4\ 8\ 6}{4\ 7\ 9\ 10\ 11}$ 1	

(3) Se poi vorrai addizionare i $\frac{1\ 3}{5\ 4}$ di $\frac{2\ 5}{7\ 9}$33 con i $\frac{1\ 3}{4\ 7}$ di $\frac{1\ 5}{11\ 6}$ 244, schematizza i numeri come qui si mostra e moltiplica il 33 per il 9 e addiziona il 5 che sta sopra il 9 poi moltiplica per il 7 e addiziona il 2, risulterà 2116 sessantatreesimi. Parimenti moltiplica il 3 che sta sopra il 4 per il 5 e l'1 che sta sopra il 5 per il 4 e addizionali assieme, risulterà 19 ventesimi. Poi devi moltiplicare quest'ultimo numero per i 2116 sessantatreesimi trovati, risulterà 40204 milleduecentosessantesimi, la cui prova per 13 è stata calcolata in 8 quando abbiamo moltiplicato. (4) Poiché devi moltiplicare quel numero, vale a dire 40204 per tutti i denominatori che sono dall'uno e dall'altro lato, vale a dire per 7 e per 4, che sono sotto la prima linea di frazione di quel lato e per 6 e per 11, tralascia dapprima di moltiplicare per 7 e

per 4 per via del 7 e del 4 che sono sotto le linee di frazione del primo lato, e tralascia poi di moltiplicare per il 3 che è nella scomposizione del suddetto 6 per via del 3 che è nella scomposizione del 9, il quale 9 è sotto l'ultima linea di frazione del primo lato. Dunque moltiplicherai 40204 per il 2 che rimane del suddetto 6 e per l'11, cioè, in una sola moltiplicazione, per 22, risulterà 884488 27720esimi che devi porre sopra $\frac{2\ 5}{7\ 9}\,33\,\frac{1}{5}\frac{3}{4}$, e sopra scrivi la loro prova che è 7. (5) Poi moltiplica il 244, che sta sotto la linea di frazione e addiziona il 5 che sta sopra il 6, risulterà 1469 sesti che devi moltiplicare per 11 e addizionaci il prodotto della moltiplicazione dell'1, che sta sopra l'11, per il 6, risulterà 16165 settantunesimi, la cui prova, sempre per 13, è 6. Parimenti moltiplica il 3 che sta sopra il 7 per il 4 e addiziona l'1 che sta sopra il 4, risulterà 13 ventottesimi che devi moltiplicare per 1616 sessantaseiesimi, risulterà 210145 milleottocentoquarantottesimi. E poiché devi moltiplicarlo per tutti i numeri che sono a denominatore del primo lato e tralascerai i suddetti cioè non moltiplicherai che per il 3 che resta dalla scomposizione del 9 e per il 5, cioè, in una sola moltiplicazione, per 15, risulterà similmente 3152175 ventisettemilasettecentoventesimi, come è risultato dall'altro lato. (6) Questo risultato scrivilo parimenti sopra $\frac{1}{11}\frac{5}{6}\,244\,\frac{1\ 3}{4\ 7}$ e sopra scrivici la prova che è 0. Poi addiziona 884488 con 3152175, risulterà 4036663 che devi dividere per tutti i denominatori di un lato qualunque e per le parti frazionarie che risultano nella moltiplicazione dall'altro lato, cioè per 4 e per 5 e per 9 e per 7 che sono dal primo lato e per il 2 che è nella scomposizione del 6 e per l'11 dell'altro lato che risulta nella moltiplicazione del primo numero, o per 7 e per 4 e per 6 e per 11 che sono nel secondo lato e per il 3 che sta nella scomposizione del 9 e per il 5 che sta dall'altro lato, risulterà $\frac{3\ 3\ 4\ 8\ 6}{4\ 7\ 9\ 10\ 11}$ 145 per l'addizione richiesta.

Sottrazione di $\frac{1}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{7}\frac{5}{9}\,33$ da $\frac{1}{11}\frac{5}{6}\,244\,\frac{1\ 3}{4\ 7}$.

(1) Se tu volessi sottrarre $\frac{1}{5}\frac{3}{4}$ di $\frac{2\ 5}{7\ 9}$ da $\frac{1\ 3}{4\ 7}$ di $\frac{1}{11}\frac{5}{6}\,244$, o dividere uno di essi per i restanti altri, calcola attraverso il suddetto metodo e in successione i suddetti 884488 e 3152175. Con questi numeri farai i calcoli secondo il metodo che abbiamo spiegato per la sottrazione e la divisione più sopra, in questo capitolo.

$$\frac{2\ 0\ 3}{3\ 5\ 11}331\frac{1}{9}\frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{13}\frac{2}{11}\frac{3}{5}42\frac{2\ 3}{7\ 8}$$

(2) Parimenti se vorrai addizionare $\frac{2\ \ 3\ \ 5}{7\ \ 8\ \ 9}$ di $\frac{1}{13}\frac{2}{11}\frac{3}{5}$ 42 con $\frac{1}{9}\frac{3}{8}\frac{5}{7}$ di $\frac{2\ \ 0\ \ 3}{3\ \ 5\ \ 11}$ 331, scrivi i numeri come qui si mostra. E comincia a moltiplicare il 42 per le sue parti frazionarie che lo precedono, risulterà 30644. E calcola $\frac{2\ \ 3\ \ 5}{7\ \ 8\ \ 9}$, poi moltiplica il 5 che sta sopra il 9 per l'8 e addiziona il 3 poi devi moltiplicare per 7 e addizionare il 2, risulterà 303 che devi moltiplicare con 30644, risulterà 9285132. (3) Poiché devi moltiplicare quest'ultimo numero per tutti i numeri che stanno sotto tutte le linee di frazione dell'altro lato, vale a dire per 7 e per 8 e per 9 che stanno sotto le tre linee di frazione di quel lato e per 11 e per 5 e per 3 che stanno sotto una sola linea di frazione, tralascia e non ripetere nel moltiplicare i numeri che ancora sono in questo primo lato. Dunque, tralasciatili, ti resta da moltiplicare il 9285132 soltanto per il 3, moltiplicazione che ammonta a 27855396, e questo numero devi porlo sopra il primo lato. (4) Poi per carcolarti il numero dell'altro lato moltiplicherai il 331 per la sua parte frazionaria che gli sta davanti, risulterà 54662. E calcolerai i numero delle altre sue tre frazioni, vale a dire di $\frac{1}{9}\frac{1}{8}\frac{5}{7}$, risulterà 479 per cui devi moltiplicare 54662, risulterà 26183098. (5) Poiché devi moltiplicare questo numero per tutti i numeri che sono sotto tutte le linee di frazione del primo lato, vale a dire per 13 e per 11 e per 5 che sono sotto le tre linee di frazione di quel primo lato, e per 7 e per 8 e per 9 che sono sotto l'altra linea di frazione, fra i suddetti moltiplica solo per 13 in virtù della comunanza di fattori che hanno tra loro le parti frazionarie di entrambi i lati. La moltiplicazione di 26183098 per 13 ammonta a 340380274 che devi porre sopra il secondo lato. (6) Poi addiziona quest'ultimo con il numero posto sopra il primo lato, vale a dire con 27855396, risulterà 368235670 che devi dividere per tutti i numeri che sono sotto le linee di frazione del primo lato e per il 3 che sta sotto la linea di frazione del secondo lato, cioè come abbiamo moltiplicato quando abbiamo ottenuto il numero del primo lato. (7) Oppure li dividerai per tutti i numeri che sono sotto le linee di frazione del secondo lato e per il 13 che sta sotto una sola linea di frazione del primo lato, cioè in base a ciò per cui abbiamo moltiplicato quando abbiamo ottenuto il nnumero del secondo lato. Dunque devi divere per $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 5\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 11\ \ 13}$, risulterà, con gli adattamenti delle parti frazionarie, $\frac{1\ \ 3\ \ 4\ \ 3\ \ 0\ \ 8}{2\ \ 6\ \ 7\ \ 9\ \ 11\ \ 13}$ 340 per l'addizione richiesta, la cui prova per 17 è 3.

Un'altra sottrazione.

(1) E se volessi sottrarre $\frac{1}{13}\frac{2}{11}\frac{3}{5}$ 42 $\frac{2\ \ 3\ \ 5}{7\ \ 8\ \ 9}$ da $\frac{2\ \ 0\ \ 3}{3\ \ 5\ \ 11}$ 331 $\frac{1}{9}\frac{1}{8}\frac{5}{7}$, calcola nell'ordine suddetto i suddetti 27855396 e 340380274, sottrai il minore di essi dal maggiore, resterà 312524878 che

devi dividere similmente come nella suddetta addizione per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{2\ 6\ 7\ 9\ 10\ 11\ 13}$, risulterà $\frac{0\ 5\ 1\ 6\ 2\ 1\ 1}{2\ 6\ 7\ 9\ 10\ 11\ 13}$ 289 come differenza della sottrazione richiesta.

(2) Invero se tu dividessi 340380274 per la scomposizione di 27855396, otterresti la divisione del numero maggiore per il minore: il contrario, pertanto, risulta il contrario. Se vuoi addizionare o$\frac{3\ 2}{5\ 9}$ con $\frac{2}{9}$, fai terminare la stessa linea di frazione con un cerchietto dall'altra parte e otterrai il numero cercato, vale a dire o$\frac{3\ 2}{5\ 9}$ che devi trasformare in un solo numero attraverso l'insegnamento suddetto, risulterà $\frac{16}{45}$, cioè $\frac{1\ 3}{5\ 9}$. (2) E se vuoi sottrarre o$\frac{3\ 2}{5\ 9}$ da $\frac{2}{9}$, se da o$\frac{5\ 2}{5\ 9}$, cioè da $\frac{2}{9}$, sottrarrai o$\frac{3\ 2}{5\ 9}$, per l'appunto resterà $\frac{2\ 2}{5\ 9}$, cioè $\frac{4}{45}$. Oppure calcola i $\frac{2}{9}$ di 45, risulterà 10 da cui devi sottrarre i suoi $\frac{3}{5}$, resterà 4 che, diviso per 45, risulterà similmente $\frac{4}{45}$ come differenza della suddetta sottrazione. (3) Similmente se vuoi sottrarre $\frac{3\ 0}{4\ 6}$ da $\frac{1}{6}$, sottrai $\frac{3\ 0}{4\ 6}$ da $\frac{4\ 0}{4\ 6}$, vale a dire da $\frac{1}{6}$, resta $\frac{1\ 0}{4\ 6}$. Infatti se da qualunque quantità si sottraggono i $\frac{3}{4}$, è necessario che resti $\frac{1}{4}$ di quella quantità. E se da una certa quantità si sottraggono i $\frac{3}{5}$, della stessa quantità restano i $\frac{2}{5}$. Per cui se sottrarrai i o $\frac{3\ 4}{5\ 7}$ da $\frac{4}{7}$ resteranno i $\frac{2\ 4}{5\ 7}$ e così devi intendere di tutti i casi simili. Similmente se vuoi sottrarre o$\frac{4\ 5}{9\ 7}$ da $\frac{5}{7}$, resterà o$\frac{5\ 5}{9\ 7}$, vale a dire $\frac{2\ 5}{6\ 8}$, poiché da qualunque quantità si sottraggano i $\frac{4}{9}$, è necessario che restino i $\frac{5}{9}$ di quella cosa, poiché $\frac{4}{9}+\frac{5}{9}$ realizzano un intero.

Parte sesta del settimo capitolo sulla scomposizione delle frazioni in frazioni unitarie.

(1) Nella prima e nella seconda parte di questo capitolo abbiamo insegnato a trasformare le parti frazionarie di più numeri, nelle parti frazionarie di un unico numero. In questa parte, invece, insegneremo a dividere più parti di un solo numero in singole parti, in modo che tu possa capire più chiaramente per ogni frazione a che parte o che parti [B, p.78] di un intero corrisponda. (2) Per questo motivo è necessario dividere questa parte in sette sezioni a ciascuna delle quali corrisponda un tipo di frazione[2418]. La prima delle quali è quando il numero maggiore, che è sotto la linea di frazione, si divide esattamente per il numero minore, che sta sopra la linea di frazione. La regola di questo tipo di frazione[2419] è che devi dividere il

[2418] Qui Fibonacci usa un'espressione estremamente brachilogica per indicare la suddivisione in sette sezioni della sesta parte di questo capitolo. Per il momento ho sciolto in questo modo la brachilogia altrimenti oscura.
[2419] Ancora con un'espressione brachilogica e per metonimia, Fibonacci scrive qualcosa che potremmo tradurre 'la regola di questa sezione'. Mi sono invece regolata come prima, sciogliendo le oscurità dell'espressione compendiata.

maggiore per il minore e otterrai la parte che il minore è del maggiore. Per esempio, vogliamo sapere che parte di un intero sia $\frac{3}{12}$: il 12 diviso per il 3 risulta 4 e per questa divisione dirai $\frac{1}{4}$ e a tanto corrispondono i $\frac{3}{12}$ di un intero. Per la stessa ragione $\frac{4}{20}$ è $\frac{1}{5}$ di un intero; $\frac{5}{100}$ è $\frac{1}{20}$ perché 100, diviso per 5 risulta 20, e lo stesso devi intendere per casi simili.

(3) Le frazioni che appartengono alla prima sezione si dividono a sua volta in tre sottotipi di frazione, delle quali la prima è detta 'semplice', la seconda 'composta', la terza 'composta a rovescio'. La semplice è quella che ho menzionato poco fa. La composta è quando la semplice è riferita a frazioni di un altro numero, come $\frac{2\ 0}{4\ 9}$, infatti $\frac{2}{4}$, frazione semplice del primo tipo, si riferisce ad una frazione di 9, per questo per $\frac{2\ 0}{4\ 9}$ si ha $\frac{1\ 0}{2\ 9}$, vale a dire $\frac{1}{18}$, e per $\frac{2\ 0}{4\ 9}$ si ha $\frac{1\ 0}{3\ 9}$ e per $\frac{3\ 0}{9\ 10}$ si ha $\frac{1\ 0}{3\ 10}$. E poiché $\frac{3}{9}$ è semplicemente $\frac{1}{3}$ composto con $\frac{1}{10}$, risulterà $\frac{1\ 0}{3\ 10}$, e lo stesso devi intendere in casi simili. La frazione del primo tipo 'composta a rovescio' è $\frac{3\ 0}{5\ 9}$ che è il rovescio di $\frac{3\ 0}{9\ 5}$ che è $\frac{1\ 0}{3\ 5}$; similmente devi intendere di $\frac{4\ 0}{7\ 8}$ che si rovescia in $\frac{4\ 0}{8\ 7}$, vale a dire in $\frac{1\ 0}{2\ 7}$; e per $\frac{5\ 0}{9\ 10}$ si ottiene $\frac{5\ 0}{10\ 9}$, vale a dire $\frac{1\ 0}{2\ 9}$.

Seconda sezione: frazioni del secondo tipo.

(1) La frazione è del secondo tipo quando il numero maggiore non è divisibile per il minore, ma del minore possono essere fatte delle parti tali che il maggiore sia divisibile per qulunque di esse. La regola di questo tipo di frazione è che si divida il minori in parti per le quali il maggiore possa essere diviso, poi dividi il maggiore per una qualunque di queste parti e otterai una per una le parti che il minore è del maggiore. (2) Per esempio vogliamo dividere $\frac{5}{6}$ in parti singole di un intero. Poiché il 6 non è divisibile per 5 ciò rivela che $\frac{5}{6}$ non è una frazione del primo tipo. Ma poiché il 5 può essere diviso in due parti, vale a dire 3 + 2, per ciascuna delle quali il maggiore, vale a dire 6, è divisibile, si può affermare che $\frac{5}{6}$ appartenga alla seconda sezione. (3) Per cui il 6 diviso per 3 e per 2, risulta 2 e 3, per il quale 2 si calcola $\frac{1}{2}$ e per il 3 si calcola $\frac{1}{3}$, dunque $\frac{5}{6}$ corrisponde a $\frac{1\,1}{3\,2}$ di un intero. (4) Oppure, diviso $\frac{5}{6}$ in $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$, risulterà ciascuna di quelle due frazioni: in base alla regola delle frazioni di primo tipo, infatti, $\frac{3}{6}$ corrisponde a $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{6}$ corrisponde a $\frac{1}{3}$ di uno. Per cui $\frac{5}{6}$ corrisponde a $\frac{1\,1}{3\,2}$, come abbiamo detto. (5) Similmente se scioglierai $\frac{7}{8}$ in $\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}$, otterrai $\frac{1}{2}$ per $\frac{4}{8}$ e $\frac{1}{4}$ per $\frac{2}{8}$ e $\frac{1}{8}$ per $\frac{1}{8}$, cioè otterrai $\frac{1\,1\,1}{8\,4\,2}$ per $\frac{7}{8}$. (6) Anche le frazioni che ppartengono a questa seconda sezione hanno una un sottotipo composto e un sottotipo composto a rovescio. Una frazione composta del secondo

tipo è $\frac{3\ \ 0}{4\ \ 10}$: poiché $\frac{3}{4}$, in base alla regola delle frazioni di secondo tipo corrisponde a $\frac{1\,1}{4\,2}$, per questo per $\frac{3\ \ 0}{4\ \ 10}$ si hanno le frazioni composte $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 10}$ e $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 10}$, cioè $\frac{1}{20}$ e $\frac{1}{40}$; similmente per $\frac{5\ \ 0}{8\ \ 9}$ si ottiene $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 9}$ e $\frac{1\ \ 0}{8\ \ 9}$, poiché $\frac{5}{8}$ corrispone a $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$. Ma per $\frac{5\ \ 0}{8\ \ 10}$, poiché è una frazione di primo tipo a rovescio, non la devi scomporre in $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 10}+\frac{1\ \ 0}{8\ \ 10}$, dal momento che in base alla regola della prima sezione si rovescia in $\frac{5\ \ 0}{10\ \ 8}$ che corrisponde a $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 8}$ e questo capita per la comunanza di fattori che hanno il 5 che sta sopra l'8 e il 10 della frazione composta rovesciata, ciò corrisponde a $\frac{3\ \ 0}{5\ \ 10}$ che si rivolta in $\frac{3\ \ 0}{10\ \ 5}$ che corrisponde a $\frac{1\ \ 0}{5\ \ 5}+\frac{1\ \ 0}{5\ \ 10}$, similmente per $\frac{5\ \ 0}{7\ \ 8}$ si ottiene $\frac{5\ \ 0}{8\ \ 7}$, vale a dire $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 7}+\frac{1\ \ 0}{8\ \ 7}$, e così devi intendere in casi simili. (7) E poiché nelle transazioni commerciali sappiamo che, più di tutte le altre, sono utili le frazioni della prima e della seconda sezione, adesso ci procureremo di mostrare in alcune tabelle le scomposizioni delle frazioni di alcuni numeri. Applicati a mandarle a mente se vorrai comprendere meglio quello che vogliamo dire in questa parte del capitolo.

Tabella delle scomposizioni.

Frazioni di 6

1 di 6 è	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1\,1}{6\,2}$
5	$\frac{1\,1}{3\,2}$

Frazioni di 8

1 di 8 è	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1\,1}{8\,4}$
4	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1\,1}{8\,2}$
6	$\frac{1\,1}{4\,2}$

7 $\frac{1}{8}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$

Frazioni di 12

1 di 12 è $\frac{1}{12}$

2 $\frac{1}{6}$

3 $\frac{1}{4}$

4 $\frac{1}{3}$

5 $\frac{1}{6}\frac{1}{4}$

6 $\frac{1}{2}$

7 $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$

8 $\frac{1}{6}\frac{1}{2}$

9 $\frac{1}{4}\frac{1}{2}$

10 $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$

11 $\frac{1}{6}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$

Frazioni di 20

1 di 20 è $\frac{1}{20}$

2 $\frac{1}{10}$

3 $\frac{1}{20}\frac{1}{10}$

4 $\frac{1}{5}$

5 $\frac{1}{4}$

6 $\frac{1}{10}\frac{1}{5}$

7 $\frac{1}{10}\frac{1}{4}$

8 $\frac{2}{5}$

9 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$

10 $\frac{1}{2}$

11 $\frac{1}{20}\frac{1}{2}$

12 $\frac{1}{10}\frac{1}{2}$

13 $\frac{1}{20}\frac{1}{10}\frac{1}{2}$

14 $\frac{1}{5}\frac{1}{2}$

15 $\frac{1}{4}\frac{1}{2}$

16 $\frac{1}{10}\frac{1}{5}\frac{1}{2}$

17 $\frac{1}{10}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$

18 $\frac{1}{15}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$

19 $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$

Frazioni di 24

1 di 24 è $\frac{1}{24}$

2 $\frac{1}{12}$

3 $\frac{1}{8}$

4 $\frac{1}{6}$

5 $\frac{1}{12}\frac{1}{8}$

6 $\frac{1}{4}$

7 $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$

8 $\frac{1}{3}$

9 $\frac{1}{8}\frac{1}{4}$

10 $\frac{1}{6}\frac{1}{4}$

11 $\frac{1}{8}\frac{1}{3}$

12 $\frac{1}{2}$

13 $\frac{1}{8}\frac{1}{6}\frac{1}{4}$

14 $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$

15 $\frac{1}{8}\frac{1}{2}$

16 $\frac{1}{6}\frac{1}{2}$

17 $\frac{1}{12}\frac{1}{8}\frac{1}{2}$

18 $\frac{1}{4}\frac{1}{2}$

19 $\frac{1}{8}\frac{1}{6}\frac{1}{2}$

20 $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$

21 $\frac{1}{8}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$

22 $\frac{1}{6}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$

23 $\frac{1}{8}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$

Frazioni di 60

1 di 60 è $\frac{1}{60}$

2 $\frac{1}{30}$

3 $\frac{1}{20}$

4 $\frac{1}{15}$

5 $\frac{1}{12}$

6 $\frac{1}{10}$

7 $\frac{1}{60}\frac{1}{10}$

8 $\frac{1}{30}\frac{1}{10}$

9 $\frac{1}{20}\frac{1}{10}$

10 $\frac{1}{6}$

11 $\frac{1}{60}\frac{1}{6}$

12 $\frac{1}{5}$

13 $\frac{1}{20}\frac{1}{6}$

14 $\frac{1}{15}\frac{1}{6}$

15 $\frac{1}{4}$

16 $\frac{1}{10}\frac{1}{6}$

17 $\frac{1}{30}\frac{1}{4}$

18	$\frac{1}{10}\frac{1}{5}$
19	$\frac{1}{15}\frac{1}{4}$
20	$\frac{1}{3}$
21	$\frac{1}{10}\frac{1}{4}$
22	$\frac{1}{30}\frac{1}{3}$
23	$\frac{1}{20}\frac{1}{3}$
24	$\frac{1}{15}\frac{1}{3}$
25	$\frac{1}{12}\frac{1}{3}$
26	$\frac{1}{10}\frac{1}{3}$
27	$\frac{1}{5}\frac{1}{4}$
28	$\frac{1}{10}\frac{1}{6}\frac{1}{5}$
29	$\frac{1}{20}\frac{1}{10}\frac{1}{3}$
30	$\frac{1}{2}$
31	$\frac{1}{60}\frac{1}{2}$
35	$\frac{1}{5}\frac{1}{3}$
40	$\frac{1}{6}\frac{1}{2}$
50	$\frac{1}{3}\frac{1}{2}$
55	$\frac{1}{6}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$

Frazioni di 100

1 di 100 è	$\frac{1}{100}$
2	$\frac{1}{50}$
3	$\frac{1}{100}\frac{1}{50}$
4	$\frac{1}{25}$
5	$\frac{1}{20}$
6	$\frac{1}{50}\frac{1}{25}$

7	$\frac{1}{50}\frac{1}{20}$
8	$\frac{2}{25}$
9	$\frac{1}{25}\frac{1}{20}$
10	$\frac{1}{10}$
15	$\frac{1}{20}\frac{1}{10}$
20	$\frac{1}{5}$
25	$\frac{1}{2}$
30	$\frac{1}{10}\frac{1}{5}$
35	$\frac{1}{10}\frac{1}{4}$
40	$\frac{2}{5}$
45	$\frac{1}{5}\frac{1}{4}$
50	$\frac{1}{2}$
60	$\frac{3}{5}$
70	$\frac{1}{5}\frac{1}{2}$
75	$\frac{3}{4}$
80	$\frac{4}{5}$
85	$\frac{1}{10}\frac{3}{4}$
95	$\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$
96	$\frac{1}{100}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$
97	$\frac{1}{50}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$
98	$\frac{1}{100}\frac{1}{50}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$
99	$\frac{1}{25}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$

Terza sezione: le frazioni del terzo tipo.

(1) Una frazione è di terso tipo quando il numero maggiore + 1 è divisibile per il minore. La regola di questa sezione è che il numero che risulterà dal maggiore aumentato devi dividerlo per il minore, ciò che risulterà dalla divisione sarà la tale parte di un intero del numero maggiore e oltre quella la parte della parte che 1 è del numero minore. (2) Per esempio, vogliamo trasformare in somma di frazioni unitarie $\frac{2}{11}$ che appartiene a questa sezione poiché 1 + 11, vale a dire 12, è divisibile per il 2 che sta sopra la linea di frazione, poiché da questa divisione risulta 6, risulta $\frac{1}{6}$ e in più la sesta parte di 11, vale a dire $\frac{1\ 0}{6\ 11}$ come somma di frazioni unitarie di $\frac{2}{11}$. (3) Per la stessa ragione per $\frac{3}{11}$ otterrai un quarto + $\frac{1\ 0}{4\ 11}$, cioè $\frac{1}{44}\frac{1}{4}$. E per $\frac{4}{11}$ avrai un terzo + $\frac{1\ 0}{3\ 11}$, cioè $\frac{1}{33}\frac{1}{3}$. E per $\frac{6}{11}$ avrai un mezzo + $\frac{1\ 0}{2\ 11}$, cioè $\frac{1}{22}\frac{1}{2}$. E per $\frac{5}{19}$ avrai $\frac{1\ 0}{4\ 19}$ cioè $\frac{1}{76}\frac{1}{4}$, poiché il 5 che sta sopra il 19 è $\frac{1}{4}$ di 20 che è 19 + 1. (4) La frazione di terzo tipo può essere anche composta da due frazioni composte, come $\frac{2\ 0}{3\ 7}$ che è la somma di $\frac{1\ 0}{2\ 7}+\frac{1\ 0}{6\ 7}$, poiché $\frac{2}{3}$ è $\frac{1}{6}\frac{1}{2}$. Similmente $\frac{4\ 0}{7\ 9}$ è la somma di $\frac{1\ 0}{2\ 9}+\frac{1\ 0}{14\ 9}$, poiché $\frac{4}{7}$ è $\frac{1}{14}\frac{1}{2}$. (5) E anche la frazione che appartiene a questa sezione può essere rovesciata come $\frac{3\ 0}{7\ 11}$ o $\frac{3\ 0}{7\ 8}$. Infatti $\frac{3\ 0}{7\ 11}$ corrisponde a $\frac{3\ 0}{11\ 7}$ il quale $\frac{3}{11}$ in base alla terza sezione corrisponde a $\frac{1}{44}\frac{1}{4}$, per questo $\frac{3\ 0}{11\ 7}$ corrisponde a $\frac{1\ 0}{4\ 7}$ + $\frac{1\ 0}{44\ 7}$; similmente $\frac{3\ 0}{7\ 8}$ si rovescia in $\frac{3\ 0}{8\ 7}$, che è composto da frazioni composte che appartengono a due tipo differenti: la seconda e la terza. In quanto frazione di secondo tipo, $\frac{3\ 0}{8\ 7}$ è composto da $\frac{1\,1\,0}{8\ 4\ 7}$, vale a dire $\frac{1\ 0}{4\ 7}+\frac{1\ 0}{8\ 7}$; in quanto frazione di terzo tipo $\frac{3\ 0}{8\ 7}$ corrisponde a $\frac{1\,1\,0}{24\,3\ 7}$, dal momento che per $\frac{3}{8}$ si ha $\frac{1}{24}\frac{1}{3}$ e ciò devi intendere in casi simili.

Sulla stessa sezione.

(1) Appartengono inoltre a questa sezione le frazioni tali che del numero minore che è sopra la linea si possono fare due parti per qualunque delle quali il maggiore + 1 sia esattamente divisibile, come $\frac{8}{11}$ e $\frac{9}{11}$. Infatti $\frac{8}{11}$ è scomponibile in due parti, vale a dire $\frac{6}{11}$ e $\frac{2}{11}$, per cui per $\frac{6}{11}$ abbiamo, in base a questa regola due singole parti, vale a dire $\frac{1}{22}\frac{1}{2}$ e per $\frac{2}{11}$ abbiamo $\frac{1}{66}\frac{1}{6}$, dunque per $\frac{8}{11}$ abbiamo $\frac{1}{66}\frac{1}{22}\frac{1}{6}\frac{1}{2}$. (2) Similmente per $\frac{9}{11}$ che si scompone in $\frac{6}{11}$ e in $\frac{3}{11}$, abbiamo $\frac{1}{44}\frac{1}{22}\frac{1}{4}\frac{1}{2}$. E per $\frac{10}{11}$ abbiamo $\frac{1}{33}\frac{1}{22}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$, dal momento che il 10 che sta sopra l'11 è $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ di 12, il quale 12 è 1 più di 11 che sta a denominatore.

Quarta sezione: le frazioni di quarto tipo.

(1) La frazione è di quarto tipo quando il numero maggiore è un numero primo e addizionato ad 1 risulta divisibile per il minore diminuito di 1, come $\frac{5}{11}$ e $\frac{7}{11}$. (2) La regola di questa sezione è che si sottrae 1 dal numero minore e di ciò fai una singola parte di un intero, vale a dire del numero che è sotto la linea di frazione, e allora ti resteranno frazioni che appartengono alla terza sezione. Così se da $\frac{5}{11}$ sottrarrai $\frac{1}{11}$, resterà $\frac{4}{11}$. Per questo $\frac{4}{11}$, in quanto frazione di terzo tipo, avrai le frazioni unitarie $\frac{1}{33}\frac{1}{11}\frac{1}{3}$. Per lo stesso motivo per $\frac{7}{11}$ avrai $\frac{1}{22}\frac{1}{11}\frac{1}{2}$; e per $\frac{3}{7}$ avrai $\frac{1}{28}\frac{1}{7}\frac{1}{4}$; e per $\frac{6}{19}$ avrai $\frac{1}{76}\frac{1}{19}\frac{1}{4}$; e per $\frac{7}{29}$ avrai $\frac{1}{5}\frac{1}{29}\frac{1}{145}$, cioè $\frac{1}{145}\frac{1}{29}\frac{1}{5}$.

Quinta sezione: le frazioni di quinto tipo.

(1) La frazione è di quinto tipo quando il numero maggiore sarà pari e il maggiore + 2 è divisibile per il minore -2. (2) La regola di questa sezione è che dal numero minore si deve sottrarre 2, il quale 2 risulterà una frazione appartenente alla prima sezione, la differenza poi sarà una frazione di terzo tipo. (3) Come $\frac{11}{26}$ da cui sottrarrai $\frac{2}{26}$ che corrisponde a $\frac{1}{13}$ in base alla regola della prima sezione, resta $\frac{9}{26}$ che corrisponde a $\frac{1\ \ 0\ \ 1}{3\ \ 26\ \ 3}$ cioè $\frac{1}{78}\frac{1}{3}$ con cui devi addizionare $\frac{1}{13}$, risulterà $\frac{1}{78}\frac{1}{13}\frac{1}{3}$ come frazioni unitarie di $\frac{11}{26}$. Per la stessa ragione per $\frac{11}{62}$ otterrai $\frac{1\ \ 0}{7\ \ 62}\frac{1}{31}\frac{1}{7}$.

[p.81]

Sesta sezione: le frazioni di sesto tipo.

(1) La frazione è di sesto tipo quando il numero maggiore si divide esattamente per 3 e il maggiore +1 si divide esattamente per il minore -3 come $\frac{17}{27}$. (2) La regola di questa sezione è che da tali parti devi sottrarre tre parti, le quali tre parti costituiranno una frazione appartenente alla prima sezione, il resto, invece, appartiene alla terza. Così se da $\frac{17}{27}$ sottrarrai $\frac{3}{27}$, che corrisponde a $\frac{1}{9}$ in quanto frazione di primo tipo, e poi $\frac{14}{27}$ che corrisponde a $\frac{1}{54}\frac{1}{2}$ in quanto frazione di terzo tipo, una volta addizionato a ciò l' $\frac{1}{9}$ suddetto, risulterà $\frac{1}{54}\frac{1}{9}\frac{1}{2}$ come frazioni unitarie di $\frac{17}{27}$. Per la stessa ragione per $\frac{20}{33}$ avrai $\frac{1}{66}\frac{1}{11}\frac{1}{2}$.

Settima sezione: le frazioni di settimo tipo.

(1) La frazione di settimo tipo è quella che non rientra in nessuna delle suddette sezioni. (2) La regola di questa sezione è molto utile, attraverso di essa, infatti, le frazioni che

appartengono a qualunque delle suddette sezioni, vale a dire le frazioni che appartengono alla seconda, alla quarta, alla quinta e alla sesta sezione, si ricavano talora meglio che attraverso le loro regole specifiche. Per cui le frazioni che appartengono a queste quattro sezioni devono essere ripetute sempre per questa settima regola, in modo che tu possa ricavare o frazioni più belle attraverso le loro regole, o attraverso di essa ricavarle più precisamente. (3) La regola di questa sezione è di dividere il numero maggiore per il minore e poiché da questa divisione non risulterà un numero intero, considera tra quali due numeri sarà compreso il quoziente di quella divisione. Se sarà compreso tra 3 e 4, saprai che il numero minore, rispetto al maggiore, è meno di $\frac{1}{3}$ e più che $\frac{1}{4}$ di esso. E se risulterà tra 4 e 5, sarà meno di $\frac{1}{4}$ e più di $\frac{1}{5}$. E così devi intendere di tutti i due numeri tra i quali sarà compreso il quoziente di quella divisione. Poi prendi la frazione maggiore che il numero minore sarà del maggiore e conserva il resto che resterà di lì, se questo apparterrà a qualcuna delle suddette sezionni, opererai attraverso di essa, se invece quel resto non apparterrà ad alcuna delle suddette sezioni, allora prenderai la parte più grande di quel resto e farai ciò finché non resteranno frazioni che appartengono alle suddette sezioni o finché avrai tutte le singole frazioni che il numero minore sarà del maggiore.

(4) Per esempio, vogliamo calcolare le frazioni unitarie di $\frac{4}{13}$. La divisione di 13 per 4 ha un quoziente compreso fra 3 e 4, poiché $\frac{4}{13}$ di un intero è meno di $\frac{1}{3}$ di un intero e più che $\frac{1}{4}$. Per questo sappiamo che $\frac{1}{4}$ è la maggiore delle frazioni unitarie che possono essere ricavate da $\frac{4}{13}$. Infatti $\frac{13}{13}$ realizzano un intero, per questo la sua quarta parte, vale a dire $\frac{1\ 3}{4\ 13}$ è $\frac{1}{4}$ di un intero. Per questo sottrai $\frac{1\ 3}{4\ 13}$ da $\frac{4}{13}$, resterà $\frac{3\ 0}{4\ 13}$, che in base alla seconda sezione corrisponde a $\frac{1\,1\,0}{4\ 2\ 13}$, cioè $\frac{1}{52}\frac{1}{26}$, o poiché $\frac{3\ 0}{4\ 13}$ corrisponde a $\frac{3}{52}$, che per la regola della seconda sezione corrisponde similmente a $\frac{1}{52}\frac{1}{26}$, dunque per $\frac{4}{13}$ abbiamo tre frazioni unitarie, vale a dire $\frac{1}{52}\frac{1}{26}\frac{1}{4}$. (5) Altrimenti puoi calcolare le frazioni di $\frac{3}{52}$ attraverso questa settima regola. Naturalmente se dividi 52 per 3, risulterà qualcosa in più di 17. Per questo $\frac{1}{18}$ è la frazione più grande contenuta in $\frac{3}{52}$. Per cui il 52 diviso per 18 dà come quoziente $\frac{8}{9}$ 2 che, sottratto da 3, dà come resto $\frac{1\ 0}{9\ 52}$, vale a dire $\frac{1}{468}$. Dunque per $\frac{3}{52}$ avremo $\frac{1}{468}\frac{1}{18}$, per questo per $\frac{4}{13}$ avremo $\frac{1}{468}\frac{1}{18}\frac{1}{4}$.

(6) Parimenti così calcolerai le frazioni unitarie di $\frac{9}{61}$: dividi 61 per 9, risulterà un po' più di 6, per questo avrai $\frac{1}{7}$ come maggiore frazione unitaria di $\frac{9}{61}$. Dividi pertanto 61 per 7,

risulterà $\frac{5}{7}$ 8 che sono sessantunesimi e che devi sottrarre da $\frac{9}{61}$, resterà $\frac{2\ 0}{7\ 61}$, cioè $\frac{2}{427}$, il quale $\frac{2}{427}$ corrisponde a $\frac{1}{214} + \frac{1\ 0}{214\ 427}$ in quanto frazione di terzo tipo. Dunque $\frac{9}{61}$ corrisponde a $\frac{1\ 0}{214\ 427}\frac{1}{214}\frac{1}{7}$ di un intero, così per $\frac{2\ 0}{7\ 61}$ si avrà, in base alla regola per le frazioni composte che appartengono alla terza sezione, $\frac{1\ 0}{4\ 61} + \frac{1\ 0}{28\ 61}$, per questo per $\frac{9}{61}$ si avrà $\frac{1}{1708}\frac{1}{244}\frac{1}{7}$.

(7) Parimenti vogliamo dimostrare questo stesso metodo di scomporre $\frac{17}{29}$. Una volta diviso 29 per 17 risulta 1 e un po' di più, per questo sappiamo che $\frac{17}{29}$ è più della metà di un intero e bisogna notare che tre terzi o quattro quarti o $\frac{5}{5}$ o $\frac{6}{6}$ realizzano un intero. Similmente [p.82] $\frac{29}{29}$ realizzano un intero, se calcoleremo la cui metà, vale a dire $\frac{1\ 14}{2\ 29}$ e la sottrarremo da $\frac{17}{29}$, resterà $\frac{1\ 2}{2\ 29}$, cioè $\frac{5}{58}$. Per questo $\frac{17}{29}$ corrisponde a $\frac{5}{58}\frac{1}{2}$, del quale $\frac{5}{58}$ occorre calcolare le frazioni unitarie, naturalmente attraverso la regola di questa stessa sezione. Per questo dividi 58 per 5, risulterà un po' più di 11, da cui si capisce che $\frac{1}{12}$ è la maggiore delle frazioni unitarie che compongono $\frac{5}{58}$, per cui si calcoli $\frac{1}{12}$ di $\frac{58}{58}$, vale a dire di un intero, risulterà $\frac{5\ 4}{6\ 58}$ la cui differenza con $\frac{5}{58}$ è di $\frac{1\ 0}{6\ 58}$, cioè $\frac{1}{348}$. E così otterrai per $\frac{17}{29}$ tre frazioni unitarie, vale a dire $\frac{1}{348}\frac{1}{12}\frac{1}{2}$.

Regola generale nella scomposizione delle frazioni.

(1) C'è invero in casi simili una certa altra regola generale, vale a dire, devi trovare un numero che ha in sé molte scomposizioni come 12 o 24 o 36 o 48 o 60 o qualsiasi altro numero che sia maggiore della metà del numero che sta sotto la linea di frazione o minore del suo doppio. (2) Così per il suddetto $\frac{17}{29}$, prendiamo il 24 che è più della metà di 29 e moltiplica allora il 17 che sta sopra la linea di frazione, per il 24, risulterà 408, che devi dividere per 29 e per 24, risulterà $\frac{2\ 14}{29\ 24}$. Poi calcola a che frazione di 24 corrisponda il 14, corrisponde invero a $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ o a $\frac{1\ 1}{12\ 2}$ che devi corservare come frazioni di $\frac{17}{29}$. E osserva nel frattempo che frazione di 24 sia il 2 che sta sopra il 29, è infatti i suoi $\frac{1}{12}$, per cui otterrai $\frac{1\ 0}{12\ 29}$ come stesse frazioni di $\frac{17}{29}$, poiché $\frac{2}{29}$ di $\frac{1}{24}$ corrisponde a $\frac{2}{24}$ di $\frac{1}{29}$, che risulta $\frac{1\ 0}{12\ 29}$, vale a dire $\frac{1}{348}$. Dunque per $\frac{17}{29}$ otterrai $\frac{1}{348}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, oppure $\frac{1}{348}\frac{1}{12}\frac{1}{2}$, come abbiamo già calcolato più sopra.

(3) Parimenti se moltiplicherai il 17 che sta sopra il 29 per il 36, così come lo hai moltiplicato per 24 e dividerai similmente per 29 e per 36, risulterà $\frac{3\ 21}{29\ 36}$. Questo $\frac{21}{36}$

corrisponde a $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ oppure a $\frac{1}{12}\frac{1}{2}$ di 36, e il 3 che sta sopra il 29 è $\frac{1}{12}$ di 36, e poiché questo 3 sta sopra il 29, risulterà $\frac{1\ \ 0}{12\ \ 29}$, cioè $\frac{1}{348}$. E così otterrai come frazioni unitarie $\frac{17}{29}\frac{1}{348}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, oppure $\frac{1}{348}\frac{1}{12}\frac{1}{2}$. (4) E se vuoi sapere perché abbiamo moltiplicato per 24 quel 17 che sta sopra il 29 e abbiamo diviso il prodotto per 29, sappi che di $\frac{17}{29}$ abbiamo calcolato $\frac{1}{24}$ perché 24 è il numero composto da molti numeri per cui le sue frazioni sono comprese tra la prima e la seconda sezione. Invero $\frac{17}{29}$, come sopra si è calcolato, corrisponde a $\frac{2}{29}\frac{14}{24}$, per cui il $\frac{14}{24}$ che sta all'inizio della linea di frazione, corrisponde, in base alla regola della seconda sezione, a $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ oppure a $\frac{1}{12}\frac{1}{2}$ e per il $\frac{2\ \ 0}{29\ \ 24}$ che resta si ha, in quanto frazione rovesciata del primo tipo, $\frac{2\ \ 0}{24\ \ 29}$, cioè $\frac{1\ \ 0}{12\ \ 29}$. (5) Similmente poiché hai moltiplicato il 17 per il 36 e poi hai diviso per 29, allora hai trasformato $\frac{17}{29}$ in trentaseiesimi. Infatti $\frac{29}{29}$ sono uguali a $\frac{36}{36}$. Per questo la proporzione che c'è fra 29 e 36 è la stessa che c'è fra 17 e il quarto numero. Per questo abbiamo moltiplicato il terzo numero, vale a dire 17, per il secondo, vale a dire per 36, e abbiamo diviso il prodotto per il primo numero. Poiché quando quattro numeri sono proporzionali, la moltiplicazione del secondo per il terzo uguaglia la moltiplicazione del primo per il quarto come è stato dimostrato da Euclide.

(6) Parimenti se vuoi scomporre $\frac{19}{53}$ in frazioni unitarie - sebbene sia una frazione del quarto tipo poiché 53 + 1 è divisibile per 19 -1 e così per $\frac{19}{53}$ otterrai $\frac{1}{159}\frac{1}{52}\frac{1}{3}$ - ugualmente mostreremo come si debbano ottenere queste frazioni attraverso la settima regola. (7) Infatti il quoziente della divisione di 53 per 19 cade tra 2 e 3, per questo abbiamo $\frac{1}{3}$ come maggiore frazione unitaria che può essere ricavata da $\frac{19}{53}$. Poi sottrai un terzo di 53, vale a dire $\frac{2}{3}$ 17, da 19, resterà $\frac{1}{3}$ 1, cioè $\frac{1}{3}\frac{1}{53}$. Dunque le frazioni unitarie di $\frac{19}{53}$ sono $\frac{1}{159}\frac{1}{53}\frac{1}{3}$, come abbiamo ricavato attraverso la regola della quarta sezione.

(7) Invero attraverso questa regola non possono essere così facilmente calcolate le frazioni unitarie di $\frac{20}{53}$, per cui le troverai attraverso un'altra regola, vale a dire moltiplicando il 20 per un numero che ha molte scomposizioni, come abbiamo detto precedentemente, Moltiplica pertanto il 20 per il 48 e dividi per 53 e per 48, risulta $\frac{6\ \ 18}{53\ \ 48}$, questo 18 è $\frac{1\ \ 1}{8\ \ 4}$ di 48, ovvero $\frac{1}{24}\frac{1}{3}$, e il 6 che sta sopra il 53 è $\frac{1}{8}$ di 48, per questo risulterà $\frac{1\ \ 0}{8\ \ 53}$ poiché il 6 sta sopra i 53. Dunque per le frazioni unitarie di $\frac{20}{53}$ otterrai [p.83] $\frac{1\ \ 0}{8\ \ 53}\frac{1}{8}\frac{1}{4}$ oppure $\frac{1\ \ 0}{8\ \ 53}\frac{1}{24}\frac{1}{3}$. Ed applicati a procedere così in tutti i casi simili.

(8) E quando non puoi ottenere frazioni unitarie attraverso una qualunque delle suddette regole ingegnati a trovarle attraverso qualche altra regola. E bisogna notare che sono molte le frazioni che si devono adattare prima che scomporre in frazioni unitarie, per esempio quando il numero maggiore non si divide per il minore e hanno tra loro un fattore in comune come $\frac{6}{9}$, ciascuno dei quali numeri si divide esattamente per 3, per questo dividerai entrambi per 3, risulterà 2 sopra la linea di frazione e 3 sotto di essa, cioè $\frac{2}{3}$ che è una frazione del terzo tipo, dal momento che uno in più di 3 si divide per 2, per questo risulta $\frac{1\,1}{6\,2}$. Lo stesso vale per $\frac{6}{8}$ ciascuno dei cui numeri è divisibile per 2, per cui si trasforma in $\frac{3}{4}$ et corrisponde a $\frac{1\,1}{4\,2}$ per la regola delle frazioni di secondo tipo. Et così devi intendere di casi simili. (9) E se ci saranno più parti frazionarie sotto la linea, è necessario che siano ricondotte a una sola parte frazionaria come $\frac{1\,3}{2\,8}$ che corrisponde a $\frac{7}{16}$. E questa trasformazione si fa così: si moltiplica il 3 che sta sopra l'8 per il 2 et si addiziona l'1 e così otteniamo il 7, poi moltiplicherai il 2 per l'8 che sta sotto la linea di frazione, risulterà 16. Questo 16 lo poniamo sotto la linea di frazione e sopra di essa poniamo il 7.

(10) Parimenti $\frac{2\ \ 3\ \ 4}{3\ \ 5\ \ 9}$ corrisponde a $\frac{71}{135}$ che si calcola in base al metodo descritto precedentemente, cioè moltiplicando il 4 que che sta sopra il 9 per il 5 et addizionando il 3 poi moltiplicando per 3 et addizionando il 2 et così otteniamo 71 sopra la linea di frazione. E dalla moltiplicazione del 3 per il 5 poi per il 9 otteniamo 135 sotto la linea di frazione, questo $\frac{71}{135}$ in base alla settima regola si scompone in $\frac{1}{270}\frac{1}{45}\frac{1}{2}$.

E bisogna rilevare che quando attraverso la settima regola calcolerai la parte maggiore che il numero minore sarà del maggiore, e aggingerai le frazioni unitarie che saranno rimaste, risulterà qualcosa di un po' meno elegante. E allora lascia perdere quella parte maggiore e procederai a calcolare attraverso la frazione che viene subito dopo e che è minore. Così se la parte maggiore è $\frac{1}{5}$ farai i calcoli con la sesta parte. E se sarà $\frac{1}{7}$, farai i calcoli con $\frac{1}{8}$. Esemplificando: in $\frac{4}{49}$ la parte maggiore è $\frac{1}{13}$, una volta sottrattala da $\frac{4}{49}$ resta $\frac{3\ \ 0}{13\ \ 49}$, vale a dire $\frac{3}{637}$, che, in quanto frazione di quarto tipo, corrisponde a $\frac{1\ \ 0}{319\ \ 637}\frac{1}{637}\frac{1}{319}$. Dunque per $\frac{4}{49}$otteniamo $\frac{1\ \ \ 0}{319\ \ \ 637}\frac{1}{637}\frac{1}{319}\frac{1}{13}$, che non è troppo elegante. Per questo lascia perdere $\frac{1}{13}$ et fai i calcoli con $\frac{1}{14}$, sottratta questa da $\frac{4}{49}$, resta $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 49}$, cioè $\frac{1}{98}$ e così per $\frac{4}{49}$ otteniamo $\frac{1}{98}\frac{1}{14}$ che sono frazioni più belle delle frazioni calcolate prima. E si possono trovare queste frazioni in un altro modo, vale a dire se dividi il 4 che sta sopra il 49 per la scomposizione di 49, risulterà

$\frac{4\ \ 0}{7\ \ 7}$ che in quanto frazione composta del terzo tipo, corrisponde a $\frac{1\ \ 0}{14\ \ 7}\frac{1\ \ 0}{2\ \ 7}$, infatti $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 7}$ è $\frac{1}{14}$ e $\frac{1\ \ 0}{14\ \ 7}$ è $\frac{1}{98}$, e così per $\frac{4}{49}$ otteniamo similmente $\frac{1}{98}\frac{1}{14}$.

Appendice

I capitoli dall'Ottavo al Dodicesimo: argomento, traduzione

Capitolo ottavo. Calcolare il prezzo delle merci attraverso il Metodo Principale.

(1) In tutte le transazioni commerciali entrano sempre in gioco quattro numeri proporzionali, dei quali tre sono noti, l'altro invece è ignoto. Ovviamente, il primo dei tre numeri noti è il numero che riguarda una merce qualunque in vendita, sia che consti di un numero che indica la quantità, sia di un peso, sia di una misura: di un numero che indica la quantità come, ad esempio, cento cento pelli, o cento pelli di capra e simili; o anche di un peso come il cantare[2420], o il centone[2421], o la libra, o l'oncia[2422] e simili; o di una misura come metreti d'olio, sestari di frumento, e canne di panni e simili. Il secondo numero, poi, è il prezzo della merce in vendita, cioè di quel primo numero, sia che sia una quantità di denari - quanti che siano -, sia di bisanti, sia di tareni, sia di qualsiasi altra valuta corrente. Il terzo, poi, sarà quello di una qualche quantità di quella stessa merce in vendita, il cui prezzo, vale a dire il quarto numero, si ignora.[2423] (2) Per questo, affinché si trovi il numero ignoto attraverno i numeri noti, tramandiamo questa regola universale valida per tutti i casi. All'inizio di una tavoletta a destra scrivi il primo numero, vale a dire la quantità di merce, successivamente, sulla stessa linea, scrivi il prezzo di quella merce, vale a dire il secondo numero, se ci sarà anche il terzo numero, quello che indica l'altra quantità di merce, scrivilo sotto la merce, cioè sotto il primo, e se ci sarà il prezzo, scrivilo sotto il prezzo, vale a dire sotto il secondo numero. (3) Così, invero, è della stessa natura di quello sotto il quale bisogna scriverlo: cioè è della qualità e quantità dello stesso nel numero, o nel peso, o nella misura. Cioè se il numero superiore, sotto il quale bisogna scriverlo, sarà un numero di rotoli[2424], anche l'altro similmente sarà una quantità di tali rotoli; se di libre, di libre; se di once, di once; se di canne, di canne. E se sarà una quantità di soldi, anche quello sarà una quantità di soldi; se di denari[2425], di denari; se di tareni[2426], di tareni; e se di bizanti[2427], di bizanti. (4) Una volta scrittili così, apparirà assolutamente evidente che i due numeri che si devono moltiplicare tra di loro saranno posti sempre diagonalmente, e se il prodotto della loro moltiplicazione sarà

[2420] Il cantare è un'unità di misura pisana che equivale a 100 rotoli (Sigler, p.621)
[2421] Traduco per ora con 'centone' il termine 'centum' che è un'unità di peso che equivale a 100 libre.
[2422] L'oncia equivale ad un dodicesimo di libra pisana.
[2423] Pertanto in tutte le negoziazioni ci trovano quattro numeri sempre proporzionali tra loro. Dei quali tre sono noti, un quarto invece è ignoto: il primo di quei tre numeri è il numero che indica una quantità qualunque di merce in vendita, sia che si tratti di un numero, sia di un peso, sia di una misura. Di un numero come cento pelli, o cento pelli di capra e simili, o anche di un peso come cantari, o centoni, o libre, o once e simili; una misura poi come metreti di olio, sestari di frumento e canne di stoffe e simili. Il secondo numero poi è il prezzo di quella merce in vendita, cioè di quel primo numero che ne indica la quantità, sia che si tratti di una quantità qualunque di denari, sia di bisanti, sia di tareni, sia di qualunque altra moneta corrente. Il terzo numero, poi, se ci sarà una qualche quantità della stessa merce in vendita, il cui prezzo, cioè il quarto numero, si ignora..
[2424] Il rotolo è un'unità di peso. Ogni rotolo è diviso in 12 oncie. Cento rotoli equivalgono a 158 libre pisane.
[2425] Il denaro è un'unità di misura monetario. Il sistema monetario medievale comprendeva libre, soldi e denari. C'erano 20 soldi in una libra e 12 denari per ogni soldo. (Sigler, p. 621)
[2426] Il tareno è un'unità di peso usata a Messina, in Sicilia. Un tareno equivale a 20 grani di frumento.
[2427] Il bizante è un'unità di misura monetaria originaria di Costantinopoli o Bisanzio.

diviso per l'altro numero, il terzo, si troverà il quarto numero, l'incognita. (5) E affinché si comprenda ciò più chiaramente, lo esemplificheremo nei paragrafi seguenti con svariati esempi di merci e prezzi.
(6) Ma dapprima mostrerò donde questo metodo prenda le mosse. Vi sono infatti, come ho detto, nelle transazioni economiche quattro numeri proporzionali, vale a dire così come il primo sta al secondo, così il terzo sta al quarto, cioè come il numero che indica una qualche quantità di merce sta al numero che indica la quantità del suo prezzo, così il numero di una qualunque altra quantità della stessa merce sta al numero del suo prezzo. Oppure come una certa quantità di una merce qualunque sta a una qualunque altra quantità della stessa merce, la stessa cosa vale per il rapporto del prezzo dell'una al prezzo dell'altra. E poiché le quattro quantità sono così proporzionali, la moltiplicazione della seconda quantità per la terza sarà uguale a quella della prima per la quarta, come è dimostrato nei calcoli aritmetici e in geometria. (7) Per questo se è ignota soltanto la quarta quantità, dalla moltiplicazione della seconda quantità per la terza divisa per la prima, anzi proprio dalla divisione, viene fuori la quarta quantità: poiché quando si divide un numero per un altro numero e dalla divisione viene fuori un risultato, se si moltiplicherà il quoziente per il divisore, di lì risulterà per l'appunto il numero diviso. (8) Similmente se si ignora la terza quantità, bisogna dividere per la seconda la moltiplicazione della prima per la quarta.
(9) E affinché le operazioni che riguardano le transazioni commerciali siano contenute ordinatamente in questo libro, dividiamo questo capitolo in quattro parti. Di esse la prima sarà sulla vendita dei cantari e di quelle cose che si vendono a peso o quantità; la seconda sulle cose che attengono alla valuta o al cambio, come il soldo, o la libra o la marca[2428] d'argento o l'oncia d'oro e simili; la terza sulla vendita di canne, balle[2429], torcelli[2430] e simili; la quarta parte sarà dei rotoli di un solo cantare ai rotoli di qualsiasi altri cantari, secondo la loro diversità.

Parte prima. Il cantare pisano quando si chiede il prezzo dei rotoli.

Libre			Rotoli
40			100
	*		
		*	

[2428] La marca è un'unità di misura di peso usata per l'argento ed equivale ad 8 oncie.
[2429] La balla è un'unità di misusa usata per il volume.
[2430] Il torcello è un'unità di lunghezza equivalente a 60 palmi.

2	5

(1) Invero il cantare pisano contiene in sè 100 parti, ciascuna delle quali è chiamata ‘rotolo’. E i rotoli contengono 12 oncie, ciascuna delle quali pesa $\frac{1}{2}$ 39 denari di cantare[2431]. E il denaro consiste in 6 carrube[2432], e la carruba consiste in 4 grani di frumento[2433]. Questo cantare si vende per 40 libre e si chiede quanto vangano 5 rotoli. (2) I tre numeri noti sono già posti nello schema come più sopra abbiamo già detto che è necessario, vale a dire 100 rotoli e 40 libre e 5 rotoli: di essi due sono della stessa natura, vale a dire i 100 rotoli e i 5 rotoli, poiché questi sono le merci, l’altro numero, invece, cioé il 40, è di un’altra natura, vale a dire è un prezzo, ed è il prezzo dei suddetti 100 rotoli. Per questo, come abbiamo detto, si scrivano i 100 rotoli e le 40 libre su una stessa linea, vale a dire scrivendoli in successione. Poi si scrivano i 5 rotoli sotto i 100 rotoli, come si mostra qui più sopra e risulteranno due numeri dello stesso genere, uno sotto l’altro come abbiamo detto precedentemente, vale a dire i 5 rotoli sotto i 100 rotoli. Poi, una volta scrittili così, moltiplicherai i numeri che sono in diagonale, vale a dire 5 per 10, risulterà 200 che devi dividere per 100, risulteranno 2 libre come (p. 85) prezzo di quei 5 rotoli, questo 2 si deve scrivere sotto il 40 poiché il numero che risulta dalla divisione è sempre della stessa natura del numero che è solitario tra i tre numeri suddetti. (3) Di qui è chiaro che dei quattro numeri che sono posti nelle transazioni economiche, due di essi sono merci e due sono prezzi. E sono proporzionali in modo che come il 100, vale a dire le merci, sta al suo prezzo, vale a dire a 40, così il 5, vale a dire le merci, starà al suo prezzo, vale a dire a 2. Infatti 100 rispetto al 40 sono cinque mezzi, similmente anche 5 rispetto al 2 sono cinque mezzi. Parimenti come 40, vale a dire il prezzo, sta a 100, vale a dire alla sua quantità di merce, così 2 starà alla sua quantità di merce, vale a dire a 5: infatti 40 è i due quinti di 100 e il 2 è due quinti di 5. Viceversa, come la merce sta alla merce, vale a dire 5 sta a 100 -il quale 5 è il suo $\frac{1}{20}$ -, così il prezzo sta al prezzo, vale a dire il 2 al 40, così il 100 sta al 5, il quale 100 e il suo multiplo per 20, così il 40 sta al 2. E attraverso queste stesse proporzioni potrai con giudizio addizionare se il quarto numero, l'incognita, sarà stato trovato correttamente, come sarà dimostrato a suo luogo.

Sullo stesso argomento quando si chiede le quantità di merci in libre.

[2431] Il denario di cantare è una piccola unità di peso. Ci sono 25 denari di cantare in un'oncia di libra pisana.
[2432] La carruba è un'unità di peso ancora più piccola del denario di cantare di cui costituisce la sesta parte.
[2433] Anche il grano di frumento è una piccola unità di peso e costituisce il diretto sottomultiplo della carruba e precisamente la sua quarta parte.

Libre		Rotoli
40		100
	*	
	*	
2		5

(1) Parimenti 100 rotoli si vendono per 40 libre, quanti rotoli avrò per 2 libre? Poiché tra questi numeri due sono della natura del prezzo, vale a dire le 40 libre e le 2 libre, e l'altro è della natura della quantità di merci, si scrivano il 40 e il 100 su una stessa linea poiché si dice che i 100 rotoli sono per 40 libre. Poi si scrivano le 2 libre sotto le 40 libre, e i numeri della stessa natura risulteranno uno sotto l'altro come si vede nella seconda figura, e moltiplica i numeri che sono in diagonale, vale a dire il 100 per il 2, risulterà 200 che devi dividere per 40, risulteranno 5 rotoli come quantità di merce di quelle due libre, questi devi scriverli sotto i 100 rotoli.

Sullo stesso argomento quando si chiede il prezzo dei rotoli.

Libre		Rotoli
13		100
	*	
	*	
$\frac{1\ 5}{10\ 10}3$		27

(1) Parimenti un cantare si vende per 13 libre, quanto valgono 27 rotoli? Si scrivano i numeri come abbiamo detto precedentemente, vale a dire i 100 rotoli e le 13 libre su una stessa linea e i 27 rotoli sotto i 100: si moltiplichino i numeri che stanno in diagonale, vale a dire il 13 per il 27, risulterà 351 che devi dividere per 100, vale a dire per $\frac{1\ 0}{10\ 10}$, risulterà $\frac{1\ 5}{10\ 10}$ 3, che devi porre sotto le 13 libre. Infatti se vorrai sapere quante parti di una libra siano $\frac{1\ 5}{10\ 10}$, moltiplica il 5 che sta sopra il 10 per l'altro 10 e in aggiunta addiziona l'1, risulterà 51 che devi moltiplicare per la somma dei denari di una libra, vale a dire per 240, risulterà 12240 che devi dividere per $\frac{1\ 0}{10\ 10}$, risulteranno $\frac{0\ 4}{10\ 10}$ 122 denari, che sono 10 soldi e $\frac{2}{5}$ 2. Altrimenti duplica il 5 che sta sopra il 10, risulterà 10, che sono i soldi. Parimenti duplica l'1 che è sopra l'altro 10, risulterà 2 che si otterrà come denari con altrettanti quinti. (2) Da questo dunque è chiaro che

da ciascuna libra di denaro che sarà divisa per 100, risulteranno $\frac{2}{5}$ 2 denari e da ogni 10 libre 2 soldi, e dalle singole 5 libre 1 soldo.

Sullo stesso argomento.

Libre		Rotoli
(1) 43		100
	*	
	*	
$\frac{7\ \ 1}{10\ \ 10}$ 8		(5) 19

(1) Parimenti se 100 rotoli si vendono per 43 libre e si chiede quanto valgano 19 rotoli, una volta scritti questi numeri secondo il suddetto insegnamento, moltiplica i numeri che sono in diagonale, vale a dire 19 per 43, risulterà 817. Dividi questo numero per $\frac{1\ \ 0}{10\ \ 10}$ risulteranno $\frac{7\ \ 1}{10\ \ 10}$ 8 che devi porre sotto le 43 libre. Infatti quale quantità di libre sia $\frac{7\ \ 1}{10\ \ 10}$ lo si scoprirà così come abbiamo detto precedentemente. Vale a dire a dire quando si moltiplicherà l'1 che è sopra il 10 risulteranno 2 soldi. Parimenti moltiplicherai il 7 che sta sopra l'altro 10, risulteranno 14 denari con altrettanti quinti. Una volta uniti questi ai 2 soldi, che or ora abbiamo ottenuto, risulteranno 3 soldi e $\frac{4}{5}$ 4 denari e tanto valgono quegli 8 rotoli, più di 8 libre. (2) Possiamo invero calcolarli più prontamente da quei 7: se se ne prendono 5 da quei 7 per essi devi considerare un soldo, che devi addizionare con i due soldi trovati, risulteranno 3 soldi. Poi duplica la differenza che c'è tra 5 e 7, risulteranno 4 denari con altrettanti quinti come appunto è stato calcolato.

Sullo stesso argomento.

Li	R
br	o
e	t
	o
	l
	i
(2)	1
$\frac{1}{2}$	0

18	0
$\frac{1\ 3\ 7}{2\ 10\ 10}$	(
	3
5	
	)
	3
	1

(1) Parimenti 100 rotoli valgono $\frac{1}{2}$ libre, quanto valgono dunque 31 rotoli? Una volta scritti, dunque, i numeri in ordine moltiplica il 18 per il 2 che sta sotto la linea di frazione davanti ad esso e addiziona l'1 che sta sopra il 2, risulterà 37 che devi porre sopra $\frac{1}{2}$ 18, poi moltiplica quel 37 per il 31 che sta in diagonale, risulterà 1147 che devi dividere per 100 e per 2 che sta sotto la linea di frazione del 18, cioè devi dividerlo per $\frac{1\ 0\ 0}{2\ 10\ 10}$, risulteranno $\frac{1\ 3\ 7}{2\ 10\ 10}$ libre come prezzo dei richiesti 21 rotoli.

(2) Se questo risultato lo si è raggiunto correttamente, lo si capisce attraverso la prova del 7. Vale a dire: se dividi 18 per 7, resta 4 che devi moltiplicare per il 2 e in aggiunta addiziona 1 - perché c'è l'1 sopra tale 2 - risulterà 9 che devi dividere per il 7, resta 2 come prova del 37. Parimenti calcola la prova del 7 di 31, che è 3 e moltiplica per la prova del 37 che è stata or ora trovata, vale a dire per 2, risulterà 6 che devi conservare come prova del prezzo dei 31 rotoli, poi moltiplica il 5 per la prova del 10 che gli sta davanti sulla linea di frazione, vale a dire per 3 e in aggiunta addiziona la prova del 7 che sta sopra tale 10, vale a dire 0, risulterà 15 che devi dividere per 7, resta 1 che devi moltiplicare per la prova del successivo 10 sotto la linea di frazione, vale a dire per 3, e in aggiunta addiziona il 3 che sta sopra tale 10, risulterà 5 che devi moltiplicare per il 2 che sta sotto la medesima linea di frazione e in aggiunta addiziona l'1 che sta sopra il 2, risulterà 13. Da questo 13 sottrai il 7, resta 6 come è stato conservato per prova.

(3) Invero se vorrai capire quante parti di una libra siano $\frac{1\ 3\ 7}{2\ 10\ 10}$, moltiplica il 7 che sta sopra il 10 per l'altro 10 e in aggiunta addiziona il 3 che sta sopra quest'ultimo 10, moltiplica il risultato per il 2 della linea di frazione e addiziona l'1 che sta sopra il 2, risulterà 147 che devi moltiplicare per 210, vale a dire per il numero di denari a cui corrisponde una libra, risulterà

35280 che devi dividere per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 10\ \ 10}$. Quindi, poiché in questo prodotto, 35280, vi è uno zero nel suo primo grado, sia diviso innanzitutto per $\frac{1}{10}$, cioè sia tolto di lì lo stesso zero, resta 3528 che devi dividere per $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 10}$, risulterà $\frac{4}{10}$ 176 denari che sono 14 soldi e $\frac{2}{5}$ 8 denari.

Sul centone quando ne si chiede il prezzo a partire dalle libre.

Libre		Rotoli
(6) 55		
$\frac{3}{4}13$		100
	*	
d.s.l.	*	
$\frac{1\ \ 7}{12\ \ 20}6$		(3)
		$\frac{1}{3}46$

(1) E ancora se un centone di pepe che pesa 100 libre sottili, ciascuna delle quali consiste in 12 oncie, e ogni oncia pesa 25 denari di cantare e 158 di queste libre fanno un cantare, mettiamo che 100 rotoli pisani siano venduti per $\frac{3}{4}$ 13 libre e si chiede quanto valgano $\frac{1}{3}$ 46 libre. (2) Si scrivano i numeri come abbiamo detto precedentemente, vale a dire staranno sulla stessa linea i 100 rotoli[2434] e $\frac{1}{3}$ 46 libre sotto i 100 rotoli, vale a dire merci sotto merci, come abbiamo fatto negli esempi precedenti. Poi moltiplica i numeri che sono in diagonale, vale a dire $\frac{3}{4}$ 13 e $\frac{1}{3}$ 46 e dividi per 100, cioè moltiplica 13 per 4 e in aggiunta addiziona il 3 che sta sopra il 4, risulterà 55 che devi porre sopra il $\frac{3}{4}$ 13. Parimenti moltiplica il 46 per il 3 e addiziona l'1, risulterà 139 che devi porre sopra l'$\frac{1}{3}$ 46, e moltiplica il 55 per il 139, risulterà 7645 che devi dividere per 100 e per 3, che sta sotto la linea di frazione del 46 e per il 4 che sta sotto la linea di frazione del 13, cioè devi dividere il 7645 per $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 6\ \ 10\ \ 10}$, e il quoziente che ne risulterà sarà il prezzo di quelle $\frac{1}{3}$ 46 libre. (3) Ma poiché delle frazioni e di ciò che risulta oltre le frazioni non possiamo sapere quale parte o quali parti siano di una libra finché non moltiplichiamo il numero della frazione per i denari, vale a dire le libre per 240, per questo motivo le frazioni del quoziente, vale a dire $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 6\ \ 10\ \ 10}$, devono essere modificate in un altro

[2434] qui c'è probabilmente un errore in boncompagni, p.86

modo. Vale a dire per il 100, che risulta dalla divisione, calcoliamo $\frac{1\ 0}{5\ 20}$, poiché questo è lo stesso che $\frac{1\ 0}{10\ 10}$; e per $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ scritti precedentemente, calcoliamo soltanto $\frac{1}{12}$, e li si ponga in una sola linea di frazione, così $\frac{1\ 0\ 0}{5\ 12\ 20}$, [p.87] poiché questo è lo stesso che $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{2\ 6\ 10\ 10}$. Dividi il 7645 per questo $\frac{1\ 0\ 0}{5\ 12\ 20}$, e quello che rimarrà sopra il 20 saranno i denari, perché una libra di denario equivale a 20 soldi, e quello che rimarrà dalla divisione con il 12 saranno i denari dal momento che un soldo equivale a 12 denari e ciò che rimarrà oltre le altre frazioni, indicherà la parte frazionaria di un denario. Per questo se dividerai 7645 per $\frac{1\ 0\ 0}{5\ 12\ 20}$, risulteranno $\frac{0\ 5\ 7}{5\ 12\ 20}$ 6 libre come prezzo delle suddette $\frac{1}{3}$ 46 libre, che è tanto quanto per indicarlo potresti dire 6 libre e 7 soldi e 5 denari.

(4) Invero se $\frac{1\ 0}{12\ 20}$ non possono essere ricavati tra i numeri che risultano dalla divisione, chiariremo nei seguenti paragrafi in che modo allora si debba procedere. Ma ci impegniamo a mostrare in che modo per 12 e per 20 tutti i numeri più semplicemente si dividano. Infatti tutti i numeri possono essere divisi per 12 nello stesso ordine in cui abbiamo insegnato a dividere i numeri per i numeri che vanno dal 2 al 9. Dunque devono essere imparate le divisioni di alcuni numeri per 12. Per esempio da un primo 12 diviso per 12, risulta 1, da 24 risulta 2, da 36 risulta 3, da 48 risulta 4, da 60 risulta 5, da 76 risulta 6, da 84 risulta 7, da 96 risulta 8, da 108 risulta 9, come è contenuto nelle tabelle delle divisioni. (5) Quello poi che avanzerà da qualunque numero superiore a 120 è questo che dobbiamo scrivere nelle divisioni dei numeri sopra quel numero di cui sarà il resto e dobbiamo unirlo con la cifra precedente che sta nel numero da dividere.

Divisione di 3479 per 12

11
119
107
3479
12
289

$\frac{11}{12}$289

(6) Per esempio se volessimo dividere 3479 per 12, si scriva il 12 sotto il 79 del 3479 e si calcoli la dodicesima parte di 34 che è 2 con il resto di 10 e questa è la differenza che c'è tra

24 e 34. Poni il 2 sotto il 4 di 34 e il 10 sopra lo stesso 34, con questo 10 aggiungi il 7, cioè la cifra che lo precede, risulterà 107 che devi dividere per 12, risulterà 8 con il resto di 11 che è la differenza che c'è tra 96 e 107. Poni dunque l'8 sotto il 7 e l'11 sopra il 107, vale a dire l'1 sopra lo 0 e l'altro 1 sopra il 7 e unirai tale 11 con il 9 che lo precede, risulterà 119 che devi dividere per 12, risulterà 9 con il resto di 11. Poni il 9 sotto il 9 e l'11 in qualche altra parte sopra il 12 , e otterrai per la richiesta divisione $\frac{11}{12}$ 289, come si vede in figura. Per questo è chiaro che 3479 denari sono 289 soldi e 11 denari, poiché quando una qualche somma di denari viene divisa per 12, allora da tale divisione risultano i soldi. (7) E se le cose che sono state dette sulla divisione per 12 le rinsalderai scrivendo spesso sulla tavoletta con zelo, potrai fare facilmente quei calcoli a mente con le mani.

La divisione dei numeri per 20.

(1) Invero tutti i numeri possiamo dividerli per 20 così: tralascia la cifra di primo grado del tale numero che vuoi dividere e sotto la seguente, cioè sotto la cifra di secondo grado del medesimo numero, poni il 2 per il quale devi dividere tutto il numero fino alla cifra stessa sotto la quale è posto il 2, e ciò che risulterà dalla divisione sarà $\frac{1}{20}$ di tutto il numero che avrai voluto dividere. Se, poi, ci sarà un resto uniscilo con la cifra di primo grado che abbiamo prescritto di tralasciare, e ciò che risulterà dall'unione è il resto della suddetta divisione. Ma se sopra la seconda cifra non ci sarà alcun resto, ci sarà come resto solo la prima cifra.

Divisione di 1234 per 20

1

3

123

2

61

$\frac{14}{20}$61

(2) Per esempio se volessimo dividere 1234 per 20, si tralasci il 4 che sta in primo grado e si ponga il 2 sotto la cifra successiva, vale a dire sotto il 3. Si divida per tale 2 il 123 che resta da 1234 una volta sottratto di lì il 4, risulterà 61 con il resto di 1 che, unito con il 4, realizza il 14. Dunque dalla divisione di 1234 per 20 viene 61 col resto di 14: da ciò invero è chiaro che 1234 soldi sono 61 libre e 14 soldi.

(3) Mostrate pertanto le divisioni per 12 e per 20, ora invero torniamo ai nostri propositi. (88)

Sul centenario massamutino[2435].

lib	107		m
re			as
(2)			s
	$\frac{1}{2}$53		1
			0
			0
		:	
			*
	d.s.l.		(5
			)
			2
			0
			8
	$\frac{1\ 2\ 3\ 7}{2\ 5\ 12\ 20}$		$\frac{1}{9}$
	12		2
			3

(1) 100 massamutini valgono $\frac{1}{2}$ 53 libre, quanto valgono dunque $\frac{1}{9}$ 23 massamutini? Scrivi i numeri in ordine, così come è stato detto più sopra, e moltiplica i numeri che sono in diagonale, vale a dire $\frac{1}{2}$ 53 e $\frac{1}{9}$ 23, e dividili per 100. Cioè moltiplicherai il 53 per la sua frazione, risulterà 107 che devi porre sopra $\frac{1}{2}$ 53. Parimenti moltiplicherai il 23 per il 9 e in aggiunta addizionerai l'1, risulterà 208 che devi porre sopra $\frac{1}{9}$ 23. Poi moltiplica il 107 per il 208, risulterà 22256 che devi dividere per il 100, e per il 2 e il 9 che sono sotto le linee di frazione, vale a dire per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{2\ 9\ 10\ 10}$, e otterrai il prezzo di quei $\frac{1}{9}$ 23 massamutini. (2) Oppure aggrega i numeri della divisione, così che tu possa avere all'inizio della linea di frazione $\frac{1\ 0}{12\ 20}$, perché tu abbia in una sola moltiplicazione le libre e i soldi e i denari, come nella precedente traccia abbiamo operato, vale a dire invece di $\frac{1\ 0}{10\ 10}$ considera $\frac{1\ 0}{5\ 20}$ e poiché le altre frazioni

[2435] Il massamutino è una moneta d'oro usata dalla dinastia spagnola Almohad. L'origine del termine è da ricercarsi nella tribù berbera Masmuda.

della divisione, vale a dire $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{9}$, non possiamo aggregarle in $\frac{1}{12}$, perciò quello che da esse possiamo prendere della scomposizione in fattori del 12, prendiamolo, vale a dire dalla scomposizione del 9 dobbiamo prendere $\frac{1}{3}$, e mescolare quell' $\frac{1}{3}$ con $\frac{1}{2}$, risulta $\frac{1}{6}$. L'altro numero che ci manca del 12, vale a dire il 2, dobbiamo moltiplicarlo per 22256, risulterà 44512 che devi dividere per $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{3\ \ 5\ \ 12\ \ 20}$, risulterà $\frac{1\ \ 2\ \ 3\ \ 7}{2\ \ 5\ \ 12\ \ 20}$ 12 libre come prezzo di $\frac{1}{9}$ 23 massamutini. (3) Se vorrai verificare questo risultato attraverso la prova del 7, calcola la prova di 53, che è 4, e moltiplicala per il 2 della frazione e addiziona l'1, risulterà 9. Di questo 9 calcola la prova, che è 2, e tale deve essere la prova di 107, e così è. Poi calcola la prova del 23 che è 3 e moltiplicala per il 9 della frazione e addiziona l'1, risulterà 19, la cui prova, vale a dire 5, è la prova del 208 che devi moltiplicare per la prova di 107, vale a dire per 2, risulterà 10 che devi moltiplicare per il 2 che a noi mancava dalla scomposizione del 12, vale a dire per il 2 per il quale abbiamo moltiplicato il 22256, risulterà 20. Di questo 20 calcola la prova, che è 6, e conservala come prova di $\frac{1\ \ 2\ \ 3\ \ 7}{2\ \ 5\ \ 12\ \ 20}$ 12: se questo numero è corretto in tutte le cifre, sappi procedere correttamente. E si calcoli la sua prova così: si moltiplichi la prova del 12 che sta oltre la linea di frazione per la prova del 20 che sta sotto la linea di frazione, vale a dire 5 per 6, risulta 30 a cui si addiziona in aggiunta il 7 che sta sopra il 20, risulterà 37 la cui prova, vale a dire il 2, la si moltiplica per il 5, vale a dire per la prova del 12 e si addiziona il 3 che sta sopra il 12, risulterà 13, la cui prova, vale a dire 6, la si moltiplichi per 5 e si addizioni sopra in aggiunta il 2 che sta sopra il 5, risulterà 32. La prova di questo 32, che è 4, moltiplicala per il 3 della linea di frazione e sopra si addizioni l'1 che è sopra il 3, si realizza il 13 la cui prova è 6 come è stato conservato come prova. (4) E così sempre quando vorrai calcolare la prova di qualsiasi problema simile, a seconda di come procedi con il moltiplicare, così applicati a procedere con il fare la verifica per qualsiasi prova, finché sarai giunto all'ultima moltiplicazione. E, calcolata la prova dell'ultima moltiplicazione, conservala come prova del risultato della divisione. E ciò che è stato detto sulla prova, riteniamo sia alquanto sufficiente negli altri problemi.

Sul centone di pellame.

(1) Se 100 pelli valgono $\frac{1\,3}{9\,5}$ 83 libre, quanto valgono 32 pelli? Scrivi i numeri e moltiplica $\frac{1\,3}{9\,5}$ 83 per 32 dal momento che sono posizionati in diagonale, e dividi il loro prodotto per 100, cioè moltiplica l'83 per le sue frazioni, risulterà 3767 che devi porre sopra $\frac{1}{9}\frac{3}{5}$83, e verificalo

attraverso qualunque prova tranne che del 9. Poi moltiplica 3767 per 32, risulterà 120544 che devi dividere per 100 e per $\frac{1\ 0}{5\ 9}$, e adattalo in modo da avere all'inizio della linea di frazione $\frac{1\ 0}{12\ 20}$. Così per 100 calcola $\frac{1\ 0}{5\ 20}$, e per $\frac{1}{9}$ calcola $\frac{1\ 0}{3\ 3}$, e da quest'ultimo prendi $\frac{1}{3}$ e lo moltiplicherai per 4 in modo che realizzi il 12 e poni questo 12 davanti al 20 come più sopra abbiamo insegnato a fare. Poi adatta le altre frazioni davanti a tale $\frac{1\ 0}{12\ 20}$, e otterrai sulla linea di frazione della divisione $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{3\ 5\ 5\ 12\ 20}$, e poiché da noi è stato diminuito $\frac{1}{4}$ da tale 12, poni il 4 sopra il 100 affinché tu lo tenga affidato più saldamente alla memoria quando calcolerai la prova. E moltiplicalo per quel 120544, risulterà 482176 che devi dividere per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{8\ 5\ 5\ 12\ 20}$, risulterà $\frac{1\ 0\ 0\ 9\ 15}{8\ 5\ 5\ 12\ 20}$ 26 libre come prezzo di quelle 32 pelli, come si vede più sopra in figura.

(2) Ancora, 100 rotoli valgono $\frac{1\ 1}{7\ 4}$ 23 libre: quanto valgono dunque $\frac{2\ 3}{5\ 13}$ 64 libre? Scrivi la traccia del problema e moltiplica il 23 per le sue frazioni, risulterà 655 che devi porre sopra il 23, e verificalo con la prova, se è corretto. Poi moltiplica il 64 per la sua frazione, risulterà 4177 e moltiplicalo per 655, risulterà 2735935 del quale non trascurerai di fare la verifica con grande cura. E dividilo per il numero 100 e per le frazioni di entrambi i numeri che sono posti in diagonale, naturalmente adattate insieme nel migliore dei modi affinché tu abbia all'inizio della linea di frazione $\frac{1\ 0}{12\ 20}$. Questo si fa così: per il 100 calcola $\frac{1\ 0}{5\ 20}$, e vedi se puoi sottrarre qualcosa dalle altre frazioni della divisione, affinché tu ottenga il 12 o una qualche parte di esso. Da esso soltanto $\frac{1}{4}$ puoi ottenere come parte del 12, cioè della sua scomposizione: dunque ci manca un 3 per avere il 12 sulla linea di frazione davanti al 20. Per questo poni il 3 sopra il 100, come si mostra nello schema, in modo da conservarlo più saldamente in memoria e adatta i restanti numeri della divisione davanti a $\frac{1\ 0}{12\ 20}$, così: $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{5\ 5\ 7\ 13\ 12\ 20}$. Poi moltiplica il 2735935 per il 3 riportato sopra il 100, risulterà 8207805 che di nuovo devi verificare con la prova. Poi dividilo per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{5\ 5\ 7\ 13\ 12\ 20}$, risulterà $\frac{0\ 1\ 5\ 10\ 7\ 0}{5\ 5\ 7\ 13\ 12\ 20}$ 15 libre come prezzo dei rotoli richiesti. E la prova di questo per la prova del 9 è 7 come si vede più sopra in figura.

Sul cantare.

Libre	Rotoli
287	
$\frac{7}{20}$ 14	

*

*

$\frac{8\ 2\ 2\ 6}{10\ 10\ 12\ 20}5$ 37

(1) Parimenti un cantare di una merce qualunque vale 14 libre e 7 soldi, quanto valgono dunque 37 rotoli della stessa merce? Calcola a quante parti di una libra corrispondono i 7 soldi, risulterà $\frac{7}{20}$ che devi porre davanti al 14 così: $\frac{7}{20}$ 14. E scrivi la traccia del problema e moltiplica $\frac{7}{20}$ 14 per 37 che sono in diagonale e dividi il loro prodotto per 100, vale a dire moltiplica il 14 per il 20 e in aggiunta addiziona il 7 che sta sopra il 20, risulteranno 287 soldi che devi porre sopra il $\frac{7}{20}$14, e moltiplicalo per 37, risulterà 10619 che devi dividere per 100 e per il 20 della frazione, ma dal momento che conviene che noi abbiamo il 12 sulla linea di frazione della divisione e che otteniamo in una sola moltiplicazione le libre e i soldi e i denari, moltiplica il 10619 per tale 12 e dividilo per 100 e per $\frac{1\ 0}{12\ 20}$, cioè per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{10\ 10\ 12\ 20}$, risulteranno $\frac{8\ 2\ 2\ 6}{10\ 10\ 12\ 20}$ 5 libre come prezzo dei suddetti 37 rotoli, la prova del 9 dei quali è 6.

Sul centone di panni.

Libre Rotoli

(3) 311

$\frac{11}{20}$ 15 100

*

*

(1) (4)221

$\frac{1\ 6\ 9\ 10\ 5}{2\ 10\ 10\ 12\ 20}4$ $\frac{5}{8}27$

(1) Parimenti 100 canne di panni valgono $\frac{11}{20}$ 15 libre, quanto valgono dunque $\frac{5}{8}$ 27 canne cioè 27 canne e $\frac{1}{2}$2 braccia? Scritta pertanto la traccia del problema, moltiplica il 15 per il 20 e

addiziona l'11, risulteranno 311 soldi che devi porre sopra il 15. Parimenti moltiplica il 27 per l'8 e addiziona il 5, risulterà 221 che devi porre sopra il 27 e moltiplica il 311 per il 221, risulterà 68731 che dobbiamo moltiplicare per 12 in modo da averlo nella linea di frazione. Se non che abbiamo nella divisione l'8, per l'appunto quello che sta sotto la linea di frazione davanti alle 27 canne, la cui scomposizione è $\frac{1\ 0}{2\ 4}$. Per questo triplicheremo il 4 e otterremo il 12 nella divisione. Poi si moltiplichi lo stesso 68731 per il 3 perché quando si triplica il divisore, bisogna triplicare anche il dividendo, risulterà 206193 che devi dividere per il 2 che resta dalla scomposizione dell'8 una volta sottratto di lì il 4, e per il 100 e per il 12 e per il 20, cioè per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{2\ 10\ 10\ 12\ 20}$, la cui prova per 7 è 1 come si vede in questa figura.

Sul centone di pepe.

(1) Parimenti, un centone di pepe vale $\frac{9}{20}$ 11 libre: quanto valgono, dunque, $\frac{1\ 5}{4\ 12}$ 46 libre, cioè 46 libre e $\frac{1}{4}$5 once? Scrivi la traccia del problema e moltiplica l'11 per il 20 e addiziona il 9, risulterà 229 (p.90) che devi porre sopra l'11. Parimenti moltiplica il 46 per il 12 e addiziona il 5, moltiplica il risultato per 4 e addiziona l'1, risulterà 2229 che devi porre sopra il 46, poi moltiplica il 229 per il 2229, risulterà 510441 che devi dividere per 100 e per 20 e per $\frac{1\ 0}{4\ 12}$, cioè per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{4\ 10\ 10\ 12\ 20}$, risulteranno $\frac{1\ 0\ 1\ 4\ 6}{4\ 10\ 10\ 12\ 20}$ 5 libre come prezzo di quelle $\frac{1\ 5}{4\ 12}$ 46 libre, la prova del sette è 1.

Libre		Oncie
(3) 3041		
Prova per 7	*	
$\frac{5\ 12}{12\ 20}$ 12		1200
(3)	*	(1)221
$\frac{5\ 5\ 2\ 5\ 8\ 2\ 1}{6\ 8\ 9\ 10\ 10\ 12\ 20}$		$\frac{1\ 3}{9\ 4}$ 5

(2) Parimenti un centone vale 12 libre e 13 soldi e 5 denari, cioè $\frac{5\ 13}{12\ 20}$ 12 libre: quanto valgono allora $\frac{1\ 3}{9\ 4}$ 5 oncie? Sebbene in questo problema appartengano alla stessa categoria le 100 libre di merce, ovvero il centone, e le $\frac{1\ 3}{9\ 4}$ 5 oncie, tuttavia non sono dello stesso perché 100 sono libre e $\frac{1\ 3}{9\ 4}$ 5 sono oncie: per questo bisogna calcolare a quante oncie corrispondano e

100 libre, risulterà 1200 e allora saranno entrambe simili, e il problema sarà posto così, vale a dire: poiché 1200 oncie valgono $\frac{5\ 13}{12\ 20}$ libre, quanto valgono allora $\frac{1\ 3}{9\ 4}$ 5 oncie. (3) Scrivi questo problema come abbiamo insegnato e moltiplica il 12 per la sua parte frazionaria, risulteranno 3041 denari che devi porre sopra le 12 libre. Parimenti moltiplica il 5 per la sua parte frazionaria, risulterà 211 che devi porre sopra il $\frac{1\ 3}{9\ 4}5$. Poi moltiplica il 211 per il 3041, risulterà 641651 che devi dividere per 1200 e per 4 e per 9 e per $\frac{1\ 0}{12\ 20}$. Una volta adattatili per bene in una sola linea di frazione, risulterà $\frac{5\ 5\ 2\ 5\ 8\ 2\ 1}{6\ 8\ 9\ 10\ 10\ 12\ 20}$ libre come prezzo delle oncie richieste, come si vede in questa figura.

Sul cantare.

	Libre (2) 20957		Rotoli
	$\frac{1\ 7\ 16}{4\ 12\ 20}21$		
		*	
Prova		*	(9)
per 11			18324
	$\frac{0\ 3\ 7\ 9\ 0\ 8\ 5\ 10}{3\ 7\ 8\ 10\ 10\ 10\ 12\ 20}9$		$\frac{1\ 2\ 7}{7\ 5\ 12}43$

(1) Parimenti un cantare vale $\frac{1\ 7\ 16}{4\ 12\ 20}$ 21 libre, e si chiede quanto valgano $\frac{1\ 2\ 7}{7\ 5\ 12}43$, che corrisponde a 43 rotoli e $\frac{1\ 1}{7\ 5}7$ oncie. Pertanto moltiplica il 21 scritto precedentemente per la sua parte frazionaria, risulterà 20957. Parimenti moltiplica i 43 rotoli per 12 e addiziona il 7, moltiplica il risultato per 5 e addiziona il 2, moltiplica il risultato per 7 e addiziona al risultato la moltiplicazione di 1 che è sopra il 7 per il 5, risulterà 18324 che devi moltiplicare per 20957, risulterà 384016068 che devi dividere per 100 e per le parti frazionarie che sono sotto lungo le linee di frazione di ambedue gli altri numeri, naturalmente dopo averle accorpate nel migliore dei modi, risulterà $\frac{0\ 3\ 7\ 9\ 0\ 8\ 5\ 10}{3\ 7\ 8\ 10\ 10\ 10\ 12\ 20}9$ libre, come si vede in questa figura, la cui prova dell'11 è 7.

Sul cantare venduto per libre e denari.

Libre	Rotoli
(5) 3127	

$\frac{7\ 0}{12\ 20}13$	100
Prova per 7	
(5) *	
	*
$\frac{1\ 6\ 1\ 16}{10\ 10\ 12\ 20}96$	(1)
	743

(1) Parimenti un cantare vale 13 libre e 7 denari, cioè $\frac{7\ 0}{12\ 20}13$ libre, quanto valgono dunque 7 cantari e 43 rotoli cioè 743 rotoli? Scrivi il problema e motiplica il 13 per il 20 il cui prodotto devi moltiplicare per il 12 e addiziona il 7, risulterà 3127 che devi moltiplicare per 743, risulterà 2323361 che devi dividere per 100 e per $\frac{1\ 0}{12\ 20}$, cioè per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{10\ 10\ 12\ 20}$, risulterà $\frac{1\ 6\ 1\ 16}{10\ 10\ 12\ 20}96$ libre per il prezzo dei 743 rotoli.

Sul migliaio venduto per libre e soldi.

Libre	Merci varie
(3) 3069	
$\frac{9}{20}153$	1000
Prova per 7	
(5) *	
	*
$\frac{6\ 5\ 9\ 7\ 16}{10\ 10\ 10\ 12\ 20}34$	(3)
	227

(1) Parimenti un migliaio di merci varie è venduto per 153 libre e 9 soldi, cioè per $\frac{9}{20}153$ libre: quanto valgono dunque 227 merci varie? Scrivi il problema e moltiplica il 153 per la sua parte frazionaria, risulterà 3069 che devi moltipicare per 227, risulterà 696663 che devi moltiplicare per 12 in modo da ottenerlo nella linea di frazione della divisione, risulterà 8359956 che devi dividere per la scomposizione di 1000 e per $\frac{1\ 0}{12\ 20}$, cioè per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{10\ 10\ 10\ 12\ 20}$, risulteranno $\frac{6\ 5\ 9\ 7\ 16}{10\ 10\ 10\ 12\ 20}34$ libre come prezzo delle merci richieste.

Sullo stesso argomento (merce venduta) per libre e soldi e denari.

(1) Parimenti 1000 rotoli sono venduti per $\frac{5\ 8}{12\ 20}$ 57 libre, quanto valgono $\frac{5}{6}$ 87 rotoli? Una volta schematizzato il problema, moltiplica il 57 per la sua parte frazionaria, risulterà 13781 che devi porre sopra il 57. Parimenti moltiplica l'87 per il 6 e addiziona il 5, risulterà 527 che devi moltiplicare per 13781, risulterà 7262587 che devi dividere per 1000 e per le frazioni dei restanti numeri, cioè per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{6\ 10\ 10\ 10\ 12\ 20}$, risulterà $\frac{1\ 1\ 3\ 4\ 10\ 0}{6\ 10\ 10\ 10\ 12\ 20}$ 5 libre.

Sul peso pisano di formaggio.

(1) Un peso di formaggio, che pesa 22 centoni, cioè 2200 libre, è venduto per 24 libre: si richiede quanto valgano 86 libre. Schematizza il problema e moltiplica il 24 per l'86, risulterà 2064, [p.91] che devi dividere per la scomposizione di 2200, cioè per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{2\ 10\ 10\ 11}$. Tuttavia considera $\frac{1}{20}$ invece di $\frac{1\ 0}{2\ 10}$ in modo da avere tale $\frac{1}{20}$ nella frazione così: $\frac{1\ 0\ 0}{10\ 11\ 20}$. E poiché non abbiamo il 12 in questa divisione, si moltiplichi il 2064 per 12, e si ponga il 12 sotto la linea di frazione della divisione. Dal momento che quando si aggiunge il 12 sotto la linea di frazione della divisione, allora si moltiplica il divisore per 12, per questo bisogna moltiplicare similmente il dividendo per 12, in modo che la proporzione tra il dividendo e il divisore sia la stessa che era prima. Da ciò risulta $\frac{8\ 1\ 9\ 18}{10\ 11\ 12\ 20}$.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti un peso di formaggio, cioè 2200 libre, vale $\frac{11}{20}$ 18 libre: quanto valgono allora 100 libre? Non c'è bisogno di schematizzare questo problema: poiché infatti 100 è $\frac{1}{22}$ di 2200, per questo motivo non c'è bisogno di altro che dividere il detto prezzo del pesone per la scomposizione del 22, cioè per $\frac{1\ 0}{2\ 11}$, cosa che puoi fare così: calcosa $\frac{1}{2}$ delle 18 libre e 11 soldi, risulterà 9 libre e $\frac{1}{2}$ 5 soldi, calcola a quanti soldi questo risultato corrisponda, risulteranno 185 soldi e 6 denari che devi dividere per 11, risulterà 16 soldi e restano 9 soldi e 6 denari da dividere per 11, trasformali in denari, risulteranno 114 denari da dividere per 11, risulteranno $\frac{1}{11}$ 10 denari e tanto vale un centenario di formaggio, vale a dire 16 soldi e $\frac{1}{11}$ 10 denari.

Sullo stesso argomento per libre.

(1) Parimenti un pesone vale $\frac{13}{20}$ 19 libre, quanto valgono dunque 783 libre? Schematizza il problema e moltiplica il 19 per il 20 e addiziona il 13, risulteranno 303 soldi che devi moltiplicare per 783, risulterà 307719 che devi dividere per la scomposizione di 2200 e per il 20 della linea di frazione, cioè per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{2\ 10\ 10\ 11\ 20}$. Ma per ottenere il 12 nella frazione, moltiplica il 307719 per 6, il quale 6 lo unirai con il 2 che sta nella linea di frazione, e otterrai il 12 in tale frazione, così $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{10\ 10\ 11\ 12\ 20}$, risulterà $\frac{4\ 1\ 5\ 10\ 19}{10\ 10\ 11\ 12\ 20}$ 6 libre.

Il Peso di Provincia[2436].

(1) Il peso di Provincia - che pesa 300 libre - si vende per 15 libre e 7 soldi, cioè per $\frac{7}{20}$ 15 libre, si chiede quanto valgano 86 libre. Moltiplica il 15 per il 20 e addiziona il 7, risulterà 307 che devi porre sopra il 15, poi moltiplicalo per l'86, risulterà 26402 che devi dividere per 300 e per 20, cioè per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 5\ 12\ 20}$, risulteranno $\frac{2\ 0\ 0\ 8}{5\ 5\ 12\ 20}$ 4 libre come prezzo delle richieste 86 libre, come qui si mostra.

(2) Invero devi applicarti a trovare le scomposizioni dei numeri con i quali si giunge alla divisione, così come abbiamo fatto per il 300: sebbene infatti la sua scomposizione in fattori sia $\frac{1\ 0\ 0}{3\ 10\ 10}$, tuttavia possiamo far sì che essa sia $\frac{1\ 0\ 0}{5\ 5\ 12}$ in modo da avere $\frac{1}{12}$ così come abbiamo $\frac{1}{20}$, vale a dire la parte frazionaria del 15.

Sulo stesso peso (quello di Provincia).

(1) Parimenti un peso di pepe vale 11 libre e 7 soldi e 5 denari, cioè $\frac{5\ 7}{12\ 20}$ 11 libre: quanto valgono allora 127 libre e $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 5, cioè $\frac{1\ 1\ 1\ 5}{5\ 4\ 3\ 12}$ 127 libre? Schematizza il problema e moltiplica l'11 per la sua parte frazionaria, risulterà 2729 che devi porre sopra l'11. Parimenti moltiplica il 127 per le sue parti frazionarie, cioè per 12 e addiziona il 5, moltiplica il risultato per 3 e addiziona l'1, moltiplica il risultato per 4 e addiziona l'1 moltiplica il risultato per 5, risulterà 91760. Parimenti moltiplica l'1 che è sopra il 4 per il 5, moltiplica il risultato per il 3, risulterà 15. Ancora, moltiplica l'1 che è sopra il 5 per il 4, moltiplica il risultato per il 3, risulterà 12 che devi addizionare con il 15 e con il 91760, risulterà 91787 che devi porre sopra il 127. Poi moltiplicalo per 2729, risulterà 250486723 che devi dividere per la scomposizione di 300 e per tutte le parti frazionarie, risulterà $\frac{1\ 6\ 6\ 0\ 6\ 6\ 7\ 16}{3\ 8\ 9\ 10\ 10\ 10\ 12\ 20}$ 4 come prezzo delle libre richieste.

[2436] Il peso di provincia è un'unità di peso equivalente a 300 libre pisane.

Sui rotoli.

(1) 37 rotoli valgono 11 libre, quanto valgono allora 18 rotoli? Moltiplica l'11 per il 18 (p.92), risulterà 198 che devi moltiplicare per 12 e per 20, cioè per 240, in modo da avere il 12 e il 20 sotto la linea di frazione, risulterà 47520 che devi dividere per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{37\ \ 12\ \ 20}$, risulterà $\frac{12\ \ 0\ \ 7}{37\ \ 12\ \ 20}$ 5 libre come prezzo dei 18 rotoli.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti 42 rotoli valgono $\frac{1\ 1}{5\ 4}$ 13 libre: quanto valgono allora $\frac{1}{2}$ 18 rotoli? Moltiplica il 13 per le sue parti frazionarie, risulterà 269. Poi moltiplica il 18 per il 2 e addiziona l'1, risulterà 37 che devi moltipicare per 269, risulterà 9953 che devi dividere per la scomposizione di 42, vale a dire per $\frac{1\ \ 0}{6\ \ 7}$ e per 2 e per 4 e per 5 che sono sotto le linee di frazione di entrambi i numeri, aggregandosi così in modo che invece di $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6}$ tu consideri $\frac{1}{12}$ e invece di $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ tu calcoli $\frac{1}{20}$; e otterrai come loro aggregazione $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{7\ \ 12\ \ 20}$. Risulterà $\frac{6\ \ 5\ \ 18}{7\ \ 12\ \ 20}$ 5 libre come prezzo di quei $\frac{1}{2}$ 18 rotoli.

(2) È stato detto abbastanza sia sulla vendita dei cantari e degli altri diversi pesi per le libre di denari, - nei quali calcoli abbiamo bisogno di avere fra le frazioni di tali divisioni $\frac{1\ \ 0}{12\ \ 20}$, in modo da ottenere libre, soldi e denari in una sola moltiplicazione -, sia sulle vendite fatte dai soldi - nei quali calcoli abbiamo bisogno di avere solo $\frac{1}{12}$, all'inizio delle frazioni di quelle divisioni dal momento che quello che dalla divisione avanzerà sopra il 12, saranno denari, mentre ciò che dopo le divisioni starà oltre la linea di frazione, sono i soldi.

Sul cantare venduto per soldi e frazioni di soldi.

(1) Parimenti un cantare vale $\frac{1}{4}$ 27 soldi, cioè 27 soldi e 3 denari: quanto valgono allora $\frac{1}{3}$ 42 rotoli? Moltiplica il 27 per il 4 e addiziona l'1, risulterà 109. Parimenti moltiplica il 42 per il 3 e addiziona l'1, risulterà 127. Moltiplica questo 127 per 109, risulterà 13843 che devi dividere per 100 e per 3 e per 4, cioè per $\frac{3\ \ 4\ \ 6}{10\ \ 10\ \ 12}$ 11 soldi.

Sulla stessa vendita per soldi e denari.

(1) Parimenti 1 cantare vale 26 soldi e 5 denari, cioè $\frac{5}{12}$ 26 soldi. Quanto valgono allora $\frac{5}{8}$ 31 rotoli? Moltiplica il 26 per il 12 e addiziona il 5, risulteranno 317 denari. Parimenti moltiplica

il 31 per l'8 e addiziona il 5, risulterà 253 che devi moltiplicare per 317, risulterà $\frac{1\ \ 5\ \ 2\ \ 4}{8\ \ 10\ \ 10\ \ 12}8$ soldi.

Sullo stessa vendita per soldi e denari e loro frazioni.

(1) Parimenti un cantare, cioè 100 rotoli, vale $\frac{1\ \ 1\ \ 5}{4\ \ 3\ \ 12}$ 28 soldi, cioè 28 soldi e $\frac{1}{4}\frac{1}{3}5$ denari: quanto valgono allora $\frac{2}{7}7$ libre? Sebbene i 100 rotoli e le $\frac{2}{7}$ 7 libre appartengano alla stessa categoria, tuttavia non sono della stessa qualità o peso, perché 100 sono i rotoli e $\frac{2}{7}$ 7 sono libre. Perciò si calcola a quanti rotoli corrispondano le $\frac{2}{7}$ 7 libre, o si calcola a quante libre corrispondano i 100 rotoli, in modo che, come appartengono ad una sola categoria, così siano anche di una sola qualità, vale a dire di un solo peso: o siano entrambi rotoli, o libre. Per l'appunto trasformiamo in libre i 100 rotoli, e risulteranno 158 libre pisane, ma in altre regioni sono 150 libre. Si pongano le libre calcolate nella traccia del problema come prezzo di vendita. Poi moltiplica il 28 per la sua parte frazionaria, risulterà 4099. Parimenti moltiplica il 7 per il 7 e addiziona il 2, risulterà 51 che devi moltiplicare per 4099, risulterà 209049 che devi dividere per 158 e per le frazioni che, aggregate assieme, realizzano $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{3\ \ 7\ \ 8\ \ 79\ \ 12}$, risulteranno $\frac{0\ \ 5\ \ 2\ \ 59\ \ 3}{3\ \ 7\ \ 8\ \ 79\ \ 12}1$ soldi. (2) Oppure moltiplica soltanto la terza parte di 51, vale a dire 17 per 4099, e togli i 3 dalla frazione, perchè sempre in tutti i problemi in cui a moltiplicazione e la divisione di un numero vengono meno, devi osservare il suddetto metodo di semplificazione.

Sul cantare venduto per tareni.

(1) Se il cantare di una merce qualunque è venduto in Sicilia per 26 tareni, si chiede quanto valgano 47 rotoli. Schematizza il problema e moltiplica i numeri che sono in diagonale, vale a dire 26 per 47, risulterà 1222, che devi dividere per la scomposizione di 100 adattandola in modo che (p.93) abbiamo di lì $\frac{1}{20}$ all'inizio della linea di frazione poiché un tareno equivale a 20 grani di frumento e ciò che rimarrà sopra il 20 indicherà i grani. Pertanto la scomposizione del 100 è $\frac{1\ \ 0}{5\ \ 20}$, se per essa dividerai 1222, risulteranno $\frac{2\ \ 4}{5\ \ 20}$ 12 tareni, cioè 12 tareni e $\frac{2}{5}$ 4 grani. (2) O altrimenti, poiché hai nel prodotto della moltiplicazione 1222, calcola per il 1200, 12 tareni, per il fatto che 1200 è il centuplo di 12, poi ciò che resta di lì, vale a dire 22, diviilo per 5, e il quoziente della divisione, cioè $\frac{2}{5}$ 4, sono i grani, come or ora abbiamo trovato.

Sulla stessa vendita.

(1) Parimenti un cantare si vende per $\frac{1}{4}$ 57 tareni: quanto valgono allora 831 rotoli, cioè 8 cantari e 31 rotoli? Moltiplica dunque 57 per il 4 e addiziona l'1, risulterà 229 che devi moltiplicare per 831, risulterà 190299 che devi dividere per 100 e per 4, cioè per $\frac{1\ 0\ 0}{4\ 5\ 20}$ o per $\frac{1\ 0\ 0}{2\ 10\ 20}$, che è più bello, risulterà $\frac{1\ 9\ 14}{2\ 10\ 20}$ 475 tareni, i quali 475 tareni sono tareni del peso di Messina. Se vorrai sapere quante oncie sono dividi tali 475 tareni per 30, dal momento che 30 tareni realizzano qui 1 oncia, risulteranno $\frac{5}{6}$ 15 oncie. Parimenti se questi 475 tareni saranno del peso di Palermo, dividi 475 per $\frac{1}{3}$27 poiché un'oncia di Palermo è $\frac{1}{3}$ 27 di tareno.

Sulla stessa vendita.

(1) Parimenti un cantare si vende per $\frac{11}{20}$ 127 tareni, che corrisponde a 127 tareni e 11 grani: quanto valgono allora $\frac{1}{4}$ 42 rotoli? Moltiplica i 127 per il 20 e addiziona l'11, risulterà 2551. Poi moltiplica il 42 per il 4 e addiziona l'1, risulterà 169 che devi moltiplicare per il 2551, risulterà 431119 che devi dividere per 100 e per 4 e per 20, risulteranno $\frac{3\ 8\ 7\ 17}{4\ 10\ 10\ 20}$ 53.

(2) Ora è stato detto abbastanza sulla vendita per tareni, ma ora trattiamo della vendita delle merci per bizanti di Garbi[2437], ciascuno dei quali vale 10 miliari: per questo è necessario che per essi abbiamo sempre $\frac{1}{10}$ all'inizio della frazione, poiché ciò che resterà sopra il 10, saranno i miliari.

(3) Se un cantare di una merce qualunque si vende presso i garbi per 47 bizanti, quanto valgono 39 rotoli? Schematizza il problema e moltiplica il 47 per il 39 che sono in diagonale, risulterà 1833 che devi dividere per 100, vale a dire per $\frac{1\ 0}{10\ 10}$, risulteranno $\frac{3\ 3}{10\ 10}$ 18 bizanti, e $\frac{3}{10}$3 miliari, e tanto valgono gli altri 39 rotoli.

(4) 100 pelli di capra valgono $\frac{3}{4}$ 42 bizanti, quanto valgono allora 21 pelli di capra? Moltiplica il 42 per il 4 e addiziona il 3, risulterà 171 che devi moltiplicare per 21, risulterà 3591 che devi dividere per 100 e per 4 cioè per $\frac{1\ 0\ 0}{4\ 10\ 10}$, risulteranno $\frac{3\ 4\ 9}{4\ 10\ 10}$ 8 bizanti come prezzo di quelle 21 pelli di capra.

Sul cantare venduto per bizanti e miliari.

[2437] Il bizante di Garbo è l'unità di misura monetaria usata dalla popolazione dei Garbi a occidente dell'impero musulmano.

(1) Parimenti un cantare è venduto per 23 bizanti e $\frac{1}{2}$ 4 miliari, cioè per $\frac{1\ \ 4}{2\ \ 10}$23 bizanti, quanto valgono allora $\frac{1}{4}$ 31 rotoli? Moltiplica il 23 per il 10 e addiziona il 4, moltiplica il risultato per 2 e addiziona l'1, risulterà 469. Parimenti moltiplica il 31 per il 4 e addiziona l'1, risulterà 125, un quinto di un quinto del quale, vale a dire 5, moltiplicalo per 469 e dividi il prodotto per un quinto di un quinto di 100, cioè per 4, e per tutti i numeri che sono sotto la linea di frazione, risulteranno $\frac{1\ \ 2\ \ 3}{4\ \ 8\ \ 10}$7 bizanti.

Decina di panni venduta presso i garbi.

(1) Dieci panni valgono $\frac{1}{4}$ 34 bizanti, quanto valgono allora 37 panni? Moltiplica il 34 per il 4 e addiziona l'1, risulterà 137 che devi moltiplicare per 37, risulterà 5069 che devi dividere per il 10 e per il 4 della frazione, cioè per $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 10}$, risulteranno $\frac{1\ \ 7}{4\ \ 10}$ bizanti che consistono in 126 bizanti e $\frac{1}{4}$ 7 miliari.

Sul rotolo.

(1) Un rotolo di zafferano, o di noci moscate, o di altre merci qualunque (p.94) si vende per 3 bizanti e $\frac{1}{4}$ 7 miliari, cioè per $\frac{1\ \ 7}{4\ \ 10}$ 3 bizanti: quanto valgono allora 17 rotoli e $\frac{1}{2}$ 5 oncie, cioè $\frac{1\ \ 5}{2\ \ 12}$ 17 rotoli? Schematizza il problema come si vede qui e moltiplica il 3 per il 10 e addiziona il 7, moltiplica il risultato per il 4 e addiziona l'1, risulterà 149. Parimenti moltiplica il 17 per il 12 e addiziona il 5, poi moltiplica il risultato per il 2 e addiziona l'1, risulterà 419. Moltiplicalo per 149 e dividi il prodotto per le frazioni di entrambi i numeri, risulteranno $\frac{1\ \ 3\ \ 2\ \ 0}{2\ \ 6\ \ 8\ \ 10}$ 65 come più sopra si mostra in figura.

Sullo stesso argomento.

(1) Invero, se sulla base degli stessi elementi uno chiedesse quanto valgano $\frac{1}{2}$ 5 oncie, intanto calcola le oncie di un rotolo, sono 12. Quindi scrivi nello schema che 12 oncie di zafferano valgono 3 bizanti e $\frac{1}{4}$ 7 miliari, cioè $\frac{1\ \ 7}{4\ \ 10}$ 3 bizanti, e si chiede quanto valgono $\frac{1}{2}$ 5 oncie. (2) Moltiplicherai, dunque, come sopra, il 3 per la sua parte frazionaria, risulterà similmente 149. Poi moltiplicherai il 5 per il 2 e addizionerai al prodotto l'1, risulterà 11 che moltiplicherai per 149, risulterà 1639 che devi dividere per 12 e per gli altri denominatori, cioè per $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 6\ \ 8\ \ 10}$, risulterà $\frac{1\ \ 3\ \ 0\ \ 7}{2\ \ 6\ \ 8\ \ 10}$ 1.

(3) Ormai abbiamo parlato abbastanza di ciò che attiene ai bizanti miliariensi e che riguarda la prima parte di questo capitolo, ora invero parleremo di ciò che riguarda i bizanti saraceni o ciprioti, per i quali abbiamo bisogno di avere all'inizione della frazione il 24, cioè $\frac{1\ 0}{3\ 8}$, e questo perché ciascuno di quei bizanti si divide in 24 carati e non dubiterai che siano carati ciò che, dopo la divisione, starà sopra $\frac{1\ 0}{3\ 8}$.

Il cantare di lino o qualunque altro tipo di merce che si vende in Siria o ad Alessandria.

(1) Se il cantare di lino o di qualunque altra merce si vende per 4 bizanti saraceni in Siria o ad Alessandria, e vorrai sapere quanto costano 37 rotoli, schematizza il problema, poi moltiplica il 4 per il 37, risulterà 148 che devi dividere per 100, risulterà $\frac{8\ 4}{10\ 10}$ 1 bizante. (2) Se però vuoi trasformare in carati $\frac{8\ 4}{10\ 10}$ di un bizante, moltiplica il 4 che sta sopra il 10 per l'altro 10 e addiziona l'8, risulterà 48 che devi moltiplicare per i carati di un bizante, vale a dire per 24, risulterà 1152 che devi dividere per $\frac{1\ 0}{10\ 10}$, risulterà $\frac{2\ 5}{10\ 10}$ 11 carati. (3) Oppure, per ottenere il risultato grazie ad una sola moltiplicazione, moltiplica il 148 per la quarta parte di 24, vale a dire per 6, e dividi il prodotto per la quarta parte di 100 e per la scomposizione di 24, risulterà similmente $\frac{3\ 2\ 2\ 3}{5\ 5\ 3\ 8}$ 1 bizante, cioè 1 bizante e $\frac{2\ 5}{10\ 10}$ 11 carati. Poiché se avrai moltiplicato il 3 che sta sopra l'8 per il 3 che sta sotto la linea di frazione e poi addizionerai il 2, risulteranno 11 carati, e $\frac{3\ 2}{5\ 5}$ che sono lungo la linea di frazione dopo $\frac{1\ 0}{3\ 8}$ sono altrettante parti di un carato. E bisogna fare sempre così anche in tutti gli altri casi nei quali porrai all'inizio della frazione $\frac{1\ 0}{3\ 8}$, cioè moltiplicherai il numero che sta sopra l'8 per il 3 che starà dopo l'8 nella linea di frazione e addizionerai il numero che starà sopra il 3, come abbiamo fatto proprio adesso, e otterrai i carati che corrispondono a quella frazione.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti un cantare vale $\frac{1}{4}$ 11 bizanti. Quanto valgono allora 2 cantari e 37 rotoli, cioè 237 rotoli? Moltiplica l'11 per il 4 e addizione l'1, risulterà 45, la cui quinta parte, vale a dire 9, devi moltiplicarla per 237. Poi moltiplica l'intero prodotto per 3 in modo da avere la scomposizione del 24 sotto la linea di frazione, risulterà 6399 che devi dividere per la quinta parte di 100 e per il 4 che sta sotto la linea di frazione e per il 3 per il quale abbiamo, in aggiunta, moltiplicato, tutti denominatori che stanno nella divisione riarrangiata $\frac{1\ 0\ 0}{10\ 3\ 8}$, risulteranno $\frac{9\ 0\ 5}{10\ 3\ 8}$ 26 bizanti, come è esemplificato nello schema.

Il miliario di olio di Costantinopoli.

(1) A Costantinopoli, un miliario di olio, che corrisponde a $\frac{1}{3}$ 33 metreti, si vende per [p.95] $\frac{5}{24}$ 31 bizanti. Quanto costano allora 13 metreti? (2) Schematizza il problema, poi moltiplica il 33 per il 3 che sta davanti ad esso, nella frazione, e addiziona l'1, risulterà 100 che devi porre sopra il 33 come puoi vedere nella figura più in basso. Poi moltiplica il 31 per il 24 e addizione il 5, risulteranno 749 carati che devi scrivere sopra il 31. poi moltiplica il 749 per il 13, risulterà 9737 che devi moltiplicare per il 3 che sta a denominatore della frazione del 33, risulterà 29211 che devi dividere per il 100 posto sopra al 33 e per il 24, cioè per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{10\ 10\ 8\ 8}$, risulteranno $\frac{1\ 1\ 1\ 1}{10\ 10\ 3\ 8}$ 12 bizanti.

L'oncia di Palermo cambiata in moneta pisana.

(1) Un'oncia di Palermo, che corrisponde a $\frac{1}{3}$ 27 tareni, è cambiata in moneta pisana per $\frac{5}{12}$ 107 soldi. Si chiede quanto valgano, sulla base di questi elementi, $\frac{1}{4}$ 7 tareni. (2) Moltiplica il 27 per il 3 e addiziona l'1 che sta sopra il 3, risulterà 82 che devi riportare sopra $\frac{1}{3}$ 27. Poi moltiplica il 107 per il 12 e addiziona il 5, risulteranno 1289 denari che devi scrivere sopra il 107. Parimenti moltiplica il 7 per il 4 e addiziona l'1, risulterà 29 che devi scrivere sopra $\frac{1}{4}$ 7. Poi moltiplica i numeri che si oppongono in diagonale, vale a dire 1289 e 29, risulterà 3781 che devi moltiplicare per il 3 che è a denominatore della frazione del 27, risulterà 112143 che devi poi dividere per la scomposizione dell'82 e per le frazioni deglia altri numeri, vale a dire per $\frac{1}{4}$ e per $\frac{1}{12}$, le quali frazioni, riarrangiate insieme, realizzano $\frac{1\ 0\ 0}{8\ 41\ 12}$, risulteranno $\frac{7\ 38\ 5}{8\ 41\ 12}$ 28. (3) Ma la stessa oncia, vale a dire $\frac{1}{3}$ 27 tareni, viene prestata per $\frac{17}{20}$ 4 libre, cioè per 4 libre e 17 soldi, qunto valgono allora $\frac{1}{2}$ 635 tareni? (4) Moltiplica $\frac{17}{20}$ 4 per $\frac{1}{2}$ 635, e dividi il loro prodotto per $\frac{1}{3}$ 27, calcolo che sarà di seguito esemplificato. Vale a dire: moltiplichi il 27 per il 3 e addizioni l'1, risulterà 82 che devi riportare sopra il 27. Poi moltiplichi le 4 libre per 20 e addizioni il 17, risulteranno 97 soldi che devi scrivere sopra $\frac{17}{20}$ 4. Poi devi moltiplicare 635 per 2 e addizionare l'1, risulterà 1271 che devi scrivere sopra $\frac{1}{2}$ 635. Poi devi moltiplicare il 97 per $\frac{1}{41}$ di 1271, vale a dire per 31, poi per 3 che sono sotto la linea di frazione davanti al 27, risulterà 9021 che devi dividere per $\frac{1}{41}$ di 82 e per 20 e per 2 che sono sotto le linee di

frazione, cioè per $\frac{1\ \ 0}{4\ 20}$ e non occorre moltiplicare per il 3 che manca a $\frac{1}{12}$ perché non restano frazioni dopo $\frac{1}{4}$ di $\frac{1}{20}$ e questo $\frac{1}{4}$ appartiene alla scomposizione del 12, risulterà $\frac{1\ 15}{4\ 20}$ 112, cioè 112 libre, 15 soldi e 3 denari.

I rotoli che si cambiano con tareni.

(1) $\frac{1}{9}\frac{3}{4}$ 22 rotoli si scambiano con $\frac{1}{8}\frac{2}{5}$ 14 tareni. Quanto valgono $\frac{1\ \ 2}{2\ \ 6}$ 17 rotoli? Schematizza il problema. Poi moltiplica il 22 per le sue frazioni, risulterà 823 che devi scrivere sopra $\frac{1}{9}\frac{3}{4}$ 22. Poi moltiplica il 14 per le sue frazioni, risulterà 581 che devi scrivere sopra $\frac{1}{8}\frac{2}{5}$ 14. Parimenti moltiplica il 17 per le sue frazioni, risulterà 215 che devi moltiplicare per 581, risulterà 124915 che devi moltiplicare per i numeri che stanno sotto le linee di frazione del 22, vale a dire per 4 e per 9, e poi devi dividere il prodotto per 823 e per 5 e per 8 e per 2 e per 6 che stanno a denominatore delle frazioni che si oppongono in diagonale, il 14 e il 17. ()Ma per introdurre lo stratagemma del semplificare, cosa che abbiamo già mostrato nelle moltiplicazioni dei numeri, si tralasci di moltiplicare il 124915 per 4 e per uno dei 3 che sta nella scomposizione del 9, e poi si ometta di dividere per 2 e per 6 che corrispondono a 4 per 3. Ma moltiplicherai il 124915 solo per il 3 che resta da quel 9, risulterà 374475 che resta da dividere per$\frac{1\ \ 0\ \ 0}{5\ 88\ 82}$, cioè per $\frac{1\ \ \ 0\ \ 0}{2\ 823\ 20}$, così da avere il 20 all'inizio della linea di frazione - sul quale 20 risulteranno i grani - risulterà $\frac{1\ 55\ 17}{28\ 28\ 20}$ tareni: abbiamo così potuto osservare il suddetto metodo della semplificazione in alcune delle suddette transazioni economiche. Ma anche se abbiamo semplificato, affinché non si impedisse ciò che in queste operazioni abbiamo voluto dimostrare, in tutte le operazioni simili bisogna osservare lo stesso metodo.

Sui rotoli e le loro frazioni.

(1) Parimenti $\frac{1\ \ 3\ \ 2}{2\ \ 8\ 11}$ 13 rotoli si vendono per $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 7 bizanti, quanto costano allora $\frac{1}{7}\frac{3}{5}$ di un rotolo? Moltiplica il 13 per la sua parte frazionaria, risulterà 2327 che devi scrivere sopra il 13. Poi moltiplica [p.96] il 7 per le sue frazioni, risulterà 467 che devi scrivere sopra il 7, dopo di ciò moltiplica il 3 che sta sopra il 5 per il 7 e l'1 che sta sopra il 7 per il 5, risulterà 26 che devi scrivere sopra $\frac{1}{7}\frac{3}{5}$. Poi moltiplica il tredicesime di 26 per 467 e per i numeri che stanno sotto la linea di frazione del 13, vale a dire per 2 e per 8 e per 11, risulterà 164384 che devi dividere per il tredicesimi di 2327, cioè per 179, e per i numeri che stanno sotto le frazioni davanti ai numeri che si oppongono in diagonale. Tuttavia poiché tra di loro non

possiamo ricavare la scomposizione di 24, poiché da essi possiamo ricavare soltanto $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ e ci manca $\frac{1}{2}$, aggiungiamo il 2 ai divisori e moltiplichiamo 164384 per 2, risulterà 328768 che devi dividere per $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{5\ \ 5\ \ 7\ \ 13\ \ 179\ \ 3\ \ 8}$, risulterà $\frac{88\ \ 488\ \ 13}{55\ \ 7179\ \ 88}0$.

Sulla frazione di rotolo scambiata con frazione di bizanti.

(1) Parimenti $\frac{1}{3}$ di un rotolo è scambiato con $\frac{1}{4}$ di un bizante, quanto vale allora $\frac{1}{5}$ di un rotolo? Schematizza il problema, poi moltiplica i nnumeri che si oppongono in diagonale, vale a dire $\frac{1}{4}$ per $\frac{1}{5}$ e dividi per $\frac{1}{3}$, cosa che avviene così: moltiplica l'1 che è sopra il 4, per l'1 che è sopra il 5, risulterà 1 che devi moltiplicare per 3, risulterà 3 che devi dividere per l'1 che è sopra il 3 e per il 4 e per il 5 che sono sotoo le linee di frazione, vale a dire per $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 10}$, risulterà $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 10}$ di un bizante, vale a dire $\frac{3}{20}$, Se vorrai trasformare questi ultimi in carati, moltiplica il 3 che sta sopra il 20 per la quarta parte di 24, risulterà$\frac{3}{5}$ 3.

Sulla frazione di rotolo scambiata con la frazione di soldo.

(1) Parimenti $\frac{2}{3}$ di un rotolo si scambia con $\frac{3}{5}$ di un soldo, quanto valgono allora $\frac{4}{7}$ di un rotolo? Moltiplica il 3 che sta sopra il 5 per il 4 che sta sopra il 7 poi per il 3 che sta sotto la linea di frazione, risulterà 36 che devi dividere per il 2 che sta sopra il 3 e per il 5 e per il 7, cioè per $\frac{1\ \ 0}{7\ \ 10}$, risulterà $\frac{1\ \ 5}{7\ \ 10}$ di un soldo, cioè $\frac{11}{57}$ 6 denari.

Sulle frazioni di rotolo scambiate con frazioni di bizante.

(1) Parimenti $\frac{1\ 2}{4\ 3}$ di un rotolo si scambia con $\frac{1\ 1}{6\ 5}$ di un bizante. Quanto valgono allora $\frac{15}{29}$ di un rotolo? Moltiplica $\frac{1\ 1}{6\ 5}$ per $\frac{1\ \ 5}{2\ \ 9}$ e dividi per $\frac{1\ 2}{4\ 3}$. Fai così: moltiplica il 2 che sta sopra il 3 per il 4 e l'1 che sta sopra il 4 per il 3 e addizionali assieme, risulterà 11 che devi scrivere sopra $\frac{1\ 2}{4\ 3}$. Parimenti moltiplica l'1 che sta sopra il 5 per il 6, e l'1 che sta sopra il 6 per il 5, e addiziona i due prodotti, risulterà 11 che devi scrivere sopra $\frac{1\ 1}{6\ 5}$. Parimenti moltiplica il 5 che sta sopra il 9 per il 6 e addiziona l'1, risulterà 11 che devi scrivere sopra $\frac{1\ \ 5}{2\ \ 9}$, poi moltiplica l'11 che sta sopra $\frac{1\ 1}{6\ 5}$ per l'11 che sta sopra $\frac{1\ \ 5}{2\ \ 9}$, poi per 3 e per 4 che stanno sotto le linee di frazione e dividi il prodotto per l'11 che sta sopra $\frac{1\ 2}{4\ 3}$ e per gli altri denominatori. Ma poiché devi moltiplicare per 11 e per 3 e per 4 e dividere per 11 e per 2 e per 6, ometti di moltiplicare

per l'11 che sta sopra $\frac{1\ 1}{6\ 5}$ e per 3 e per 4 che sono a denominatore di $\frac{1\ 2}{4\ 3}$, e non dividere per 11 nè per 6 ma dividi per l'11 che sta sopra $\frac{1\ 5}{2\ 9}$ e per $\frac{1\ 0}{5\ 9}$ che sono sotto le linee di frazione, risulterà $\frac{1\ 2}{5\ 9}$.

(2) Parimenti $\frac{1\ 1\ 1}{5\ 4\ 3}$ di un rotolo si scambia con $\frac{2\ 3\ 4}{7\ 8\ 9}$ di un tareno, quanto valgono $\frac{1\ \ 3\ \ 7}{6\ 10\ 11}$ di un rotolo? Moltiplica l'1 che sta sopra il 3 per il 4, poi per il 5, risulterà 20. Poi moltiplica l'1 che sta sopra il 4 per il 5, poi per 3, risulterà 15. Poi moltiplica l'1 che sta sopra il 5 per il 4, poi per il 3, risulterà 12. Poi addiziona il 20 con il 15 e con il 12, risulterà 47 che devi scrivere sopra $\frac{1\ 1\ 1}{5\ 4\ 8}$. Poi moltiplica il 4 che sta sopra il 9 per l'8, poi per il 7, risulterà 224. Poi moltiplica il 3 che sta sopra l'8, per il 7 e addiziona il 2, risulterà 23 che devi moltiplicare per 9, risulterà 207 che devi aaddizionare con 224, risulterà 431 che devi scrivere sopra $\frac{2\ 3\ 4}{7\ 8\ 9}$. Parimenti moltiplica il 7 che sta sopra l'11 per il 10 e addiziona il 3, poi moltiplica per 6 e addiziona 1, risulterà 439 che devi scrivere sopra $\frac{1\ \ 3\ \ 7}{6\ 10\ 11}$. Poi moltiplica 431 per 439 che si oppongono in diagonale, risulterà 189209 che dovresti moltiplicare per i denominatori che stanno sotto il 47, vale a dire per 3 e per 4 e per 5, e poi dividere per lo stesso 47 e per i denominatori delle altre frazioni. Ma si tralasci [p.97] la moltiplicazione di 3 e di 2 che sono nella scomposizione del 24 e si moltiplichi il 189209 solo per 2 che resta dal 4, e per il 5, cioè per 10, risulterà 1892090 e si ometta di dividere per il 6 che sta sotto la linea di frazione del $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{6\ 10\ 11}$, dunque si divide per $\frac{1\ 0\ 0\ \ 0\ \ 0}{7\ 8\ 9\ 11\ 47}$, cioè - in modo da avere $\frac{1}{20}$ in testa alla linea di frazione - per $\frac{1\ 0\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{4\ 7\ 9\ 11\ 47\ 20}$, risulteranno $\frac{2\ 4\ 2\ \ 6\ \ 24\ \ 14}{4\ 7\ 9\ 11\ 47\ 20}$ grani.

(3) Parimenti 100 libre di pepe sono vendute per un certo prezzo , poniamo per $\frac{1}{4}$ 11 libre, e si chiede quanto valga un rotolo. Poiché le 100 libre e 1 rotolo appartengono alla stessa categoria e non sono della stessa qualità perché 100 sono le libre e 1 è il rotolo, siccome appartengono alla stessa categoria bisogna ricondurli alla stessa qualità: o alla qualità dei rotoli o alla qualità delle libre. (4) Ed essendo dell'uno e dell'altro tipo, dimostriamo come trasformarli in qualcosa d'altro, vale a dire in modo da ricordurre entrambi a frazioni di cantare, cioè in modo che tu veda a quale frazione di cantare corrispondano 100 libre. Invero ogni libra pisana corrisponde a $\frac{1}{158}$ di cantare, per questo 100 libre sono $\frac{100}{158}$ di cantare, e 1 rotolo e $\frac{1}{100}$ dello stesso cantare. Per questo così trasformati in tale problema, si deduce che $\frac{100}{158}$ di cantare valgono $\frac{1}{4}$ 11 libre e si chiede quanto valga $\frac{1}{100}$ di cantare. Schematizza invero il

problema così e opererai secondo il metodo che abbiamo spiegato più sopra e otterrai come prezzo di quel rotolo $\frac{0\ 6\ 6\ 6\ 3}{10\ 10\ 10\ 12\ 20}$.

(5) Parimenti $\frac{1}{2}8$ libre si vendono per $\frac{3\ 2}{4\ 12}\ 11$ soldi, quanto risultano $\frac{1\ 3}{2\ 8}\ 9$ rotoli? Trasforma le $\frac{1}{2}8$ libre in frazioni di cantare, risulterà $\frac{1\ 8}{2\ 158}$; poi trasforma similmente i $\frac{1\ 3}{2\ 8}\ 9$ rotoli in frazioni di cantare, risulterà $\frac{1\ 3\ 9}{2\ 8\ 100}$. Quindi schematizza il problema e moltiplica l'8 che è sopra il 158 per il 2 e addiziona l'1, risulterà 17 che devi scrivere sopra il $\frac{1\ 8}{2\ 158}$; poi moltiplica l'11 per il 12 e addiziona il 2, moltiplica il risultato per il 4 e addiziona il 3, risulterà 539 che devi scrivere sopra il $\frac{3\ 2}{4\ 12}\ 11$; poi moltiplica il 9 che sta sopra il 100 per l'8 e addiziona il 3, moltiplica il risultato per 2 e addiziona l'1, risulterà 151 che devi scrivere sopra il $\frac{1\ 3\ 9}{2\ 8\ 100}$, e moltiplica il 151 per il 539, risulterà 81389 che dovresti moltiplicare per il 2 e per il 158 che sono sotto la linea della frazione sotto il 17, e dividere per il 17 e per i denominatori delle altre frazioni. Ma tralascia pure la moltiplicazione del 2 dal momento che è nella frazione davanti al 158 e la moltiplicazione del 2 che è nel 158, ma moltiplica l'81389 solo per la metà di 158, vale a dire per 79. Dal momento che hai omesso di moltiplicare due volte per 2, ometti di dividere per il 4 che è nella linea di frazione davanti al 12. Invero il prodotto di 81389 per 79 è 6429731, una volta diviso il quale per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{2\ 8\ 10\ 10\ 17\ 12}$, risulteranno $\frac{1\ 1\ 8\ 5\ 6\ 8}{2\ 8\ 10\ 10\ 17\ 12}\ 19$ soldi.

(6) Parimenti $\frac{1}{9}\frac{3}{5}\ 11$ rotoli, cioè $\frac{1\ 3\ 11}{9\ 5\ 100}$ di cantare, si vendono per $\frac{1\ 3}{2\ 10}\ 19$ denari: quanto valgono $\frac{1}{10}\frac{1}{9}\frac{3}{4}\ 7$ libre, cioè $\frac{1\ 1\ 3\ 7}{10\ 9\ 4\ 158}$ di cantare? Schematizza il problema e moltiplica l'11 che è sopra il 100 per il 5 e addiziona il 3, moltiplica il risultato per 9 e addiziona il prodotto dell'1 che è sopra il 9 per il 5, risulterà 527 che devi porre sopra il $\frac{1\ 3\ 11}{9\ 5\ 100}$. Parimenti moltiplica il 19 per il 10 e addiziona il 3, moltiplica il risultato per 2 e addiziona l'1, risulterà 387 che devi porre sopra il $\frac{1\ 3}{2\ 10}\ 19$; e poi moltiplica il 7 che è sopra il 158 per il 4, per il 9 e per il 10 e addiziona i prodotti, risulterà 2520, a questo risultato addiziona il prodotto dell'1 che è sopra il 10 per il 9 e per il 4 con il prodotto dell'1 che è sopra il 9 per il 10 e per il 4 e il prodotto del 3 che è sopra il 4 per il 10 e per il 9, risulterà 2866. Poi moltiplica il 387 per il 2866, risulterà 1109142. Dovendo moltiplicare l'1109142 per il 5 e per il 9 e per il 100 che sono nella frazione sotto il 527 e dividere il prodotto per la scomposizione di 527 che è $\frac{1\ 0}{17\ 31}$, e per i restanti numeri che sono sotto le frazioni dei restanti due numeri, si ometta di moltiplicare per 9 e per 100 e si ometta di dividere per il 9 e per il 10 che sono nella frazione sotto il 2866, e per il 10 che è nella frazione sotto il 387. Dunque moltiplicherai l'1109142 solo per 5,

risulterà 5545710 che devi dividere per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{2\ 4\ 158\ 527}$, cioè per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{2\ 8\ 17\ 31\ 79}$, risulterà $\frac{0\ 7\ 10\ 21\ 25}{2\ 8\ 17\ 31\ 79}$ 8 denari.

(7) Parimenti 11 rotoli genovesi valgono ad Alessandria 17 carati: quanto valgono 9 rotoli fiorentini? Poiché gli 11 rotoli e i 9 rotoli non sono dello stesso peso, o trasformi gli 11 rotoli genovesi (p. 98) in rotoli fiorentini o trasformi i 9 rotoli fiorentini in rotoli genovesi, in modo che siano entrambi o fiorentini o genovesi. Ma poiché puoi trasformare più facilmente gli 11 rotoli genovesi in rotoli fiorentini che trasformare i 9 rotoli fiorentini in rotoli genovesi, dal momento che ciascun rotolo genovese equivale a $\frac{1}{6}$ 2 rotoli fiorentini, così se moltiplicherai gli 11 rotoli genovesi per $\frac{1}{6}$2 li trasformerai in $\frac{5}{6}$ 23 rotoli fiorentini. Per questo scrivi ciò: $\frac{5}{6}$ 23 rotoli fiorentini valgono 17 carati, quanto valgono 9 rotoli fiorentini? Moltiplicherai dunque il 17 per il 9 che sono in diagonale e dividerai per $\frac{5}{6}$ 23, risulteranno $\frac{5\ 5}{11\ 13}$ 6 carati.

Sui rotoli fiorentini quando si chiede il prezzo e viceversa.

(1) Parimenti 13 rotoli fiorentini valgono $\frac{3}{4}$ 9 carati, quanto valgono 7 rotoli genovesi? Trasforma in rotoli fiorenti i 7 rotoli genovesi, cioè: moltiplicherai i 7 rotoli genovesi per $\frac{1}{6}$ 2, risulteranno $\frac{1}{6}$ 15 rotoli fiorentini. Dunque devi scrivere: poiché 13 rotoli fiorentini valgono $\frac{3}{4}$9 carati, quanto valgono $\frac{1}{6}$ 15 rotoli fiorentini? Moltiplicherai $\frac{3}{4}$ 9 per $\frac{1}{6}$ 15, poi devi dividere per 13, ma semplificherai di lì $\frac{1}{13}$, dal momento che è possibile, e similmente $\frac{1}{3}$, risulteranno $\frac{3}{8}$ 11 carati.

(2) Parimenti $\frac{1}{4}$ 12 rotoli genovesi sono venduti per $\frac{3}{5}$ 21 carati, quanto valgono $\frac{3}{8}$ 11 rotoli fiorentini? Trasforma in rotoli fiorentini i $\frac{1}{4}$ 12 rotoli genovesi, cioè moltiplica $\frac{1}{4}$ 12 per $\frac{1}{6}$ 2, risulteranno $\frac{13}{24}$ 26 rotoli fiorentini. Poi scrivi: poiché $\frac{13}{24}$ 26 rotoli fiorentini valgono $\frac{3}{5}$ 21 carati, quanto valgono $\frac{3}{8}$ 11 rotoli fiorentini? Moltiplicherai $\frac{3}{5}$21 per $\frac{3}{8}$ 11 e devi dividere per $\frac{13}{24}$ 26, risulteranno $\frac{0\ 0\ 3\ 3\ 3}{4\ 7\ 7\ 10\ 13}$ 9 carati, come si vede in questa figura. (3) Potremmo invero anche fare questo stesso calcolo evitando la moltiplicazione di $\frac{1}{4}$ 12 per $\frac{1}{6}$ 2, che più sopra abbiamo moltiplicato. Vale a dire se si scrivono nello schema del problema i $\frac{3}{8}$ 11 rotoli fiorentini sotto i $\frac{1}{4}$ 12 rotoli genovesi, poi annota a quanti rotoli fiorentini corrisponda un rotolo genovese, per l'appunto $\frac{1}{6}$ 2. Scrivi invero il $\frac{1}{6}$ 2 prima dell'$\frac{1}{4}$ 12, come si vede in figura. (4) E allora il

problema sarà posto in questo modo: poiché $\frac{1}{6}2$ per $\frac{1}{4}$ 12 rotoli fiorentini valgono $\frac{3}{5}$ 21 carati, quanto valgono allora $\frac{3}{8}$ 11 rotoli fiorentini? Moltiplicherai dunque, come abbiamo detto precedentemente, i $\frac{3}{5}$ 21 per i $\frac{3}{8}$ 11, poi dividerai per $\frac{1}{4}$ 12 e per $\frac{1}{6}$ 2. La qual cosa si svolge così, vale a dire: moltiplichi il 2 per il 6 e addizioni l'1 che è sopra il 6, risulterà 13 che devi riportare sopra $\frac{1}{6}$ 2; poi moltiplica il 12 per il 4 e addiziona l'1 che è sopra il 4, risulterà 49 che devi riportare sopra $\frac{1}{4}$ 12. Parimenti moltiplica il 21 per il 5 e addiziona il 3, risulterà 108 che devi riportare sopra $\frac{3}{5}$ 21; e inoltre moltiplica l'11 per l'8 e addiziona il 3, risulterà 91 che devi riportare sopra $\frac{3}{8}$ 11. Poi moltiplica il 108 per il 91 e per le frazioni che sono sotto il 49 e sotto il 13, vale a dire per 4 e per 6, risulterà 235872 che devi dividere per 13 e per 49 e per i numeri che sono lungo le frazioni degli altri due numeri, vale a dire per 5 e per 8, cioè per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{4\ 7\ 7\ 10\ 10\ 13}$, risulteranno $\frac{0\ 0\ 3\ 3\ 3}{4\ 7\ 7\ 10\ 13}$ carati, come più sopra abbiamo trovato.

(5) Oppure schematizza in un altro modo il problema, vale a dire i $\frac{3}{8}$ 11 rotoli fiorentini sotto i $\frac{1}{4}$ 12 rotoli genovesi, e sappi a quale frazione di rotolo genovese corrisponda un rotolo fiorentino, ovviamente a $\frac{6}{13}$ per questa ragione: poiché 1 rotolo genovese corrisponde a $\frac{1}{6}$ 2 rotoli fiorentini, allora 6 rotoli genovesi corrispondono a 13 rotoli fiorentini, quindi un rotolo fiorentino è $\frac{6}{13}$ di rotolo genovese, come abbiamo detto precedentemente. Poni dunque i $\frac{6}{13}$ dei $\frac{3}{8}$ 11 rotoli fiorentini, come più sopra, nel precedente esempio, abbiamo posto $\frac{1}{6}$ 2 davanti a $\frac{1}{4}$ 12 rotoli genovesi, come si vede in questa descrizione. E il problema sarà posto così: $\frac{1}{4}$ 12 rotoli genovesi valgono $\frac{3}{5}$ 21 carati e si chiede quanto valgano $\frac{6}{13}$ di $\frac{3}{8}$ 11 rotoli genovesi. Cosa che devi calcolare così: moltiplicherai $\frac{3}{5}$ 21 per $\frac{3}{8}$ 11 $\frac{6}{13}$ e dividerai per $\frac{1}{4}$ 12. Così: moltiplica il 12 per il 4 e addiziona l'1, risulterà 49 che devi scrivere sopra $\frac{1}{4}$ 12, e per lo stesso motivo scrivi il 108 sopra i $\frac{3}{5}$ 21 e il 91 sopra i $\frac{3}{8}$ 11; poi moltiplica il 108 per i numeri che si oppongono in diagonale, vale a dire per il 91 e per il 6 e per il 4, che sono sotto (p.99) il 49, risulterà similmente 235872 che devi dividere per la scomposizione di 49 e per i denominatori che sono sotto le linee di frazione dei restanti numeri, vale a dire per $\frac{1\ 0\ 0}{5\ 8\ 13}$, che aggregati con la scomposizione del suddetto 49 realizzano similmente $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{4\ 7\ 7\ 10\ 13}$, per il quale devi dividere il 235872, risulteranno $\frac{0\ 0\ 3\ 3\ 3}{4\ 7\ 7\ 10\ 13}$ 9 carati, lo stesso risultato che più sopra abbiamo raggiunto

per due volte. (6) E affinché non s'inficiasse la comprensione di ciò che volevamo dimostrare in questo schema, non abbiamo evitato, semplificando, la fatica del moltiplicare e del dividere, sebbene avremmo potuto semplificare. Ma affinché non si tralasci l'insegnamento di evitare la fatica quando possiamo, mostreremo in che modo bisogni semplificare in questo calcolo. E questo insegnamento è che non dobbiamo mai moltiplicare un numero qualunque per un altro quando il prodotto della loro moltiplicazione dobbiamo poi dividerlo per uno o più numeri simili. Come in questa operazione abbiamo moltiplicato il 108 per il 91 poi per il 6 poi per il 4 che sono sotto le frazioni del 49; poi abbiamo diviso il prodotto per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{4\ 7\ 7\ 10\ 13}$. Avremmo potuto invero, in suddetta moltiplicazione, omettere di moltiplicare per il 91 e per alcuna parte di esso, poi avremmo omesso la divisione per il 7 e per il 13 che sono nella striscia della divisione, dal momento che 7 e 13 equivalgono a 91, perché 7 per 13 dà come risultato 91, e dal momento che si equivalgono sono simili. E questo è quello che diciamo, che non dobbiamo moltiplicare il 91 in suddetta moltiplicazione perché dovremmo poi dividere per $\frac{1\ 0}{7\ 13}$. Resta invero da moltiplicare 108 per 6 e per 4 e si divida soltanto per $\frac{1\ 0\ 0}{4\ 7\ 10}$. Da questi calcoli possiamo ancora semplificare, perché non moltiplicheremo il prodotto di 6 per 108 per il 4 e non lo divideremo per il 4 che sta nella striscia della divisione. Moltiplicheremo, dunque soltanto il 6 per la metà di 108, risulterà 324 che devi dividere solo per $\frac{1\ 0}{5\ 7}$, risulteranno $\frac{4\ 1}{5\ 7}$ carati che sono altrettanti che $\frac{0\ 0\ 3\ 3\ 3}{4\ 7\ 7\ 10\ 13}$ 9.

(6) E che questo risultato sia vero, appuralo così: moltiplica il 3 che sta sopra il 13 per il 10 che sta davanti al 13 sulla linea di frazione e addiziona il 3 che sta sopra il 10, risulterà 33, moltiplicalo per il 7 e addiziona il 3 che sta sopra il 7, risulterà 234, dividilo per $\frac{1\ 0\ 0}{13\ 10\ 7}$, risulterà $\frac{4\ 1}{5\ 7}$. Infatti è più bello dire $\frac{4\ 1}{5\ 7}$ che $\frac{0\ 0\ 3\ 3\ 3}{4\ 7\ 7\ 10\ 13}$. (7) Per questo bisogna sempre applicarsi a semplificare ciò che può essere semplificato, in modo che la fatica sia minore e abbiamo delle frazioni più belle e comprensibili.

Sui rotoli fiorentini quando li si richiede a partire dai genovesi.

(1) Parimenti $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ 13 rotoli fiorentini sono venduti per $\frac{1}{7}\frac{5}{6}$ 9 carati: quanto valgono allora $\frac{1}{9}\frac{3}{8}$ 7 rotoli genovesi? Schematizza il problema in modo che i rotoli siano dello stesso peso, quindi poni $\frac{6}{13}$ prima dei rotoli fiorentini, oppure prima dei rotoli genovesi poni $\frac{1}{6}$ 2 per lo stesso motivo, come più sopra abbiamo esemplificato. In questo schema poniamo dunque i $\frac{6}{13}$ prima dei $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ 13 rotoli fiorentini, come qui si mostra. Poi moltiplicherai il 13 per le sue parti

frazionarie, risulterà 269; poi moltiplicherai il 9 per le sue, risulterà 419. Parimenti moltiplica il 7 per le sue frazioni, risulterà 539. Poi moltiplica il 419 per il 539 che sono in diagonale, moltiplica questo prodotto per le frazioni del numero restante, vale a dire per 4 e per 5 e per 13 e dividi il prodotto che risulterà per il 6 che sta sopra il 13 e per il 269 e per le frazioni dei rimanenti due numeri, vale a dire per 6 e per 7 e per 8 e per 9. Ma semplificherai ciò che puoi semplificare, come abbiamo esemplificato nel problema precedente e otterrai $\frac{0\ 7\ 2\ 2\ 8}{7\ 8\ 9\ 9\ 259}$ 12 carati. (2) E così puoi eseguire i calcoli in qualsiasi problema simile nel quale sia proposta la vendita di rotoli di un certo peso e richiedi il prezzo dei rotoli di qualsiasi altro peso.

(3) Parimenti, affinché si comprenda meglio, $\frac{1\ 4}{2\ 7}$ 14 rotoli di Messina valgono $\frac{1\ 2}{9\ 5}$ 7 tareni e si richiede quanto valgano $\frac{1\ 3}{7\ 4}$ 17 rotoli di Pisa. Innanzitutto bisogna capire a quanti rotoli pisani corrisponda un rotolo di Messina, per l'appunto a $\frac{1}{4}$ 2, in modo che li poniamo così: ponili prima dei rotoli di Messina, come più sopra abbiamo insegnato a porre $\frac{1}{6}$ 2 davanti ai rotoli genovesi, oppure poni $\frac{4}{9}$ prima dei rotoli pisani poiché un rotolo pisano corrisponde a $\frac{4}{9}$ di rotolo di Messina. In questo calcolo, tuttavia, poniamo $\frac{1}{4}$ 2 davanti ai rotoli di Messina, come qui si mostra. Poi moltiplica il 2 per (p. 100) il 4 e addiziona l'1, risulterà 9 che devi porre sopra $\frac{1}{4}$ 2. Poi moltiplica il 14 per la sua parte frazionaria, risulterà 205 che devi porre sopra il 14. Parimenti moltiplica il 7 per le sue, risulterà 338 che devi porre sopra il 7. Parimenti moltiplica il 17 per le sue frazioni, risulterà 501 che devi porre sopra il 17. Poi moltiplica il 338 per il 501 e per le frazioni che sono più sopra, vale a dire per 2 e per 7 e per 4 e dividi per 9 e per la scomposizione di 205 e per le frazioni rimanenti, vale a dire per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{4\ 5\ 7\ 9}$, e semplificherai ciò che potrai semplificare. E come prezzo di quei rotoli otterrai $\frac{2\ 2\ 8\ 23\ 1}{3\ 5\ 9\ 41\ 20}$ 4 tareni.

(4) Terminate quindi le esemplificazioni sulle transazioni economiche delle merci in cui vengono calcolati i prezzi delle merci, ora invero ritorniamo a quelle transazioni economiche in cui si ricerchino le quantità di merci dei prezzi posti, in base alla diversità di quelle transazioni economiche, ritornando per l'appunto alla vendita dei cantari.

Sul cantare quando si vende per le libre e si richiede quanti rotoli si comprino con le libre.

(1) Se un cantare di una merce qualunque si vende per 13 libre e si richiede quanti rotoli uno potrebbe ottenere per 5 libre, scrivi sulla prima linea, come abbiamo detto prima nelle precedenti situazioni, i 100 rotoli, poi di seguito sulla stessa linea poni il prezzo di quei rotoli,

vale a dire 13 libre. Poi poni le 5 libre sotto le 13, dal momento che appartengono alla stessa categoria e sono della stessa quantità, vale a dire appartengono alla categoria del prezzo. Poi, una volta scritti i numeri come qui si mostra, moltiplicherai i numeri che si oppongono in diagonale, vale a dire il 5 per il 100, risulterà 500 che devi dividere per 13, risulteranno $\frac{6}{13}$ 38 rotoli, come si vede in questa figura e tanti rotoli otterrai per le 5 libre scritte. (2) Invero se vorrai calcolare a quante oncie corrispondano i $\frac{6}{13}$ rotoli, moltiplica il 6 che sta sopra il 13, per il 12, dal momento che un rotolo pesa 12 oncie, risulterà 72 che devi dividere per 13, risulteranno $\frac{7}{13}$ 5 oncie. (3) Di questi $\frac{7}{13}$ di un'oncia possiamo nello stesso modo calcolare di un'oncia in base a che frazione siano dell'oncia stessa, sia di rotolo pisano, o di libra, o di qualche altro rotolo. E affinché si comprenda meglio, supponiamo che questi $\frac{7}{13}$ siano i $\frac{7}{13}$ di oncia di libra pisana, per cui se volessimo sapere a quanti denari di cantare corrisponda, poiché un'oncia di quella libra pesa 25 denari di cantare, moltiplicherai il 7 che sta sopra il 13 per il 25 e dividerai per 13. E così devi intendere per qualunque oncia.

Sullo stesso argomento con le frazioni.

(1) Parimenti un cantare vale $\frac{1}{4}$ 16 libre e si richiede quanti rotoli uno potrebbe avere per $\frac{7\ 8}{12\ 20}$ 3 libre. Schematizza il problema in questo modo e moltiplica il 16 per il 4 e addiziona l'1, risulterà 65 che devi scrivere sopra il $\frac{1}{4}$ 16 libre. Poi moltiplica il 3 per la sua frazione, risulterà 823 che devi scrivere sopra il $\frac{7\ 8}{12\ 20}$, e moltiplica il 100 per l'823, moltiplica il risultato per il 4 che sta sotto la linea di frazione del 16 e dividi il prodotto per la scomposizione del 65 che è $\frac{1\ 0}{5\ 13}$ e per i denominatori della frazione più in basso, vale a dire per $\frac{1\ 0}{12\ 20}$, e adatterai il 12 all'inizio della frazione per il fatto che il numero che starà sopra il 12 sarà l'oncia o le oncie. Dunque l'aggregazione di quei numeri sarà $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{5\ 13\ 20\ 12}$. Ma per evitare la fatica di moltiplicare e dividere, si ometta la moltiplicazione del 100 e si ometta la divisione per $\frac{1\ 0}{5\ 20}$ che sono sulla striscia della divisione. Dunque moltiplicherai l'823 per il 4 e lo dividerai soltanto per $\frac{1\ 0}{13\ 12}$, risulteranno $\frac{3\ 1}{13\ 12}$ 21 rotoli. (2) La verifica poi di questo procedimento e di casi simili è la stessa che abbiamo esemplificato più sopra, vale a dire: come avrai proceduto con i numeri, moltiplicando e dividendo, così procederai facendo i calcoli attraverso una prova qualunque. Per questo troverai che la prova de 7 di questo risultato è 2.

Sul centone di pepe in base al metodo descritto precedentemente.

(1) Parimenti un centone di pepe è venduto per 12 libre e 7 soldi e 5 denari, vale a dire per (p.101) $\frac{5\ 7}{12\ 20}$ 12 libre, quante libre di pepe otterrò per 11 soldi e 9 denari? Poiché le $\frac{5\ 7}{12\ 20}$ 12 libre e i $\frac{9}{12}$ 11 soldi appartengono alla stessa categoria, vale a dire quella del prezzo, ma non sono della stessa misura perché 12 sono libre e gli 11 soldi sono soldi, allora o bisogna trasformare in soldi le $\frac{5\ 7}{12\ 20}$ 12 libre, oppure bisogna trasformare in libre i $\frac{9}{12}$ 11 soldi, cioè in frazioni di una libra, in modo che come appartengono alla stessa categoria, così siano anche della stessa misura. Dunque trasformiamo i $\frac{9}{12}$ 11 soldi in frazioni di una libra, che sono $\frac{9\ 11}{12\ 20}$ e li si scriva sotto le $\frac{5\ 7}{12\ 20}$ 12 libre, come si mostra in questa figura. Poi si moltiplichi il 12 per la sua frazione, risulterà 2969. Parimenti moltiplica l'11 per il 12 e addiziona il 9, risulterà 141 e moltiplica il 141 per il 100, poi per il 12 e per il 20 che sono sotto la linea di frazione del 12, e dividi il prodotto per 2969 e per $\frac{1\ 0}{12\ 20}$. Ma per evitare la fatica, non moltiplicare per 12 nè per 20 e non sarà necessario dividere per $\frac{1\ 0}{12\ 20}$. Dunque moltiplicherai il 141 per il 100, risulterà 14100 che dividerai per 2969, oppure - in modo da avere le oncie sopra la linea di frazione, moltiplica 14100 per 12 e dividi per $\frac{1\ 0}{2969\ 12}$, risulteranno $\frac{2936\ 8}{2969\ 12}$ 4 rotoli.

Sul cantare venduto per libre quando si chiedono le merci vendute per denari.

(1) Parimenti un cantare vale $\frac{1}{9}\frac{2}{5}$ 13 libre e si chiede quanto uno otterrebbe per $\frac{1}{4}$ 9 denari, cioè per $\frac{1\ 9\ 0}{4\ 12\ 20}$ di una libra in modo che siano della stessa misura delle $\frac{1}{9}\frac{2}{5}$ 13 libre. Si schematizzi il problema come qui si mostra. Poi moltiplica il 13 per le sue frazioni, risulterà 608. Parimenti moltiplica il 9, che sta sopra il 12, per il 4 e addiziona l'1, risulterà 37. Poi moltiplica il 37 per il 100, poi per il 5, poi per il 9 che stanno sotto le linee di frazione davanti al 13. Poi dividerai il prodotto per la scomposizione di 608, che è $\frac{1\ 0\ 0}{4\ 8\ 19}$, e per $\frac{1\ 0\ 0}{4\ 12\ 20}$, le quali frazioni, aggregate insieme, risultano $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{4\ 8\ 8\ 10\ 19\ 12}$, e otterrai la quantità di merce richiesta.

(2) Oppure, se vorrai semplificare, non moltiplicare il 37 per tutto il 100, ma ometterai un 10 dalla scomposizione del 100, perciò ometti l'$\frac{1}{10}$ che è nella scomposizione della divisione. Dunque moltiplicherai il 37 per il 10 che resta del 100 e per il 5 e il 9 detti precedentemente, risulterà 16650 che devi dividere per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{4\ 8\ 8\ 19\ 12}$, risulterà $\frac{2\ 2\ 0\ 8\ 3}{4\ 8\ 8\ 19\ 12}$.

(3) Parimenti se un centenario si vende per $\frac{1}{8}\,\frac{2}{3}$ 17 soldi e si richiede quanto uno porebbe ottenere della stessa merce per $\frac{1\,3}{7\,4}$ 17 libre, converti i $\frac{1\,2}{8\,3}$ 17 soldi nelle frazioni di una libra, risulterà $\frac{1\;\;2\;\;17}{8\;\;3\;\;20}$ di una libra, e farai questo affinché entrambi i numeri siano della stessa valuta. poi schematizzerai il problema in questo modo e farai i calcoli in base a ciò che è stato detto più sopra, e otterrai, per la richiesta quantità di quella merce $\frac{5\;\;3\;\;30\;\;4}{7\;\;7\;\;61\;\;12}$ 2011.

Regola generale per il centenario.

(1) Vogliamo invero esemplificare una certa regola che si genera dalla semplificazione delle moltiplicazioni e delle divisioni degli stessi numeri che sono posti in simili problemi. E cioè quando si pone che un centenario valga un numero di libre qualsiasi o sue frazioni, ad esempio supponiamo 13 libre, e si richieda quanto pepe uno potrebbe ottenere per un numero di denari a piacere, per esempio 3, moltiplica sempre i denari per 5 e dividili per il prezzo del centenario. Come in questo problema: moltiplica i 3 denari per 5, risulterà 15 che devi dividere per 13, risulterà $\frac{2}{13}$ 1. E tante oncie otterrai per i 7 denari. (2) Poi se in base alla stessa regola si chiedesse quanto egli otterrebbe per 7 soldi, moltiplicherai similmente il 7 per il 5, risulterà 35 che devi dividere similmente per il 13, risulteranno $\frac{8}{13}$ 2 libre. E così devi intendere in tutti i problemi simili.

(3) Parimenti se viceversa chiederai, in base alla stessa regola, quanto valgano le 7 oncie, moltiplicherai il 7 per il 13 e dividerai per 5, risulteranno $\frac{1}{5}$ 18 denari. E se chiederai quanto valgano 7 libre della stessa merce, moltiplicherai similmente il 7 per il 13 e devi dividere per 5, risulteranno $\frac{1}{5}$ 18 soldi, vale a dire 18 soldi e $\frac{2}{5}$ 2 denari. E così farai in casi simili. (p.102)

(4) Parimenti 14 rotoli sono venduti per $\frac{5}{6}$ 5 tareni, quanti rotoli otterrò per $\frac{2}{5}$ 17 tareni? Schematizza il problema in questo modo e moltiplica i numeri che sono in diagonale, vale a dire 14 per $\frac{2}{5}$ 17, poi dividi per $\frac{5}{6}$ 5, risulterà $\frac{3\;\;0\;\;9}{5\;\;5\;\;12}$ 41.

(5) Parimenti $\frac{1}{2}$ 17 rotoli sono venduti per $\frac{1}{3}$ 11 tareni, quanto otterrò degli stessi rotoli per $\frac{1}{4}$ 7 grani, cioè per $\frac{1\;\;7}{4\;\;20}$ di un tareno in modo che siano trasformati nella stessa misura degli $\frac{1}{3}$ 11 tareni scritti precedentemente? Schematizza il problema così. E moltiplicherai $\frac{1}{2}$ 17 per $\frac{1\;\;7}{4\;\;20}$ e devi dividere per $\frac{1}{3}$ 11, e fai in modo da ottenere il 12 all'inizio della linea di frazione per le oncie, e risulteranno $\frac{7\;\;1\;\;12\;\;6}{8\;\;10\;\;17\;\;12}$ oncie.

Sui rotoli venduti per grani quando si chiedono le merci per tareni.

(1) Parimenti $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ 3 rotoli sono venduti per $\frac{1\ 2}{6\ 5}$ 13 grani, quanti rotoli otterrò per $\frac{1\ 2}{8\ 7}$ 11 tareni. Trasforma i $\frac{1\ 2}{6\ 5}$ 13 grani nelle frazioni di un tareno, risulterà $\frac{1\ 2\ 13}{6\ 5\ 20}$. Poi schematizza il problema come si vede più in basso e moltiplicherai $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ 3 per $\frac{1\ 2}{8\ 7}$ 11 e dividerai per $\frac{1\ 2\ 13}{6\ 5\ 20}$, risulteranno $\frac{3\ 3\ 12\ 3}{7\ 11\ 37\ 12}$ 60 rotoli.

(2) Parimenti $\frac{3}{4}$ di un rotolo è venduto per $\frac{4}{5}$ di un bizante, quanto otterrò per $\frac{6}{7}$ di un bizante? Schematizza il problema e moltiplica il 3 che sta sopra il 4 per il 6 che sta sopra il 7, risulterà 18 che devi moltiplicare per 5 che sta sotto la linea di frazione superiore, risulterà 90 che devi dividere per il 4 che sta sopra il 5 e per il 4 e per il 7 che stanno sotto le altre linee di frazione, vale a dire per $\frac{1\ 0\ 0}{2\ 7\ 8}$, risulterà $\frac{3\ 6}{7\ 8}$ di un rotolo.

Sulle frazioni di rotolo.

(1) Parimenti $\frac{1\ 2}{4\ 3}$ di un rotolo è venduto per $\frac{1\ 1\ 2}{7\ 6\ 5}$ di un bizante, quanto otterrò in rotoli per $\frac{1\ 4\ 7}{8\ 9\ 10}$ di un bizante? Schematizza il problema così e moltiplica $\frac{1\ 2}{4\ 3}$ per $\frac{1\ 4\ 7}{8\ 9\ 10}$, e dividi per $\frac{1\ 1\ 2}{7\ 6\ 5}$, cosa che avviene così: prendi innanzitutto il $\frac{1\ 2}{4\ 3}$, e moltiplicherai il 2 che sta sopra il 3 per il 4 e l'1 che sta sopra il 4 per il 3, e addiziona insieme i prodotti, risulterà 11 che devi porre sopra $\frac{1\ 2}{4\ 3}$. Poi calcolerai a quale numero intero corrisponda $\frac{1\ 1\ 2}{7\ 6\ 5}$, risulterà 149 che devi porre sopra $\frac{1\ 1\ 2}{7\ 6\ 5}$, poi calcola il numero di $\frac{1\ 4\ 7}{8\ 9\ 10}$, risulterà 537. Poi moltiplicherai l'11 per il 537, il cui prodotto moltiplicherai per le parti frazionarie che sono lungo le linee di frazione sotto il 149, vale a dire per 5 e per 6 e per 7. E dividerai il loro prodotto per 149 e per le frazioni che sono sotto l'11 e sotto il 537, cioè per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{8\ 9\ 10\ 149\ 12}$, semplificherai ciò che potrai semplificare, risulterà $\frac{3\ 8\ 83\ 11}{4\ 10\ 149\ 12}$.

Sui rotoli genovesi e fiorentini.

(1) Parimenti $\frac{1\ 2}{6\ 5}$ 13 rotoli genovesi si vendono per $\frac{1\ 1}{7\ 5}$ 3 bizanti, quanti rotoli fiorentini otterrò per $\frac{1}{4}$ 2 bizanti? Poiché la vendita è di rotoli genovesi e la richiesta è di rotoli fiorentini, allora bisogna trasformare in rotoli fiorentini i $\frac{1\ 2}{6\ 5}$ rotoli genovesi, cioè: li moltiplichi per $\frac{1}{6}$ 2 e il prodotto che ne risulta lo poni nello schema del problema come vendita. E affinché evitiamo

la fatica della suddetta moltiplicazione, poni i $\frac{1}{6}2$ davanti ai $\frac{1\ 2}{6\ 5}$ rotoli, come più sopra abbiamo insegnato a fare in casi simili, e schematizza il problema così. Poi moltiplica il 2 per il 6 e addiziona l'1, risulterà 13 che devi porre sopra $\frac{1}{6}2$. Quindi moltiplica il 13 per le sue frazioni, risulterà 407; poi moltiplica il 3 per le sue frazioni, risulterà 117. Dopo ciò moltiplica il 2 per il 4 e addiziona l'1, risulterà 9 che devi porre sopra $\frac{1}{4}2$. Poi moltiplica il 9 per i numeri che sono in diagonale rispetto ad esso, vale a dire per 13 e per 407, risulterà 47619 che devi moltiplicare per le parti frazionarie che sono sotto il 117, vale a dire per 5 e per 7 e dividi il prodotto per la scomposizione di 117, che è $\frac{1\ 0}{9\ 13}$ e per i numeri che sono sotto le frazioni dei numeri che sono in diagonale rispetto ad esso, vale a dire per il 6 che sta sotto il 13 e per il 5 e per il 6 che stanno sotto il 407 e per il 4 che sta sotto il 9. Ma se vorrai evitare la fatica del moltiplicare e del dividere, considera quando abbiamo detto 'moltiplica il 9 per il 13' e tralascia la loro moltiplicazione, e poiché non li moltiplicherai, non dividerai nemmeno per 9 e per 13 che sono sotto la linea di frazione della divisione. Infatti se nella divisione, per la quale dovrai dividere tutto questo, potrai racimolare i denominatori che ti servono all'inizio della linea di frazione, ti applicherai a prenderli, e ponili all'inizio della linea di frazione.
(7) Per esempio, ci occorre avere $\frac{1\ 0}{12\ 20}$ per i soldi e i denari, e dobbiamo dividere il risultato per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{2\ 6\ 8\ 9\ 10}$. Mescoliamo allora $\frac{1}{2}$ con $\frac{1}{10}$, e trasformiamoli in $\frac{1}{20}$. Poi mescoliamo $\frac{1}{6}$ con $\frac{1}{8}$ e trasformiamoli in $\frac{1\ 0}{4\ 12}$ e così otterremo nella frazione $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{4\ 9\ 12\ 20}$, che è altrettanto che $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{2\ 6\ 8\ 9\ 10}$.
(8) E ancora, se nella divisione non avrai nulla di ciò che ti sarebbe necessario all'inizio della frazione, moltiplicherai tutto il risultato per ciò che ti occorrerebbe avere all'inizio della frazione, e aggiungerai in più alla divisione ciò che dovresti avere all'inizio della frazione. (9) Per esempio, supponiamo di dover dividere 321 per $\frac{1\ 0}{7\ 11}$ e che ci occorre avere $\frac{1\ 0}{3\ 8}$ all'inizio della frazione [p.109] per i carati. Moltiplicherai 321 per 3 e per 8, cioè per 24, e questo significa trasformare in carati i 321 bizanti, poi dividerai per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{7\ 11\ 3\ 8}$. E così devi intendere per il restanti casi e noi, nei paragrafi seguenti, li spiegheremo uno per uno.

Sulla marca d'argento.
(1) Se una marca d'argento, cioè 8 oncie, si vende per 5 libre e si chiede quanto valgano 2 oncie, scrivi nello schema oncie sotto oncie, vale a dire il 2 sotto l'8 come qui si mostra, e moltiplicherai il 2 per il 5 che si oppongono in diagonale, risulterà 10 che devi dividere per 8, risulterà $\frac{1}{4}1$ libre, cioè 25 soldi, come si mostra nello schema. O, altrimenti, poiché le 2 oncie

sono $\frac{1}{4}$ di una marca, vale a dire di 8 oncie, calcola $\frac{1}{4}$ del prezzo della marca, vale a dire delle 5 libre, risulteranno 25 soldi, come abbiamo detto precedentemente.

Sullo stesso argomento.

(1) E se sulla base degli stessi elementi chiederai quanto argento potresti ottenere per 2 libre, scrivi prezzo sotto prezzo, vale a dire il 2 sotto il 5, e moltiplicherai il 2 per l'8, risulterà 16. Poi dividerai per 5, risulteranno $\frac{1}{5}$ 3 oncie, cioè 3 oncie e 5 denari di cantare, poiché l'oncia della marca e della libra è la stessa.

(2) Parimenti una marca si vende per 4 libre e 13 soldi, cioè per $\frac{13}{20}$ 4 libre, quanto vangono $\frac{3}{4}$ 3 oncie? Schematizza il problema come qui si mostra e moltiplica il $\frac{3}{4}$ 3 per il $\frac{13}{20}$ 4 libre, e dividi per 8, cioè moltiplica 15 per 93, che danno come risultato 1395, e dividi per $\frac{1\ 0\ 0}{4\ 8\ 20}$. Ma per avere il 12 dopo il 20 sulla frazione, mescola $\frac{1}{4}$, che è nella divisione, con $\frac{1}{3}$ e otterrai il 12. Poi moltiplica 1395 per 3 e dividi il risultato per $\frac{1\ 0\ 0}{8\ 12\ 20}$, e poni il 3 sopra l'8 in modo da tenerlo meglio a mente per la prova, risulterà $\frac{1\ 7\ 3}{8\ 12\ 20}$ 2 libre.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti una marca d'argento si vende per $\frac{5\ 7}{12\ 20}$ 4 libre, e si chiede quanto valgano 5 oncie e 11 denari di cantare, cioè $\frac{11}{25}$ 5 oncie. Schematizza il problema così e moltiplica il 4 per la sua frazione, risulteranno 1049 denari che devi porre sopra, poi moltiplicherai 5 oncie per 25 e addizionerai 11, risulteranno 136 denari di cantare. Poi moltiplicherai 136 per 1049, e dividerai per 8 e per tutte le parti frazionarie e disporrai $\frac{1\ 0}{12\ 20}$ all'inizio della frazione perché il numero che avanza dalla frazione nella quale dobbiamo porre il risultato è il numero delle libre. Risulteranno $\frac{2\ 3\ 5\ 19}{10\ 10\ 12\ 20}$ 2 libre.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti una marca di argento si vende per $\frac{5\ 7}{12\ 20}$ 4 libre e si chiede quanto valgano 5 oncie e 11 denari di cantare, cioè $\frac{11}{25}$ 5 oncie. Schematizza il problema così e moltiplica il 4 per la sua parte frazionaria, risulteranno 1049 denari che devi porre sopra. Poi moltiplicherai le 5 oncie per 25 e addizionerai 11, risulteranno 136 denari di cantare. Poi moltiplicherai 136 per

1049 e dividerai per 8 e per tutte le parti frazionarie e disporrai $\frac{1\ \ 0}{12\ \ 20}$ all'inizio della frazione, poiché il numero che risulta, nel cui riquadro dobbiamo porre il risultato, è il numero delle libre, risulteranno $\frac{3\ \ 0\ \ 3\ \ 10\ \ 7}{4\ \ 10\ \ 10\ \ 12\ \ 20}$ 2 libre.

Sullo stesso argomento.

(1) Se una marca di argento si vende per 5 libre, 7 soldi e 9 denari, cioè per $\frac{9\ \ 7}{12\ \ 20}$ 5 libre, e si chiede quanto valgano 3 oncie e 13 denari di cantare e 5 carrube, cioè $\frac{5\ \ 13}{6\ \ 25}$ 3 oncie, schematizza il problema come qui si vede. Poi moltiplicherai $\frac{5\ \ 13}{6\ \ 25}$ 3 per $\frac{9\ \ 7}{12\ \ 20}$ 5 e dividerai per 8, risulteranno $\frac{3\ \ 0\ \ 3\ \ 10\ \ 7}{4\ \ 10\ \ 10\ \ 12\ \ 20}$ 2 libre.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti una marca si vende per $\frac{1}{9}\frac{2}{5}$ 5 libre e si chiede quanto valgano 7 denari di cantare e 1 carruba, cioè $\frac{1\ \ 7}{6\ \ 25}$ di un'oncia, schematizza il problema così e moltiplicherai $\frac{1\ \ 7}{6\ \ 25}$ per $\frac{1}{9}\frac{2}{5}$ 5 e dividerai per 8, risulterà $\frac{4\ \ 2\ \ 3\ \ 11\ \ 3}{5\ \ 5\ \ 9\ \ 12\ \ 20}$ di una libra.

(2) Parimenti $\frac{1}{4}$ 7 marche si vende per $\frac{1}{3}$ 31 libre, quanto valgono allora $\frac{2}{5}$ 9 marche? Schematizza il problema così. Poi moltiplicherai il 7 per il 4 e addizionerai l'1, risulterà 29. Poi moltiplicherai il 31 per il 3 e addizionerai l'1, risulterà 94. Poi moltiplicherai il 9 per il 5 e addizionerai il 2, risulterà 47. Poi moltiplicherai il 47 per il 94, poi per il 4 che sta sotto il 29, risulterà 17672, e dividerai per 29 e per le altre frazioni che stanno nella divisione, vale a dire per 3 e per 5. Ma poiché sappiamo che il quoziente sarà un'insieme di libre dal momento che la posizione in cui dobbiamo scrivere quel risultato è sotto le libre, vale a dire sotto $\frac{1}{3}$ 31, per questo ci è necessario avere $\frac{1\ \ 0}{12\ \ 20}$ all'inizio della frazione in modo che abbiamo i soldi e i denari dopo le libre. Ma poiché di $\frac{1}{12}$ non abbiamo altro che $\frac{1}{3}$, sappiamo che ci manca per esso $\frac{1}{4}$; e poiché di $\frac{1}{20}$ non abbiamo altro che $\frac{1}{5}$, sappiamo che ci manca per esso un altro $\frac{1}{4}$. Dunque ci manca un sedicesimo tra l'uno e l'altro che devi porre sopra il 29, poi moltiplicherai 17672 per 16 e dividerai il risultato per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{29\ \ 12\ \ 20}$, risulteranno $\frac{2\ \ 6\ \ 12}{29\ \ 12\ \ 20}$ 40 libre.

Sullo stesso argomento.

(1) Invero, se sulla base degli stessi elementi chiederai quanto argento uno potrebbe ottenere per $\frac{2}{5}$ 9 libre, schematizza il problema così e moltiplicherai il 47 per il 29, poi per il 3 e dividerai per la scomposizione del 94, cioè per $\frac{1\ 0}{2\ 47}$, e per le altre parti frazionarie, vale a dire per 4 e per 5. Soltanto ometterai di moltiplicare e dividere per 47. Dunque moltiplicherai il 29 soltanto per il 3 che sta sotto la linea di frazione davanti al 31, risulterà 87 che dividerai per $\frac{1\ 0}{4\ 5}$ e per l'$\frac{1}{2}$ che resta dalla scomposizione di 94, cioè per $\frac{1\ 0}{5\ 8}$. Ma sappiamo che ciò che risulterà dalla divisione sarà un insieme di marche per il fatto che la posizione in cui dobbiamo porre il risultato è sotto le marche, vale a dire sotto $\frac{1}{4}$ 7. Per cui è necessario che noi abbiamo all'inizio della frazione $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{6\ 5\ 5\ 8}$ per le oncie, i denari e le carrube: di questi abbiamo nella divisione $\frac{1\ 0}{5\ 8}$, dunque ci manca $\frac{1\ 0}{6\ 5}$, cioè 30. Per questo 30 dobbiamo moltiplicare l'87 in modo da ottenere $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{6\ 5\ 5\ 8}$ nella divisione. Ma poiché nella divisione scritta precedentemente le parti frazionarie sono soltanto frazioni di marca, vale a dire $\frac{1\ 0}{5\ 8}$, non serve altro che dividere l'87 per $\frac{1\ 0}{5\ 8}$, risulterà $\frac{2\ 1}{5\ 8}$ 2 marche, cioè 2 marche e un'oncia e 10 denari di cantare.

Sull'oncia d'oro pisana.

(1) Se un'oncia pisana d'oro o di tareni, che pesa 25 denari di cantare, si vende per 4 libre e si chiede quanto valgano 17 denari di cantare dello stesso oro, scrivi nello schema il 17 sotto il 25 dal momento che appartengono alla stessa categoria, cioè all'oro, e sono della stessa misura, cioè denari. Poi moltiplicherai le 4 libre e il 17 che si oppongono in diagonale, risulteranno 68 libre. Moltiplica il 68 per il 48 che ci manca da $\frac{1\ 0}{12\ 20}$, perché di essi non abbiamo altro che $\frac{1}{5}$ e dividerai il prodotto per $\frac{1\ 0\ 0}{5\ 12\ 20}$, risulteranno $\frac{4\ 4\ 14}{5\ 12\ 20}$ 2 libre, come si mostra in questo schema.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti la stessa oncia si vende per $\frac{3}{20}$ 4 libre e si chiede quanto valgano 9 denari e 5 carrube, cioè $\frac{5}{6}$ 9 denari. Schematizza il problema, poi moltiplica $\frac{3}{20}$ 4 per $\frac{5}{6}$ 9 e dividi per 25, cioè moltiplica 83 per 59, risulterà 4897 che devi dividere per il 25 e per le parti frazionarie, cioè per 6 e per 20. Ma affinché tu abbia $\frac{1\ 0}{12\ 20}$ nella divisione, moltiplica il 4897 per il 2 che ci manca da $\frac{1}{12}$, dal momento che abbiamo $\frac{1}{6}$ in tale divisione, risulterà 9794 che devi dividere

per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{5\ 5\ 12\ 20}$, risulteranno $\frac{4\ 3\ 7\ 12}{5\ 5\ 12\ 20}$ 1 libra, cioè 32 soldi e $\frac{4\ 3}{5\ 5}$ 7 denari, come si mostra nello schema.

(2) Parimenti la stessa oncia si vende per $\frac{5\ 7}{12\ 20}$ 4 libre, quanto valgono allora 11 denari e 4 carrube e 3 grani, cioè $\frac{3\ 4}{4\ 6}$ 11 denari? Schematizza il problema come qui si mostra. Poi moltiplicherai $\frac{5\ 7}{12\ 20}$ 4 per $\frac{3\ 4}{4\ 6}$ 11 e dividerai per 25, risulteranno $\frac{5\ 7\ 7\ 2\ 1}{6\ 10\ 10\ 12\ 20}$ 2 libre come si mostra nello schema.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti la stessa oncia si vende per $\frac{1}{3}$ 4 libre e si chiede quanto valgano 13 oncie e 14 denari e 5 carrube e 3 grani, cioè $\frac{3\ 5\ 14}{4\ 6\ 25}$ 13 oncie. Dal momento che si richiede in questo problema il prezzo delle oncie, dobbiamo scrivere 1 per l'oncia in vendita, come qui si mostra. Poi moltiplicherai $\frac{1}{3}$ 4 per $\frac{3\ 5\ 14}{4\ 6\ 25}$ 13 e dividerai per 1, risulteranno $\frac{1\ 1\ 6\ 18}{3\ 5\ 12\ 20}$ 58 libre.[p.111]

(2) Parimenti un'oncia si vende per $\frac{9}{20}$ 4 libre, e si chiede quanto della stessa oncia uno potrebbe ottenere per 3 libre. Schematizza il problema così. Poi moltiplicherai il 3 per il 25, risulterà 75 che devi dividere per $\frac{9}{20}$ 4. Cioè moltiplicherai il 75 per il 20 della frazione, risulta 1500 e dividerai per 89, risulteranno $\frac{76}{89}$ 16 denari di cantare. (3) Se vorrai trasformare questi $\frac{76}{89}$ in carrube, moltiplica il 76 per il numero di carrube di un denaro, vale a dire per 6, risulterà 456 che devi dividere per 89, risulteranno $\frac{11}{89}$ 5 carrube. (4) Invero, se vorrai fare questa trasformazione in base a un insegnamento migliore, moltiplica il 1500 per il 6 delle carrube, poi per il 4 dei grani, risulterà 36000 che devi dividere per $\frac{1\ 0\ 0}{89\ 4\ 6}$, risulteranno $\frac{44\ 0\ 5}{89\ 4\ 6}$ 16 denari di cantare, come si mostra nello schema.

Sullo stesso argomento.

(1) Invero se sulla base degli stessi elementi chiederai quanto potresti ottenere per 3 soldi, trasforma in soldi le $\frac{9}{20}$ 4 libre, risulteranno 89 soldi sotto i quali devi porre i 3 soldi, nello schema. Poi moltiplicherai il 3 per il 25, risulterà 75 che moltiplicherai per 2 in modo da avere le carrubbe e i grani nella divisione, e dividerai il prodotto per $\frac{1\ 0\ 0}{89\ 4\ 6}$, risulterà $\frac{20\ 0\ 5}{89\ 4\ 6}$, cioè 5 carrube e $\frac{20}{89}$ di un grano, come si mostra nello schema.

(2) Un tale vuole comprare argento misto con stagno, volgarmente detto 'falso argento'. Dal momento che non sa quanto argento puro ci sia nelle libre di quella lega d'argento, ha preso di esso un granulo - il cui peso è 5 carrube e $\frac{1}{2}$ 2 grani, cioè $\frac{5}{8}$ 5 carrube - e lo ha posto sopra il fuoco in modo da separare l'argento dallo stagno. Avendo fatto ciò ha trovato di lì 2 carrube e $\frac{1}{2}$ 2 grani, cioè $\frac{5}{8}$ 2 carrube di puro argento. Si chiede quanto argento puro ci sia nelle libre di quella lega d'argento.

(3) Innanzitutto bisogna notare che poiché le $\frac{5}{8}$ 5 carrube sono della stessa misura delle $\frac{5}{8}$ 2, allora come nelle $\frac{5}{8}$ 5 carrube di quella lega d'argento ci sono $\frac{5}{8}$ 2 carrube di puro argento, così in $\frac{5}{8}$ 5 denari di lega d'argento ci saranno $\frac{5}{8}$ 2 denari di puro argento. E in $\frac{5}{8}$ 5 oncie di lega, ci saranno $\frac{5}{8}$ 2 oncie di puro argento, similmente anche in $\frac{5}{8}$ 5 libre di lega ci saranno $\frac{5}{8}$ 2 libre di puro argento. (4) Per questo, poiché in questo problema si chiede delle libre, vale a dire delle 12 oncie, poni nello schema che nelle $\frac{5}{8}$ 5 oncie di lega d'argento ci sono $\frac{5}{8}$ 2 oncie di puro argento. Poi scrivi le 12 oncie sotto le $\frac{5}{8}$ 5 oncie, cioè la quantità di lega d'argento sotto la quantità di lega d'argento, come qui si mostra. Poi moltiplicherai $\frac{5}{8}$ 2 per 12 e dividerai per $\frac{5}{8}$ 5 e semplificherai ciò che di lì può essere semplificato, risulteranno $\frac{3}{5}$ 5 oncie, e altrettanto argento puro c'era nella suddetta libra.

(5) E sappi che attraverso questa dottrina puoi capire quanto argento puro ci sarà in qualunque quantità di bolsonaglia: qualora tu sappia quanto argento ci sia in una piccola quantità di quella bolsonaglia o in un'oncia, lo saprai anche nelle libre o in qualunque altra quantità.

Parte terza dell'ottavo capitolo. La vendita delle canne e innanzitutto della canna pisane.

(1) La canna pisana è di 10 palmi o 4 braccia. Invece la canna genovese, come è stato detto, è di 9 palmi. Invece la canna di Provenza e siciliana e siriana e costantinopolitana sono della stessa misura vale a dire 8 palmi. Noi parleremo prima della vendita della canna pisana.

Sulla canna.

(1) Se una canna pisana - che corrisponde a 4 braccia - di un panno qualunque si vende per 7 soldi e si richiede quanto valga 1 braccio, schematizza il problema come qui si mostra. Moltiplica dunque il 7 per l'1 e dividi per il 4, risulteranno $\frac{3}{4}$ 1 soldi, cioè 21 denari. (2) Invero se chiederai il prezzo di un palmo sulla base degli stessi elementi, scrivi nello schema i palmi

di canna, vale a dire 10, come or ora abbiamo scritto 4 braccia per 1 canna. (3) E devi tenere sempre in conto questo: cioè che [p.112] come nello schema scrivi merce simile sotto merce simile, così devi scrivere unità di misura simile sotto simile unità di misura, e simile peso sotto simile peso, cioè canne sotto canne e braccia sotto braccia e palmi sotto palmi e cantari sotto cantari e rotoli sotto rotoli, e così intendi per gli altri.

(4) Parimenti una canna si vende per 46 soldi e 5 denari, cioè per $\frac{5}{12}$ 46 soldi, quanto valgono allora 3 braccia? Moltiplicherai il 46 per il 12 e addizionerai il 5, risulteranno 557 denari che moltiplicherai per 3 e dividerai per il 4 e per il 12 che sono sotto la linea di frazione, cioè per $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 12}$, risulteranno $\frac{3\ \ 9}{4\ \ 12}$ 34 soldi.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti una canna si vende per $\frac{9}{20}$ 5 libre, e si chiede quanto valgano $\frac{1}{4}\frac{1}{2}$ 2 braccia, cioè $\frac{3}{4}$ 2 braccia. Schematizza il problema come qui si mostra. Poi moltiplica $\frac{3}{4}$ 2 per $\frac{9}{20}$ 5 e dividi per 4, cioè moltiplicherai l'11 per il 109, risulterà 1199 che devi dividere per il 4 delle braccia in vendita e per le parti frazionarie degli altri due numeri, vale a dire per 4 e per 20. Ma dal momento che devi avere $\frac{1}{12}$ dopo $\frac{1}{20}$ lungo la linea della divisione, moltiplicherai 1199 per 3, risulterà 3597 che dividerai per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{4\ \ 12\ \ 20}$, risulteranno $\frac{1\ \ 11\ \ 14}{4\ \ 12\ \ 20}$ 3 libre.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti la stessa canna si vende per $\frac{7\ \ 9}{12\ \ 20}$ 5 libre e si richiede quanto valgano $\frac{1}{8}\frac{1}{4}$ 3 braccia, cioè $\frac{3}{8}$ 3 braccia. Schematizza il problema e moltiplicherai il 5 per la sua frazione, risulterà 1315. Parimenti moltiplicherai il 3 per la sua frazione, risulterà 27 che moltiplicherai per 1315 e dividerai per la quantità di merce in vendita, vale a dire per le 4 braccia, e per tutte le parti frazionarie. Risulteranno $\frac{1\ \ 4\ \ 5\ \ 12}{4\ \ 8\ \ 12\ \ 20}$ 4 libre.

(2) Parimenti una canna si vende per $\frac{7\ \ 9}{12\ \ 20}$ 5 libre e si chiede quanto valgano 11 canne e $\frac{1}{8}\frac{1}{2}$ 3 braccia, cioè $\frac{5\ \ 3}{8\ \ 4}$ 11 canne. E per dirlo con più eleganza, scriveremo $\frac{29}{32}$ 11 canne. Poiché in questo problema si chiede il prezzo delle canne o si trasformano le canne in bracci o le 4 braccia in una canna. In questo problema tuttavia scriviamo 4 braccia per la canna in vendita, come qui si mostra, poi trasforma in braccia le 11 canne e le $\frac{1}{8}\frac{1}{2}$ 3 braccia, e risulteranno $\frac{5}{8}$ 47

braccia che devi scrivere nello schema sotto le 4 braccia. Poi moltiplicherai $\frac{5}{8}47$ per $\frac{7\ 9}{12\ 20}5$ libre e dividerai per 4, risulteranno $\frac{3\ 5\ 8\ 4}{4\ 8\ 12\ 20}65$ libre come si mostra nello schema.

Sulla canna genovese.

(1) Parimenti la canna genovese, che è di 9 palmi, si vende per 11 soldi e 9 denari, cioè per $\frac{3}{4}11$ soldi, e si chiede quanto valgano $\frac{1}{2}2$ palmi. Schematizza il problema, come qui si mostra. Poi moltiplicherai $\frac{1}{2}2$ per $\frac{3}{4}11$ che si oppongono tra loro in diagonale e dividerai per 9, risulteranno $\frac{1\ 3}{6\ 12}3$ soldi. (2) E sappi che quanti soldi vale la stessa canna, altrettanti denari con altrettanti terzi vale il palmo.

Sulla canna provenzale.

(1) La canna provenzale, che è di 8 palmi, si vende per $\frac{7\ 5}{12\ 20}3$ libre e si richiede quanto valgano $\frac{1}{9}\frac{3}{4}3$ palmi. Schematizza il problema e moltiplicherai $\frac{1}{9}\frac{3}{4}3$ per $\frac{7\ 5}{12\ 20}3$, poi dividerai per 8, disponendo $\frac{1\ 0}{12\ 20}$ all'inizio della frazione della divisione. Poiché la posizione in cui bisogna porre il risultato è sotto le libre, vale a dire sotto $\frac{7\ 5}{12\ 20}3$, risulterà $\frac{1\ 4\ 7\ 7\ 11}{4\ 8\ 9\ 12\ 20}1$ libra. (2) E sappi che quanti soldi varrà questa canna tanti denari con altrettante frazioni di denaro varranno i palmi. Per esempio, se una canna varrà 14 soldi, un palmo varrà 14 denari con altrettanti oboli, cioè 21 denari.

Sulla canna siciliana.

(1) Una canna siciliana, la cui lunghezza è di 8 palmi, si vende per 19 tareni e si chiede quanto [p.113] valgano 2 palmi. Schematizza il problema, come qui si mostra. Poi moltiplicherai il 2 per il 19, risulterà 38 che dividerai per 8, risulterà $\frac{3}{4}4$ tareni. (2) O altrimenti, poiché 2 palmi sono la quarta parte di una canna, vale a dire di 8 palmi, calcola un quarto dei 19 tareni, risulterà $\frac{3}{4}4$ tareni, come abbiamo detto precedentemente.

Sullo stesso argomento.

(1) E ancora, la stessa canna si vende per 23 tareni e 7 grani, cioè per $\frac{7}{20}$ 23 tareni, e si chiede quanto valgano $\frac{1}{2}$ 3 palmi. Schematizza il problema. Poi moltiplicherai $\frac{1}{2}$ 3 per $\frac{7}{20}$ 23, e dividerai il prodotto per 8, risulterà $\frac{1\ 2\ 4}{2\ 8\ 20}$ 10 tareni, cioè 10 tareni e $\frac{1\ 2}{2\ 8}$ 4 grani.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti la stessa canna si vende per $\frac{1}{4}$ 25 tareni e si chiede quanto valgano 9 canne e $\frac{1}{4}$ 5 palmi, cioè $\frac{1\ 5}{4\ 8}$ 9 canne. Schematizza il problema così, poi moltiplica il 25 per la sua frazione, risulterà 101; poi moltiplica il 9 per la sua frazione, risulterà 309. Quindi moltiplica 101 per 309, risulterà 31209 che devi dividere per 1 e per le parti frazionarie, cioè per $\frac{1\ 0\ 0}{4\ 4\ 8}$. Ma poiché la posizione in cui deve essere posto il risultato della divisione è sotto i tareni, vale a dire sotto $\frac{1}{4}$ 25, dobbiamo avere $\frac{1}{20}$ all'inizio della frazione per i grani. Dal momento che non possiamo ricavare $\frac{1}{20}$ nella divisione scritta precedentemente, vale a dire in $\frac{1\ 0\ 0}{4\ 4\ 8}$, perché ci manca $\frac{1}{5}$ per $\frac{1}{20}$, per questo scrivi nello schema il 5 sopra l'1 per tenerlo meglio a mente quando farai la verifica. Poi moltiplicherai 31209 per 5 e dividi per $\frac{1\ 0\ 0}{4\ 8\ 20}$, risulteranno $\frac{1\ 3\ 16}{4\ 8\ 20}$ 243 tareni, cioè 243 tareni e $\frac{1\ 3}{4\ 8}$ 16 grani.

Sulla canna barbara.

(1) La canna barbara, che è similmente di 8 palmi, si vende per 4 bizanti e 7 miliari, cioè per $\frac{7}{10}$ 4 bizanti, e si richiede quanto valgano $\frac{1}{4}$ 2 palmi. Schematizza il problema così. Poi moltiplicherai $\frac{1}{4}$ 2 per $\frac{7}{10}$ 4 e dividerai per 8, risulteranno $\frac{3\ 1\ 3}{4\ 8\ 10}$ 1 bizanti, come si mostra nello schema, cioè 1 bizante e $\frac{3\ 1}{4\ 8}$ 3 miliari.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti la stessa canna si vende per $\frac{3}{4}$ 5 bizanti e si chiede quanto valgano $\frac{1}{2}$ 11 canne. Schematizza il problema così e moltiplica il 5 per il 4 e addiziona il 2, risulterà 23 che devi porre sopra $\frac{3}{4}$ 5 bizanti. Poi moltiplicherai di nuovo l'11 per la sua parte frazionaria, risulterà 23, poi moltiplicherai 23 per 23 risulterà 529 che devi dividere per le parti frazionarie, vale a dire per $\frac{1\ 0}{2\ 4}$, cioè per 8 e per 1, la cui divisione non dà alcun risultato e che non deve essere

calcolata, risulterà $\frac{1}{8}$ 66 bizanti. (2) Se vorrai trasformare in miliari questo $\frac{1}{8}$, moltiplica l'1 che è sopra l'8 per 10 poiché 1 bizante corrisponde a 10 miliari, risulterà 10 che devi dividere per 8, risulterà $\frac{1}{4}$ 1 miliari. (3) O altrimenti, poiché il riquadro dello schema nel quale bisogna porre il risultato è sotto i bizanti barbari, ci occorre avere all'inizio della frazione $\frac{1}{10}$ per i miliari. Per questo moltiplica 529 per 10, cioè poni uno 0 dopo il 529, risulterà 5290 che devi dividere per $\frac{1\ \ 0}{8\ \ 10}$, risulterà $\frac{1\ \ 1}{4\ \ 10}$ 6, come sopra, così come si mostra nello schema. (4) E in base a ciò che abbiamo detto per la canna barbara puoi intendere per tutte le altre merci che in tale regione si vendono per tali bizanti.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti la stessa canna si vende per 4 bizanti e 13 carati, cioè per $\frac{13}{24}$ 4 bizanti, e si richiede quanto valgano 7 canne e 3 palmi cioè $\frac{3}{8}$ 7 canne. Schematizza il problema così. Poi moltiplica $\frac{13}{24}$ 4 per $\frac{3}{8}$ 7 e dividi per 1, risulterà $\frac{7\ \ 2\ \ 3}{8\ \ 3\ \ 8}$ 33 bizanti.

Sulla balla di fustagno.

(1) Una balla di fustagno, che corrisponde a 40 petie, si vende per 37 libre e si chiede quanto valga una petia. Schematizza il problema così. Poi moltiplica 1 per 37, risulterà 37 che devi dividere [p.114] per la scomposizione di 40, vale a dire per $\frac{1\ \ 0}{4\ \ 10}$ o per $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 20}$, cosa che in questo caso è migliore perché la posizione nella quale bisogna porre il risultato è sotto le libre, risulterà $\frac{1\ \ 18}{2\ \ 20}$, cioè $\frac{1}{2}$ 18 soldi. E certo in base a ciò è chiaro che quante libre ci saranno nella metà del prezzo di una balla, tanti soldi varrà una petia.

(2) Parimenti una balla si vende per $\frac{9}{20}$ 38 libre e si chiede quanto valgano 3 petie. Schematizza il problema così. Poi moltiplica il 38 per la sua frazione, risulterà 769 che devi moltiplicare per il 3 che gli si oppone in diagonale, risulterà 2307 che devi dividere per la scomposizione di 40 e per il 20 che sta sotto la linea di frazione, cioè per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{4\ \ 10\ \ 20}$. Ma prima moltiplica 2307 per il 3 che ci manca per $\frac{1}{12}$ che dobbiamo avere sulla linea di frazione dopo il 20, risulterà 6921 che devi dividere per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{10\ \ 12\ \ 20}$, risulterà $\frac{1\ \ 8\ \ 17}{10\ \ 12\ \ 20}$ 2 libre.

Sul torcello.

(1) Se un torcello - che è di 60 canne provenzali, cioè di 8 palmi per ciascuna canna - si vende per 35 libre e si chiede quanto valga una canna, schematizza il problema, poi moltiplica 1 per 35 e dividi per la scomposizione di 60 che è $\frac{1\ \ 0}{6\ \ 10}$, o $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 20}$ che qui è meglio perché abbiamo bisogno di ottenere $\frac{1}{20}$ all'inizio della frazione, risulterà $\frac{2\ \ 11}{3\ \ 20}$ cioè 11 soldi e 8 denari. E in base a ciò è chiaro che quante saranno le libre del prezzo di un torcello, tanti terzi di un soldo vale una canna.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti se in base agli stessi elementi chiederai quanto vale un palmo, devi trasformare il palmo nella frazione di una canna, risulterà $\frac{1}{8}$. Schematizza dunque il problema così. Poi moltiplica l'1, che è sopra l'8 per il 35 e dividi il prodotto per 60 e per l'8 che sta sotto la linea di frazione, riarraggiando così: $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{2\ \ 12\ \ 20}$, risulterà $\frac{1\ \ 5\ \ 1}{2\ \ 12\ \ 20}$, cioè $\frac{1}{2}$ 17 denari. Da ciò dunque è chiaro che quante libre vale un torcello, altrettanti oboli vale un palmo.

(2) Parimenti un torcello si vende per $\frac{9}{20}$ 37 libre e si chiede quanto valgano 9 canne e $\frac{1}{4}$ 3 palmi, cioè $\frac{1\ \ 3}{4\ \ 8}$ 9 canne. Schematizza il problema così e moltiplicherai $\frac{1\ \ 3}{4\ \ 8}$ 9 per $\frac{9}{20}$ 37, e dividerai per 60, risulterà $\frac{1\ \ 4\ \ 0\ \ 5\ \ 17}{2\ \ 8\ \ 10\ \ 12\ \ 20}$ 5 libre, come si mostra nello schema.

Sulle società.

(1) Sebbene nel decimo capitolo di questo libro dobbiamo spiegare in che modo si debba dividere il profitto dei risparmi tra i soci, tuttavia vogliamo spiegare per ora in che modo questa divisione debba avvenire in base al metodo della transazione economica descritto precedentemente, in modo che questa spartizione spiegata due volte renda le menti dei discenti più pronte. (2) Pertanto poniamo qui il caso di uno che abbia nella sua riserva di denaro 152 libre, con le quali ha avuto un profitto di 56 libre e si chiede quanto di questo profitto per libra debba restituire a ciascuno dei suoi soci. (3) Innanzitutto certo, secondo la consuetudine pisana, dal suddetto profitto dobbiamo sottrarre la quarta parte, dal momento che essa è del mediatore, restano 42 libre. Per questo scrivi nello schema che le 152 libre del capitale hanno portato un profitto di 42 libre, e scrivi 1, vale a dire le libre, sotto il 152, come si mostra in questo schema. Poi moltiplicherai i numeri che si oppongono in diagonale, vale a dire l'1 per il 42, risulterà 42 che devi dividere per la scomposizione di 152 che è $\frac{1\ \ 0}{8\ \ 19}$, ma per avere $\frac{1\ \ 0}{12\ \ 20}$ all'inizio della frazione, moltiplica il prodotto, vale a dire il 42 per 30 in virtù dei

trentesimi che ci mancano per realizzare questo $\frac{1\ \ 0}{12\ \ 20}$, risulterà 1260 che devi dividere per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{19\ \ 12\ \ 20}$, risulterà $\frac{6\ \ 6\ \ 5}{19\ \ 12\ \ 20}$, cioè 5 soldi e 6 denari e quasi la terza parte di un denaro. O altrimenti, secondo il 'metodo volgare', trovata la scomposizione del 152, che è $\frac{1\ \ 0}{8\ \ 19}$, dividerai il profitto, vale a dire le 42 libre, per 8: risulteranno 5 libre e 5 soldi che sono 105 soldi che devi dividere per 19, risulteranno 5 soldi e $\frac{6}{19}$ 6 denari, come abbiamo detto precedentemente.
(4) Invero se in base agli elementi scritti sopra vorrai calcolare quanto di tale profitto risulterà [p.115] a quello che aveva 13 libre in questa società, calcolerai il guadagno nel modo seguente. Moltiplica il 13 per la porzione di profitto per ciascuna libra, vale a dire per i 5 soldi e i $\frac{6}{19}$ 6 denari. (5) Questa moltiplicazione, secondo il 'metodo volgare' si svolge così: moltiplica innanzitutto il 13 per i 5 soldi, risulteranno 65 soldi, con essi addiziona il prodotto dei 6 denari per 13, cioè dei 6 soldi e 6 denari, risulteranno 3 libre e 11 soldi e 6 denari. Ad essi di nuovo addiziona il prodotto di $\frac{6}{19}$ per 13, che è $\frac{2}{19}$ 4 denari, risulterà 3 libre e 11 soldi e $\frac{2}{19}$ 10 denari.
(6) Ma se desideri calcolare questo stesso risultato attraverso un metodo scientifico, schematizza il problema, come si mostra qui. Poi moltiplica il 13 per il 42 che si oppongono in diagonale, risulterà 546 che devi dividere per $\frac{1\ \ 0}{8\ \ 19}$, ma per avere $\frac{1\ \ 0}{12\ \ 20}$ all'inizio della linea di frazione, moltiplica il 546 per il 30 e dividi il prodotto per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{19\ \ 12\ \ 20}$, risulterà $\frac{2\ \ 10\ \ 11}{19\ \ 12\ \ 20}$ 3 libre, come più sopra ci è risultato con il metodo volgare.

Sullo stesso argomanto.
(1) Parimenti un tale ha in investimento $\frac{1}{2}$ 253 libre con le quali ha guadagnato, oltre al suo profitto di un quarto, $\frac{2}{20}$ 63 libre, si richiede quanto per libra egli debba restituire a ciascuno dei suoi soci. Schematizza il problema. Poi moltiplica l'1 per $\frac{11}{20}$ 63 e dividi per $\frac{1}{2}$ 253. Cioè moltiplicherai 1 per 1271, il cui prodotto moltiplicherai per il 2 che sta sotto la linea di frazione davanti al 253, risulterà 2542 che devi dividere per 20. Tuttavia moltiplica prima il 2542 per il 4 in modo da avere $\frac{1}{12}$ davanti a $\frac{1}{20}$ nella divisione, risulterà $\frac{2\ \ 2\ \ 0\ \ 5}{13\ \ 13\ \ 12\ \ 20}$, cioè 5 soldi e poco meno di $\frac{1}{6}$ di un denaro.

Sullo stesso argomento.

(1) E se vorrai sapere quanto del soprascritto profitto tocca a quello che nella società soprascritta abbia investito $\frac{5\ 7}{12\ 20}$ 13 libre, schematizza il problema. Poi moltiplicherai le 13 libre per la sua frazione, risulterà 3209 che devi moltiplicare per 1271, il cui prodotto devi moltiplicarlo per il 2 che sta sotto la linea di frazione. Poi dividi il prodotto per 507 e per tutte le parti frazionarie dei restanti due numeri. Tuttavia semplificherai di lì in modo da non moltiplicare per il 2 così da non dividere per il 2 che è nella scomposizione del 20, risulterà $\frac{1\ 6\ 0\ 6\ 0\ 7}{3\ 10\ 13\ 13\ 12\ 20}$ 3 libre.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti uno ha in società $\frac{11}{20}$ 713, con i quali ha guadagnato oltre al suo profitto di un quarto, $\frac{7\ 12}{12\ 20}$ 217 libre e si richiede di nuovo quanto di questo profitto spetti per ciascuna libra. Schematizza il problema e moltiplica l'1 per il 52231 il cui prodotto moltiplicalo per il 20 che è sotto la linea di frazione davanti al 713. Poi dividi il prodotto per la scomposizione di 14271 che è $\frac{1\ 0\ 0}{3\ 67\ 71}$, e per 12 e per 20 che sono sotto la linea di frazione della cifra che indica il profitto, risulterà $\frac{2\ 7\ 14\ 1\ 6}{3\ 67\ 71\ 12\ 20}$, cioè 6 soldi e quasi $\frac{1}{5}$ 1 denari. (2) E così potrai operare per qualunque profitto, sia che sia di tareni sia di bizanti qualunque, anche se si proponesse che uno abbia investito una qualunque quantità di libre di denari di qualunque quantità di bizanti e si chiedesse quanti denari spettino per ogni bizante.

Parte quarta dell'ottavo capitolo. La conversione di un tipo di rotolo ad un altro.

(1) Se vuoi sapere a quante libre sottili corrisponda una qualunque quantità di rotoli di cantare pisano, per esempio diciamo di 1 rotolo, apprendi prima in che proporzione siano tra loro: la proporzione tra loro infatti è tale che 100 rotoli, ovviamente di cantare, corrispondono a 158 libre. Per cui scrivi nello schema 100 rotoli per la merce in vendita e 158 per il prezzo; poi scrivi 1 rotolo - del quale vuoi calcolare le libre - sotto i rotoli, vale a dire sotto il 100, come si mostra in questo schema. Poi moltiplica l'1 per il 158 e dividi per 100. Cioè dividi il triplo di 158 per il triplo di 100: farai così in modo da avere $\frac{1}{12}$ all'inizio della frazione per le oncie, risulterà $\frac{4\ 4\ 6}{5\ 5\ 12}$ 1libra, cioè 1 libra e 7 oncie meno $\frac{1}{25}$.

[p.116]

Sulla conversione della libra pisana in frazioni di un rotolo.

(1) E ancora, se vorrai trasformare la libra nelle frazioni di un rotolo, scrivi l'1 sotto il 158, come si è schematizzato in quell'altro problema. Poi moltiplicherai l'1 per il 100, risulterà 100 che devi dividere per 158, risulterà $\frac{50}{79}$ di un rotolo, se vorrai trasformare questo risultato in oncie di rotolo, moltiplica il 50 per le oncie di un rotolo, vale a dire per 12 - poiché come la libra è di 12 oncie così il rotolo è di 12 oncie solo che esse sono più grandi - risulterà 600 che devi dividere per 79, risulterà $\frac{47}{79}$ 7 oncie di rotolo.

(2) Parimenti se vorrai trasformare in libre i $\frac{3}{4}$ 87 rotoli, scrivi intanto rotoli sotto rotoli, cioè $\frac{3}{4}$ 87 sotto 100, e moltiplica l'87 per il 4 e addiziona il 3, risulterà 351 che devi moltiplicare per 158, risulterà 55458 che devi dividere per 100 e per 4, cioè per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{4\ \ 10\ \ 10}$, ovvero, per avere $\frac{1}{12}$ nella linea di frazione della divisione per le oncie, moltiplica il 55458 per il 3 e dividi per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{10\ \ 10\ \ 12}$, risulterà $\frac{4\ \ 7\ \ 7}{10\ \ 10\ \ 12}$ 138, come si mostra nello schema.

Sulla conversione delle libre in rotoli.

(1) Parimenti se vorrai trasformare in rotoli le $\frac{1}{2}$ 748 libre, scrivi libre sotto libre, cioè $\frac{1}{2}$ 748 sotto 158, poi moltiplica $\frac{1}{2}$ 748 per 100 e dividi per 158, moltiplica il risultato suddetto per 3 in modo da avere $\frac{1}{12}$ nella linea di frazione della divisione per le oncie, risulterà $\frac{6\ \ 48}{79\ \ 12}$ rotoli, come si mostra nello schema.

(2) Parimenti se vorrai trasformare 43 rotoli di cantare messinese in libre pisane, apprendi innanzitutto in che rapporto siano i rotoli messinesi e le libre pisane. Sono invero in tale proporzione, come credo, che un rotolo messinese corrisponde a $\frac{1}{4}$ 2 libre pisane. Dunque 4 rotoli messinesi corrispondono a 9 libre pisane. Quindi schematizza il problema come qui si mostra. Poi moltiplica il 9 per il 43 che sono tra loro in diagonale e dividi per 4, risulteranno le libre.

Sulla conversione delle libre pisane in rotoli messinesi.

(1) Parimenti se viceversa vorrai trasformare $\frac{3}{4}$ 96 libre in rotoli messinesi, scrivi libre sotto libre, vale a dire $\frac{3}{4}$ 96 sotto il 9, come si vede in quell'altra figura. Poi moltiplica $\frac{3}{4}$ 96 per il 4 che gli si oppone in diagonale e dividi per il 9, risulteranno 42 rotoli. E così potrai operare in tutti i casi simili.

Sulla conversione dei rotoli genovesi in fiorentini.

(1) Di nuovo se ad Alessandria vorrai trasformare 347 rotoli genovesi in rotoli fiorentini, apprendi innanzitutto in che rapporto siano i rotoli genovesi e i rotoli fiorentini. Essi solo invero in tale proporzione per cui 1 rotolo genovese corrisponde a $\frac{1}{6}$ 2 rotoli fiorentini: dunque 6 rotoli genovesi corrispondono a 13 rotoli fiorentini, e scrivili così nello schema. Poi moltiplica il 13 per il 347 e dividi per il 6, risulteranno $\frac{5}{6}$ 751 rotoli fiorentini, come si mostra nello schema. (2) Questo risultato poi corrisponde a 7 cantari fiorentini e 51 rotoli e 10 oncie, poiché un rotolo fiorentino è di 12 oncie ciascuna delle quali pesa 12 miliari di Alessandria. E ciascun rotolo genovese è similmente di 12 oncie ciascuna delle quali pesa 26 miliari dello stesso tipo, cioè di Alessandria, i quali miliari pesano 6 carati, il quale carato pesa 3 abbas, vale a dire grani.

Sulla conversione dei rotoli fiorentini in genovesi.

(1) Parimenti se vorrai trasformare 453 rotoli fiorentini in rotoli genovesi, scrivi i fiorentini sotto i fiorenti, cioè 453 sotto 13. Poi moltiplica 6 per 453, che gli si oppone in diagonale, e dividi per 13, risulterà $\frac{1}{13}$ 209, come si mostra in questa figura.

[p.117] (3) E ancora se vorrai trasformare $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 23 rotoli genovesi in rotoli fiorentini, scrivi i genovesi sotto i genovesi, cioè $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 23 sotto il 6. Poi moltiplica il 23 per le sue frazioni, risulterà 1427 che devi moltiplicare per il 13 e dividere per 6 e per le parti frazionarie. Tuttavia, se vuoi, moltiplica il risultato per 2 in modo da avere $\frac{1\ \ 0}{12\ \ 12}$ nella frazione per le oncie e i miliari, risulterà $\frac{2\ \ 4\ \ 6}{5\ \ 12\ \ 12}$ 51 rotoli fiorentini, cioè 51 rotoli e 6 oncie e $\frac{2}{5}$ 4 miliari.

Sulla conversione dei rotoli fiorentini in genovesi.

(1) Di nuovo se porrai che i suddetti $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 23 rotoli siano fiorenti e vorrai trasformarli in rotoli genovesi, scrivi $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ 23 sotto il 13 e moltiplica il numero intero a cui corrisponde, vale ad dire 1427, per il 6 e dividi il prodotto per 13 e per le parti frazionarie, vale a dire per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{5\ \ 13\ \ 12}$, e avrai il risultato proposto. (2) Tuttavia se vuoi ottenere i miliari davanti alle oncie sulla linea di frazione, moltiplica il risultato per 2 e dividi per $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{5\ \ 2\ \ 13\ \ 12}$ e ciò che risulterà sopra il 12 saranno le oncie, e ciò che risulterà sopra $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 13}$ saranno i miliari, dal momento che le oncie, come abbiamo detto sono 26 miliari, la cui scomposizione è $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 13}$, risulterà $\frac{4\ \ 0\ \ 9\ \ 11}{5\ \ 2\ \ 13\ \ 12}$ 10 rotoli genovesi, come si mostra nello schema, cioè 10 rotoli e 11 oncie e $\frac{4}{5}$ 18 miliari, dal momento

che bisogna moltiplicare il 9 che sta sopra il 13 per il 2 che sta davanti al 13 e addizionare lo 0 che sta sopra il 2 e così si ottengono i 18 miliari come or ora abbiamo detto. (3) E così, in base alla dottrina scritta precedentemente potrai convertire qualunque rotolo o cantare in qualunque altro rotolo o cantare, se conoscerai la loro proporzione, cioè in che modo si rapportino a vicenda. (4) E questo metodo è molto utile nel carico delle navi quando si caricano di diverse merci che si misurano sulla base di unità di peso differenti, in base alla leggerezza o pesantezza, così le navi, alcune si caricano in unità di misura barbare, alcune si caricano in cantari di pelli. Per cui sulle navi si pesano in maniera differente le merci più pesanti e quelle più leggere delle pelli e quelle che hanno minore o maggiore volume. Per cui dagli antichi fu stabilita tale regola che per l'allume, che si ripone sul fondo della nave, se ne dispongono due cantari per ogni cantare di pelle; per le pelli di capra, invero, poiché sono più leggere del pellame, si dispongono due cantari per tre; per i conogli o lo zucchero di pone un cantare per 2 di pelli. (5) Similmente le navi che si caricano in Sicilia, si caricano in colli, il collo contiene in sè 100 rotoli, e si pongono 3 cantari di rame in un collo, $\frac{1}{3}$ 1 cantare di cotone per un collo. (6) E le navi che si caricano ad Alessandria, si caricano in sporte di pepe, la quale sporta contiene similmente 100 rotoli: a questa sporta sono ricondotte le merci, in base alle loro differenze, a qualsiasi ordine che non è necessario elencare, poiché ciascuno, quando gli sarà necessario, potrà chiederlo direttamente lì. (7) Invero esemplificheremo in quest'opera grazie ad alcuni esempi, in che modo si eseguano queste conversioni di peso, in base alla varietà delle merci descritte precedentemente, per mezzo dell'insegnamento premesso.

Sulla conversione del cotone in colli di Sicilia pesati in barbaresco.

(1) Se uno in Sicilia ha in una nave un carico di 11 cantari e 47 rotoli di cotone e vuole trasformarli in colli, poiché $\frac{1}{3}$ 1 cantare di cotone, come abbiamo detto, corrisponde a un collo, dunque 4 cantari di cotone sono 3 colli e quattro rotoli di cotone sono 3 rotoli di collo. Scrivi nello schema gli 11 cantari e i 47 rotoli, cioè i 1147 rotoli sotto i 4 rotoli di cotone. Poi moltiplicherai 1147 per 3 e dividerai per 4, risulterà $\frac{1}{4}$ 860 rotoli di collo, come si mostra nello schema, cioè 8 colli e $\frac{1}{4}$ 60 rotoli di collo.

[p. 118]

La conversione di pelli di capra a cantari di carico in barbarica.

(1) Di nuovo se a Bejaia o Sesti uno in una nave ha 31 cantari di pelle di capra e 64 rotoli e vuole trasformarli in cantari di pelle, poiché due cantari di pelle di capra, come abbiamo detto,

corrispondono a 3 cantari di pellame, dunque 2 rotoli di pelle di capra corrispondono a 3 rotoli di pellame, Per questo scrivi i 31 cantari e i 64 rotoli, cioè i 3164 rotoli, sotto i 2 rotoli di pelle di capra. Poi moltiplicherai il 3 per il 3164 che gli si oppone in diagonale e dividerai per 2, risulterà 4746 rotoli come si mostra nello schema, cioè 47 cantari e 46 rotoli. (2) O altrimenti addiziona la metà dei 31 cantari e 64 rotoli agli stessi 47 cantari e 46 rotoli e risulteranno similmente 47 cantari e 46 rotoli che or ora abbiamo ottenuto come risultato. (3) E così potrai intendere in qualunque altro caso simili. Per cui poniamo fine a quest'ottavo capitolo e passiamo al nono.

Capitolo Nono.

Il baratto delle merci e similari.

(1) Ho stabilito di dividere questo capitolo in tre parti, in modo che il lettore sia in grado di reperire più velocemente ciò che in esso desidera leggere. La prima di queste parti riguarda il baratto delle cose in vendita; la seconda l'acquisto di bolsonaglia in base al metodo del baratto; la terza è sulle regole per l'alimentazione di orzo dei cavalli giorno per giorno.

Regola generale nel baratto delle merci, innanzitutto del pepe con il lino.

(1) Quando uno vorrà scambiare una merce qualunque con una qualunque altra merce, cioè barattarla, s'informi sul prezzo di ciascuna merce, il quale prezzo deve essere sempre espresso nella stessa moneta. E scrivi una di quelle merci in cima alla tavoletta e scrivi il prezzo di quella merce in successione sulla tavoletta verso sinistra sulla stessa linea, come nel precedente capitolo abbiamo insegnato a schematizzare nelle transazioni commerciali. Poi sotto il prezzo di quella merce, su un'altra linea, scrivi il prezzo dell'altra merce e di seguito scrivi la merce che corrisponde a quel prezzo. E se la merce che vorrai barattare in altra merce sarà stata scritta per prima sulla tavoletta sulla linea superiore, poni la quantità che hai di quella merce sotto la merce stessa. E se ci sarà la quantità dell'altra merce, scrivi la sua quantità sopra la stessa merce: come or ora abbiamo detto che bisogna scrivere il prezzo di una merce sotto il prezzo dell'altra, così bisogna scrivere merce simile sotto merce simile. E scritti pertanto questi cinque numeri, allora moltiplica l'ultimo di essi per la cifra del prezzo che gli si oppone e ciò che risulterà di lì, applicati a moltiplicarlo per l'atra cifra che si oppone a quel prezzo: il prodotto di questi numeri dividilo per i restanti due numeri, e otterrai il risultato cercato.

(2) Per esempio 20 braccia di panni valgono 3 libre pisane e 42 rotoli valgono 5 libre similmente pisane, si chiede quanti rotoli di cotone si possono ottenere per 50 braccia di panni. Scrivi pertanto le 20 braccia sulla tavoletta davanti alle quali scrivi le 3 libre, vale a dire il loro prezzo, sotto di esse scrivi le 5 libre davanti questo 5 poni i 42 rotoli; quindi poni le 50 braccia sotto le 20 braccia. Poi moltiplica il 50 per il 3 che gli si oppone in diagonale, risulterà 150 che devi moltiplicare per il 42 che si oppone in diagonale a tale 3 e ciò che risulterà dividilo per gli altri numeri, vale a dire per 20 e per 5, cioè per 100, risulterà 63. E tanti rotoli di cotone si ottengono per 50 braccia di panni.

(3) Questo metodo infatti procede in base alla proporzione che ha la prima merce rispetto all'altra che mostrerò essere composta da due proporzioni, vale a dire dalla proporzione che c'è tra la quantità della prima merce in vendita e il suo prezzo, e dalla proporzione che ha il

numero del prezzo dell'altra merce rispetto a numero della quantità della sua merce in vendita. Cioè in questo problema dico che la proporzione delle braccia di panno rispetto ai rotoli di cotone [p.119] è composta dalla proporzione fra 20 e 3 e fra 5 e 42. Infatti come il 20 sta al 3, così il quincuplo di 20 sta al quincuplo di 3, dico il quincuplo in virtù del 5 che è il prezzo dei suddetti 42 rotoli, ciò è perché 100 braccia valgono 15 libre. Di nuovo, come 5 sta a 42, così il triplo di 5 sta al triplo di 42, dico il triplo in virtù del 3 che è il prezzo delle suddette 20 braccia, cioè con 15 libre si ottengono 126 rotoli di cotone. E poiché 100 braccia valgono 15 libre e in più 15 libre ottengono 126 rotoli, dunque per 100 braccia si ottengono 126 rotoli, e così la proporzione della prima merce alla seconda e composta dalle suddette due proporzioni. E poiché come 100 sta a 126, e le 50 braccia al cambio che si ha con i rotoli, bisogna moltiplicare il 50 per il 126, cioè 50 per 3 e poi per 42 come abbiamo fatto più sopra, e bisogna dividere il prodotto della loro moltiplicazione per 100 e per 20 e per 5, risulteranno 63 rotoli che devi porre sopra i 42 rotoli.
(2) Invero questa formulazione delle proporzioni è tale come si mostra nella figura rettangolare, cioè nei settori, ed è quella con la quale Tolomeo ha insegnato nell'Almagesto a trovare la prova della quadratura del cerchio e molte altre cose, e Ameto il figlio propose 18 combinazioni riguardo ad essa nel libro che ha scritto sulle proporzioni.
(3) Parimenti si proponga di barattare 63 rotoli di cotone con panni. La loro proporzione, come ricavi dall'esempio precedente, è composta dalla proporzione che c'è tra 42 e 5 e tra 3 e 20: questa proporzione è di 126 a 100, cioè per 126 rotoli si ottengono 100 braccia dei panni scritti sopra. Per questo bisogna moltiplicare 63 per 100 e dividere per 126. Cioè moltiplica 63 per 5 che gli si oppone in diagonale, moltiplica il loro prodotto per il 20 che si oppone in diagonale al solo 5, dividi tutto questo risultato per gli altri due numeri, vale a dire per il 3 e per il 42, risultano 50 braccia che devi porre sotto le 20 braccia.

Sul baratto del pepe con il cumino.
(1) Un centone di pepe vale 13 libre, e un cantare di cumino vale 3 libre, si chiede quanti rotoli di cumino si ottengano per 342 libre. Schematizzato il problema, in base all'insegnamento precedente ricaverai che il numero della prima merce sta al numero della seconda come il centuplo di 3 sta al centuplo di 13. E poiché come l'intero sta all'intero così la parte sta alla parte, risulterà dunque che come il centesimo del centuplo di tre sta al centesimo del centuplo di 13 - cioè come 3 sta a 13 - così il numero della prima sta alla seconda. (2) E da ciò per l'appunto è chiaro che quando la quantità in vendita di due merci divise è la stessa,

allora come il prezzo della seconda sta al prezzo dell prima così la quantità della prima merce sta alla quantità della seconda.

(3) Per questo in questo schema moltiplicherai il 342 per il 13 e devi dividere per 3, risulteranno 1482 rotoli di cumino che devi porre nello schema sopra i 100 rotoli. O, in base al metodo di questa dottrina, bisogna moltiplicare 342 per 13 che gli si oppone in diagonale e tutto il prodotto per i 100 rotoli di cumino. Il prodotto di questi tre numeri moltiplicati tra loro deve essere diviso per 3 e per 100. Per cui se ometteremo il 100 da entrambe le parti, resterà solo la moltiplicazione di 342 per 13 da dividere per 3, come più sopra abbiamo operato. (4) E se vuoi barattare i 342 rotoli di cumino con il pepe, scrivi il 342 sopra il 100 del cumino e moltiplicalo per 3, moltiplica tutto questo prodotto per il 100 del pepe e dividi il prodotto per il 100 del cumino e per il 13. Però semplifica il 100 in questi calcoli, cioè moltiplica 342 per 3 e dividi per 13, risulterà $\frac{12}{13}$ 78 libre di pepe che devi porre sotto le 100 libre di pepe.

(5) E ancora un cantare genovese di mastice si vende ad Alessandria per $\frac{11}{24}$ 23 bizanti e una carica di pepe, che corrisponde a 500 rotoli fiorentini, vale lì $\frac{1\ 3}{9\ 4}$ 51 bizanti. E un tale ha $\frac{3}{5}$ 523 rotoli di pepe, cioè una carica, e $\frac{3}{5}$ 23 rotoli fiorentini che egli vuole barattare con [p.120] e chiede quanti rotoli genovesi di lì potrebbe ottenere di tale pepe. Schematizza il problema così. Poi moltiplicherai $\frac{3}{5}$ 523 per $\frac{1\ 3}{9\ 4}$ 51, moltiplica poi per 100 e dividi il loro prodotto per i restanti due numeri, vale a dire per $\frac{11}{24}$ 23 e per 500. Tutto ciò avviene così: moltiplica i 23 bizanti per la sia frazione, vale a dire moltiplica per 24 e addiziona l'11, risulterà 563 e moltiplica il 523 per la sua frazione, risulterà 2618. Parimenti moltiplica il 51 per le sue frazioni, risulterà 1867 che devi porre sopra $\frac{1\ 3}{9\ 4}$ 51. Poi moltiplica il 2618 per il 1867, poi per 100, poi per la parte frazionaria che è sotto la linea di frazione del 23, vale a dire per 24, e dividi per 563 e per la scomposizione di 500 e per le parti frazionarie che sono sotto la linea di frazione del 523 e del 51, cioè per 5 e per 4 e per 9. E ometterai di moltiplicare per il 100 che abbiamo menzionato nella moltiplicazione, nè dividerai per il 100 che è nella scomposizione del 500 e resterà il 5 da questo 500 per il quale dobbiamo dividere. Parimenti potresti ancora omettere dalla divisione $\frac{1}{3}$ che è sulla striscia frazionaria, se ometterai l'altro 3 dalla scomposizione del 24 per il quale devi moltiplicare. Dunque moltiplicherai 2618 per 1867 poi per l'8 che resta dal 24 e dividerai il prodotto per $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{5\ \ 5\ \ 563\ \ 12}$, risulteranno $\frac{3\ \ 4\ \ 83\ \ 6}{5\ \ 5\ \ 563\ \ 12}$ 231 rotoli, come si mostra nello schema.

(5) Se vorrai verificare questo risultato attraverso la prova del 13, poiché hai moltiplicato 2618 per 1867 e poi per 8, allora devi calcolare la prova del 13 di 2618, cioè devi dividere 2618 per 13 e così resta 5 che devi moltiplicare per la prova di 1867, similmente la prova del 13, che è 8, e risulterà 40. Calcola la prova di questo 40, che è 1 che devi moltiplicare per 8, risulterà 8, che devi conservare come prova del risultato della moltiplicazione in modo che tu veda se la prova del risultato della divisione, vale a dire di $\frac{3\ \ 4\ \ 83\ \ 6}{5\ \ 5\ \ 563\ \ 12}$ 231, sarà similmente 8, in tal caso sarà corretta.

Sul baratto del pepe per il mastice.

(1) Parimenti se sulla base degli stessi elementi uno chiedesse quanto pepe potrebbe ottenere con $\frac{3}{5}$ 523 rotoli di mastice, scrivi nello schema $\frac{3}{5}$ 523 sotto il mastice in vendita, vale a dire sotto 100, come si è scritto in quell'altro schema, e calcola tutti i numeri corrispondenti alle parti frazionarie, come hai fatto più sopra nel problema precedente. Poi moltiplicherai 2618 per 563, poi per 500 e moltiplicherai il loro prodotto per le parti frazionarie che sono con il 51, vale a dire per 4 e per 9, cioè per 36. Poi dividi il prodotto per 100 e per 1867 e per le parti frazionarie che sono davanti al 523 e davanti al 23, cioè per 5 e per 24. (2) Invero se vorrai semplificare ciò che di lì potrà essere semplificato, ometti di moltiplicare per 500, e non dividerai per il 100 suddetto nè per il 5 che sono sotto la linea di frazione davanti al 523, ometterai inoltre di moltiplicare per il 2 che è nella scomposizione del 4 che sta sotto la linea di frazione davanti al 51 e non dividerai per il 2 che è nella scomposizione del 24 e conserverai il 12 che resta di tale 24 per porlo all'inizio della frazione per indicare le oncie. Dunque moltiplicherai 2618 per 563, poi per il 2 che resta dal 4 che sta davanti al 51 sotto la linea di frazione, poi moltiplicherai questo per il 9 che sta sotto la linea di frazione davanti a tale 51 e la loro moltiplicazione darà come risultato 26530812 che devi dividere per 1867 e per il 2 che è rimasto dal 24, risulterà $\frac{742\ \ 2}{1867\ \ 12}$ 1184 rotoli di pepe, cioè due cariche e 184 rotoli e $\frac{742}{1867}$ 2 oncie. E la prova del 13 del risultato di questo problema è 9 come si calcola secondo il metodo descritto precedentemente.

Sul baratto del pepe con lo zafferano.

(1) Parimenti se si pone che 7 rotoli di pepe valgono 4 berzi e 9 libre di zafferano valgano 11 berzi e si chieda quanto zafferano uno potrebbe ottenere con 23 rotoli di pepe, schematizza il problema secondo il metodo descritto precedentemente. Poi moltiplicherai il 23 per il 4 che è in diagonale rispetto ad esso, moltiplica tutto questo prodotto per 9, dal momento che il 9 è in

diagonale rispetto a tale 4. (2) Ovvero possiamo dimostrare ciò con un altro metodo, attraverso il quale metodo potrai capire più dettagliatamente quali [p.121] sono i 3 numeri che dovrai moltiplicare. Nei problemi di siffatto tipo, infatti, si scrivono 5 numeri noti, attraverso i quali è necessario ricavare il sesto numero, l'incognita. Per questo tale metodo è chiamato 'regola del sesto proporzionale'. Di questi cinque numeri, talvolta ne troverai tre sulla linea superiore e due su quella inferiore, e talvolta 3 sulla inferiore e due sulla linea superiore. Moltiplicali insieme i due numeri che sono all'estremità di quella linea sulla quale saranno stati posti 3 numeri, per il numero dell'altra linea che si oppone ad essi, e dividi il loro prodotto per gli altri due numeri restanti, e ciò che risulterà dalla divisione sarà la quantità del sesto numero. (3) Come in questo problema in cui ci sono due numeri sulla linea superiore, vale a dire 4 berzi e 7 rotoli, e 3 numeri sulla linea inferiore, vale a dire 9 e 11 e 23. Di questi ultimi il 9 e il 23 sono all'estremità di tale linea, questi devi moltiplicarli per il numero che si oppone loro che è sull'altra linea, vale a dire quella inferiore, cioè per 4. Invero la moltiplicazione di 23 per 4 dà come risultato 92 che, se lo moltiplicherai per 9, darà come risultato 928 che devi dividere per gli altri due numeri, vale a dire per 7 e per 11, risulterà $\frac{2\ \ 8}{7\ \ 11}$ 10 libre, come si mostra nello schema tracciato.

Il baratto dello zafferano con il pepe.

(1) Invero se in base agli stessi elementi vorrai ottenere pepe da 23 libre di zafferano, schematizza il problema come insegnato, cioè merce simile sotto merce simile, e il prezzo di una merce sotto il prezzo dell'altra. Siccome qui in questo problema ci sono tre numeri sulla linea superiore, vale a dire 23 e 4 e 7, tra i quali il 23 e il 7 sono alle estremità, moltiplicali per il numero che si oppone ad essi, vale a dire per l'11, risulta 1771 che devi dividere per i 2 numeri rimanenti, vale a dire per il 4 e per il 9, cioè per $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 12}$, risulterà $\frac{1\ \ 2}{3\ \ 12}$ 49 rotoli di pepe, cioè 49 rotoli e $\frac{1}{3}$ 2 oncie.

Il baratto del pepe con lo zenzero.

(1) Parimenti $\frac{1}{2}$ 7 rotoli di pepe valgono $\frac{1}{3}$ 4 tareni e $\frac{1}{5}$ 9 libre di zenzero valgono $\frac{1}{6}$ 11 tareni, e si richiede quanto zenzero uno potrebbe ottenere da $\frac{1}{7}$ 23 rotoli di pepe. Schematizza il problema nel modo descritto sopra, come qui. Poi moltiplicherai, in base agli elementi scritti sopra, $\frac{1}{7}$ 23 per $\frac{1}{3}$ 4 e dividerai il loro prodotto per i restanti due numeri, vale a dire per $\frac{1}{2}$ 7 e per $\frac{1}{6}$ 11, cosa che avviene così: moltiplica il 7 per la sua frazione, risulterà 15 che devi

scrivere sopra $\frac{1}{2}$ 7; poi moltiplica il 4 per la sua frazione, risulterà 13 che devi scrivere sopra $\frac{1}{3}$ 4; poi il 9 per la sua frazione, risulterà 46 che devi scrivere sopra $\frac{1}{5}$ 9; poi l'11 per la sua frazione, risulterà 67 che devi scrivere sopra $\frac{1}{6}$ 11; poi il 23 per la sua frazione, risulterà 162, che devi scrivere sopra $\frac{1}{7}$ 23. Poi moltiplica il 162 per il 13 che gli si oppone in diagonale, poi per il 46. Poi moltiplica il loro prodotto per le parti frazionarie dei restanti due numeri, vale a dire per il 2 che sta sotto la linea di frazione davanti al 7, e poi per il 6 che sta sotto la linea di frazione davanti all'11. Poi dividi tutto il prodotto per la scomposizione di 15 e per 67, cioè per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{3\ \ 5\ \ 67}$ e per le parti frazionarie degli altri tre numeri, vale a dire per il 3 che sta sotto la linea di frazione davanti al 4 e per il 5 che sta sotto la linea di frazione davanti al 9 e per il 7 che sta sotto la linea di frazione davanti al 23, risulterà $\frac{3\ \ 3\ \ 0\ \ 1}{5\ \ 5\ \ 7\ \ 67}$ 11 libre.

Il baratto dello zenzero per il pepe.

(1) Parimenti se sulla base degli stessi elementi si chieda quanti rotoli di pepe uno potrebbe ottenere per $\frac{1}{7}$ 23 libre di zenzero, schematizza il problema come qui si vede. Poi moltiplica il 162 per il 67, poi per il 15, poi per le parti frazionarie che sono sotto il 13 e sotto il 46, cioè per 3 e per 5, risulterà 2442150 che devi dividere per il 13 e per il 40 e per le parti frazionarie dei tre numeri restanti, vale a dire per 7 e per 6 e per 2 e, una volta aggregatoli per avere $\frac{1}{12}$ all'inizio della frazione in modo da indicare le oncie, risulterà $\frac{0\ \ 2\ \ 5\ \ 9\ \ 7}{2\ \ 7\ \ 13\ \ 23\ \ 12}$ 48 rotoli.

[p. 122] Sulla conversione dei soldi imperiali con i soldi genovesi.

(1) Parimenti se si pone che un soldo imperiale valga 31 denari pisani e che un soldo genovese valga 22 denari pisani e si richieda quanti soldi genovesi valgano 7 imperiali, schematizza il problema. Poi moltiplicherai il 7 per il 31 poi per i 12 denari genovesi. Poi dividerai il loro prodotto per il 12 e per la scomposizione del 22, ma ometterai di moltiplicare per i 12 genovesi e non dividerai per i 12 imperiali. Dunque moltiplicherai il 7 per il 31 e dividerai per la scomposizione del 22, risulterà $\frac{1\ \ 9}{2\ \ 11}$ 9 soldi genovesi come si mostra nello schema.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti sia richiesto, viceversa, quanti imperiali valgono 7 denari genovesi. Scrivi i 7 denari genovesi sopra i 12 denari genovesi, come qui si mostra. Poi moltiplica il 7 per il 22,

poi per i 22 imperiali e dividi per il 31 e per i 12 genovesi. Ma ometti di moltiplicare per 12 e non dividere per 12, risulterà $\frac{30}{31}$ 4 imperiali, come si mostra nello schema.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti se, sulla base degli stessi elementi, si richieda quanti soldi genovesi uno potrebbe ottenere per 7 soldi imperiali, poiché la richiesta riguarda i soldi, tutti i numeri che sono nel problema, sono soldi, per cui ne scaturisce tale problema, vale a dire: poiché 12 soldi imperiali e 31 soldi genovesi valgono 12 soldi pisani, quanti soldi genovesi valgono 7 soldi imperiali? (2) Per cui, schematizzato il problema, poni i 7 soldi imperiali sotto i 12 soldi imperiali, come qui si mostra. Poi moltiplicherai il 7 per il 31 poi per i 12 genovesi e devi dividere il loro prodotto per i 12 imperiali e per la scomposizione del 12, ma semplificherai di essi $\frac{1}{2}$, risulterà $\frac{4\ \ 10}{11\ \ 12}$ 9 soldi , come si mostra nello schema.

(3) Ricorderai sempre di annotare la valuta di tutti i numeri che si propongono in simili problemi e in tutti i problemi che riguardano le transazioni commerciali, secondo la richiesta di chi chiede. Cioè sopra i denari scrivi 'denari', e sopra i soldi scrivi 'soldi', e sopra le libre scrivi 'libre', e sopra i cantari scrivi 'cantari', e sopra i rotoli scrivi 'rotoli', e sopra le oncie scrivi 'oncie', e sopra i denari di cantare scrivi 'denari', e sopra le carrube scrivi 'carrube', in modo che possa capire di che tipo di valuta sia il risultato ottenuto. (4) Inoltre devi saper scrivere simili sotto simili, come in quest'altro problema nel quale si chiede quanti imperiali uno potrebbe ottenere per 7 libre di genovesi. Dunque poiché la richiesta riguarda libre, tutti i numeri sono libre. Per questo il problema sarà tale: poiché 12 libre imperiali valgono 31 libre pisane e 12 libre genovesi valgono 22 libre pisane, quante libre imperiali si ottengono per 7 libre genovesi? Schematizza il problema e annoterai sopra ciascun numero la sua valuta, cioè la libra e porrai le 7 libre genovesi sopra le 12 libre dello stesso tipo di valuta, come qui si mostra. Poi moltiplicherai il 7 per il 22 poi per i 12 imperiali e dividerai per 31 e per i 12 genovesi, risulterà $\frac{8\ \ 4\ \ 19}{31\ \ 12\ \ 20}$ 4 libre imperiali.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti un soldo imperiale vale $\frac{1}{4}$ 32 soldi pisani e un soldo genovese vale $\frac{1}{2}$ 22 denari pisani; quanti soldi genovesi valgono allora 9 soldi e 5 denari, cioè $\frac{5}{12}$ 9, soldi imperiali? Schematizza il problema come qui si mostra e, una volta schematizzatolo, il problema sarà tale: poiché 12 soldi imperiali valgono $\frac{1}{4}$ 32 soldi pisani, e 12 soldi genovesi valgono $\frac{1}{2}$ 22

soldi pisani, quanti soldi genovesi valgono allora $\frac{5}{12}$ 9 soldi imperiali? Per questo si annoti il tipo di soldi sopra ciascun numero, come si mostra nello schema. Poi moltiplica $\frac{5}{12}$ 9 per $\frac{1}{4}$ 32 poi per i 12 genovesi. Poi dividi il loro prodotto per $\frac{1}{2}$ 22 e per i 12 imperiali. Ma ometti la moltiplicazione dei 12 genovesi in modo da omettere la divisione per i 12 imperiali, e moltiplica soltanto $\frac{5}{12}$ 9 per $\frac{1}{4}$ 32, poi dividi [p.123] per $\frac{1}{2}$ 22. La qual cosa procede così: moltiplica il 32 per il 4 e addiziona l'1, risulterà 129 che devi scrivere sopra $\frac{1}{4}$ 32; parimenti moltiplica il 22 per la sua frazione, risulterà 45 che devi scrivere sopra $\frac{1}{2}$ 22; poi moltiplica il 9 per la sua frazione, risulterà 113 denari. Poi moltiplica il 113 per il 129, poi per il 2 che sta sotto la linea di frazione davanti al 22 e dividi il loro prodotto per la scomposizione del 45 che è $\frac{1\ 0}{5\ 9}$, e per le parti frazionarie che sono davanti al 22 e davanti al 9, vale a dire per il 4 e per il 12 che se verranno aggregati insieme in una sola linea di frazione, in modo che ci sia $\frac{1}{12}$ all'inizio della linea ad indicare i denari, si trasformeranno in $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{2\ 9\ 10\ 12}$. Per cui della detta moltiplicazione potrai omettere la moltiplicazione del suddetto 2 e ometterai di dividere per il 2 che sta sotto la linea di frazione. Dunque moltiplicherai il 113 per il 129 e dividerai per $\frac{1\ 0\ 0}{9\ 10\ 12}$ e otterrai il risultato. Ovvero, se vuoi tra i suddetti numeri puoi ancora semplificare, vale a dire se calcoli la terza parte di 129, vale a dire 43 per essa moltiplica il 113, risulterà 4859 che devi dividere per $\frac{1\ 0\ 0}{3\ 10\ 12}$, risulterà $\frac{2\ 9\ 5}{3\ 10\ 12}$ 13 soldi genovesi, come si mostra nello schema.

Sullo stesso argomento.

(1) E ancora, il soldo imperiale vale $\frac{3}{4}$ 33 denari pisani, e il soldo genovese vale $\frac{2}{3}$ 21 denari pisani, chiederai quanti imperiali potresti ottenere per $\frac{9}{20}$ 13 libre genovesi. Scrivi $\frac{9}{20}$ 13 sopra le 12 libre genovesi, come qui si mostra. Poi moltiplicherai $\frac{9}{20}$ 13 per $\frac{1}{3}$ 21, poi per i 12 imperiali e devi dividere il loro prodotto per $\frac{3}{4}$ 33, e per i 12 genovesi. Cioè moltiplicherai il 269 per il 65 e per i 12 imperiali e per il 4 che sta sotto la linea di frazione davanti al 33 e devi dividere il loro prodotto per la scomposizione di 135 che è $\frac{1\ 0\ 0}{3\ 5\ 9}$ e per i 12 genovesi e per le parti frazionarie degli altri due numeri, vale a dire per il 3 che sta sotto la linea di frazione davanti al 21 e per il 20 che sta sotto la linea di frazione davanti al 13. Tra di essi se porrai attenzione alla semplificazione. Ne ricaverai che non ti conviene moltiplicare il 269 se non

solo per un quinto di 65, cioè per 13 e per un terzo di 12, cioè per 4 e poi per il 4 che sta sotto la linea di frazione davanti al 33 come abbiamo detto precedentemente. Il prodotto di tutte queste moltiplicazioni è 55952 che non dovrai dividere, in base alla suddetta semplificazione, per altro che un quinto di 135, cioè $\frac{1\ 0}{3\ 9}$ e per $\frac{1\ 0}{12\ 20}$, cioè per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 9\ 12\ 20}$, risulterà $\frac{2\ 2\ 8\ 12}{3\ 9\ 12\ 20}$ 8 libre.

Sulla conversione di soldi imperiali in genovesi.

(1) Parimenti, un soldo imperiale si vende per $\frac{1}{2}$ 31 denari pisani, e un soldo genovese vale $\frac{3}{4}$ 19 denari pisani e si richiede quante libre genovesi uno otterrebbe per 17 libre e 11 soldi e 5 denari, cioè per $\frac{5\ 11}{12\ 20}$ 17 libre imperiali. Schematizza il problema come qui si mostra, poi moltiplicherai $\frac{5\ 11}{12\ 20}$ 17 per $\frac{1}{2}$ 31 poi per i 12 genovesi e dividerai il loro prodotto per $\frac{3}{4}$ 19 e per i 12 imperiali. E semplificherai di lì ciò che potrai semplificare in base al metodo descritto sopra, risulterà $\frac{67\ 5\ 0}{79\ 12\ 20}$ 28 libre genovesi, come si mostra nello schema.

Sulla conversione di imperiali in genovesi.

(1) Parimenti $\frac{1}{2}$ 11 imperiali valgono $\frac{3}{4}$ 31 pisani, e $\frac{1}{3}$ 13 genovesi valgono $\frac{2}{5}$ 23 pisani. Si chiede quanti genovesi otterresti per $\frac{1}{6}$ 8 imperiali. Schematizza il problema come qui si mostra, e poiché la richiesta riguarda denari, si annoti il tipo di denaro sopra ciascun numero. Poi moltiplicherai $\frac{1}{6}$ 8 per $\frac{3}{4}$ 31 poi per $\frac{1}{3}$ 13 e dividerai il loro prodotto per $\frac{1}{2}$ 11 e per $\frac{2}{5}$ 23. (2) La qual cosa procede cosi: moltiplica l'11 per la sua parte frazionaria, risulterà 23 che devi scrivere sopra $\frac{1}{2}$ 11 e così farai per tutti gli altri numeri e otterrai il 127 sopra i $\frac{3}{4}$ 31 e il 40 sopra $\frac{1}{3}$ 13 e il 118 sopra $\frac{2}{5}$ 23 e il 49 sopra $\frac{1}{6}$ 8. Per cui moltiplicherai il 49 per il 127 poi per il 40 poi per le parti frazionarie degli altri due numeri, vale a dire per 5 e per 2. Poi dividerai tutto il loro prodotto [p.124]per il 23 e per la scomposizione del 118 che è $\frac{1\ 0}{2\ 59}$ e per le parti frazionarie che sono sotto gli altri tre numeri, vale a dire per il 6 e per il 4 e per il 3 che sono sotto le loro linee di frazione. Tutti questi, aggregati assieme, risulteranno $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{2\ 8\ 9\ 23\ 59}$ e così otterrai i genovesi che spetteranno per i suddetti $\frac{1}{6}$ 8 imperiali. (3) Invero se desideri semplificare qualcosa che di lì potrai semplificare, ometti di moltiplicare per il 2 che è sotto la linea di frazione davanti all'11 in modo da non dividere per il due che è all'estremità della linea di frazione. Parimenti ometti di moltiplicare per il 40, ma dividilo per 8, risulterà 5 e per questo 5 moltiplicherai e ometterai di dividere per l'8 che è nella frazione della divisione.

Dunque moltiplicherai il 49 per il 127, poi per il 5, vale a dire per l'ottava parte di 40, moltiplicherai questo prodotto per il 5 che è sotto la linea di frazione davanti al 23, risulterà 155575 che devi dividere per $\frac{1\ 0\ 0}{9\ 23\ 59}$, risulterà $\frac{1\ 13\ 43}{9\ 23\ 59}$ 12 denari genovesi.

Sulla conversione dei genovesi in imperiali.

(1) E ancora, se viceversa chiederai quanti imperiali potresti avere per $\frac{4}{7}$ 8 libre genovesi, schematizza il problema, come qui si vede. Poi moltiplicheai $\frac{4}{7}$ 8 per $\frac{3}{5}$ 23, come qui si mostra. Poi moltiplicherai $\frac{4}{7}$ 8 per $\frac{3}{5}$ 23 e il loro prodotto per $\frac{1}{2}$ 11 e dividerai per $\frac{1}{3}$ 13 e per $\frac{3}{4}$ 31. Cioè moltiplicherai il 60 per il 118 poi per il 23 poi per il 4 che sono sotto la linea di frazione davanti al 31, poi per il 3, che è sotto la linea di frazione davanti al 13 e dividerai il loro prodotto per la scomposizione del 40 che è $\frac{1\ 0}{4\ 10}$ e per 127 e per le parti frazionarie degli altri tre numeri, vale a dire per 7 e per 5 e per 2, ovvero per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{5\ 7\ 127\ 4\ 20}$. E abbiamo posto $\frac{1\ 0}{4\ 20}$ in cima alla linea di frazione perché qui dobbiamo avere $\frac{1\ 0}{12\ 20}$ dal momento che la richiesta del problema riguarda le libre. Poiché sappiamo che di qui ci manca un 3 per ottenere $\frac{1\ 0}{12\ 20}$, per questo scrivi un 3 sopra $\frac{1}{3}$ 13 affinché non te ne dimentichi quando dovrai calcolare la prova. Poi moltiplicherai per questo 3 tutto il risultato che dovrai dividere per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{5\ 7\ 127\ 12\ 20}$ e semplificherai. Ovvero moltiplica il 118 per un quinto di 60, cioè per 12, poi per 23, risulterà 32568 che devi moltiplicare per il 3 e poi per il 4 che stanno sotto la linea di frazione, risulterà 390816 che devi moltiplicare per il 3 che è stato scritto sopra $\frac{1}{3}$ 13, e dividerai il prodotto per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{7\ 127\ 12\ 20}$, risulterà $\frac{4\ 106\ 10\ 9}{7\ 127\ 12\ 20}$ 5 libre imperiali.

Sul baratto di libre imperiali con libre di pepe.

(1) E ancora, un soldo imperiale vale $\frac{1}{2}$ 31 denari imperiali, e un centone di pepe vale $\frac{11}{20}$ 11 libre, e avrai $\frac{1}{4}$ 57 libre imperiali dalle quali vorrai ottenere del pepe. Si richiede quanto otterresti di questo pepe da quelle $\frac{1}{4}$ 57 libre imperiali. Schematizza il problema, come qui si mostra. E poiché il prezzo del pepe, vale a dire $\frac{11}{20}$ 11 è della categoria delle libre e le $\frac{1}{4}$ 57 libre con le quali vogliamo comprare il pepe appartengono alla stessa categoria, è necessario che i numeri che sono sulla linea superiore, vale a dire il 12 e il $\frac{1}{2}$ 31, siano similmente libre.

(2) Per questo annoterai il tipo di libre sopra ciascuno di essi, in modo che il problema sia

posto in modo che poiché 12 libre imperiali valgono $\frac{1}{2}$ 31 pisani, allora avrai le libre imperiali - vale a dire $\frac{1}{4}$ 57 - sotto le 12 libre, e le libre pisane sotto le libre pisane, vale a dire $\frac{11}{20}$ 11 sotto $\frac{1}{2}$ 31. Poi, fatto questo, moltiplica $\frac{1}{4}$ 57 per $\frac{1}{2}$ 31 che gli si oppone in diagonale, poi per 100 che si oppone in diagonale allo stesso $\frac{1}{2}$ 31. Poi si divida il prodotto per gli altri due numeri che rimangono nello schema, vale a dire per 12 e per $\frac{11}{20}$ 11, risulterà $\frac{7\ 1}{11\ 12}$1301 libre di pepe, come si mostra nello schema, cioè 3 tentenari e 1 libra e $\frac{7}{11}$ 1 oncie.

Sullo stesso argomento.

(1) Invero se in base agli elementi scritti precedentemente chiederai quanto pepe avresti per $\frac{1}{4}$ 57 soldi, allora in questo problema saprai che $\frac{1}{4}$ 57 soldi devono essere scritti in altro modo, vale a dire in modo da trasformare $\frac{1}{4}$ 57 soldi in libre. Risulterà 2 libre e $\frac{1}{4}$ 17 soldi, cioè $\frac{1\ 17}{4\ 20}$ 2 libre che devi scrivere nello schema sotto i 12 imperiali, e annoterai le libre sopra il 12 - come similmente sopra hai annotato - o sopra il prezzo [p.125] scritto sopra il 12, vale a dire sopra $\frac{1}{2}$ 31 che bisogna porre nello schema sopra il prezzo del centenario di pepe, vale a dire sopra $\frac{11}{20}$ 11 libre. E risulteranno lì libre pisane sotto libre pisane, vale a dire $\frac{11}{20}$ 11 libre sotto $\frac{1}{2}$ 31 libre, e le libre imperiali risulteranno similmente sotto le libre imperiali, cioè $\frac{1\ 17}{4\ 20}$ 2 libre sotto le 12 libre, come si mostra nello schema. Per questo moltiplicherai $\frac{1\ 17}{4\ 20}$ 2 per $\frac{1}{2}$ 31, poi per 100 e dividerai il prodotto per $\frac{11}{20}$ 11 e per 12 e per $\frac{1}{4}$, risulterà $\frac{1\ 7\ 0}{2\ 11\ 12}$ 65 libre di pepe, come si mostra nello schema che è la ventesima parte di $\frac{7\ 1}{11\ 12}$ 1301, come $\frac{1}{4}$ 57 soldi è $\frac{1}{20}$ di $\frac{1}{4}$ 57 libre.

(2) Possiamo invero schematizzare in altro modo questo stesso problema, vale a dire se poniamo $\frac{1}{4}$ 57 soldi imperiali sotto i 12 imperiali e si annoti 'soldi' sopra di essi. E poiché $\frac{1}{4}$ 57 sono soldi imperiali, è necessario che il 12 che sta sopra di essi divenga similmente soldi, dunque anche $\frac{1}{2}$ 31 saranno similmente soldi. Per questo annoterai 'soldi' sopra $\frac{1}{2}$ 31 e sopra il 12. E poiché il prezzo di un centenario di pepe, vale a dire $\frac{11}{20}$ 11 libre, deve essere posto sotto il prezzo degli imperiali, vale a dire sotto $\frac{1}{2}$ 31, allora è necessario che come $\frac{1}{2}$ 31 sono soldi, così trasformiamo in soldi le $\frac{11}{20}$ 11 libre, risulterà 231 soldi. Questo numero lo devi scrivere nello schema sotto $\frac{1}{2}$ 31 e annoterai 'soldi' sopra di esso come si vede in quest'altra figura

nella quale tale lo schema è tale per cui 12 soldi imperiali valgono $\frac{1}{2}$ 31 soldi pisani e un centenario di pepe vale 23 soldi e si chiede quanto pepe uno potrebbe avere per $\frac{1}{4}$ 57 soldi. Moltiplicherai pertanto 229 che sta sopra $\frac{1}{4}$ 57, per 63 che sta sopra $\frac{1}{2}$ 31 poi per il centenario di pepe e dividerai il loro prodotto per la scomposizione di 231 che è $\frac{1\ 0\ 0}{3\ 7\ 11}$ e per $\frac{1}{12}$ e per $\frac{1}{2}$ che sta sotto la linea di frazione davanti al 31 e per 4 che sta sotto la limea di frazione davanti al 57, cioè per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{3\ 7\ 8\ 11\ 12}$ e semplificherai di lì ciò che puoi semplificare, risulterà similmente $\frac{1\ 7\ 0}{2\ 11\ 12}$ 65 libre, come nello schema precedente si è mostrato.

Sullo stesso argomento.

(1) Di nuovo, se sulla base degli stessi elementi chiederai quanto pepe potresti ottenere per $\frac{1}{4}$ 57 denari imperiali, sappi che otterrai di lì tante oncie, quante libre hai ottenuto da $\frac{1}{4}$ 57 soldi, cioè $\frac{1\ 7\ 0}{2\ 11\ 12}$ 65 oncie: questo perché come si dice che $\frac{1}{4}$ 57 è $\frac{1}{12}$ di $\frac{1}{4}$ 57 soldi, così anche $\frac{1\ 7\ 0}{2\ 11\ 12}$ 65 oncie è $\frac{1}{12}$ di $\frac{1\ 7\ 0}{2\ 11\ 12}$ 65 libre. (2) E dal momento che le cose stanno così, indicheremo, attraverso una tecnica, come ricavare tali oncie. Possiamo invero schematizzare tale problema in due modi. In base al primo, invero, siccome il prezzo del centenario di pepe, vale a dire $\frac{11}{20}$ 11, è espresso in libre, così il prezzo degli imperiali, vale a dire $\frac{1}{2}$ 31 devono essere similmente libre, perché altrimenti non possono essere libre se i 12 imperiali non saranno similmente libre. Per cui annoterai 'libre' sopra il 12 e sopra $\frac{1}{2}$ 31. Poi, poiché conviene scrivere i $\frac{1}{4}$ 57 denari imperiali sotto le suddette 12 libre imperiali, è necessario che si trasformino tali $\frac{1}{4}$ 57 denari imperiali in frazioni di una libra in modo che stiano libre sotto libre, e risulterà $\frac{1\ 9\ 4}{4\ 12\ 20}$ di una libra, la quale frazione devi porta sotto il 12 come si vede qui nello schema. (3) E la richiesta è tale: poiché 12 libre imperiali valgono $\frac{1}{2}$ 31 libre pisane e un centenario di pepe vale $\frac{11}{20}$ 11 libre pisane, si richiede quanto pepe uno otterrebbe per $\frac{1\ 9\ 4}{4\ 12\ 20}$ di una libra. Moltiplicherai il 4 che sta sopra il 20 per il 12 e addiziona il 9 che sta sopra il 12 poi moltiplica per 4 e addiziona l'1, risulterà 229 che devi moltiplicare per 63 e per 100 e poi per il 20 che sta sotto la linea di frazione davanti all'11. Poi devi dividere il loro prodotto per la scomposizione di 231 che è $\frac{1\ 0\ 0}{3\ 7\ 11}$ e per 12 e per le altre parti frazionarie, vale a dire per 2 e per $\frac{1\ 0\ 0}{4\ 12\ 20}$, cioè per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{3\ 7\ 8\ 11\ 12\ 20\ 12}$, e semplificherai ciò che puoi semplificare, risulterà

$\frac{1\ 7\ 1\ 5}{2\ 11\ 12\ 12}$ 5, come si mostra nello schema che è altrettanto che $\frac{1\ 7\ 1}{2\ 11\ 12}$ 65 oncie, come abbiamo detto precedentemente.

(4) Parimenti vi è un altro modo di schematizzare questo problema, se poni i detti $\frac{1}{4}$ 57 imperiali sotto [p. 126] i 12 imperiali e risulterà $\frac{1}{4}$ 57 denari e 12 denari e $\frac{1}{2}$ 31 denari. Per questo si annoterà ‘denari’ sopra ciascuno di quesi numeri. E poiché il prezzo del centenario di pepe, vale a dire $\frac{11}{20}$ 11 libre, si deve scrivere sotto $\frac{1}{2}$ 31 denari, è necessario che trasformi in denari le $\frac{11}{20}$ 11 libre, risulta 2772 e lo poni sotto $\frac{1}{2}$ 31 in modo che siano denari sotto denari come si mostra in quest’altro schema. Poi moltiplicherai 229 per 63 poi per 100 il cui prodotto devi dividerlo per la scomposizione di 2772 che è $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{4\ 7\ 9\ 11}$ e per i 12 imperiali e per le parti frazionarie, vale a dire per $\frac{1}{2}$ e per $\frac{1}{4}$ e semplificherai ciò che puoi semplificare, risulterà similmente $\frac{1\ 7\ 0\ 5}{2\ 11\ 12\ 12}$ 5 libre di pepe, come abbiamo ricavato nello schema precedente.

Sul baratto del pepe con gli imperiali.

(1) E se viceversa chiederai quanti imperiali, in base agli elementi scritti sopra, uno potrebbe ottenere da $\frac{1}{4}$ 57 libre di pepe, scrivi le $\frac{1}{4}$ 57 libre sopra il centenario di pepe come si vede in quest’altro schema. Poi moltiplicherai $\frac{1}{4}$ 57 per $\frac{11}{20}$ 11 poi per i 12 imperiali e dividerai il prodotto per 100 e per $\frac{1}{2}$ 31, cosa che deve avvenire in base al metodo che abbiamo spiegato sopra per casi simili. E semplificherai $\frac{1\,1}{7\,3}$ che sono nella scomposizione del 63 in virtù del $\frac{1\ 0}{3\ 7}$ che è nella scomposizione del 231 e adatterai la frazione della divisione in modo che all'inizio vi sia $\frac{1\ 0}{12\ 20}$ perché il risultato deve essere posto sotto le 12 libre imperiali, risulterà $\frac{6\ 5\ 4\ 10}{10\ 10\ 12\ 20}$ 2 come prezzo delle suddette $\frac{1}{4}$ 57 libre di pepe.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti se si richiede quanti imperiali potresti ottenere per $\frac{1}{4}$ 57 oncie, o trasformi in libre le $\frac{1}{4}$ 57 oncie, che sono $\frac{1\ 9}{4\ 12}$ 4 libre e le poni sopra il centenario di pepe, oppure trasformi in oncie il centenario, che è 1200 oncie sopra cui poni $\frac{1}{4}$ 57 oncie. (2) E nota che è meglio trasformare le libre in oncie - in questo e simili problemi - anziché trasformare le oncie in libre, poiché quando trasformi le oncie in libre aumentano alquanto le frazioni nello schema per cui il problema sembra essere troppo difficile. Perciò quando, in qualche altro problema,

occorre porre i soldi o i denari sotto le libre o sopra le libre di denari, è meglio trasformare le libre in soldi e denari anziché i soldi e i denari in libre o frazioni di esse. Ed è meglio trasformare i tareni in grani anziché i grani in tareni. Lo stesso s'intenda per i bizanti e per tutte le monete sebbene in alcuni problemi del precedente capitolo abbiamo mostrato altrimenti. (3) Scritte pertanto le $\frac{1}{4}$ 57 oncie sopra le 1200 oncie, trasforma in soldi il prezzo del centenario di pepe, vale a dire $\frac{11}{20}$ 11 libre, risulteranno 231 soldi che devi scrivere sopra $\frac{1}{2}$ 31, e il problema sarà posto così perché 12 soldi imperiali valgono $\frac{1}{2}$ 31 soldi e 1200 oncie di pepe valgono 231 soldi come si mostra in quest'altro schema. (4) E sappi che poiché abbiamo trasformato in soldi le $\frac{11}{20}$ 11 libre, poiché gli stessi 100 soldi con i 12 imperiali sotto i quali bisogna porre il risultato - vale a dire il prezzo delle $\frac{1}{4}$ 57 oncie -, affinché il prezzo non risulti di grande quantità, dimostreremo facilmente, siccome la richiesta è in soldi, come sarebbe in libre. E moltiplicherai 229 per 231 poi per 12 poi per 2 che sono sotto la linea di frazione e dividerai il prodotto per 63 e per 1200 e per 4 e semplificherai ciò che puoi semplificare e sistemerai $\frac{1}{12}$ in cima alla linea di frazione per i denari, risulterà come prezzo di quelle oncie, $\frac{8\ \ 3\ \ 2}{10\ \ 10\ \ 12}$ 4 soldi. O, altrimenti, sia 100 al posto di 1200 e questo 100 saranno oncie perché sono oncie $\frac{1}{4}$ 57 e ciò che è sopra di esso, e i restanti numeri saranno denari, cioè 231 e $\frac{1}{2}$ 31 e 12, e farai i calcoli come sopra.

Sui baratti delle monete con più monete simili tra loro.

(1) Dodici denari imperiali valgono 31 denari pisani e un soldo genovese vale 23 denari pisani e un soldo [p.127] torinese vale 12 genovesi e un soldo barcellonese vale 11 soldi torinesi, si chiede quanti denari barcellonesi valgano 15 denari imperiali. (2) In base al metodo volgare si consideri innanzitutto quanti pisani valgano i 15 imperiali, valgono infatti $\frac{3}{4}$ 38 denari pisani. Di questi si consideri quanti genovesi valgano, valgono invero $\frac{5}{23}$ 20 genovesi. Di questi si consideri quanti torinesi valgono, valgono invero $\frac{3\ \ 15}{13\ \ 23}$ 18 torinesi, vale a dire un poco di meno di $\frac{2}{3}$ 18 torinesi, dei quali ancora bisogna considerare parimenti quanti barcellonesi valgono, valgono invero un poco di più di $\frac{2}{8}$ 20 barcellonesi, che è il prezzo dei 15 imperiali scritti precedentemente. (3) Ma in base all'insegnamento scientifico scrivi tutte le monete scritte precedentemente su due linee in ordine, vale a dire sulla linea superiore i 12 imperiali e 31 pisani, scrivendoli in successione, e nella linea inferiore i 12 genovesi e i 23 pisani, in

modo che stiano pisani sotto pisani. Poi nella linea superiore 12 torinesi e 13 genovesi in modo che i 13 genovesi stiano sopra i 12 genovesi, poi sotto i 12 torinesi poni gli 11 torinesi e in successione sulla stessa linea poni i 12 barcellonesi. E così otterrai nella linea superiore: 12 imperiali e 31 pisani e 13 genovesi e 12 torinesi; in quella inferiore: 23 pisani e 12 genovesi e 11 torinesi e 12 barcellonesi. E dal momento che hai gli imperiali da cambiare, vale a dire 15, ponili sotto i 12 imperiali, come qui si mostra. Poi motiplicherai quel 15 per i 31 pisani che gli si oppone in diagonale, il prodotto dei quali lo moltiplicherai per i 12 genovesi che si oppone in diagonale allo stesso 31, il prodotto della quale moltiplicazione lo moltiplicherai di nuovo per i 12 torinesi dal momento che esso si oppone in diagonale rispetto ai suddetti 12 genovesi, il prodotto della cui moltiplicazione lo moltiplicherai di nuovo per i 12 barcellonesi che è similmente in diagonale rispetto ai detti 12 torinesi. Tutto questo prodotto lo dividerai per i 12 imperiali e per i 23 pisani e per i 13 genovesi e per gli 11 torinesi e semplificherai ciò che potrai semplificare, risulterà $\frac{3\ 3\ 8}{11\ 13\ 23}$ 20 barcellonesi come prezzo dei 15 imperiali, vale a dire un po' più di $\frac{2}{8}$ 20 barcellonesi, come abbiamo detto prima.

(5) Invero se avrai 15 barcellonesi da cambiare con imperiali, scrivi i 15 barcellonesi sopra i 12 barcellonesi, come si vede in quest'altro schema, e allora moltiplicherai i 15 barcellonesi per gli 11 torinesi, il cui prodotto lo moltiplicherai per i 13 genovesi, poi per i 23 pisani e i 12 imperiali. Poi dividi il prodotto della suddetta moltiplicazione per i 12 barcellonesi e per i 12 torinesi e per i 12 genovesi e per i 31 pisani e otterrai $\frac{5\ 4\ 1}{6\ 8\ 31}$ 11 per i suddetti 15 barcellonesi. E così, in base a questo metodo potrai fare i calcoli riguardo innumerevoli monete. (6) Infatti la proporzione degli imperiali ai barcellonesi è composta dalle quattro proporzioni scritte sopra, cioè da quella fra la quantità di imperiali e il suo prezzo - cioè fra 12 e 31 -; e da quella fra il 23 e la sua quantità di genovesi, cioè 12; e da quella fra la quantità di genovesi ai suoi torinesi - vale a dire fra 13 e 12; e da quella fra la quantità dei torinesi e la sua quantità di barcellonesi - vale a dire fra 11 e 12; cioè dalla proporzioni fra gli antecedenti e i conseguenti. E di qui procede il suddetto metodo del moltiplicare e del dividere.

Parte seconda del nono capitolo sull'acquisto della bolsonaglia in base a un metodo.

(1) Si chiamano 'bolsonaglia' quelle monete che non si comprano se non per quanto vale l'argento contenuto in esse, in modo che sciogliendole sul fuoco in un recipiente, di lì si formino altre monete. Per questo noi mostreremo come si debba ricavare in prezzo di esse in base al metodo del baratto, sia in peso di libre sia in quantità.

Sull'acquisto di una quantità di boldonaglia in peso di libre.

(1) Uno possiede 11 libre di una quantità di bolsonaglia di 2 oncie d'argento, cioè [p.128]sono contenute due oncie d'argento in ciascuna sua libra, e una libra d'argento vale sette libre pisane e si richiede quanti pisani tu debba ottenere per queste 11 libre. (2) Scrivi pertanto in cima alla tavoletta 1 per la libra di bolsonaglia, e l'argento che sta nella stessa libra, vale a dire 2 oncie, ponilo in successione sulla stessa linea, e sotto tali due oncie scrivi 12, vale a dire le oncie di ciascuna libra d'argento, sulla cui linea in successione scrivi il prezzo di tale libra, vale a dire 7 libre di pisani, e sotto l'1 scritto per la bolsonaglia, scrivi le 11 libre della suddetta bolsonaglia in modo che ci sia bolsonaglia sotto bolsonaglia come c'è argento sotto argento, vale a dire 12 oncie sotto 2 oncie, come si scrive in questo schema. Poi moltiplicherai i tali tre numeri che a vicenda si oppongono in diagonale, in base al metodo del baratto, cioè: 11 per 2, il cui prodotto per 7, risulterà 154 che devi dividere per i restanti due numeri, vale a dire per 1 e per 12, risulterà $\frac{5}{6}$ 12 libre, cioè 12 libre e 16 soldi e 8 denari come prezzo delle suddette 11 libre di bolsonaglia. (3) Altrimenti questo stesso risultato lo si calcola attraverso il metodo della transazione economica, vale a dire se tu vedi quanto argento c'è in quelle 11 libre di bolsonaglia, dal momento che in una libra ci sono 2 oncie d'argento, e ricaverai che ci sono 22 oncie in quelle stesse 11 libre di bolsonaglia, il cui prezzo avrai chiesto, dal momento che una libra d'argento vale 7 libre, la schematizzazione di tale operazione è la seguente.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti se si chiede quanti pisani otterresti da 11 oncie della suddetta bolsonaglia in base agli elementi scritti precedentemente, dal momento che in questo problema si chiede il prezzo delle oncie di bolsonaglia, devi scrivere 12 oncie per una libra di bolsonaglia in modo che risultino 11 oncie sotto 12 oncie come si mostra in questa altra figura. Poi moltiplicherai l'11 per il 2, poi per il 7, risulterà 154 che devi dividere per 12 e per 12, cioè per $\frac{1\ 0\ 0}{3\ 4\ 12}$. Ma poiché la posizione in cui bisogna porre il risultato della divisione è sopra le libre, vale a dire sopra il 7, è necessario che noi moltiplichiamo 154 per 5, e poni il 5 sotto la linea di frazione della divisione e adattalo con il 4 che è sotto la stessa virgola, ricaverai da essi $\frac{1}{20}$, risulterà da essi $\frac{2\ 4\ 1}{3\ 12\ 20}$ 1 libre pisane come prezzo di quelle 11 oncie.

(2) Parimenti se si chiedesse quanto valgono 11 denari di cantare della stessa bolsonaglia, scrivi la misura dei denari di una libra, vale a dire 300, sopra gli 11 denari, in modo che i denari di cantare stiano sotto i denari di cantare come appare in quest'altra figura. Poi

moltiplicherai l'11 per il 2, poi per il 7, risulterà 254 che devi dividere per 12 e per 300, cioè per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 5\ 12\ 20}$, risulterà $\frac{1\ 1\ 10\ 0}{3\ 5\ 12\ 20}$, cioè $\frac{1\ 1}{3\ 5}$ 10 denari come prezzo di quegli 11 denari di cantare.

(3) E ancora, uno ha $\frac{2}{3}$ 8 libre di una certa bolsonaglia che è di $\frac{1}{4}$ 2 oncie d'argento e una libra d'argento vale $\frac{9}{20}$ 7 libre di pisani e si chiede quanti pisani otterrebbe per queste $\frac{2}{3}$ 8 libre di bolsonaglia. Schematizza il problema come qui si mostra. Poi moltiplicherai $\frac{2}{3}$ 8 per $\frac{1}{4}$ 2 che si oppongono in diagonale e moltiplicherai il loro prodotto per $\frac{9}{20}$ 7 dal momento che si oppone in diagonale a $\frac{1}{4}$ 2. Poi dividerai il prodotto per i due numeri restanti, vale a dire per 1 e per 12, e semplificherai ciò che potrai semplificare, risulterà $\frac{1\ 1\ 2}{2\ 12\ 20}$, come prezzo di quelle $\frac{2}{3}$ 8 libre.

(4) Invero se supporrai che le $\frac{2}{3}$ 8 libre scritte precedentemente della detta bolsonaglia siano oncie, scrivi le oncie di una libra di bolsonaglia, vale a dire 12, sopra le $\frac{2}{3}$ 8 oncie, come si mostra nello schema. Poi moltiplicherai il 26 che sta sopra $\frac{2}{3}$ 8 per il 9 che sta sopra $\frac{1}{4}$ 2, che moltiplicherai per 149 ventesimi. Poi dividerai il prodotto per 12 e per 12 e per tutte le parti frazionarie, vale a dire per 3 e per 4 e per 20 e semplificherai ciò che potrai semplificare, risulterà $\frac{1\ 1\ 2}{8\ 12\ 20}$ 1 libre, cioè 20 soldi e $\frac{1}{8}$ 2 denari come prezzo di quelle $\frac{2}{3}$ 8 oncie di bolsonaglia.

Sullo stesso argomento.

(1) E ancora se supporrai che le $\frac{2}{3}$ 8 oncie scritte precedentemente siano denari di cantare, [p.129] scrivi i denari di cantare di una libra, vale a dire 300, sopra i $\frac{2}{3}$ 8 denari, come si mostra in questo schema. Poi moltiplicherai il 26 per il 9 e per il 149 e dividerai per 300 e per 12 e per tutte le parti frazionarie e semplificherai ciò che puoi semplificare, risulterà $\frac{1\ 8\ 6\ 9\ 0}{2\ 10\ 10\ 12\ 20}$ cioè $\frac{1\ 8\ 6}{2\ 10\ 10}$ 9 denari, vale a dire un po' di più di $\frac{2}{3}$ 9 denari.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti uno ha 11 libre e 7 oncie e $\frac{1}{2}$ 13 denari di cantare, cioè $\frac{1\ 13\ 7}{2\ 25\ 12}$ 11 libre di una certa bolsonaglia nella cui libra ci sono 5 oncie e 7 denari di cantare, cioè $\frac{7}{25}$ 5 oncie d'argento, e una libra di argento vale $\frac{5\ 11}{12\ 20}$ 7 pisani, trasforma quindi in oncie le $\frac{1\ 13\ 7}{2\ 25\ 12}$ 11 libre, risulterà $\frac{1\ 13}{2\ 25}$ 139 oncie che devi scrivere sotto le oncie della libra di bolsonaglia, vale a

dire sotto il 12, in modo che le oncie stiano sotto le oncie come si mostra nella figura. Poi moltiplicherai le 139 oncie di bolsonaglia per la sua parte frazionaria, cioè per 25 e addiziona il 13 poi moltiplica per 2 e addiziona l'1, risulterà 6977. Sul 6977 scrivi la sua prova del 7 che è 5. Poi moltiplica le 5 oncie d'argento per la loro parte frazionaria cioè per 25 e addiziona il 7, risulterà 132 che devi porre sopra il $\frac{7}{25}$ 5 e sopra scrivi la prova, che è 6. Similmente fai con $\frac{5\ \ 11}{12\ \ 20}$ 7 libre, e otterrai su di esse 1817, la cui prova è 4. Poi moltiplica 6977 per 132 e il loro prodotto per 1817 e dividi tutto il prodotto per le 12 oncie di bolsonaglia, le 12 dell'argento e per tutti i numeri che sono sotto le linee di frazione, e semplificherai ciò che potrai semplificare e raggrupperai i denominatori e farai la verifica delle moltiplicazioni e delle divisioni in base a ciò che più sopra abbiamo spiegato. E otterrai $\frac{2\ \ 4\ \ 9\ \ 1\ \ 6\ \ 8\ \ 14}{3\ \ 5\ \ 10\ \ 10\ \ 10\ \ 12\ \ 20}$ 38 libre come prezzo delle $\frac{1\ \ 13}{2\ \ 25}$ 139 oncie scritte sopra. E la prova del sette del risultato del prezzo scritto sopra è 3.

Sulla bolsonaglia quando si vende come quantità.

(1) Uno ha 13 libre e 7 soldi di una certa bolsonaglia nella cui libra sono contenuti 31 soldi e nella cui libra sono contenute $\frac{3}{4}$ 3 oncie d'argento, e una libra d'argento vale $\frac{13}{20}$ 7 pisani. Si chiede quanti pisani si otterrebbe con la suddetta bolsonaglia. Trasforma in soldi le $\frac{7}{20}$ 13 libre, risulterà 267 soldi che devi scrivere sotto i 31 soldi in modo che i soldi stiano sotto i soldi come si mostra in questo schema. Poi moltiplicherai il 267 per il numero corrispondente a $\frac{3}{4}$ 3, cioè per 15 che moltiplicherai per il numero corrispondente a $\frac{13}{20}$ 7, cioè per 153, poi dividerai il prodotto per 31 e per 12 e per tutte le parti frazionarie, vale a dire per 4 e per 20, risulterà $\frac{1\ \ 20\ \ 9\ \ 11}{4\ \ 31\ \ 12\ \ 20}$ 20 libre di pisani come prezzo delle 13 libre e 7 soldi della suddetta bolsonaglia. (2) E se vuoi sapere quanti pisani valga 1 soldo della detta bolsonaglia, scrivi 1 per questo soldo sotto i 31 soldi, come qui si mostra, e moltiplicherai tale 1 per $\frac{3}{4}$ 3 poi per $\frac{13}{20}$ 7. Poi dividerai per 12 e per 31, cioè moltiplicherai il suddetto 1 per 15, poi per 153, risulterà 2295 che devi dividere per $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{4\ \ 31\ \ 12\ \ 20}$, risulterà $\frac{3\ \ 15\ \ 6\ \ 1}{4\ \ 31\ \ 12\ \ 20}$, cioè $\frac{3\ \ 15}{4\ \ 31}$ 18 denari, che sono $\frac{1}{2}$ 18 denari e in più $\frac{1}{124}$ di un denaro che dunque devi avere come prezzo di un soldo della suddetta bolsonaglia. (3) Possiamo attraverso quel soldo ricavare il prezzo di qualunque libre o soldi o denari, in base a ciò che abbiamo esemplificato più sopra nel precedente capitolo.

Sullo stesso argomento.

(1) E se della suddetta bolsonaglia avrai soltanto 9 denari da cambiare, o trasformerai i 31 soldi in denari - che sono 372 - e li porrai sui 9 denari scritti precedentemente, come si mostra in questa figura. Oppure trasformerai i 9 denari in frazioni di un soldo - vale a dire $\frac{3}{4}$ - e li scriverai sotto il 31 come più in basso si mostra nell'altra figura. Invero nella figura superiore moltiplicherai i 9 denari per 15 e per 153 . Poi dividerai il prodotto per la scomposizione di 372, [p.130] che è $\frac{1\ 0\ 0}{3\ 4\ 31}$ e per 12 e per le parti frazionarie, cioè per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{3\ 4\ 4\ 31\ 12\ 20}$, semplificherai di lì $\frac{1}{3}$ da 15, cioè moltiplicherai il 9 per la terza parte di 15, vale a dire per 5, poi per 153, risulterà 6885 che devi dividere per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{4\ 4\ 31\ 12\ 20}$, risulterà $\frac{1\ 2\ 27\ 1\ 1}{2\ 8\ 31\ 12\ 20}$, cioè $\frac{1\ 2\ 27}{2\ 8\ 31}$ 13 denari.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti vi sono $\frac{5\ 9}{12\ 20}$ 13 libre di una certa bolsonaglia che è di $\frac{1}{8}$ 5 oncie d'argento, e in una libra di questa vi sono 31 soldi e 3 denari, cioè $\frac{1}{4}$ 31 soldi, e una libra d'argento vale 8 libre e 7 soldi e 6 denari, cioè $\frac{3}{8}$ 8 libre. Trasforma in soldi le $\frac{5\ 9}{12\ 20}$ 13 libre, risulterà $\frac{5}{12}$ 269 soldi che devi scrivere sotto $\frac{1}{4}$ 31 soldi, come qui si mostra. Poi moltiplicherai il 269 per la sua frazione, risulterà 3233 che devi scrivere sopra $\frac{5}{12}$ 269, e su di esso scrivi la sua prova dell'11 che è 10; similmente devi fare con $\frac{1}{8}$ 5 e otterrai 41 sopra di esso, la cui prova è 8; fai la stessa cosa con $\frac{3}{8}$ 8, e otterrai 67 e 1 come prova; e sopra $\frac{1}{4}$ 31 otterrai 125. Poi moltiplicherai 3233 per 41 e per 17 e per 4 che sta sotto la linea di frazione del 31. Poi dividerai il prodotto per la scomposizione di 125 che è $\frac{1\ 0\ 0}{5\ 5\ 5}$ e per 12 e per le parti frazionarie dei tre numeri restanti, vale a dire per 12 e per 8 e per 8, e adatterai le parti frazionarie e semplificherai e farai la prova, sempre risulterà $\frac{1\ 3\ 7\ 8\ 8\ 16}{2\ 6\ 10\ 10\ 12\ 20}$ 30 libre come prezzo delle suddette 13 libre e 9 soldi e 5 denari.

Sullo stesso argomento.

(1) E se vorrai ricavare il prezzo di un soldo di tale bolsonaglia, scrivi 1 sotto $\frac{1}{4}$ 31. Poi moltiplicherai tale 1 per 41, risulterà 41 che moltiplicherai per 67, risulterà 2747 che ometterai di moltiplicare per il 4 che sta sotto la linea di frazione davanti al 31 e non dividerai per il 4 che sta nella scomposizione dell'8 che sta sotto il 41. Dunque dividerai 2747 per 125 e per 12 e per il 2 che resta dell'8 che sta sotto la linea di frazione sotto il 41, e per l'8 che sta

sotto la linea di frazione sotto il 67, e accorperai le frazioni, risulterà $\frac{7\ 4\ 3\ 2}{10\ 10\ 12\ 20}$, come si mostra in questa figura, cioè poco meno di $\frac{1}{2}$ 27 denari cioè $\frac{3}{5}$ di un denaro in meno per ciascuna libra. (2) E questo si capisce così: poiché il prezzo del soldo è di $\frac{7\ 4}{10\ 10}$ 27 denari, cioè $\frac{47}{100}$ 27 denari, dai quali fino a $\frac{1}{2}$ 27 denari manca $\frac{3}{100}$ di un denaro, dunque se a ciascun soldo mancherà $\frac{3}{100}$ di un denaro, a una libra - vale a dire 20 soldi - mancherà $\frac{60}{100}$, cioè $\frac{3}{5}$ di un denaro, come abbiamo detto precedentemente.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti se di chiedesse il prezzo di $\frac{1}{2}$ 8 denari di tale bolsonaglia, o trasformi i $\frac{1}{4}$ 31 soldi in denari, che sono 375 , e li poni sotto i suddetti $\frac{1}{2}$ 8 denari, oppure trasformi tali $\frac{1}{2}$ 8 denari nella frazione di un soldo, vale a dire $\frac{1\ 8}{2\ 12}$ e li poni sotto i $\frac{1}{4}$ 31 soldi, in modo che i soldi stiano sotto i soldi come si mostra in questa figura. Poi moltiplicherai gli 8 denari per la sua parte frazionaria, risulterà 17 che devi moltiplicare per 41, poi per 67, poi per il 4 che sta sotto la linea di frazione davanti al 31. Poi devi dividere per 125 e per 12 e per le parti frazionarie, vale a dire per $\frac{1\ 0}{2\ 12}$ e per 8 e per 8 e semplificherai e aggregherai e risulterà $\frac{1\ 6\ 5\ 4\ 7\ 1}{3\ 8\ 10\ 10\ 12\ 20}$, cioè $\frac{1\ 6\ 5\ 4}{3\ 8\ 10\ 10}$ 19 denari.

(2) Parimenti uno ha 11 soldi e 7 denari, cioè $\frac{7}{12}$ 11 soldi di una certa bolsonaglia che è di $\frac{1}{4}$ 3 oncie, e sono contenute in una libra di quella bolsonaglia 28 soldi e $\frac{1}{2}$ 5 denari, cioè $\frac{1\ 5}{2\ 12}$ 28 soldi, e una libra d'argento vale $\frac{7}{20}$ 8 libre. Schematizza il problema come qui si mostra. Poi moltiplica il 28 per la sua frazione, risulterà 683. Similmente moltiplica tutti i numeri per le loro frazioni e otterrai 13 sopra $\frac{1}{4}$ 3 e 167 sopra $\frac{7}{20}$ 8, e 139 sopra $\frac{7}{12}$ 11. [p.131] E allora moltiplicherai il 139 per il 13, poi per il 167 poi per le parti frazionarie che sono con il 28, vale a dire per il 2 e per il 12 e dividerai il prodotto per 683 e per 12 e per le parti frazionarie dei tre numeri moltiplicati, vale a dire per 11 e per 4 e per 20 e semplificherai e aggregherai e così otterrai $\frac{1\ 624\ 4\ 18}{6\ 683\ 12\ 20}$ come prezzo dei $\frac{7}{12}$ 11 soldi della suddetta bolsonaglia. (3) E così potrai ricavare i prezzi di qualunque bolsonaglia attraverso il metodo esemplificato del sesto proporzionale: questa proporzione è composta da due proporzioni date. E quando una qualche proporzione è composta da alcune proporzioni allora essa è chiamata proporzione delle proporzioni: dimostrerò chiaramente in che modo avvenga questa composizione. (4) Sia data

una qualche somma da cui si ricavi una seconda somma attraverso una data proporzione di due numeri; e dalla seconda somma si ricavi una terza attraverso la proporzione di due numeri qualunque; e dalla terza somma nello stesso modo se ne ricavi una quarta e così via. Allora la proporzione della prima somma con l'ultima si dice composta da tutte le proporzioni date, vale a dire che la proporzione del numero realizzato da tutti gli antecedenti con il numero realizzato dai conseguenti è la stessa di quella fra la prima somma e l'ultima.

(5) Per esempio, un tale aveva 100 bizanti, dei quali in una prima vendita ne ha realizzati 3 ogni due, nella seconda 5 ogni 4, nella terza 7 ogni 6. Scrivi queste proporzioni in una linea di frazione così $\frac{2\ 4\ 6}{3\ 5\ 7}$ e tutti gli antecedenti sono sopra la linea di frazione e i conseguenti sotto di loro. E poiché nella prima vendita da due ha ricavato 3, la prima somma sta alla seconda come 2 sta a 3, per questo la prima somma è $\frac{2}{3}$ della seconda; di questa poiché di 4 ha realizzato 5, la proporzione della seconda somma alla terza è come 4 sta a 5, per questo la seconda somma è $\frac{4}{5}$ della terza somma, e così la prima somma è $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$ della terza somma; di questa terza somma poiché di 6 ha realizzato 7, la terza somma è $\frac{6}{7}$ della quarta somma. Per questo la prima somma è $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$ di $\frac{6}{7}$dell'ultima somma richiesta. La proporzione fra le quali due somme - la prima e l'ultima - è come quella del numero realizzato dagli antecedenti con il numero realizzato dai conseguenti. E il numero realizzato dagli antecedenti è 48, che è similmente della prima somma, e che proviene dalla moltiplicazione degli antecedenti fra loro, vale a dire di 2 per 4 per 6; il numero poi realizzato dai conseguenti è 105 perché 3 per 5 moltiplicati per 7 realizzano 105 e si deve assimilare all'ultima somma. Dunque se dall'inizio come prima somma si ha 48 e come quarta si ha 105, poiché se calcoli i $\frac{6}{7}$ di 105 risulta 90 come terza somma, se di esso calcoli i $\frac{4}{5}$, risulta 72 come seconda somma, se di esso calcoli i $\frac{2}{3}$, risulta 48 come prima somma. (6) O altrimenti, se calcolerai 3 per ogni 2 del 48, risulterà 72, di esso se calcolerai 5 ogni 4, risulterà 90, di questo ancora se calcolerai 7 ogni 6 - cioè moltiplicherai $\frac{1}{6}$ di 90 per 7 - risulterà 105. Dunque la proporzione di 48 a 105 è composta dalle 3 proporzioni date cioè da quella fra 2 e 3 e da quella fra 4 e 5 e da quella fra 6 e 7. (7) E poiché come 48 sta a 105, così la prima somma alla somma cercata, per questo se la prima somma sarà 100, questo è da moltiplicare per 105 e dividere per 48. (8) Ovvero se questo lo vuoi calcolare secondo il metodo del baratto, scrivi la prima proporzione su una linea, vale a dire 2 e 3, e sotto il 3 poni l'antecedente della seconda proporzione, vale a dire il 4, davanti a quale poni il 5 e sopra il 5, sulla linea superiore, poni l'antecedente della terza proporzione, vale a dire il 6,

davanti al quale poni il 7, e poni il 100 sotto il 2. Questo 100 moltiplicato per 3 poi per 5 poi per 7 restituisce la somma della moltiplicazione fatta tra i conseguenti e il 100, questo prodotto devi dividerlo per gli antecedenti - vale a dire per $\frac{1\ 0\ 0}{2\ 4\ 6}$, cioè per $\frac{1\ 0}{6\ 8}$-, risulterà $\frac{2}{4}$ 218, come ultima somma. (9) E se supponesse che l'ultima somma sia 100 e vuoi ricavare la prima, scrivi il 100 sotto il 7, come appare in quest'altra descrizione. Poi moltiplica il 100 per il prodotto realizzato dagli antecedenti, cioè per 6 e per 4 e per 2 e dividi per i conseguenti [p.132] -vale a dire per $\frac{1\ 0\ 0}{3\ 5\ 7}$, risulterà $\frac{5}{7}$ 45 come prima somma. (10) Da ciò pertanto si chiarisce che la proporzione composta dalle proporzioni date di qualunque grandezza è il numero realizzato da tutti gli antecedenti che sta al numero realizzato dai conseguenti. Invero se vuoi sottrarre una proporzione dalla proporzione, moltiplica l'antecedente di quella proporzione da cui vuoi estrarre l'altra per il conseguente dell'altra e otterrai l'antecedente della proporzione che resta e dalla moltiplicazione dei due numeri restanti otterrai il conseguente. (11) Per esempio, vogliamo sottrarre la proporzione di 3 a 4 dalla proporzione di 2 a 5. Per la prima proporzione scrivi $\frac{3}{4}$ e per la seconda scrivi $\frac{2}{5}$. Poi moltiplica il 2 per il 4, risulterà 8; poi il 3 per il 5, risulterà 15 che devi porre sotto l'8 e otterrai la proporzione rimanente: se addizionerai questa con la proporzione fra 3 e 4, risulta proprio la proporzione fra 24 e 60, vale a dire fra 2 e 5.

Fine della parte seconda del nono capitolo. Parte terza sui cavalli e il loro vitto quotidiano.

(1) Cinque cavalli mangiano 6 sestari di orzo in 9 giorni, si chiede in quanti giorni, in base a tale premessa, dieci cavalli mangiano 16 sestari. (2) Scrivi sulla linea inferiore 5 per i cavalli, e 6 per l'orzo e 9 per i giorni, ovviamente scrivendo in successione. Poi sotto il 5 scrivi 10 cavalli e sotto il 6 16 sestari. Poi moltiplica il 5 per il 16, poi per 9, risulterà 720 che devi dividere per 6 e per 10, risulterà 12 giorni. (3) O altrimenti, poiché 5 cavalli mangiano 6 sestari in 9 giorni, dunque 10 cavalli mangeranno il doppio dei sestari in altrettanti giorni, dal momento che 10 cavalli sono il doppio di 5 cavalli. E ancora, poiché 10 cavalli mangiano 12 sestari in 9 giorni, dunque essi mangeranno 16 sestari in 12 giorni che risulta dalla moltiplicazione di 16 per 9 divisa per 12. (4) Invero possiamo mostrare in questo schema 18 combinazioni di proporzioni che si mostrano in sei linee nella prima figura rettangolare. Sia pertanto un numero .e. sulla prima linea, e .f. sulla seconda e .d. sia sulla terza, e .a. sia sulla quarta, e .b. sulla quinta, e un numero .c. sia sulla sesta; e il numero .a.e.c. sia una certa unione che sarà definita 'la prima', mentre il numero .b.d.f. costituirà la seconda unione. La proporzione poi di ciascun numero della prima unione a ciascun numero della seconda è

composta dai quattro numeri restanti, e due di essi sono antecedenti e due conseguenti. Per questo ciascuna proporzione di quelle proporzioni composte, che sono 9, si compone in base a una combinazione di proporzioni: poiché quando una certa proporzione è composta dal primo antecedente e dal primo conseguente e dal secondo antecedente e dal secondo conseguente, si compone viceversa anche la stessa proporzione che ha il primo antecedente al secondo conseguente e dalla proporzione che ha il secondo antecedente al primo conseguente. Infatti non mutano i prodotti realizzati dagli antecedenti nè dai conseguenti quando gli stessi numeri prodotti realizzino una proporzione composita che sia composta dai due antecedenti e dai due suddetti conseguenti. Similmente la proporzione di ciascun numero della seconda unione a ciascun numero della prima è composta dai quattro numeri rimanenti dei quali due sono antecedenti e due conseguenti. Per cui si verificano altre 9 combinazioni. E noi mostriamo come la composizione della proporzione del primo numero .e. al secondo .f. sia composta dai quattro numeri restanti, fra i quali i numeri .d. e .b. sono antecedenti, i restanti, poi, .a. e .c. sono conseguenti. La qual cosa si verificherà così: poiché dalla moltiplicazione del numero .e. per il numero realizzato da .a. e .c., vale a dire di 16 per 9 e per 5, divisa per il numero realizzato da .d. e .b. risulta il numero .f., dunque se si moltiplica [p.132] il numero realizzato dai numeri .d. e .b. per .f. si eguaglierà la moltiplicazione di .e. per il numero realizzato dai numeri .a. e .c. . Per questo, proporzionalmente, come il numero realizzato dai numeri .d. e .b. sta al numero realizzato dai numeri .a. e .c. così .e. sta ad .f. Dunque i numeri .d. e .b., come ho detto, sono antecedenti, mentre .a. e .c. sono conseguenti. Dunque la proporzione fra .e. ed .f. è composta dalla proporzione fra l'antecedente .d. e il conseguente .a. e dalla proporzione fra .b., similmente antecedente, e il conseguente .c. . Ovvero la proporzione fra .e. ed .f. è composta dalle proporzioni mescolate, vale a dire dalla proporzione che c'è fra il numero .d. e il numero .e. e da quella che c'è fra .b. ed .a.

(5) Questo procedimento lo esemplificherò anche in un altro modo, con i numeri. Dal momento che come il 10 sta al 5, cioè come il numero .d. sta al numero .a., così il prodotto dei numeri .b. e .d. sta al prodotto dei numeri .b. e .a.. Cioè come 10 cavalli stanno a 5, così 60 cavalli stanno a 30. E come 60 cavalli stanno a 30 così 60 sestari stanno a 30. E ancora, come 6 sestari stanno a 9 giorni, cioè come .b. sta a .c., così il prodotto dei numeri .a. e .b. sta al prodotto dei numeri .a. e .c.. Cioè come 6 sestari stanno a 9 giorni, così 30 sestari stanno a 45 giorni. Dunque come .d. sta ad .a. così i 60 sestari stanno ai 30 sestari e come .b. sta ad .e, così i 30 sestari stanno ai 45 giorni. Dunque la proporzione dell'orzo ai giorni è come quella fra 60 e 45, la cui proporzione è stato dimostrato che è composta da quella fra .d. ed .a. e fra .b. e .c.. Dunque come 60 sestari stanno a 45 giorni, così 16 sestari stanno ai giorni richiesti, vale a

dire il numero .e. sta al numero .f. E così la proporzione di .c. con .f. si rivela composta da quella fra .d. ed .a. e fra .b. e .c., come occorre. (6) Similmente potrei dimostrare che la proporzione fra .e. ed .f. è composta da quella fra .a. e .c. e da quella fra .b. ed .a. e così abbiamo una combinazione. Similmente si può dimostrare che la proporzione fra .c. ed .f. è composta dai 4 numeri restanti, dei quali, ancora, .d. e .b. sono antecedenti, e gli altri, invece, .e. ed .a., sono conseguenti. E la moltiplicazione del prodotto dei numeri .a. ed .e. per il numero .c., vale a dire 720, eguaglia la moltiplicazione del prodotto degli antecedenti .d. e .b. per il numero .f., e così si ha la seconda combinazione. Allo stesso modo si mostrerà che la proporzione .a. che resta dalla prima unione, ed .f. è composta dai quattro numeri restanti, dei quali, ancora, i numeri .d. e .b. sono antecedenti e i rimanenti, vale a dire .e. e .c. sono conseguenti, e così si ha la terza combinazione. E così si è mostrato che la proporzione fra ciascuno dei tre numeri della prima unione e il numero .f., che è uno dei tre numeri della seconda unione, è composta dalle due proporzioni fra i restanti quattro numeri. (7) E ancora, in base alla suddetta premessa, si chiede quanti cavalli mangino 16 sestari in 12 giorni. Scrivi nello schema orzo sotto orzo e giorni sotto giorni e dividi il prodotto fra i tre numeri della prima composizione, vale a dire 720, per gli altri due numeri, vale a dire per 12 e per 6, risulterà 10 per i cavalli richiesti.(8) Tuttavia in questo problema si può mostrare, attraverso il metodo suddetto, che la proporzione che c'è fra ciascun numero della prima combinazione e il 10, che è un altro numero della seconda, si compone delle due proporzioni fra gli altri quattro numeri, dei quali gli antecedenti sono 12 e 6, vale a dire i numeri .f. e .b.. E così si otterranno altre tre combinazioni in questo schema.

(9) E se si supponesse che 10 cavalli mangiano 16 sestari in 12 giorni e si chiedesse quanti sestari mangiano 5 cavalli in 9 giorni, ora in questo schema manca il terzo numero della seconda combinazione, per questo i restanti due numeri di questa combinazione, vale a dire 10 e 12, saranno i divisori per i quali dividere il 720 che risulta da 5 per 16 per 9, risulterà 6 sestari di orzo, come si mostra in questa terza figura, nella quale con molta certezza si può capire che la proporzione fra ciascun numero della prima combinazione e il 6, che è il terzo [p.134] dei numeri della seconda combinazione, è composta dalle due proporzioni fra i quattro numeri restanti, fra i quali gli antecedenti sono il 10 e il 12, gli altri due sono i conseguenti. (10) E così si ottengono nove combinazioni. Invero le altre 9 combinazioni le ricavi dalla composizione della proporzione tra ciascuno dei numeri della seconda combinazione e ciascuno dei tre numeri della prima. Queste composizioni sono formate dalle due proporzioni che si formano fra gli altri quattro numeri, fra i quali sempre in ciascuno combinazione ci saranno due antecedenti fra i numeri della prima combinazione. E bisogna

notare che nessuno dei suddetti sei numeri ha una proporzione composta verso qualche numero della sua combinazione fra le due proporzioni rimanenti, e queste proporzioni sono dodici.

(11) E se negli schemi suddetti si ponessero i giorni in mezzo ai cavalli e all'orzo, come si vede in quest'altro schema, allora i numeri della prima combinazione sarebbero 5 e 9 e 16, gli altri sarebbero i numeri della seconda combinazione. Quanto detto si capisce così: si pone che sia ignoto un numero della linea inferiore, e poiché 5 cavalli mangiano una certa misura di orzo data, vale a dire 6 sestari, in determinati giorni, vale a dire 9, dunque 10 cavalli mangeranno altrettanto orzo in $\frac{1}{2}$ 4 giorni, che risulta dalla moltiplicazione di 5 per 9 diviso 10. (12) E ancora, poiché in $\frac{1}{2}$ 4 giorni 10 cavalli mangiano 6 sestari, si chiede quanti sestari mangerebbero in 12 giorni: dunque come $\frac{1}{2}$ 4 sta a 6 così 12 sta alla quantità d'orzo richiesta. Per questo bisogna moltiplicare 12 per 6 e dividere per $\frac{1}{2}$ 4. E poiché come un numero sta ad un numero così il decuplo dell'uno sta al decuplo dell'altro, allora se moltiplicheremo per 10 il prodotto di 12 per 6 - cioè moltiplichiamo 10 per 12 per 6 - e divideremo il prodotto - che è 720 - per il decuplo di $\frac{1}{2}$ 4 - vale a dire 45 cioè 9 per 5 - risulterà 16 per la quantità ignota di orzo. Se moltiplicheremo 5 per 9 per 16 si eguaglierà la moltiplicazione di 10 per 12 per 6. E così il 5 e il 9 e il 16 realizzano la prima combinazione, mentre i restanti, vale a dire il 10 e il 12 e il 6 realizzano la seconda. (13) Per cui quando sarà ignoto uno dei suddetti sei numeri che vorrai ricavare osserva da quale combinazione proviene questo numero in modo che tu divida per gli altri due numeri della sua combinazione il prodotto dei tre numeri dell'altra combinazione, e ricaverai il numero cercato.

Sugli uomini che piantano alberi in un numero di giorni stabilito.

(1) In una certa pianura un re ha mandato 30 uomini a piantarvi alberi, questi hanno piantato lì 1000 alberi in 9 giorni, e si richiede in quanti giorni 36 uomini pianterebbero 4400 alberi. Scritti pertanto i 36 uomini sotto i 30 uomini e i 4400 alberi sotto i 1000 alberi, come si vede in questa figura, moltiplicherai i 30 uomini per i 4400 alberi e il loro prodotto per i 9 giorni e dividerai tutto il prodotto per i 36 uomini e i 100 alberi, risulterà 33 e in tanti giorni quegli uomini pianteranno i 4400 alberi.

Sullo stesso argomento.

(1) E ancora, se viceversa, in base alla stessa premessa, si richiedesse quanti alberi 36 uomini pianterebbero in 33 giorni, schematizzato il problema come qui si mostra, moltiplicherai i 36

uomini e i 1000 alberi e i 33 giorni in una sola volta e dividerai per i 30 uomini e i 9 giorni, risulterà 4400 alberi.

(2) Parimenti se, sulla base delle stesse premesse, si chiedesse quanti uomini pianterebbero 4400 alberi in 33 giorni, devi schematizzare il problema come qui si mostra e moltiplicherai i 39 uomini e 4400 alberi e i 9 giorni in una sola volta, e dividerai il prodotto per 1000 e per 33, risulteranno 36 uomini, come conviene.

[p.135]

Sugli uomini che mangiano frumento.

(1) Cinque uomini mangiano 4 moggi di frumento in un mese, vale a dire in 30 giorni, per cui altri sette uomini chiedono di sapere di quanti moggi essi avrebbero bisogno, in base a tali premesse, negli stessi 30 giorni. (2) Schematizza pertanto il problema come qui si mostra, e moltiplicherai i 7 uomini per i 4 moggi e per i 30 giorni che sono nella linea inferiore e dividerai il prodotto per i 5 uomini e per i 30 giorni che sono sulla linea superiore. Per cui ometti di moltiplicare per 30 e non dividere per 30. Allora moltiplicherai soltanto 7 per 4 e dividerai per 5, risulterà $\frac{3}{5}$ 5 moggi. (3) E devi capire il perché abbiamo proposto questo problema: perché spesso tra i mercanti nasce il problema anche sul vino che si beve. Per questo fissa tenecemente alla memoria questo esempio in modo da saper fare i calcoli in simili casi.

CAPITOLO DECIMO. LE SOCIETA' FATTE TRA I SOCI.

(1) Quando poi sarà proposto il caso di alcuni soci i quali hanno fatto insieme una società nella quale ciascuno di essi ha una quota differente, e con questa società ci sarà stato un qualche profitto, che essi vorranno dividere tra loro in base alle rispettive quote e uno vorrà sapere quanto di questo profitto spetti a ciascuno, scrivi la quota del primo socio in cima alla tavoletta a destra, poi sulla stessa linea verso sinistra applicati a scrivere in ordine le quote degli altri. Il profitto, poi, che hanno realizzato vergalo sull'altra sommità della tavoletta, sulla stessa linea, vale a dire sulla parte sinistra. Poi addizionerai le quote di tutti i soci in una sola, e riporterai la somma calcolata. Per essa devi dividere le moltiplicazioni della quota di ciascun socio per tutto il profitto e così otterrai ciò che a ciascuno spetta di questo profitto. (2) E per chiarire meglio ciò esemplificheremo innanzitutto, ponendo differenti quote, la società di due uomini nella prima parte, di tre uomini nella seconda parte, di quattro nella terza; poi, nella quinta parte, concluderemo con le divisioni di alcuni numeri per porzioni frazionarie con il metodo delle società.

Sulla società di due uomini.

(1) Se si suppone che due uomini, che hanno realizzato insieme una società, dei quali uno ha messo nella suddetta società 18 libre di una certa moneta, e l'altro ha messo nella stessa società 25 libre e si è tratto un profitto di 7 libre e si richiede quanto a ciascuno spetti di tali 7 libre, farai così: scrivi la quota del primo socio, cioè 18 libre, in cima alla tavoletta nella parte destra, poi verso sinistra, sulla stessa linea, le 25 libre; scrivi il profitto, cioè le 7 libre di nuovo verso sinistra, ponilo separatamente da essi, come si mostra qui in basso. E unisci insieme le porzioni di entrambi i soci, vale a dire 18 con 25, risulta 43 che devi scrivere nello schema sotto il 18 e traccia una linea di frazione sopra tale 43 e un altro 43 con la linea di frazione ponilo sotto al 25, come si mostra nello schema. Poi moltiplica la porzione del primo socio, vale a dire 18, per il profitto, vale a dire per 7, risulterà 126 che devi dividere per il 43 posto sotto il 18, risulterà $\frac{40}{43}$ 2 libre e tanto tocca al prino socio di questo profitto, cioè 2 libre e 18 soldi e $\frac{11}{43}$ 7 denari. Il resto del profitto spetta all'altro. Tuttavia, per calcolarlo in base a questa tecnica, moltiplica la porzione dell'altro socio per il profitto, vale a dire 25 per 7, risulterà 175 che devi dividere per il 43 che è posto sotto il 25, risulterà $\frac{3}{43}$ 4 libre, e tanto tocca al secondo, vale a dire 4 libre e $\frac{32}{43}$ 4 denari, con cui addizionando le due libre e 18 soldi e i $\frac{11}{43}$ 7 denari che spettano al primo, otterrai come risultato le stesse 7 libre.

[p.136]

Sullo stesso argomento.

(1) Possiamo calcolare questo stesso risultato in un altro modo, vale a dire in modo da ottenere con una sola moltiplicazione e con una sola divisione i soldi e i denari che spettano a ciascuno in proporzione al suo profitto, come nelle precedenti transazioni commerciali abbiamo insegnato a fare. (2) E cioè quando devi moltiplicare il profitto per la quota di ciascuno e dividere per 43, moltiplica innanzitutto il profitto, vale a dire 7, per 12 poi per 20, cioè per 240. Poiché 7 sono libre di denari, trasformiamole in denari, risulterà 1680 denari che devi scrivere sopra il 7 come si vede in quest'altra figura. Poi moltiplica tali denari, vale a dire 1680, per 18 e dividi il loro prodotto per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{43\ \ 12\ \ 20}$, risulterà, per la quota del primo uomo, $\frac{11\ \ 7\ \ 18}{43\ \ 12\ \ 20}$ 2 libre che devi porre nello schema sotto il 18 come qui si mostra. Poi moltiplica il 1680 per il 25 e dividi il prodotto per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{43\ \ 12\ \ 20}$, risulterà $\frac{32\ \ 4\ \ 1}{43\ \ 12\ \ 20}$ 4 e tanto spetta al secondo e devi porlo nello schema sotto il 25. (3) E se questo risultato è corretto lo si capisce in base a due metodi. Il primo dei metodi è lo stesso che abbiamo esemplificato nelle precedenti transazioni commerciali, vale a dire che calcolerai la prova della moltiplicazione che ha riguardato il primo socio e la conserverai e verificherai grazie ad essa se la sua porzione di profitto sussiste, lo stesso farai con l'altro socio. (4) L'altro metodo consiste nell'addizionare la porzione di profitto di ciascuno in un solo numero: se questo corrisponderà a tutto il profitto saprai che avrai proceduto correttamente. (5) Invero devi apprendere attraverso una regola ottima e ingegnosa in che modo i profitti debbano essere addizionati insieme. Vale a dire devi tracciare sotto il profitto, nello schema, una linea di frazione sotto la quale devi porre le parti frazionarie che sono sotto gli altri $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{43\ \ 12\ \ 20}$, poi prendi l'11 che sta sopra il 43 della frazione del primo socio e addizionalo con il 32 che sta sopra il 43 del secondo socio, risulterà 43 che devi dividere per 43, risulterà 1 con resto 0: poni pertanto lo 0 sopra il 43 che sta nella frazione posta sotto il profitto e riporta l'1 sulla mano; addiziona questo 1 con il 7 che sta sopra il 12 della frazione del primo socio e con il 4 che sta sopra il 12 della frazione del secondo, risulterà 12 denari che devi dividere per 12, risulterà 1 soldo con resto 0, poni lo 0 sopra il 12 e riporta sulla mano l'1; addiziona questo 1 con i 18 soldi che stanno sopra il 20 della frazione del primo socio e con l'1 che sta sopra il 20 della frazione del secondo, risulterà 20 soldi che devi dividere per 20, risulterà 1 libra con resto 0, poni lo 0 sopra il 20 e riporta l'1 sulla mano; addiziona questo 1 con le 2 libre che sono davanti alla frazione del primo socio e con il 4 che

sta davanti alla frazione del secondo, risulterà 7 libre che devi porre sopra la frazione del profitto. E questo volevamo dimostrare: di avere 7 libre e nulla è rimasto di frazionario.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti due uomini hanno realizzato una società: uno di essi ha investito 15 libre e 7 soldi, cioè $\frac{7}{20}$ 15 libre, e l'altro ha investito 19 libre. Insieme hanno guadagnato 14 libre e 14 soldi e 5 denari, cioè $\frac{5\ 14}{12\ 20}$ 14 libre. Si chiede quanto spetti a ciascuno del suddetto profitto. (2) Schematizza il problema come qui si vede. Poi moltiplica il 15 per il 20 che sta sotto la linea di frazione e addiziona il 7 che sta sopra il 20, risulteranno 307 soldi che devi scrivere nello schema sopra $\frac{7}{20}$ 15 ; parimenti moltiplica le 19 libre dell'altro socio per 20 in modo da trasformare le 19 libre in soldi come hai fatto per le $\frac{7}{20}$ 15 libre, risulteranno 380 soldi che devi scrivere nello schema sopra il 19. Allora si chiarirà che il primo ha investito 307 soldi nella suddetta società e l'altro ha investito similmente 380 soldi. Per cui addizione 307 con 380, risulterà 687. Parimenti moltiplica le 14 libre, vale a dire il profitto, per la sua parte frazionaria, risulterà 3533 denari che devi scrivere sopra lo stesso profitto. Poi moltiplica 307 per 3533 e dividi il prodotto per la scomposizione di 687 che è $\frac{1\ 0}{3\ 229}$ e per le frazioni che sono sotto la frazione del profitto, vale a dire per $\frac{1\ 0}{12\ 20}$, risulterà $\frac{1\ 181\ 6\ 11}{3\ 229\ 12\ 20}$ 6 libre per [p.137] ciò che del profitto spetta al primo socio, il che lo vedi porre nello schema sotto di esso. Parimenti moltiplica 380 per 3533 e dividi il loro prodotto per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 229\ 12\ 20}$, risulterà come porzione del profitto dell'altro $\frac{1\ 47\ 10\ 2}{3\ 229\ 12\ 20}$ 8 libre, che devi scrivere sotto tale socio.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti due uomini hanno realizzato una società: uno di essi ha investito 24 libre e 11 soldi e 8 denari, cioè $\frac{8\ 11}{12\ 20}$ 24 denari, e l'altro ha investito 41 libre e 9 soldi, cioè $\frac{9}{20}$ 41 libre, e hanno guadagnato $\frac{3}{8}$ 31 libre. Si chiede quanto del suddetto profitto spetti a ciascuno. (2) Schematizza il problema, come qui si mostra, poi moltiplica il 24 per la sua frazione, risulteranno 5900 denari che devi porre sopra $\frac{8\ 11}{12\ 20}$ 24; parimenti trasforma in denari le $\frac{9}{20}$ 41 libre, così: moltiplica il 41 per la sua frazione cioè moltiplica per 20 e addiziona il 9, risulterà 829 soldi che devi trasformare in denari, cioè moltiplicali per il 12 che sta sotto la linea di frazione dell'altro socio, risulterà più dell'altra frazione, 9948 denari che devi scrivere nello

schema sopra il $\frac{9}{20}$ 41. Da qui sarà evidente che il primo ha investito 5900 denari e l'altro ha investito 9948 denari. E così applicati sempre a rendere simili le quote dei soci. Poi moltiplica il 31 per l'8 e addiziona il 3, risulterà 251 che devi scrivere sopra il $\frac{3}{8}$ 31. Poi addiziona 5900 con 9948, risulterà 15848 di cui calcolerai la scomposizione che è $\frac{1\ 0\ 0}{7\ 8\ 283}$, con la quale devi mescolare le parti frazionarie che sono nel profitto, vale a dire $\frac{1}{8}$, risulterà $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{7\ 8\ 8\ 283}$, la quale divisione applicati a riorganizzarla in modo da avere al suo inizio $\frac{1\ 0}{12\ 20}$ dal momento che nel profitto si devono scrivere le libre. (3) Se nel profitto si dovessero scrivere soldi, dovremmo avere solo $\frac{1}{12}$ all'inizio; e se si dovessero scrivere bizanti ciprioti o saraceni dovremmo avere $\frac{1\ 0}{3\ 8}$; se tareni $\frac{1}{20}$; e se in tale profitto si scrivessero bizanti barbari dovremmo avere $\frac{1}{10}$ all'inizio della frazione, come spesso abbiamo detto più volte delle pagine dedicate alle transazioni commerciali. (4) Per cui dal momento che nella suddetta frazione non hai nulla di $\frac{1\ 0}{12\ 20}$ se non soltanto $\frac{1}{4}$ dell'$\frac{1}{12}$ e un altro $\frac{1}{4}$ di $\frac{1}{20}$ - i quali due quarti li ricaviamo dai due ottavi che sono sotto la linea di frazione, e ci rimane di essi un altro $\frac{1}{4}$ nella frazione, e così ci manca $\frac{1}{3}$ di $\frac{1}{12}$ e $\frac{1}{5}$ di $\frac{1}{20}$, cioè $\frac{1}{15}$ per entrambi. Per cui scrivi il 15 sopra il 251 e moltiplica il 251 per 15, risulterà 3765 che devi scrivere sopra il 251 e poi otterrai nella riformulazione della frazione della divisione $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{4\ 7\ 283\ 12\ 20}$. Poi moltplica il 3765 per il 5900 e dividi il prodotto per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{4\ 7\ 283\ 12\ 20}$ e otterrai la porzione di profitto del primo socio. Parimenti moltiplica 3765 per 9948 e dividi per la medesima frazione e otterrai la porzione di profitto dell'altro socio, come sopra si mostra nello schema.

Sullo stesso argomento.

(1) E ancora due uomini hanno realizzato una società nella quale il primo ha investito $\frac{1}{2}$ 112 libre e l'altro $\frac{1}{5}$ 237 libre, e hanno guadagnato $\frac{1\ 2}{8\ 3}$ 328 libre: si chiede quanto del suddetto profitto spetti a ciascuno. (2) Schematizza il problema come qui si mostra. Poi moltiplica il 112 per il 2 e addiziona l'1, risulterà 225 mezzi che devi moltiplicare per il 5 che sta sotto la linea di frazione dell'altro socio risulterà 1125 decimi. E questa è la tecnica che abbiamo insegnato per addizionare i numeri con frazioni. Scrivi dunque il 1125 sopra $\frac{1}{2}$ 112. Parimenti trasforma in decimi la somma dell'altro socio così: moltiplicherai 237 per 5 e addizionerai l'1 che sta sopra al 5, risulterà 1186 quinti che devi moltiplicare per il 2 che sta sotto la linea di

frazione del primo socio, risulterà, similmente, 2372 decimi che devi scrivere sopra $\frac{1}{5}$ 237. Dunque uno ha investito 1125 decimi di una cosa, cioè di una libra, e l'altro ha investito 2372 decimi della stessa cosa. Poi moltiplica il profitto, vale a dire 328, per le sue frazioni, risulterà 7891 ventiquattresimi. Poi addiziona 1125 con 2372, risulterà 3497 per la cui scomposizione, che è $\frac{1\ \ 0}{13\ \ 269}$ e per le frazioni che sono nel profitto, vale a dire $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 8}$ devi dividere il prodotto di 7891 per 1125 e otterrai la porzione di profitto che spetta al primo socio. Di lì aggrega le parti frazionarie della divisione in modo da [p.138] avere al suo inizio $\frac{1\ \ 0}{12\ \ 20}$. Ma dal momento che lì non hai nulla di questo $\frac{1\ \ 0}{12\ \ 20}$, se non soltanto $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 8}$, cioè $\frac{1\ \ 0}{2\ \ 12}$, sappiamo che ci manca $\frac{1}{10}$. Per questo moltiplicherai 7891 per 10, risulterà 78910 che moltiplicherai, come abbiamo detto, per 1125 e dividerai per $\frac{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0}{13\ \ 269\ \ 12\ \ 20}$. Poiché prima di moltiplicare potrai semplificare $\frac{1}{13}$ nella moltiplicazione e nella divisione dal momento che 78910 si può dividere esattamente per 13, per cui se divideremo 78910 per 13, risulterà 6070. Questo 6070 se lo moltiplicheremo per 1125 e divideremo per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{269\ 12\ \ 20}$ arriveremo allo stesso risultato. Per questo moltiplicherai ancora 6070 per 2372 e dividerai per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{269\ 12\ \ 20}$ e otterrai la porzione di profitto dell'altro socio che è $\frac{84\ \ 4\ \ 0}{269\ 12\ \ 20}$ 223, come si mostra nello schema.

Verifica del problema.

(1) Invero se attraverso l'addizione delle quote di profitto dell'uno e dell'altro vogliamo capire se ciò che abbiamo calcolato è corretto oppure no, osserva a quanti denari corrisponda $\frac{1\ 2}{8\ 3}$ di una libra. Sono invero 15 soldi e denari, che devi ricondurre in frazioni di una libra, risulterà $\frac{10\ \ 15}{12\ \ 20}$, che devi conservare. Poi traccia una linea di frazione sotto il profitto, sotto la quale scrivi $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{269\ \ 12\ \ 20}$, e addiziona il 185 che sta sopra il 269 della linea di frazione del primo socio con l'84 che sta sopra il 269 della linea di frazione del secondo socio, risulterà 269 che devi dividere per 269, risulterà 1 con resto 0, scrivi lo 0 sopra il 269 che sta sotto la linea di frazione posta sotto il profitto e riporta l'1; addiziona questo 1 con i 6 denari che stanno sopra il 12 della frazione del primo socio e con i 4 denari che stanno sopra il 12 della frazione del secondo socio, risulterà 10 denari che devi scrivere sopra il 12; poi addiziona i 15 soldi che stanno sopra il 20 della divisione del primo socio con lo 0 che sta sopra il 20 della frazione del secondo, risulterà 15 soldi che devi scrivere sopra il 20 che è all'inizio della linea di frazione posta sotto la frazione del profitto. Poi addiziona le 105 libre con le 223, risulterà 328

libre che devi scrivere davanti alla linea di frazione sotto il profitto. E così otterrai come loro somma $\frac{10\ \ 15}{12\ \ 20}$ 328 libre, cioè $\frac{1\ 2}{8\ 3}$ 328 libre, come è stato posto come loro profitto totale.

[Sullo stesso argomento]

(1) Parimenti due uomini hanno realizzato una società: uno di essi ha investito $\frac{1}{4}$ 23 bizanti, l'altro invero ha investito $\frac{5}{8}$ 31 bizanti e hanno guadagnato 17 bizanti e 11 karati, cioè $\frac{11}{24}$ 47 bizanti. Si chiede quanto del profitto scritto precedentemente tocchi a ciascuno. (2) Schematizza il problema come qui si mostra, poi moltiplica i 23 bizanti per la loro frazione, risulterà 93 quarti che dovresti moltiplicare per la parte frazionaria della frazione dell'altro socio, vale a dire per 8. Ma poiché entrambe le parti frazionarie dei due soci rientrano nell'8, non occorre moltiplicare il 93 per 8, ma soltanto per la quarta parte di 8, vale a dire 2, risulterà 186 ottavi di un bizante che devi scrivere nello schema sopra $\frac{1}{4}$ 23. Parimenti moltiplica il 31 per la sua parte frazionaria, risulterà 253 ottavi sempre di un bizante: dal momento che questi sono ottavi, come il 186 dell'altro socio, non occorre moltiplicarlo per la parte frazionaria del primo socio, o per alcuna parte di esso. (3) Per cui scrivi il 253 sopra $\frac{5}{8}$ 31 e dallo schema risulterà così che uno di loro ha investito 185 e l'altro ha investito 253. (4) Possiamo invero in un altro modo ricavare 186 e 253, vale a dire se osservi qual è il numero più piccolo in cui siano contenuti $\frac{1}{4}$ e $\frac{5}{8}$, vale a dire nell'8. Per questo 8 moltiplica $\frac{1}{4}$ 23, risulterà, come abbiamo detto precedentemente, 186. Parimenti moltiplica $\frac{5}{8}$ 31 per 8, risulterà, come abbiamo detto, 253. (5) Per questo addiziona 186 con 253, risulterà 439 e per esso, dal momento che non si può scomporre, dividi la il prodotto fra 186 e tutto il profitto, e otterrai la porzione di profitto del primo socio. La qual cosa avviene così: moltiplica i bizanti del profitto, cioè 47 per la loro frazione, cioè moltiplica per 24 e addiziona 11, risulterà 1139 karati che devi moltiplicare per 186, risulterà 211854 che devi dividere per 439 e per 24, cioè per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{439\ \ 3\ \ 8}$, risulterà $\frac{256\ \ 2\ \ 0}{439\ \ 3\ \ 8}$ 20 bizanti, come si mostra nello schema. Parimenti, allo stesso modo, moltiplica 253 per 1139 e dividi il loro prodotto per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{439\ \ 3\ \ 8}$, e otterrai la porzione di profitto dell'altro socio, come si mostra nello schema sotto di esso.

[p.139]

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti c'erano due uomini, dei quali uno ha investito $\frac{1\,1}{7\,2}$ 82 tareni, e l'altro ha investito $\frac{1\,2}{5\,3}$ 97 tareni e sono stati guadagnati $\frac{1\,3}{9\,4}$ 112 tareni. (2) Schematizza il problema, come qui si mostra, e moltiplicherai il profitto, vale a dire 112, per le sue frazioni, risulterà 4063 che devi scrivere sopra tale profitto; poi moltiplica la quota del primo socio per la sua parte frazionaria, risulterà 1157 quattordicesimi che devi moltiplicare per le parti frazionarie che sono sotto le linee di frazione dell'altro socio, cioè per 3 e per 5 o per 15, risulterà 17355 duecentodecimi; con lo stesso procedimento moltiplica la quota del secondo socio, vale a dire 97 per le sue frazioni, risulterà 1467 quindicesimi che devi moltiplicare per le parti frazionarie che sono sotto la linea di frazione del primo socio, cioè per 2 e per 7 o per 14, risulterà 20552, sempre duecentodecimi, che devi scrivere sopra $\frac{1\,2}{5\,3}$ 97. (3) E devi capire perché abbiamo trasformato in duecentodecimi le quote di entrambi: perché in 210 sono contenute tutte le loro parti frazionarie, e non si possono ricavare in alcun altro numero più piccolo perché le parti frazionarie non hanno tra loro alcun fattore in comune. (4) Dunque il primo ha investito 17355 e l'altro ha investito 20552. Per questo addiziona 17355 e 20552, risulterà 37907 per il quale numero e per le parti frazionarie che sono nel profitto, devi dividere. Tutti questi se li si pone in una frazione, risulta $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{4\ \ 9\ \ 37907}$. Ma poiché il profitto è espresso in tareni, è necessario che tu abbia $\frac{1}{20}$ all'inizio della frazione della divisione. Per questo poiché non puoi ricavarlo tutto da tale frazione dal momento che in essa hai solo $\frac{1}{4}$, moltiplicherai il numero che indica il profitto, vale a dire 4063, per 5, risulterà 20315 che devi scrivere sopra 4063 e devi aggiungere $\frac{1}{5}$ nella frazione della divisione, e trasformarai in $\frac{1}{20}$ esso + $\frac{1}{4}$ che è nella frazione. E scrivi questo $\frac{1}{20}$ all'inizio della frazione e così otterrai in tale frazione $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{9\ \ 37907\ \ 20}$. Questa frazione scrivila sotto il primo socio e un'altra similmente sotto il secondo. Poi moltiplicherai 20315 per 17355 e dividerai per la scomposizione posta sotto il primo socio e otterrai la quota di profitto del primo socio. Parimenti moltiplicherai lo stesso 20315 per il numero che indica la quota del secondo socio, vale a dire per 20552 e dividerai per la scomposizione posta sotto di lui e otterrai la sua quota di profitto, come si mostra nello schema.

Sulla società di tre uomini.

(1) Tre uomini hanno realizzato una società: il primo di essi ha investito 17 libre, il secondo 29 libre, il terzo 42 libre, e sono state guadagnate 100 libre. (2) Innanzitutto schematizza il problema, come qui si mostra. Poi addiziona le loro quote in una sola volta, vale a dire le 17 libre con le 29 e con le 42, risulterà 88 libre, del quale 88 devi ricavare la scomposizione, che

è $\frac{1\ 0}{8\ 11}$. Poi moltiplicherai la quota di ciascun socio per il profitto e dividerai per $\frac{1\ 0}{8\ 11}$ e otterrai la quota di profitto che spetta a ciascuno. (3) Invero se tu volessi ricavare in una sola moltiplicazione e in una sola divisione le libre, i soldi e i denari del profitto che spettano a ciascuno, ricavati ciò che ti manca di $\frac{1\ 0}{12\ 20}$ nella frazione della suddetta divisione, vale a dire in $\frac{1\ 0}{8\ 11}$. Dal momento che in essa hai soltanto $\frac{1}{8}$ del suddetto $\frac{1\ 0}{12\ 20}$, ti manca $\frac{1}{30}$ per entrambi. Ovvero, poiché $\frac{1\ 0}{12\ 20}$ è la scomposizione dei denari contenuti in una libra, vale a dire di 240, dividi 240 per 8, risulterà 30 che vale per ciò che ti manca di $\frac{1\ 0}{12\ 20}$, come abbiamo detto precedentemente, se mescoleremo questo con $\frac{1\ 0}{8\ 11}$, otterremo $\frac{1\ 0\ 0}{11\ 12\ 20}$. (4) Per questo moltiplicherai il profitto, vale a dire 100, per 30 in modo che come si è aggiunto il 30 nella divisione, così lo si aggiunga nella moltiplicazione, risulterà 3000 che devi scrivere sopra il 100 nello schema; poi moltiplicherai le 17 libre del primo socio per 3000 e dividerai per $\frac{1\ 0\ 0}{11\ 12\ 20}$, risulterà $\frac{4\ 4\ 6}{11\ 12\ 20}$ 19. Parimenti moltiplica le 29 libre del secondo socio per 3000 e dividi per $\frac{1\ 0\ 0}{11\ 12\ 20}$, risulterà $\frac{1\ 1\ 19}{11\ 12\ 20}$ 32 libre che devi scrivere nello schema sotto il secondo socio, vale a dire sotto il 29. Poi moltiplica il 42, vale a dire la quota del terzo socio, per 3000, risulterà 126000 che [p.140] devi dividere per $\frac{1\ 0\ 0}{11\ 12\ 20}$, risulterà $\frac{6\ 6\ 14}{11\ 12\ 20}$ 47 libre che devi scrivere nello schema sotto il 42, vale a dire sotto il terzo socio. (5) Invero se vorrai addizionare in un totale, attraverso la scomposizione, la quota di profitto di ciascuno, fallo secondo il metodo che sopra abbiamo esemplificato nelle società di due soci, vale a dire ponendo $\frac{1\ 0\ 0}{11\ 12\ 20}$ sotto il 100, vale a dire sotto il profitto. Poi addiziona il 6 che sta sopra l'11 nella frazione del profitto del terzo socio con l'1 che sta sopra l'11 nella frazione del profitto del secondo e con il 4 che sta sopra l'11 nella frazione del profitto del primo, risulterà 11 che devi dividere per l'11 che è sotto la linea di frazione posta sotto il 100, risulterà di lì 1 con resto 0, poni lo 0 sopra l'11 e riporta in mano l'1; con questo 1 addiziona il 6 e l'1 e il 4 che sono sopra il 12 di tutte e tre le divisioni, risulterà 12 denari che devi dividere per il 12 che sta sotto la linea di frazione posta sotto il 100, risulterà 1 soldo con resto 0, poni lo 0 sopra il 12 e riporta in mano 1 soldo; addiziona questo 1 con i 4 soldi e i 19 e i 6 che sono sopra il 20 di quelle tre frazioni, risulterà 40 che devi dividere per 20, risulterà 2 libre con resto 0, scrivi lo 0 sopra il 20 e riporta sulla mano il 2; con questo 2 addiziona le 47 libre e le 32 libre e le 19 libre che sono davanti alle frazioni scritte precedentemente, risulterà 100 libre, come è necessario.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti ci sono tre uomini, uno dei quali ha investito $\frac{7}{20}$ 69 libre, e un altro $\frac{11}{20}$ 83 libre, e anche un terzo ha investito 91 libre, e sono state guadagnate 112 libre. (2) Schematizza il problema come qui si vede e poi trasforma in soldi la quota di ciascun socio così: devi moltiplicare 69, vale a dire la quota del primo socio, per la sua frazione cioè per 20 e addiziona in più il 7, risulterà 1387 soldi che devi porre sopra $\frac{7}{20}$ 69 libre; se farai la stessa cosa per la quota del secondo socio, otterrai sopra di essa 1671 soldi; similmente moltiplica le 91 libre per 20 in modo da trasformarle in soldi, risulterà 1820 soldi che devi scrivere sopra le 91 libre. (3) E nota che se nelle quote del loro capitale, o anche solo in una di quelle, fossero posti denari, con queste libre bisognerebbe ricavare i denari dalle quote di ciascun socio espresse in libre, come quando ricaviamo i soldi da una qualunque quota, oltre ai soldi che sono con le loro libre. (4) Dunque uno ha investito 1387 soldi, un altro 1671 soldi, il terzo 1820 soldi. Per questo addiziona i suddetti in un unico numero, risulterà 4878 soldi, la scomposizione del quale numero è $\frac{1\ 0\ 0}{3\ 6\ 271}$. Invero dal momento che è necessario ottenere all'inizio della frazione della divisione $\frac{1\ 0}{12\ 20}$ e di esso abbiamo in questa frazione soltanto $\frac{1}{6}$, sappiamo che ci manca $\frac{1\ 0}{2\ 20}$, cioè 40, per questo $\frac{1\ 0}{12\ 20}$. Scrivi dunque il 40 sopra il profitto e moltiplicherai il 40 per lo stesso profitto, cioè per 112, risulterà 4480 che devi scrivere sopra il 40 e adatterai $\frac{1\ 0}{2\ 20}$ nella frazione della divisione così $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 271\ 12\ 20}$. Questa frazione ponila sotto ciascun consocio. Poi moltiplicherai 4480 per 1387 e dividerai per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 271\ 12\ 20}$, risulterà, come quota del profitto del primo socio, $\frac{1\ 0\ 11\ 16}{3\ 271\ 12\ 20}$ 31 libre; parimenti moltiplica 4480 per 1681 e dividi per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 271\ 12\ 20}$, risulterà $\frac{0\ 263\ 3\ 7}{3\ 271\ 12\ 20}$ 38 come quota del profitto del secondo socio; similmente se moltiplicherai 4480 per 1820 e dividerai per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 271\ 12\ 20}$, otterrai la quota di profitto del terzo socio. (5) Possiamo invero in altro modo ricavare la quota di profitto del terzo uomo dalle quote già calcolate degli altri due. Vale a dire se addizioni l'1 che è sopra il 3 nella frazione del primo socio con lo 0 che è sopra il 3 della frazione del secondo socio, risulterà 1, da questo fino al 3 che sta sotto la frazione del terzo socio, mancano 2 che devi porre sopra lo stesso 3, e come risultato dei tre terzi, riporta sulla mano 1, il quale 1 è $\frac{1\ 0\ 0}{271\ 12\ 20}$ di una libra; quindi addiziona questo 1 con lo 0 che è sopra il 271 nella frazione del primo socio e con il 263 che è sopra il 271 nella frazione del secondo socio, risulterà 264 dal quale, fino al 271, ne mancano 7 che devi porre sopra il 271 della frazione del terzo socio, e

poiché hai riempito i 271, riporterai solo un'unità [p.141] in mano, la quale unità è $\frac{1\ \ 0}{12\ \ 20}$ di una libra; questo 1 devi addizionarlo con gli 11 denari che sono sopra il 12 della frazione del primo socio e con i 3 denari che sono sopra il 12 del secondo, risulterà 15 denari, dai quali fino al doppio di 12, vale a dire fino al 24, mancano 9 denari che devi scrivere sopra il 12 della frazione del terzo socio e per aver riempito due volte il 12, riporterai sulla mano un 2 che è $\frac{2}{20}$ di una libra, cioè 2 soldi; con questi 2 soldi addiziona i 16 soldi che sono sopra il 20 della frazione del primo socio e con i 7 soldi che sono sopra il 20 della frazione del secondo, risulterà 25 soldi, dai quali fino ai 40 soldi, vale a dire fino al doppio di 20, mancano 15 soldi. (6) E osserva il perché diciamo 'da 25 fino a 40': perché 25 è maggiore di 20, per cui se fosse maggiore di 40 chiederemmo la differenza che c'è tra esso e il triplo di 20. E così intendi per tutti gli altri casi simili. (7) Poni dunque i 15 soldi sopra il 20 della frazione del terzo socio e per aver riempito il doppio di 20 riporterai sulla mano 2 libre; con queste 2 libre addizionerai le 31 libre del primo socio e le 38 libre del secondo, risulteranno 71 libre, da queste fino al profitto totale, vale a dire fino a 112 libre, mancano 41 libre che devi scrivere davanti alla frazione del terzo socio. E otterrai nella sua quota di profitto $\frac{2\ \ 7\ \ 9\ \ 15}{3\ \ 271\ \ 12\ \ 20}$ 41, come si mostra nello schema. (8) Invero se vorrai fare la verifica di ogni cosa scritta sopra, verificherai ciò attraverso il metodo collaudato della prova, dal momento che siccome avrai ricavato la quota di profitto dell'ultimo socio attraverso le quote di profitto degli altri due, non potresti fare verificare simili problemi con l'altro metodo[2438]. La prova dell'11 del profitto del primo socio è 3, 8 del secondo e 4 del terzo, che corrisponde a quelle indicate sopra le loro quote nello schema.

Sullo stesso argomento.

(1) E se si supponesse che il primo di loro avesse investito $\frac{1}{3}$ 69 libre, il secondo $\frac{1}{4}$ 83, il terzo $\frac{1}{5}$ 91 e che siano stati guadagnati $\frac{7}{20}$ 127 libre, schematizzato il problema, come qui si mostra, puoi procedere in due modi. (2) Attraverso il primo metodo si trova il numero nel quale siano contenute le parti frazionarie poste nelle quote del loro capitale, vale a dire $\frac{1\,1\,1}{5\,4\,3}$, questo numero è 60 e per esso devi moltiplicare ciascuna quota vale a dire $\frac{1}{3}$ 69, e otterrai sopra di esso 4160; poi $\frac{1}{4}$ 83, e otterrai sopra di esso 4995; poi $\frac{1}{5}$ 91, e otterrai sopra di esso 5472. (3) Ovvero, attraverso l'altro metodo, moltiplica il 69 per la sua frazione, cioè per 3 e addiziona

2438 quello cioè dell'addizionare le quote dei profitti di tutti i consoci per vedere se si ricava il profitto totale.

l'1, risulterà 456 che devi moltiplicare per 4 e per 3 che stanno sotto le restanti frazioni, risulterà 5472 che devi addizionare con 4495 e con 4160, risulterà 14627. Per quest'ultimo devi dividere la moltiplicazione del profitto per i suddetti tre numeri, cosa che avviene così: moltiplicherai le 127 libre per la sua frazione, risulterà 2547 soldi che devi scrivere sopra le $\frac{7}{20}$ 20 libre. Poi moltiplicherai quest'ultimo per il 12 in modo da avere il 12 sotto la linea di frazione delle divisioni davanti al 20 che sta sotto la frazione del profitto, risulterà 30564 che devi moltiplicare per 4160 e dividere per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{14627\ \ 12\ \ 20}$, risulterà $\frac{8356\ \ 4\ \ 4}{14627\ \ 12\ \ 20}$ 36 come quota di profitto del primo socio; parimenti moltiplicherai 30564 per 4995 e dividerai similmente per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{14627\ \ 12\ \ 20}$, risulterà $\frac{5181\ \ 9\ \ 9}{14627\ \ 12\ \ 20}$ 43 come quota di profitto del secondo socio; parimenti se moltiplicherai 30564 per 5472 e dividerai per $\frac{1\ \ 0\ \ 0}{14627\ \ 12\ \ 20}$, otterrai la quota di profitto del terzo socio. (4) Invero se desideri ricavare questa quota dalle quote già ricavate degli altri due soci, addiziona l'8356 che sta sopra il 14027 della divisione del primo socio con il 5181 che sta sopra il 14027 della seconda frazione, risulterà 13537, dal quale fino al 14027 ne mancano 1090 che devi scrivere sopra il 14627 nella frazione del terzo socio, e per aver riempito una volta il 14027, riporterai l'1; con questo 1 addizionerai il 4 che sta sopra il 12 della prima frazione e [p.142]il 9, che sta sopra il 12 della seconda frazione, risulterà 14 denari, dai quali fino al doppio di 12, vale a dire fino al 24, mancano 10 denari che devi scrivere sopra il 12 della frazione del terzo socio, e per aver riempito i 24 denari, riporterai sulla mano 2 soldi; con questi due soldi addizionerai i 4 soldi che stanno sopra il 20 della prima frazione e i 9 soldi della seconda, risulteranno 15 soldi, dai quali fino a 27 soldi, cioè fino a riempire una libra con i 7 soldi che stanno sopra la frazione del profitto, mancano 12 soldi che devi scrivere sopra il 20 nella frazione del terzo socio, e tratterrai 1 per la libra riempita; con questo 1 addizionerai le 36 libre del primo socio e le 43 del secondo, risulteranno 80 libre dalle quali, fino a 127 libre, vale a dire fino al profitto, mancano 47 libre, queste ponile davanti alla frazione del terzo socio e otterrai come quota del suo profitto $\frac{1090\ \ 10\ \ 12}{14627\ \ 12\ \ 20}$ 47, come si mostra più sopra nello schema.

Sulla società fra 4 uomini.

(1) Quattro uomini hanno realizzato una società: il primo di essi ha investito $\frac{1}{2}$ 31 libre, il secondo $\frac{3}{4}$ 43 libre, il terzo $\frac{4}{5}$ 56 libre, il quarto $\frac{5}{6}$ 86 libre, e sono state guadagnate $\frac{7\ \ 9}{12\ \ 20}$ 126 libre. (2) Schematizzato il problema, come qui si mostra, moltiplica il profitto per la sua frazione, risulterà 30355 denari che devi scrivere sopra il profitto. Poi, per ricavare le quote

dei soci che devi moltiplicare per i 30355 denari scritti precedentemente, puoi procedere in due modi diversi. (1) In base al primo trovi il numero in cui si ritrovino le parti frazionarie che sono nelle loro quote, il quale numero, attraverso il metodo della semplificazione, ricaverai che è 60. Moltiplica questo 60 per ciascuna delle loro quote e otterrai 1880 sopra il primo socio, 2625 sopra il secondo, 3408 sopra il terzo, 5210 sopra il quarto. (3) O altrimenti, in base all'insegnamento dell'altra tecnica, moltiplica il 31 per la sua frazione, risulterà 94 che devi moltiplicare per il 4 e per il 5 che sono sotto le frazioni del secondo e del terzo socio, risulterà 1880 sessantesimi, come più sopra abbiamo ricavato sopra il primo socio attraverso l'altro metodo: non occorre moltiplicare questo numero per il 6 che sta sotto la frazione del quarto socio per via del $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ che stanno sotto le frazioni del primo e del secondo nei quali sappiamo che è contenuto tutto il 6; parimenti moltiplica il 43 del secondo socio per la sua frazione, risulterà 175 quarti che devi moltiplicare per il 5 e per il 3 che stanno sotto le frazioni del terzo e del primo socio, risulterà similmente 2625 sessantesimi come abbiamo ricavato sopra il secondo socio: non occorre moltiplicare questo per il 6 della frazione del quarto socio in base al motivo già spiegato; parimenti affinché tu abbia la quota del terzo uomo, moltiplica il 56 per la sua frazione, risulterà 284 quinti che devi moltiplicare per il 6 che è sotto la frazione del quarto socio, risulterà 1704 trentesimi che devi moltiplicare per il 2 che sta nella scomposizione del 4 che sta sotto la frazione del secondo, risulterà 3408 sessantesimi che non occorre moltiplicare - dal momento che sono sessantesimi - per il due che rimane nella scomposizione dello stesso 4 nè per il 3 che sta sotto la frazione del primo socio; e ancora, perché tu ottenga la quota del quarto socio, moltiplica l'86 per il 6 e addiziona il 5, risulterà 521 sesti che devi moltiplicare per il 5 e per il 2 in base all'esemplificazione precedente, risulterà 5210 sessantesimi, come è stato trovato attraverso l'altro metodo. (4) Quindi addiziona i quattro numeri ricavati e farai i calcoli in base a quanto più sopra abbiamo insegnato e così otterrai le quote di profitto che spettano loro, come si mostra nello schema.

Sullo stesso argomento.

(1) C'erano quattro uomini, il primo dei quali ha investito $\frac{1}{3}$ di un intero, un altro ha investito $\frac{1}{4}$, il terzo ha investito $\frac{1}{5}$, il quarto poi ha investito $\frac{1}{6}$, e hanno insieme 60 soldi. Si chiede quanto a ciascuno spetti di questi 60 soldi. (2) Questo invero è lo stesso problema che si pone quando si parla di quattro uomini che hanno comprato un maiale per 60 soldi, il primo dei quali vuole avere un terzo di quel maiale, il secondo [p.143] un quarto, il terzo un quinto, il quarto un sesto. (3) Per cui quelli, inesperti, dal momento che il primo, per la terza parte del

maiale, paga 20 soldi, e il secondo, per la quarta parte, paga 15 soldi, e il terzo, per la quinta parte, paga 12 soldi, e il quarto per la sesta parte paga 10 soldi, e tutte queste somme insieme ammontano soltanto a 57 soldi, si stupiscono che rimangano da pagare 3 soldi dei 60 soldi, e chiedono chi di loro debba pagare quei 3 soldi. (4) Invero quegli uomini non considerano che questi quattro uomini non hanno comprato tutto il maiale, perchè $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di un intero non ammonta ad un intero, ma resta fino ad esso $\frac{1}{20}$: per questo dei 60 soldi ne resta similmente la ventesima parte, vale a dire 3 soldi. (5) Per cui se ci fossero tre uomini dei quali il primo comprasse la metà di quel maiale e pagasse 30 soldi, e un altro comprasse la terza parte e pagasse 20 soldi, e un terzo comprasse la quarta parte e pagasse 15 soldi, e così si otterrebbe in totale 65 soldi cioè 5 soldi il più dei 60 soldi i quali 5 soldi sono la dodicesima parte di 60 soldi, e questo capita perché $\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ ammontano a un dodicesimo più di un intero. (6) Per cui, per non pagare più o meno dei 60 soldi, conviene che i compratori, quanti che siano, comprino quelle tali quote che, quando saranno sommate insieme, ammontino a un intero. (7) Per esempio: se i compratori fossero due, uno compri la metà e l'altro l'altra metà, oppure uno $\frac{2}{3}$ e l'altro $\frac{1}{3}$, e cosi via. E se fossero tre ciascuno compri la terza parte, oppure il primo compri $\frac{1}{2}$, il secondo $\frac{1}{3}$, il terzo $\frac{1}{6}$. E se fossero quattro, ciascuno compri la quarta parte, oppure il primo di essi compri $\frac{1}{2}$, il secondo $\frac{1}{4}$, il terzo $\frac{1}{5}$, il quarto $\frac{1}{20}$, e così poi intendere in numerose situazioni.
(8) Invero affinché i 60 soldi siano divisi tra i 4 suddetti uomini in modo che di lì non resti nulla, schematizza il problema come qui si mostra e vedi in quale numero sono contenuti $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$. Si ritrovano invero nel 60, $\frac{1}{3}$ del quale, che è 20, scrivilo nello schema sopra $\frac{1}{3}$; e la quarta parte, vale a dire 15, scrivila sopra $\frac{1}{4}$; e la quinta parte, vale a dire 12, scrivila sopra $\frac{1}{5}$; e la sesta parte, vale a dire 10, scrivila sopra $\frac{1}{6}$. Per cui dirai che il primo ha investito 20, il secondo 15, il terzo 12, il quarto 10. Poi addizionali insieme, risulterà 57 per il quale devi dividere il prodotto della moltiplicazione fra ciascuno dei quattro numeri scritti precedentemente e i 60 soldi. E così otterrai per la quota del primo uomo $\frac{1}{19}$ 21 soldi, cioè 21 soldi e $\frac{12}{19}$ di un denaro; e per la quota del secondo $\frac{15}{19}$ 15 soldi, cioè 15 soldi e $\frac{9}{19}$ 9 denari; e per la quota del terzo $\frac{12}{19}$ 12 soldi, cioè 12 soldi e $\frac{11}{19}$ 7 denari; similmente anche per la quota del quarto otterrai $\frac{10}{19}$ 10 soldi, come più sopra si mostra nello schema, che sono 10 soldi e $\frac{6}{19}$ 6 denari. Una volta ricavate queste quattro quote se le addizionerai in una avrai come risultato i suddetti 60 soldi.

CAPITOLO UNDICI: LE LEGHE DI MONETA (le monete in lega)

(1) Si definisce moneta una qualsivoglia quantità di denari, ed è fatta da una qualunque quantità di argento e rame in mistura. Tuttavia si dice che è maggiore la moneta nella cui libra ci sarà più argento che nell'altra: questa si desidererà forgiare. Sarà una moneta minore quella in cui ci sarà meno argento. Si definisce 'moneta in lega', quando si pone nella sua libra una qualche data quantità di argento. E quando diciamo: 'ho un moneta di un certa quantità di oncie', per esempio diciamo 2, capiamo che nella libra di questa moneta ci sono 2 oncie d'argento. (2) Invero si può fare la lega di moneta in tre modi. Il primo metodo è quando si fa una lega con una certa quantità di argento o rame. Il secondo è quando si fa una lega con qualunque tipo di monete date con argento o rame, o entrambi insieme. Il terzo quando si fa una lega soltanto con monete date. (3) Affinché tutti questi metodi siano contenuti perfettamente in questo capitolo, dividiamo lo stesso in sette sezioni differenti: la prima delle quali tratterà della lega di moneta con una data quantità di argento; la seconda tratterà della lega nella quale si pone una certa quantità di monete con cui sono forgiate altre monete nella cui libra ci sarà una minore quantità di argento che nelle monete precedenti (questa lega non può farsi senza aggiunta di rame rosso); la terza quando similmente si pone un quantitativo di moneta e si vuole con esso fare una moneta nella cui libra ci sia più argento che in quell'altra, la qual cosa non può avvenire senza aggiunta di argento; la quarta quando si pongono monete senza precisarne la quantità con le quali vorrai fare una qualche posta quantità di qualunque moneta minore con l'aggiunta di bronzo; la quinta quando si pongono similmente monete senza precisarne la quantità con le quali vorrai formare una certa posta quantità di una qualunque moneta maggiore con l'aggiunta di argento; la sesta sezione poi tratta di quelle monete che sono minori e maggiori della moneta che vorrai forgiare poiché la lega sarà senza aggiunta di bronzo o argento; la settima sezione, poi, sarà sulle regole che riguardano il fare la lega.

Sezione prima.

(1) Un tale ha 7 libre d'argento con le quali vuole forgiare una moneta di due oncie d'argento per libra e vuole conoscere la quantità di tutta la lega che può ottenere e non di meno l'aggiunta di rame. (2) Di queste 7 libre d'argento calcola le oncie, risulteranno 84 oncie che devi dividere per le 2 oncie scritte precedentemente, risulterà 42 e tante libre di monete ci saranno nel totale della suddetta lega. (3) Per esempio, dal momento che in ogni libra di moneta è necessario che ci siano 2 oncie d'argento, per quante volte le 2 oncie stanno nelle 84 oncie tante libre di una moneta si può formare con quelle 84 oncie d'argento. Invero le due

oncie stanno in quelle 84 oncie 42 volte, per cui il totale della moneta in lega è di 42 libre, come abbiamo detto precedentemente. Da queste, sottratte le suddette 7 libre di argento rimangono 35 libre per la quantità di rame da aggiungere. (4) Altrimenti, poiché in ogni libra devono esserci 2 oncie d'argento, la differenza che c'è fra quelle 2 oncie e la libra, vale a dire 10 oncie, sarà nella stessa libra di rame rosso, cioè di rame. Per cui ogni due oncie d'argento occorre porre nella lega di moneta 10 oncie di rame, in virtù di ciò in due libre d'argento devi porre 10 libre di rame. (5) Per cui si riconduce questo problema al metodo delle transazioni commerciali, vale a dire che scrivi le 2 libre d'argento e le 10 libre di rame su una linea; poi scrivi le 7 libre d'argento che egli possiede sotto le due libre d'argento, in modo che l'argento stia sotto l'argento, come qui si mostra. Poi moltiplicherai il 7 per il 10 che gli si oppone in diagonale e dividi per 2, risulterà 35 libre di rame, con esse addiziona le 7 libre d'argento: risulteranno 42 libre come totale di tutta la moneta in lega. (6) Invero se le suddette libre fossero di rame, porresti le tali 7 libre sotto le 10 libre, vale a dire rame sotto rame, come appare in quest'altra figura. Poi moltiplicheresti il 7 per il 2 e divideresti per il 10 e risulterebbe $\frac{2}{5}$ 1 libra d'argento, con la quale, addizionate le 7 libre di rame, risulterebbe come totale di tutta la moneta in lega $\frac{2}{5}$ 8 libre. (7) Altrimenti, poiché in ogni libra della suddetta moneta ci sono 10 oncie di rame, quante volte le dieci oncie staranno in 7 libre, vale a dire in 84 oncie, altrettante libre risulteranno nel totale di quella lega di moneta. Per questo dividerai 84 per 10, risulterà $\frac{2}{5}$ 8 libre, come abbiamo detto prima. Sottratte da queste le 7 libre di rame resta $\frac{2}{5}$ 1 libre d'argento.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti se si supponesse che uno ha 8 libre e $\frac{1}{4}$ 7 oncie d'argento, con cui cuole forgiare una moneta di $\frac{1}{3}$ 2 oncie per libra e chiede il totale della lega e nondimeno la quantità di rame aggiunto, calcola, in base al metodo descritto precedentemente, a quante oncie corrispondono le 8 libre e $\frac{1}{4}$ 7 oncie, risulterà $\frac{1}{4}$ 103 oncie che devi dividere per le $\frac{1}{3}$ 2 oncie. Cioè moltiplica $\frac{1}{4}$ 103 per 12, dal momento che nel 12 si trovano $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, risulterà 1239; poi moltiplicherai di nuovo $\frac{1}{3}$ 2 per 12, risulterà 28 per il quale devi dividere 1239, risulterà come totale della suddetta lega $\frac{1}{4}$ 44 libre, vale a dire 44 libre e 3 oncie, dalle quali [p. 145] sottrai le 8 libre e $\frac{1}{4}$7 oncie d'argento, resteranno 35 libre di rame e $\frac{3}{4}$ 7 oncie. (2) Altrimenti sottrai le $\frac{1}{3}$ 2 oncie d'argento

dalle oncie di una libra, vale a dire da 12, restano $\frac{2}{3}$ 9 oncie e scrivi che per $\frac{1}{3}$ 2 oncie d'argento ci sono $\frac{2}{3}$ 9 oncie di rame. Poi scrivi sotto le $\frac{1}{3}$ 2 oncie $\frac{1}{4}$ 103, vale a dire argento sotto argento. Poi moltiplicherai $\frac{2}{3}$ 9 per $\frac{1}{4}$ 103 e dividerai per $\frac{1}{3}$ 2, risulterà $\frac{3}{4}$ 427 oncie di rame che sono 35 libre e $\frac{3}{4}$ 7 oncie, come abbiamo ricavato attraverso l'altro metodo, con queste addiziona le 8 libre e le $\frac{1}{4}$ 7 oncie d'argento, risulterà, nel totale di tutta la lega, 44 libre e 3 oncie.

Sullo stesso argomento.

(1) Invero se le suddette 8 libre e $\frac{1}{4}$ 7 oncie fossero di rame e tu volessi conoscere il totale della lega di monete e la quantità di argento aggiunto, moltiplicherai $\frac{1}{4}$ 103 per $\frac{1}{3}$ 2 e dividerai per $\frac{2}{3}$ 9, risulterà $\frac{3\ 26}{4\ 29}$ 24 oncie d'argento. Con esse devi addizionare le $\frac{1}{4}$ 103 oncie di rame, risulterà $\frac{5}{29}$ 128 oncie, cioè 10 libre e $\frac{5}{29}$ 8 oncie, che costituiscono il totale di tutta la moneta in lega. (2) O altrimenti, dividi $\frac{1}{4}$ 103 per $\frac{2}{3}$ 9, risulterà $\frac{3\ 19}{4\ 29}$ 10 libre. Di esse se vorrai trasformare in oncie $\frac{3\ 19}{4\ 29}$, moltiplica il 19 per il 4 e addiziona il 3, risulterà 79 che devi moltiplicare per 3 e dividere per 29, risulterà $\frac{5}{29}$ 8 oncie. E così otterremo come totale della della moneta in lega 10 libre e $\frac{5}{29}$ 8 oncie, come abbiamo detto.

Sezione seconda.

(1) Uno ha 7 libre di moneta da 5 oncie, da cui vuole ricavare moneta da 2 oncie e chiede il totale della moneta in lega e la quantità di rame da aggiungere. (2) Scrivi pertanto sotto le 7 libre, le 5 oncie d'argento che sono in ciascuna libra e ricaverai le oncie d'argento che sono in quelle 7 libre. Vale a dire moltiplicherai il 5 per il 7, risulterà 35 oncie e nelle suddette 7 libre c'è altrettanto argento. Queste 35 oncie ponile sopra le 7 libre con le quali invero le 35 oncie d'argento si possono mescolare formando altrettante libre di monete da 2 oncie, quante coppie di oncie ci sono in 35 oncie. Per questo dividi 35 per 2, risulterà $\frac{1}{2}$ 17 libre come totale della suddetta moneta in lega, da cui sottrai le suddette 7 libre, resterà $\frac{1}{2}$ 10 libre per la quantità di rame aggiunto.

Sulla stessa sezione.

(1) Parimenti se avrai 7 libre di una moneta da 5 oncie e 9 libre da 4 oncie di un'altra e vorrai con esse forgiare moneta da 3 oncie, aggiungendo rame, e chiederai la quantità di rame da aggiungere e anche la quantità totale di moneta in lega che si otterrà, devi fare così: ordina il suddetto schema in questo modo. Poi moltiplica le 7 libre per 5, risulterà 35; e le 9 libre per 4, risulterà 36 che devi addizionare con 35, risulterà 71 e questo è il totale delle oncie d'argento che c'è nelle dette libre di entrambe le monete. Una volta divisa questa quantità per le 3 oncie della moneta che vuoi forgiare, risulterà $\frac{2}{3}$ 23 libre, che è la quantità totale della moneta in lega. Da ciò sottrai le 7 libre e le 9 libre scritte precedentemente, restano $\frac{2}{3}$ 7 libre, che costituiscono la quantità di rame aggiunto.

Regola generale su questo argomento.

(1) Se invero si ponessero in simili leghe di moneta tre, o quattro o più monete diverse, informati delle oncie d'argento contenute nell'insieme delle monete proposte. Una volta divisa questa quantità per le oncie d'argento che sono in una libra della moneta che vuoi forgiare, ricaverai soltanto la quantità totale di tutta la moneta in lega. Da questo totale, sottratte le libre di moneta che sono proposte per fare la lega, resta la quantità di rame aggiunto. (2) Per esempio si hanno nella moneta in lega, 4 monete, per una di esse ci sono 8 libre da $\frac{1}{2}$ 7 oncie, di un'altra 6 libre da $\frac{1}{3}$ 6 oncie, di una terza $\frac{1}{3}$ 5 libre da $\frac{1}{4}$ 5 oncie, di una quarta, poi, ci sono $\frac{1}{4}$ 11 libre da $\frac{1}{5}$ 4 oncie, e vorrai con esse forgiare moneta da $\frac{1}{6}$ 3 oncie, e chiederai la quantità totale di moneta in lega ottenuta e anche la quantità di rame aggiunto. (3) Schematizza il problema, come abbiamo insegnato sopra [p.146]. Poi moltiplica le libre di ciascuna moneta per le oncie d'argento che sono poste per ogni libra di tale moneta. Questa moltiplicazione avviene così: vale a dire se moltiplichi le 8 libre per le $\frac{1}{2}$ 7 oncie, risulteranno 60 oncie; parimenti moltiplica le 6 libre dell'altra moneta per le $\frac{1}{3}$ 6 oncie, risulteranno 38 oncie; parimenti moltiplica le $\frac{1}{3}$ 5 libre della terza moneta per le $\frac{1}{4}$ 5 oncie, risulteranno 28 oncie; parimenti moltiplica le $\frac{1}{4}$ 11 libre per $\frac{1}{5}$ 4 oncie, risulterà $\frac{1}{4}$ 47. Addiziona pertanto i suddetti prodotti, vale a dire 60 e 38 e 28 e $\frac{1}{4}$ 47, risulterà $\frac{1}{4}$ 173. Questo è la quantità totale delle oncie d'argento contenute nelle suddette quattro monete, le quali oncie devi dividerle per le $\frac{1}{6}$ 3 oncie della moneta che vuoi forgiare in lega, risulterà $\frac{1\ 13}{2\ 19}$ 54 libre, che rappresenta la quantità totale della moneta in lega. Da tale totale sottrai la somma delle libre poste, vale a dire 8 e 6 e

$\frac{1}{3}$ 5 e $\frac{1}{4}$ 11, che ammonta a $\frac{7}{12}$ 30 libre, resterà, come quantità di rame, $\frac{10\ \ 1}{19\ 12}$ 24 libre, cioè 21 libre e $\frac{10}{19}$ 1 oncia.

(2) E se della suddetta quantità di moneta in lega vuoi farne 60 libre, moltiplica 60 per $\frac{1}{6}$ 3, risulterà 190 oncie d'argento che devono essere nelle suddette 60 libre di moneta da forgiare, da queste sottrai $\frac{1}{4}$ 173 oncie d'argento che sono nelle suddette quattro monete, restano $\frac{3}{4}$ 16 oncie d'argento che devi aggiungere nella suddetta lega di monete. Una volta aggiunte queste con la quantità totale delle suddette monete, vale a dire $\frac{7}{12}$ 30 libre, risulteranno 32 libre meno un quarto di un'oncia. Allora la differenza che c'è per arrivare a 60 libre, vale a dire 28 libre e un quarto di un'oncia lo devi aggiungere di rame. E questo è il metodo che usano di più i fabbricanti di moneta.

(3) Parimenti si propone un'altra moneta in lega dello stesso tipo, che si mostra con l'esemplificazione della tecnica delle cifre, in modo che più chiaramente s'intendano le cose che sono state dette. Così se si avessero $\frac{1}{2}$ 7 libre di una moneta che sia da $\frac{1}{5}$ 5 oncie, e $\frac{1}{3}$ 8 libre di un'altra che sia da $\frac{1}{4}$ 4 oncie, e $\frac{1}{6}$ 9 libre di un'altra che sia da $\frac{1}{7}$ 3 oncie, e da esse si volesse forgiare moneta da $\frac{1}{8}$ 2 oncie, aggiungento rame, schematizza il problema in questo modo. (4) Poi ricava il numero in cui si trovino $\frac{1\,1\,1}{6\,3\,2}$ che sono le parti frazionarie delle libre delle tre monete: risulterà 6. Per questo 6 moltiplica $\frac{1}{2}$ 7 e $\frac{1}{3}$ 8 e $\frac{1}{6}$ 9 libre: risulterà 45 sesti sopra $\frac{1}{2}$ 7, e 50 sopra $\frac{1}{3}$ 8, e 55 sopra $\frac{1}{6}$ 9. (5) Dopo di ciò similmente rendi simili le oncie d'argento delle suddette tre monete, vale a dire moltiplica le 5 oncie per la loro frazione, risulterà 26 che devi moltiplicare per 4 e per 7 che sono sotto le altre due frazioni, risulterà 728 centoquarantesimi che devi scrivere sopra le $\frac{1}{5}$ 5 oncie; parimenti moltiplica le 4 oncie per la loro frazione, risulterà 17 che devi moltiplicare per il 7 e per il 5 che sono sotto le altre frazioni, risulterà 595 che devi scrivere sopra $\frac{1}{4}$ 4; similmente moltiplica le 3 oncie per la loro frazione, risulterà 22 che devi moltiplicare per 4 e per 5, risulterà 440 che devi scrivere sopra $\frac{1}{7}$ 3. Poi moltiplica 728 per 45, e 595 per 50, e 440 per 55, risulterà 32760 e 29750 e 24200 ottocentoquarantesimi che devi addizionare insieme, risulterà 86710 ottocentoquarantesimi che devi dividere per $\frac{1}{8}$ 2 e per le parti frazionarie delle oncie e per il 6 per il quale hai moltiplicato le libre delle suddette monete. Cioè moltiplicherai le 2 oncie per la loro frazione, vale a dire moltiplica per 8 e addiziona 1, risulta 17, per questo 17 e per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{4\ 5\ 6\ 7}$ devi dividere l'ottuplo di 86710. Ma per

avere le oncie e i denari che si formano dalla suddetta divisione, trasforma $\frac{1\ 0}{4\ 6}$ in $\frac{1\ 0}{2\ 12}$ e aggiungi $\frac{1}{5}$ alla frazione e otterrai come sua trasformazione $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{2\ 7\ 17\ 5\ 5\ 12}$ per la quale devi dividere la moltiplicazione dell'ottuplo di 86710 per 5, in virtù di $\frac{1}{5}$ che è stato aggiunto alla frazione. Tuttavia di lì semplificherai $\frac{1}{2}$, vale a dire moltiplica la metà del prodotto di 5 per 8, vale a dire 20, per 86710, risulterà 1734200 che devi dividere per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}{7\ 17\ 5\ 5\ 12}$, risulterà $\frac{6\ 1\ 3\ 4\ 6}{7\ 17\ 5\ 5\ 12}$ 48 come totale di tutta la moneta in lega. Da questo totale devi sottrarre le libre di tutte e tre le monete poste, vale a dire $\frac{1}{2}$ 7 e $\frac{1}{3}$ 8 e $\frac{1}{6}$ 9, cioè 25 libre, la differenza, per l'aggiunta di rame, è di $\frac{6\ 1\ 3\ 4\ 6}{7\ 17\ 5\ 5\ 12}$ 23 libre. E se con le suddette libre ci fossero altre frazioni che non potessero essere sottratte facilmente, [p.147] dal suddetto totale di moneta in lega, allora prendi i 45, 50 e 55 sesti che abbiamo calcolato più sopra, risulterà 150 sesti. Per renderli simili ai denominatori delle frazioni del suddetto totale, moltiplica il 150 per 2, risulterà 300 dodicesimi che devi moltiplicare per gli altri numeri che sono sotto la linea di frazione, vale a dire per 5 e per 5 e per 17 e per 7, risulterà 892500 che devi sottrarre da 1734200, resta 841700 che devi dividere per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{7\ 17\ 5\ 5\ 12}$, risulterà come quantità di rame da aggiungere, $\frac{6\ 1\ 3\ 4\ 6}{7\ 17\ 5\ 5\ 12}$ 48, come sopra.

(7) Ma se con le suddette 60 libre di moneta in lega vorrai forgiare moneta con l'aggiunta di argento e rame, moltiplica il 60 per $\frac{1}{8}$ 2, in modo da ottenere l'argento che ti sarà necessario per queste 60 libre, risulterà 1020 ottavi d'oncie che devi moltiplicare per l'ottava parte di 840, vale a dire per 105, risulterà 107100 ottocentoquarantesimi, dalle quali oncie devi sottarre 86710 ottocentoquarantesimi che sono le oncie d'argento nelle suddette, ovvero nelle suddette monete, restano 20390 ottocentoquarantesimi oncie d'aergento che devono essere divise per 840 in modo da completare l'operazione. (8) Ma affinché tu ottenga la quantità di denari che è contenuta in questo risultato, moltiplica 20390 per 5, risulterà 101950 che devi dividere per 840 e per 5, cioè per $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{7\ 4\ 6\ 5\ 5}$ e ciò che risulterà, saranno oncie. Per trasformarle poi in libre, aggiungi un 12 sotto la linea di frazione, risulterà $\frac{2\ 0\ 5\ 1\ 1\ 0}{7\ 4\ 6\ 5\ 5\ 12}$ 2 libre, cioè 2 libre e un denaro e 5 carrube e $\frac{2}{7}$ di un grano, e tale deve essere la quantità di argento da aggiungere. Questa la devi addizionare alle monete scritte precedentemente, risulterà $\frac{2\ 0\ 5\ 1\ 1\ 0}{7\ 4\ 6\ 5\ 5\ 12}$ 27, la differenza, poi, che c'è fino a 60 è il rame che devi aggiungere. Troverai che tale differenza consiste in

$\frac{5\ 3\ 0\ 3\ 4\ 11}{7\ 4\ 6\ 5\ 5\ 12}$ 32 utilizzando il metodo mostrato nelle transazioni commerciali, quando attraverso la quota di profitto di un socio si trova la quota di profitto dell'altro.

Sezione terza.

(1) Un tale ha 9 libre di moneta a 2 oncie da cui vuole ricavare moneta da 5 oncie e si richiede il totale di moneta risultante e la quantità d'argento aggiunta. (2) Tuttavia in questa sezione bisogna considerare il rame che si trova nella moneta posta. Per questo sottrai le 2 oncie d'argento dalla libra, ne restano 10, e tante oncie di rame sono in qualunque libra della suddetta moneta. Per questo scrivi il 10 sotto le 9 libre e moltiplicherai 10 per 9, risulterà 90 e altrettante oncie di rame sono in quelle 9 libre. Queste oncie devi dividerle per le oncie di rame che sono nelle libre della moneta che vuoi formare, vale a dire 7, poiché quante volte le 7 oncie stanno nelle 90 oncie altrettante volte una libra può essere formata da quelle 90 oncie, risulterà $\frac{6}{7}$ 12 libre come quantità totale di tutta la moneta in lega. Da questo totale devi sottrarre le 9 libre, resterà $\frac{6}{7}$ 3 libre per l'aggiunta di argento.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti se avrai 8 libre di una qualche moneta da 6 oncie e 9 libre di un'altra da 7 oncie e vorrai da esse formare moneta da 8 oncie aggiungendo argento e chiederai il totale di tutta la moneta in lega e anche di conoscere la quantità d'argento da aggiungere, calcola le oncie di rame che sono in ogni moneta e addizionale assieme, dividi il totale per le oncie di rame della moneta da formare e ciò che risulterà dalla divisione, costituirà il totale di tutta la moneta in lega, la qual cosa si deve fare come segue. (2) Osserva la differenza che c'è tra le 6 oncie d'argento, che sono contenute nella libra della moneta posta per prima, fino alle 12 oncie, cioè a completare una libra: la differenza è invero di 6 oncie e altrettante oncie di rame sono contenute in una libra della suddetta moneta. Questa quantità devi moltiplicarla per le 8 libre, risulteranno 48 oncie e capisci che tante oncie di rame ci sono nelle suddette 8 libre. Parimenti fai la stessa cosa per l'altra moneta, e troverai che in essa ci sono 45 oncie di rame che, se saranno addizionate con le 48 oncie, realizzeranno 93 oncie che devi dividere per le 4 oncie di rame che sono nella moneta che vuoi realizzare, risulteranno $\frac{1}{4}$ 23 libre che costituiscono il totale di tutta la moneta in lega. Da questo totale, sottratte le 8 libre e le 9, vale a dire 17 libre, resteranno $\frac{1}{4}$ 6 libre come quantità di argento da aggiungere.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti hai $\frac{1}{2}$ 5 libre di una moneta da $\frac{2}{3}$ 3 oncie d'argento, e $\frac{1}{3}$ 6 libre di un'altra moneta da $\frac{1}{2}$ 4 oncie, e $\frac{1}{3}$ 7 libre di un'altra da $\frac{1}{4}$ 5 oncie, e con esse vuoi forgiare moneta da $\frac{3}{5}$ 6 oncie, aggiungendo argento. (2) Osserva il rame che c'è nella libra di ciascuna moneta. Invero nella libra della prima moneta ci sono $\frac{1}{3}$ 8 oncie; nella seconda, poi, $\frac{1}{2}$ 7 oncie; e nella terza $\frac{3}{4}$ 6. Moltiplica pertanto le $\frac{1}{2}$ 5 libre per $\frac{1}{3}$ 8 oncie, risulterà $\frac{5}{6}$ 45; parimenti moltiplica le $\frac{1}{3}$ 6 libre della seconda moneta per le $\frac{1}{2}$ 7 oncie, risulterà $\frac{1}{2}$ 47; parimenti moltiplica le $\frac{1}{3}$ 7 libre della terza moneta per le $\frac{3}{4}$ 6 oncie, risulterà $\frac{1}{2}$ 49 oncie. Poi addiziona insieme i tre prodotti scritti precedentemente, risulterà $\frac{5}{6}$ 142 oncie che devi dividere per le oncie di rame che sono nelle libre di quella moneta che vuoi formare, cioè per $\frac{2}{3}$ 5, risulterà come totale di tutta la moneta in lega, $\frac{1\ 0\ 4}{2\ 9\ 9}$ 26 libre. Da questo totale, sottratte le $\frac{1}{2}$ 5 libre e $\frac{1}{3}$ 6 e $\frac{1}{2}$ 7, resterà per l'aggiunta di argento $\frac{5\ 2}{9\ 9}$ 7 libre d'argento.

Come capire se si debba aggiungere argento o rame in una qualunque lega di moneta.

(1) Parimenti se proponiamo, per forgiare moneta in lega, tre o più quantità in libre o oncie di alcune monete nelle quali le oncie d'argento sono maggiori o minori di quella moneta che vorrai forgiare e vorrai sapere se devi aggiungere argento o rame, calcola le oncie d'argento di tutte le monete e dividile per le oncie d'argento di una libra di quella moneta che vuoi formare e se il risultato sarà maggiore delle libre di tutte le monete, sarà necessario aggiungere rame e se sarà minore bisogna aggiungere argento, e se non sarà né minore né maggiore, non si dovrà aggiungere né rame né argento. (2) Per esempio, possiedo 7 libre di moneta da 2 oncie e 8 libre da 3 oncie e 10 libre da 6 oncie e 13 libre da 9 oncie, e con esse voglio forgiare moneta da 5 oncie. Invero in queste quattro monete ci sono 215 oncie d'argento che devi dividere per le 5 oncie che sono in una libra di quella moneta che tu vorrai formare, risulterà 43 libre. Addiziona pertanto le 7 libre con le 8 libre e con 10 e con 13, risulterà 38 che è inferiore a 43, per questo nella suddetta moneta in lega aggiungi del rame; e se fosse di più bisognerebbe aggiungere argento; e se 38 fosse uguale a 43, allora non bisognerebbe aggiungere né rame, né argento, come sopra abbiamo detto.

Quarta Sezione.

(1) Se tu possedessi moneta da 5 oncie dalla quale volessi forgiare 30 libre di moneta da 2 oncie, ovviamente aggiungendo rame, e volessi sapere quanto impiegheresti della suddetta moneta e quanto di rame, osserva quanto argento deve esserci in quelle 30 libre della moneta da formare: ovviamente 60 oncie, poiché in ogni libra ci devono essere 2 oncie d'argento e due volte 30 fa 60. Queste 60 oncie d'argento sono in 12 libre di quella moneta da 5 oncie che possiedi, poiché 60 diviso 5 risulta 12, e tante libre impiegherai della suddetta moneta. La differenza poi che c'è fino a 30 libre, vale a dire 18, è la quantità di rame da aggiungere.

Sullo stesso argomento.

(1) E se tu possedessi due monete maggiori di quella moneta che vuoi forgiare, delle quali una sia da 7 oncie e l'altra da 6 oncie, da queste vuoi forgiare una libra di moneta in cui ci siano 4 oncie d'argento e vorrai sapere quante oncie di ciascuna impiegherai e anche la quantità di rame da aggiungere. (2) Tuttavia questa e le monete in lega delle seguenti sezioni possono essere assemblate in lega in tre modi diversi. Il primo modo consiste nell'impiegare ugualmente ciascuna delle monete proposte. Il secondo differentemente. Il terzo proporzionalmente. (3) Per cui se nella suddetta quantità di moneta in lega vuoi impiegare ugualmente le monete, da ciascuna delle monete proposte aggiungi le oncie d'argento che sono in entrambe le monete, vale a dire 7 con 6, risulterà 13. Poi moltiplica l'argento di quella moneta [p.140] che vuoi ottenere per le 12 oncie, vale a dire per una libra che vuoi formare, risulta 48 oncie che devi dividere per le suddette 13, risulterà $\frac{9}{13}$ 3 oncie, e tanto poni di ciascuna moneta. La differenza, poi, che c'è fino a 12 oncie, cioè alla libra, la aggiungi in rame, vale a dire $\frac{8}{13}$ 4 oncie.

Sullo stesso argomento impiegando differenti quantità di ciascuna moneta.

(1) Invero se vuoi impiegare la stessa quantità di ciascuna moneta nella moneta in lega scritta precedentemente, supponi di avere una libra di quella moneta da 6 oncie e 2 libre dell'altra da 7 oncie. (2) Poi schematizza l'1 sopra il 6 e il 2 sopra il 7, in base al metodo della seconda sezione. Poi moltiplicherai l'1 per il 6, risulterà 6 e il 2 e il 7, risulterà 14. Poi scrivi il 6 sopra l'1 e il 14 sopra il 2 e addizionali insieme, risulterà 20. Poi moltiplica il 4 per il 12, vale a dire le oncie d'argento che vuoi porre in una libra per l'oncia che vuoi formare, risulterà 48 che devi moltiplicare per l'1 che è stato scritto sopra il 6, risulterà 48 che devi dividere per il 20 scritto precedentemente, risulterà $\frac{2}{5}$ 2 oncie e tanto devi impegare della moneta da 6 oncie. (3) Parimenti moltiplica il 48 per il 2 che sta sopra il 7 e dividi per il 20, risulterà $\frac{4}{5}$ 4 oncie e tanto

devi impiegare di quella moneta da 7 oncie. (4) A quest'ultima quantità devi aggiungere le $\frac{2}{5}$ 2 oncie suddette, risulterà $\frac{1}{5}$ 7 oncie dalle quali, fino alle 12 oncie, cioè fino alla libra che vuoi formare, mancano $\frac{4}{5}$ oncie che devi aggiungere in rame.

<Sullo stesso argomento impiegando proporzionalmente le quantità di ciascuna moneta>
(1) E se vuoi forgiare proporzionalmente la suddetta lega di monete significa che vuoi fare in modo che come un certo numero dato sta ad un altro numero dato, così ciò che impieghi di una moneta sta a ciò che impieghi di un'altra. (2) Così diciamo: come 3 sta a 4, così ciò che impieghi della moneta da 6 oncie sta a ciò che impieghi della moneta da 7 oncie. E poniamo che vuoi di lì formare 23 libre da 5 oncie. Scrivi pertanto il 3 sopra il 6 e il 4 sopra il 7 che sono i numeri della proporzione data. Poi moltiplicherai il 3 per il 6, risulterà 18; e il 4 per il 7, risulterà 28. Devi scrivere il 18 sopra il 3 e il 28 sopra il 4 e devi addizionarli insieme, risulterà 46. Poi devi moltiplicare il 5 per il 23, risulterà 115 che devi moltiplicare per il 3 che sta sopra il 6 e dividere per 46, risulteranno $\frac{1}{2}$ 7 libre di moneta da 6 oncie. Similmente moltiplica il 115 per 4 e dividi per 46, risulteranno 10 libre di moneta da 7 oncie. Sottratte queste $\frac{1}{2}$ 7 e 10 libre, vale a dire $\frac{1}{2}$ 17 libre, dal totale della moneta in lega, vale a dire dalle 23 libre, restano $\frac{1}{2}$ 5 libre da aggiungere in rame.

Su tre monete quando si impiegano quantità uguali di ciascuna.
(1) E se tu possedessi tre monete, delle quali una è da $\frac{1}{2}$ 3 oncie, una da $\frac{1}{3}$ 4 oncie, un'altra da $\frac{3}{4}$ 5 oncie, e vorrai impiegare quantità uguali di ciascuna moneta e formare 10 libre da $\frac{1}{5}$ 2 oncie, addiziona l'argento che è in ciascuna moneta, risulterà $\frac{7}{12}$ 13 oncie. Poi moltiplica l'argento di quella moneta che vuoi formare, vale a dire $\frac{1}{5}$ 2 oncie per le 10 libre, risulterà 22 che devi dividere per $\frac{7}{12}$ 13 libre, risulterà $\frac{101}{163}$ 1 oncie e tanto devi impiegare di ciascuna moneta. La differenza poi che c'è fino a 10 libre, che è $\frac{23}{163}$ libre la aggiungi in rame.

Sullo stesso argomento quando si impiegano diverse quantità o quantità proporzionali di ciascuna moneta.
(1) Invero se vuoi impiegare quantità diverse o proporzionali di ciascuna moneta, in modo che diciamo: come 2 sta a 3 così ciò che impieghi della prima moneta da $\frac{1}{2}$ 3 oncie sta a ciò che

impieghi della moneta da $\frac{1}{3}$ 4, e come 4 sta a 5, così ciò che impieghi di quella da $\frac{1}{3}$ 4 sta a ciò che impieghi di quella da $\frac{3}{4}$ 5. (2) Troverai pertanto i tre numeri dei quali il primo sta al secondo come il 2 al 3 e il secondo al terzo come il 4 al 5. Il modo di trovare questi numeri è scrivere su una linea il 2 e il 3, scrivi il 4 sopra il 3 e dopo il 3 scrivi il 5. Poi moltiplica il 4 per il 2 che gli si oppone in diagonale, risulterà 8 per il primo numero. Poi moltiplica il 4 per [p.150] il 3, risulterà 12 come secondo numero. Poi moltiplica il 3 per il 5 che gli si oppone in diagonale, risulterà 15 come terzo numero. (3) O oltrimenti poiché 2 è $\frac{2}{3}$ di 3, e 4 è $\frac{4}{5}$ di 5, osserva in quale numero si trovino $\frac{4\ 2}{5\ 3}$, vale a dire in 15 che si ottiene come terzo numero, i $\frac{4}{5}$ del quale, vale a dire 12, lo si ottiene come secondo numero, i $\frac{2}{3}$ del quale, vale a dire 8, lo si ottiene come primo numero. Infatti l'8 sta al 12 come il 2 sta al 3 e il 12 sta al 15 come il 4 sta al 5. Poi scrivi l'8 sopra $\frac{1}{2}$ 3, e il 12 sopra $\frac{1}{3}$ 4 e il 15 sopra $\frac{3}{4}$ 5, come si mostra nello schema.E osserva se la parte frazionaria che è in ciascuna moneta si trova nel numero che è posto sopra ciascuna moneta. Invero $\frac{1}{2}$ si trova nell'8 e $\frac{1}{3}$ nel 12, ma $\frac{1}{4}$ non si trova nel 15 nè in alcuna parte di esso. Per cui affinché tu ottenga intero il numero che vuoi, è necessario che moltiplichi ciascuno dei numeri posti sopra per 4, risulteranno 32 e 48 e 60. E moltiplicherai $\frac{1}{2}$ 3 per 32, risulterà 112 che devi scrivere sopra il 32; poi moltiplicherai $\frac{1}{3}$ 4 per 48, risulterà 208 che devi scrivere sopra il 48; poi moltiplicherai $\frac{3}{4}$ 5 per 60, risulterà 345 che devi scrivere sopra il 60. Poi devi addizionare il 112 con il 208 e con 345, risulterà 665. Poi devi moltiplicare le 10 libre che vuoi formare per le $\frac{1}{5}$ 2 oncie, risulterà 22 che devi moltiplicare per 32 e devi dividere per 665, risulterà $\frac{4\ \ 0\ \ 1}{5\ \ 7\ \ 19}$ 1 libre di moneta da $\frac{1}{2}$ 3. Parimenti moltiplicherai il 22 per il 48 e dividerai per 665, risulterà $\frac{1\ \ 1\ \ 11}{5\ \ 7\ \ 19}$ 1 libra della moneta da $\frac{1}{3}$ 4; parimenti moltiplicherai lo stesso 22 per 60 e dividerai per 665, risulterà $\frac{5\ \ 18}{7\ \ 19}$ 1 libra da $\frac{3}{4}$ 5. La differenza poi la aggiungi in rame, che è $\frac{0\ \ 0\ \ 7}{5\ \ 7\ \ 19}$ 5 libre, che si può calcolare attraverso il metodo del ricavare la quota di profitto dell'ultimo socio attraverso le quote già calcolate degli altri. Invero dalle frazioni scritte precedentemente potrai calcolare le oncie o le frazioni di oncie in base a ciò che abbiamo insegnato nelle transazioni commerciali.

Quinta sezione.

(1) Se poi proporrai monete minori, come monete da 4 e monete da 3 oncie d'argento per libra e vorrai con queste monete forgiare 1 libra da 7 oncie aggiungendo argento e chiederai la

quantità di ciascuna e anche l'argento da aggiungere, invero in questa lega di monete, e in simili, opererai con il rame che è nelle monete poste così come hai operato con l'argento nella sezione precedente. (2) Per esempio addiziona insieme le oncie di rame che stanno in ciscuna moneta. Infatti nella moneta da 4 oncie ci sono 8 oncie di rame che è la differenza fino a 12, e nella moneta da 3 oncie ci sono 9 oncie di rame, risulterà 17. Poi moltiplica le oncie di rame della moneta da forgiare, vale a dire 5, per il totale della moneta in lega, vale a dire per le 12 oncie, risulterà 60 che devi dividere per 17, risulterà $\frac{9}{17}$ 3 oncie e tanto impiegherai di ciascuna moneta. La differenza che c'è fino a 12 oncie, che è $\frac{16}{17}$ 4 oncie, la impiegherai d'argento.
(3) Se poi vorrai forgiare 7 libre della suddetta moneta in lega, moltiplica le oncie di rame che sono nella moneta che vuoi formare, vale a dire 5, per le 7 libre, risulteranno 35 libre che devi dividere per 17, risulterà $\frac{1}{17}$ 2 libre e tanto devi impiegare di ciascuna moneta. La differenza poi che c'è fino alle libre, che è $\frac{15}{17}$ 2 libre, la devi porre d'argento. (4) Se vorrai fare la prova di ogni cosa detta precedentemente, se è risultata per bene e correttamente, osserva le oncie di rame o di argento che ci saranno in una qualsiasi delle suddette monete in lega e dividile per il totale di tutta la moneta in lega. Se invero dalla divisione ricaverai le oncie di rame o di argento che sono proposte nella libra di quella moneta in lega, saprai che hai proceduto correttamente e lontano da ogni dubbio.

Sullo stesso argomento.
(1) Parimenti se si proponesse una moneta da $\frac{1}{2}$ 2 oncie e una moneta da $\frac{2}{3}$ 3 oncie e una moneta da $\frac{3}{4}$ 4 oncie e una moneta da $\frac{4}{5}$ 5 oncie, e vorrai con esse formare, aggiungendo argento, 19 libre da $\frac{5}{6}$ 6 oncie, sottrai dalle oncie per libra, cioè da 12, le suddette oncie d'argento [p.151] resterà per il rame da aggiungere $\frac{1}{2}$ 9 libre e $\frac{1}{3}$ 8 e $\frac{1}{4}$ 7 e $\frac{1}{5}$ 6: tutte queste, addizionate assieme, realizzano $\frac{17}{60}$ 31. Per quest'ultimo devi dividere il prodotto della moltiplicazione del rame della moneta da forgiare per il totale della moneta in lega, vale a dire di $\frac{1}{5}$ 6 per 19, risulterà $\frac{259}{1877}$ 3 libre e tanto devi impiegare di ciascuna moneta. Invero la differenza che c'è fino alle 19 libre la metti d'argento che è, ovviamente, $\frac{841}{1977}$ 6 libre. (2) Se poi tu volessi sapere che frazione di una libra sia $\frac{259}{1877}$, moltiplica il 259 per il 12, vale a dire per le oncie di una libra, risulterà 3108 che devi dividere per $\frac{1}{1877}$, risulterà $\frac{1231}{1877}$ 1 oncia. E se

di $\frac{1231}{1877}$ vorrai sapere che frazione sia di un'oncia, moltiplica 1231 per 25, vale a dire per il totale dei denari contenuti in un'oncia, risulterà 30775 che devi dividere per $\frac{1}{1877}$, risulterà $\frac{743}{1877}$ 16 denari. Invero la stessa cosa che hai fatto per $\frac{259}{1877}$ puoi farla per $\frac{841}{1877}$. (3) Ma questo risultato lo puoi raggiungere in altro modo, più velocemente. Moltiplica 841 per 300, cioè per il totale dei denari di una libra, risulterà 252300 che devi dividere per 1877, risulterà $\frac{782}{1877}$ 134 denari, che corrisponde a 5 oncie e $\frac{782}{1877}$ 9 denari. (4) Puoi invero per la suddetta moneta impiegare le suddette monete anche in quantità diverse o proporzionali, se lo farai in base al metodo che abbiamo utilizzato nella sezione precedente.

Sesta sezione dell'undicesimo capitolo.

(1) Se uno avesse due monete delle quali una fosse maggiore e l'altra minore della moneta che vuole forgiare, egli potrebbe forgiarla senza aggiunta di rame o argento, se egli porrà una quantità di tali due monete reciprocamente in base alla quantità della differenza che c'è tra le oncie d'argento della moneta da forgiare e le oncie d'argento di quelle due monete. (2) Per esempio, un tale ha una moneta da 2 oncie e una moneta da 9 oncie da cui vuole forgiare moneta da 5 oncie. Poni pertanto il 2 e il 9 su una stessa linea e sotto di esse tra l'una e l'altra scrivi il 5 come si vede in margine. Poi scrivi la differenza che c'è fra 2 e 5, vale a dire 3, sopra il 9; e viceversa metti la differenza che c'è fra 5 e 9, vale a dire 4, sopra il 2 e otterrai il risultato proposto, cioè che della moneta inferiore devi mettere 4 parti e della maggiore 3. Poiché quanto argento avanza nelle tre libre della moneta maggiore, tanto manca di esso nelle 4 libre della minore. (3) Per esempio, se avanza certo in ciascuna libra della moneta maggiore 4, vale a dire la differenza che c'è tra 5 e 9, per questo nelle 3 libre avanzerà il triplo delle 4 oncie d'argento, vale a dire 12 oncie. Questo 12 risulta dal 3 posto sopra il 9 moltiplicato per il 4 posto sopra il 2. E invece nella libra della moneta minore mancano 3 oncie d'argento, vale a dire la differenza che c'è fra 2 e 5. Per questo nelle 4 libre della moneta minore manca il quadruplo delle tre oncie d'argento, vale a dire 12 che ancora risultano dal 4, che sta sopra il 2, per il 3 che sta sopra il 9. Dunque come metterai 4 libre della moneta minore così metterai 3 libre della maggiore. (4) Similmente quella frazione o frazioni che avrai messo delle 4 libre della moneta inferiore, la stessa frazione o frazioni metterai delle tre libre della maggiore. Proporzionalmente infatti come il 4 sta al 3 così la quantità che hai impiegato della moneta minore sta alla quantità che dovrai impiegare della maggiore. (5) Per questo se di tale moneta in lega vorrai forgiarne soltanto 12 oncie, addiziona insieme i numeri della proporzione, cioè

il 4 con il 3, risulterà 7 per il quale devi dividere la moltiplicazione di 4 per 12 e di 3 per 12, risulterà $\frac{6}{7}$ 6 oncie della moneta inferiore e $\frac{1}{7}$ 5 della moneta maggiore. Di nuovo se avrai 10 libre della moneta inferiore moltiplicale per il 3 che sta sopra il 9 e dividile per il 4 che sta sopra il 2, risulterà $\frac{1}{2}$ 7 libre della moneta maggiore. Ovvero se avrai 10 libre della moneta maggiore moltiplicale per le 4 poste sopra il 2 e dividile per il 3 posto sopra il 9, risulterà $\frac{1}{3}$ 13 libre della moneta inferiore.

(6) E se in simile moneta in lega ci saranno frazioni con le oncie, trasformale tutte in numeri interi, e con i numeri interi [p.152] farai i calcoli nello stesso ordine. E se avrai moneta da $\frac{1}{2}$ 4 e da $\frac{1}{4}$ 6 da cui vuoi forgiare moneta da $\frac{1}{8}$ 5, moltiplica tutte queste per 8 in modo da renderle intere o otterrai moneta da 36 oncie e moneta da 50 oncie da cui vuoi forgiare moneta da 41 oncie. (7) Schematizzato pertanto il problema come si vede, sottrai il 36 dal 41, resta 5 che devi scrivere sopra il 50 perché tante sono le libre da porre della moneta maggiore. Allo stesso modo poni sopra il 36 la differenza che c'è fra 41 fino a 50, cioè 9, poiché tante sono le libre della minore da mettere: addizionate queste 9 libre con le 5 libre già calcolate, risultano 14 libre come totale di tutta la moneta in lega. (8) La prova di questa cosa è se moltiplichi il 9 per $\frac{1}{2}$ 4 e il 5 per $\frac{1}{4}$ 6 e otterrai per l'argento che c'è in quelle 9 libre, $\frac{1}{2}$ 40 oncie e per quello che c'è nelle 5 libre della moneta maggiore otterrai $\frac{1}{4}$ 31 oncie. Una volta addizionate insieme queste oncie, risultano $\frac{3}{4}$ 71 oncie per l'argento che è in quelle 14 libre. Per questo se si divide $\frac{3}{4}$ 71 per 14, risultano $\frac{1}{8}$ 5 oncie, com'è necessario. (9) E se vuoi forgiare soltanto 10 libre della moneta in lega, moltiplicherai il 10 per il 9 e il 10 per il 5 e dividerai i prodotti di queste moltiplicazioni per 14 e otterrai $\frac{3}{7}$ 6 libre della moneta minore e $\frac{4}{7}$ 3 della moneta maggiore. (10) E se avrai 10 libre della moneta minore, moltiplicale per 5 e dividi il prodotto per 9, risulterà $\frac{5}{9}$ 5 libre della moneta maggiore. Oppure se avrai 10 libre della moneta maggiore, moltiplicale per 9 e dividi il prodotto per 5, poiché come il 5 sta al 9, così il 10 sta al risultato cercato, risulterà 18 libre, come si mostra nello schema. (11) Da questa regola procede un certo procedimento valido e spesso utile in questo metodo per le monete. La moneta invero che forgiano talora risulta un po' abbondante, talora un po' scarsa, ciò perché talora avanza in essa un po' d'argento, talora manca; questo avviene o per l'inadeguatezza della moneta da forgiare che è troppa o poca o per il bollire fuori del rame. Per questo prima che sia marchiata, cioè segnata, occorre che a una data quantità dell'una si

aggiunga dell'altra soltanto la quantità per riportarla ai canoni dovuti, e perciò proponiamo il problema seguente.

Sul pareggiare la moneta scarsa con quella abbondante.

(1) Un tale possiede 30 libre di moneta in una certa quantità della quale, per esempio in 1 oncia, manca $\frac{1}{2}$ 1 grano d'argento, e un altro possiede una moneta nell'oncia della quale sovrabbonda $\frac{1}{4}$ 2 grani d'argento. Si richiede quanto di quella abbondante bisogna mescolare con le 30 libre della scarsa per ricondurle ai canoni dovuti. (2) Scrivi $\frac{1}{2}$ 1 sopra $\frac{1}{4}$ 2 su una stessa linea e sopra l'abbondanza scrivi la mancanza e viceversa, perché la scarsa è la moneta minore che si pone nella moneta in lega e l'abbontante è la maggiore. Per cui la mancanza, vale a dire $\frac{1}{2}$ 1, è la differenza che c'è fra la moneta minore e la moneta che si vuole forgiare; tale differenza bisogna scriverla, come più sopra abbiamo mostrato, sopra la moneta maggiore. Invece l'abbondanza, vale a dire $\frac{1}{4}$ 2, è la differenza che c'è fra la moneta maggiore e la moneta che si vuole forgiare; tale differenza bisogna porla sopra la moneta minore. E allora come $\frac{1}{2}$ 1 starà ad $\frac{1}{4}$ 2 così la quantità che vorrai della moneta abbondante starà alla quantità della deficitaria e viceversa. (3) Per questo scrivi le 30 libre sotto $\frac{1}{4}$ 2, vale a dire scarsità sotto scarsità, come qui si mostra, e moltiplica il 30 per $\frac{1}{2}$ 1 e dividi per $\frac{1}{4}$ 2, risulterà 20 libre e tale è la quantità di moneta abbondante che devi mischiare con le libre della scarsa. Se invece le 30 libre saranno di moneta abbondante, ponile sotto $\frac{1}{2}$ 1, vale a dire abbondanza sotto abbondanza, e moltiplica il 30 per $\frac{1}{4}$ 2 e dividi per $\frac{1}{2}$ 1, risulteranno 45 libre della moneta scarsa.

Sulla fusione in lega di tre monete fra loro.

(1) Se poi si proponessero tre monete delle quali due siano minori e un'altra maggiore, ovvero [p.153] due siano maggiori e un'altra minore della moneta da forgiare, ricava da quelle due monete una moneta sola e così avrai due monete per fare la lega, delle quali una sarà maggiore e un'altra minore della moneta da forgiare. (2) Invero le due monete si possono trasformare in una in tre modi differenti, vale a dire mischiandole in parti uguali, o differenti o proporzionali in base a una qualche data proporzione. Come avvenga tutto ciò lo mostreremo in questo esempio di moneta in lega, in cui si propone che un tale abbia moneta da 3 oncie, altra da 4, altra da 6 dalle quali vuole forgiare moneta da 5. (3) Scrivi pertanto le suddette tre

monete in una sola linea, poi, affinché dalle due minori ricaviamo una sola moneta, addiziona il 3 con il 4, risulterà 7 e tante oncie d'argento sono in due libre della suddetta miscela. Per questo dividi 7 per 2 e otterrai $\frac{1}{2}$ 3 oncie per l'argento che c'è in una libra di quella miscela. Per questo dici 'ho una moneta da $\frac{1}{2}$ 3 oncie e una da 6, voglio forgiare moneta da 5 oncie'. Ovvero, con numeri interi, devi dire 'ho una moneta da 7 e una da 12 dalle quali voglio forgiare moneta da 10'. Per questo la differenza che c'è fra 7 e 10, vale a dire 3, la scrivi sulla moneta maggiore e la differenza che c'è fra 10 e 12, vale a dire 2, la scrivi sulla moneta minore. Questo 2 lo dividi in due parti uguali, dal momento che due parti uguali di esse hai addizionato per realizzare una sola moneta, risulterà 1 libra sopra ciascuna di quelle monete e così nel totale risulterà 5 libre di moneta in lega ricavate da quelle tre monete in cui ci sono 25 oncie d'argento com'è necessario. (4) E se da quelle due monete ne vuole ricavare una sola mischiandole in quantità differenti o secondo una qualche data proporzione, per esempio come 2 sta a 5 così ciò che impieghiamo della moneta da 3 oncie stia a ciò che impieghiamo della moneta da 4. Mescola pertanto 2 libre della moneta da 3 con 5 libre della moneta da 4 e dividi le oncie d'argento che sono in questa quantità totale, vale a dire 26, per quantità totale delle libre, vale a dire per 7, risulterà $\frac{5}{7}$ 3 oncie e tanto argento ci sarà in una libra di quella miscela. Per questo dirai: 'ho una moneta da $\frac{5}{7}$ 3 e una da 6 e voglio ricavare moneta da 5', ovvero 'ho moneta da 26 e moneta da 42 e voglio ricavare moneta da 35'. (5) Scrivi pertanto il 9 sopra il 6, vale a dire la differenza che c'è tra 26 e 35, e la differenza che c'è fra 35 e 43, vale a dire 7, dividila fra le altre due monete secondo la proporzione delle libre mescolate tra loro, cioè delle 7 libre impieghi 5 porzioni di moneta da 4 e 2 porzioni di moneta da 3, cioè delle suddette 7 libre impieghi $\frac{5}{7}$, ovvero 5 libre, di moneta da 4, e impieghi $\frac{2}{7}$, vale a dire 2, di moneta da 3. Per questo scrivi il 5 sopra il 4 e il 2 sopra il 3 nello schema e risulterà nel totale di quella moneta in lega 16 libre da quelle tre monete in cui vi sono 80 oncie d'argento delle quali toccano a ciscuna libra 5 oncie, com'è necessario. (6) E se con questa moneta in lega vorrai forgiare 20 libre, riconduci questo problema al metodo delle transazioni commerciali in società, in cui un primo ha investito 2, un secondo 5 e un terzo 9 e c'è stato un guadagno di 20 libre. Moltiplicherai dunque 20 per 2 e 20 per 5 e dividerai il prodotto di ogni moltiplicazione per 16. E così ricaverai che devi impiegare $\frac{1}{2}$ 2 libre di moneta da 3 e $\frac{1}{4}$ 6 libre di moneta da 4, la differenza che manca fino a 20, vale a dire $\frac{1}{4}$ 11 libre, la devi impiegare di moneta da 6, risultato che otterrai anche se moltiplicherai 20 per 9 e dividerai per 16. (7) E se tu avessi 10 libre di moneta da 3 e volessi sapere quanto delle altre monete dovresti mescolare con essa

per ricavare moneta da 5, come abbiamo detto, moltiplicherai questo 10 per il 5 scritto sopra il 4 e per il 9 scritto sopra il 6 e dividerai il prodotto di entrambe le moltiplicazioni per il 2 scritto sopra il 3. Ovvero, poiché 10 è il quintuplo di 2, calcola il quintuplo delle 5 libre e delle 9 e otterrai 25 libre di moneta da 4 e 45 libre di moneta da 6 come si mostra nello schema. [p.154]
(8) C'è invero un altro metodo per forgiare moneta in lega, metodo che abbiamo insegnato in un libro di minore importanza. Attraverso questo metodo possiamo ottenere intere qualsiasi somme di monete in lega nella mescolanza di tre o più monete di siffatta maniera. (9) Così del suddetto esempio di moneta in lega vorrai ricavare 20 libre, ricava moneta da 5 da quella da 3 e da quella da 6, risulteranno 3 libre in cui ci sono 2 libre di moneta da 6 e 1 libra di moneta da 3. Parimenti ricava un'altra moneta in lega da 5 dalla moneta da 4 e da quella da 6, e risulteranno in totale 2 libre, vale a dire 1 libra di quella da 4 e 1 libra di quella da 6. Quindi per forgiare quelle 20 libre poni in esse la prima mescolanza una volta o due o più volte finché da questo 20 rimanga un numero che si divida esattamente per il totale della seconda mescolanza di monete, e otterrai il risultato cercato. (10) Per esempio, impieghiamo due volte la prima miscela, in essa vi saranno 2 libre della moneta da 3 e 4 libre di quella da 6, una volta estratta questa quantità da 20, resta 14 che, diviso per il totale della seconda miscela, vale a dire per 2, risulta 7. Per questo impiega la seconda miscela sette volte, in essa ci saranno 7 libre di moneta da 4 e 7 libre da 6. E così, delle suddette 20 libre, ci saranno 2 libre di moneta da 3 e 7 libre di moneta da 4 e 11 libre di moneta da 6. In queste 20 libre ci sono 100 oncie d'argento, come è necessario, e questo è definito metodo del fare la moneta in lega.

Sul fondere in lega tre monete in quantità frazionarie.
(1) Un tale ha moneta da $\frac{1}{2}$ 2 oncie, e da $\frac{1}{3}$ 6 e da $\frac{1}{4}$ 7, dalle quali vuole ricavare moneta da $\frac{1}{5}$ 4. (2) Moltiplica innanzitutto i suddetti quattro numeri per 60, dal momento che in questo numero si ritrovano le suddette frazioni, e otterrai per la prima moneta 150, per la seconda 380 e per la terza 435 e per la moneta da ricavare 252. Poi addiziona le due monete minori in una, vale a dire 380 e 435, risulterà 815 che dovrai dividere per 2 perché di due monete ne hai fatta una. Ma poiché il quoziente di quella divisione è frazionario, duplica il numero della moneta minore e il numero di quella da ricavare, vale a dire 150 e 252 e così otterrai moneta da 300 e da 815 dalle quali vuoi ricavare moneta da 504 attraverso le differenze addizionate. E otterrai 311 parti della moneta minore e 204 della maggiore, vale a dire 102 parti di ciascuna che devi scrivere sopra tali monete, come si mostra nello schema. (3) E di questa

moneta in lega ne vuoi forgiare 16 libre e 5 oncie e 9 denari di cantare, cioè $\frac{9\ \ 5}{25\ \ 12}$ 16 libre, fai come abbiamo insegnato nelle società, vale a dire addiziona 311 con 102 e con 102, risulterà 515 e moltiplica il 16 per la sua frazione, risulteranno 4934 denari che devi moltiplicare per 311 e per 102 e devi dividere queste moltiplicazioni per 515 e per $\frac{1\ \ 0}{25\ \ 12}$, risulterà $\frac{4\ \ 57\ \ 4\ \ 11}{5\ \ 103\ \ 25\ \ 12}$ 9 libre della moneta da $\frac{1}{2}$ 2 e $\frac{3\ \ 22\ \ 2\ \ 3}{5\ \ 103\ \ 25\ \ 12}$ 3 libre di ciascuna delle altre due. (4) Possiamo ricavare la quantità delle altre due anche attraverso la quantità già ricavata della prima moneta, in questo modo: sottrai il 4 che sta sopra il 5 dal 5, resta 1. Poiché 1 non è divisibile per 2, sottrai questo 4 dal 5 duplicato, resta 6, la cui metà, vale a dire 3, ponila sopra il 5 dell'altra frazione sotto la quale ci sono $\frac{0}{5\ \ 103\ \ 25\ \ 12}$, e per il 5 duplicato riporta un 2 che devi addizionare con il 57 che sta sopra il 103, risulterà 59 che devi sottrarre da 103, resta 44 la cui metà, vale a dire 22, ponila dopra il 103 e riporta 1 dal momento che una sola volta il 103 è stato riempito dal 59 addizionato con il 44. Addiziona questo 1 con il 4 che sta sopra il 25, risulteranno 5 denari che devi sottrarre dai denari che sono nel totale della suddetta miscela, resta 4, la cui metà, vale a dire 2, ponila sopra il 25 e sottrai l'11 che sta sopra il 12 dal 12, resta 1 che devi addizionare con le 5 oncie che stanno nel totale della moneta in lega, risulterà 6, la cui metà, [p.155] vale a dire 3 ponila sopra il 12 e riporta l'1 che devi addizionare con le 9 libre che sono fuori dalla linea di frazione, risulterà 10 che devi sottrarre dalle 16 libre, resteranno 6 libre la cui metà, vale a dire 3 libre, scrivila davanti alla linea di frazione, e otterrai similmente $\frac{3\ \ 22\ \ 2\ \ 3}{5\ \ 103\ \ 25\ \ 12}$ 3. E osserva che quando abbiamo fatto così, abbiamo calcolato la metà della differenza che c'è fra le $\frac{4\ \ 57\ \ 4\ \ 11}{5\ \ 103\ \ 25\ \ 12}$ 9 libre e il totale della moneta in lega, vale a dire le $\frac{9\ \ 5}{25\ \ 12}$ 16 libre. (5) In base al suddetto metodo puoi impiegare delle due monete maggiori quantità differenti e proporzionali in base a qualunque proporzione tu voglia.

Su quattro monete attraverso il metodo del fondere moneta.

(1) Parimenti possiedo moneta da 2 oncie e da 3 e da 6 e da 7 da cui voglio ricavare moneta da 4. (2) In base al metodo precedente trasforma in una le due monete minori e in un'altra le due monete maggiori addizionandole in quantità uguali o proporzionali e fai i calcoli, poi, nell'ordine descritto precedentemente. (3) E se vuoi operare attraverso il metodo della fusione in lega, realizza una miscela da una delle minori e dall'altra delle maggiori e realizzane un'altra dalle altre due. Facciamo quindi una fusione di quella da 2 e di quella da 7, e risulteranno in totale 5 libre, vale a dire 3 libre di quella da 2 e 2 libre di quella da 7. Similmente realizza un'altra fusione delle rimanenti, e risulterà nel loro totale 3 libre, vale a

dire 2 libre di quella da 3 e una di quella da 5, e così si sono realizzate 8 libre da 4 oncie. (4) Se vuoi ottenere un altro totale, per esempio 19 libre, moltiplica il 19 per ciascuno dei suddetti numeri, e dividi ogni prodotto per 8, risulterà $\frac{1}{8}$ 7 libre di moneta da 2 e $\frac{3}{4}$ 4 libre di moneta da 3 e $\frac{3}{8}$ 2 libre di moneta da 6 e $\frac{3}{4}$ 4 libre di moneta da 7. (5) Ma se vuoi ottenere ciò senza frazioni di libre, impiega la prima fusione due volte e la seconda tre e otterrai 6 libre della moneta da 2 e 4 libre di quella da 7 e 6 libre di quella da 3 e 3 libre di quella da 6, e così si saranno realizzate in fusione 19 libre. (6) Invero se vuoi realizzare soltanto 12 libre senza alcuna frazione, dal momento che attraverso quelle fusioni non si può ottenere tale risultato, cambia le fusioni, vale a dire fai una terza fusione fra la moneta da 2 e quella da 6 e risulteranno in totale 2 libre, vale a dire una libra di ciascuna di esse; e delle altre due monete fai una quarta fusione, e risulterà come loro totale 4 libre, vale a dire 3 libre di quella da 3 e 1 libra di quella da 7. Quindi nelle suddette 12 libre rientrano una volta la prima fusione e la seconda e la quarta, e così risulteranno 3 libre della moneta da 2 e 5 libre della moneta da 3 e 1 libra di quella da 6 e 3 libre di quella da 7. Ovvero in queste 12 libre poni due volte la terza fusione e la quarta e così risulteranno 6 libre di quella da 3 e 2 libre di ciascuna delle rimanenti. E così attraverso questo metodo possiamo realizzare esattamente diverse miscele di libre.

Su quattro monete quando tre sono minori e un'altra è maggiore della moneta da ricavare.

(1) E se di quattro monete tre sono dalla stessa parte della fusione, vale a dire sono maggiori o minori della moneta da realizzare così che si dica 'ho una moneta da 3 oncie e una da 4 e una da 5 e una da 7, dalle quali voglio realizzare moneta da 6'. (2) Se vuoi procedere attraverso il metodo della fusione in lega, realizza una fusione di ciascuna delle tre monete minori con la maggiore, vale a dire con quella da 7. E risulterà nel totale della prima fusione 4 libre, vale a dire 1 libra di quella da 3 e 3 libre di quella da 7. Parimenti nel totale della seconda fusione risulteranno 3 libre, vale a dire 1 libra di quella da 4 e 2 libre di [p.156] quella da 7. Addiziona dunque questi tre totali delle tre fusioni, risulterà 9 nel totale di tutta la fusione, di cui 6 libre sono della moneta da 7 e una libra è di ciascuna delle restanti tre monete. (3) E se vuoi impiegare parti differenti di ciascuna delle monete minori, impiega la prima fusione una volta, e la seconda due volte e la terza tre e otterrai nel totale della fusione di monete descritta prima 1 libra di moneta da 3 e 2 libre di moneta da 4 e 3 libre di moneta da 5 e 10 libre di quella da 7. (4) Di nuovo se vuoi che il prodotto della moltiplicazione della quantità che hai impiegato di quella da 3 per le oncie che hai impiegato di quella da 5 uguale al prodotto della

moltiplicazione di quanto hai impiegato di quella da 4 per se stessa e ci sono nel totale della fusione di monete 20 libre, poni la prima fusione una volta e la seconda due volte e la terza quattro e otterrai la proporzione della quantità ricercata. In questa proporzione ci sono 18 libre di cui 11 libre sono di quella da 7 e 4 libre di quella da 5 e 2 libre di quella da 4 e 1 libra di quella da 3. E le suddette libre delle tre monete minori sono in proporzione continua perché come il 4 sta al 2 così il 2 sta all'1, ovvero come l'1 sta al 2 così il 2 sta al 4. Per questo la moltiplicazione dell'1 per il 4 eguaglia la moltiplicazione del 2 per se stesso. Di qui per riportare il totale di questa fusione a 20 libre, in questa stessa proporzione moltiplica il 20, in base al metodo delle società per 1 e per 2 e per 4 e per 11 e dividi per 18 ciascuna moltiplicazione, risulterà $\frac{1}{9}$ 1 libre di moneta da 3, $\frac{2}{9}$ 2 di moneta da 4, $\frac{4}{9}$ 4 di moneta da 5 e $\frac{2}{9}$ 12 libre di moneta da 7.

Sulla fusione di sette monete.
(1) E se in una certa moneta in lega si pongono sette monete, delle quali tre sono minori e quattro sono maggiori della moneta da ricavare, per esempio monete da 1 e da 2 e da 3 e monete da 5 e da 6 e da 7 e da 8 e vuoi da esse ricavare moneta da 4 e desideri fare i calcoli attraverso il metodo della fusione di monete, ricava da queste monete 4 fusioni. Dal momento che le monete che sono più numerose da una parte sono quattro, per queste fusioni prendi tre monete maggiori a piacere e le tre monete minori, poi realizza la quarta fusione dalla moneta maggiore che avanza con una qualunque delle minori, e addiziona insieme le quattro fusioni e otterrai il totale di tutta la moneta in lega. Poi potrai procedere secondo ciò che è stato detto più sopra per le monete che possono essere poste nella fusione delle monete. (2) Ma affinché si comprenda meglio il primo metodo, indicherò in che modo si debba operare in base ad esso. Prendi appunto una libra da ciascuna delle monete minori e mescolale insieme, risulteranno 3 libre da cui devi realizzare una moneta, vale a dire dividi le oncie d'argento che sono sopra di esse per 3, risulterà una moneta da 2 oncie, conservala e realizza dalle quattro monete maggiori un'altra moneta mescolandole in parti uguali come hai fatto con le monete minori, risulterà una moneta da $\frac{1}{2}$ 6 che proviene dalla somma di 5 e 6 e 7 e 8 divisa per 4, vale a dire per il numero delle monete maggiori. (3) Dunque dirai: 'ho moneta da 2 e da $\frac{1}{2}$ 6 e voglio ricavare moneta da 4, cioè ho moneta da 4 e da 13 e voglio ricavare moneta da 8. Sottrai per l'appunto 4 da 8, resta 4 e tanto devi impiegare delle monete maggiori; sottrai l'8 dal 13, resta 5 e tanto devi impiegare delle minori, vale a dire la terza parte di ciascuna di esse. Ma poiché 5 non si divide esattamente per 3, impiega 5 libre di ciascuna delle monete

minori, vale a dire il triplo della terza parte di 5 e triplicherai il 4 che [p.157] deve essere impiegato delle monete maggiori, risulterà 12 delle quali la quarta parte, vale a dire 3, la devi impiegare di ciascuna delle maggiori monete come si mostra nello schema. E risulterà come totale della suddetta moneta in lega 27 libre. Se tuttavia di queste libre vorrai forgiare alquanta moneta, farai come più sopra negli altri casi secondo la regola che abbiamo mostrato nelle società.

Quando si pongono quantità di monete differenti o proporzionali.

(1) Parimenti se vorrai realizzare la fusione delle suddette monete secondo un altro metodo in modo che di nessuna di esse si ponga una quantità uguale, farai così: schematizza il problema come qui si mostra. (2) Dopo di ciò scrivi sopra ciascuna moneta i numeri a piacere che vorrai differenti l'uno dall'altro. Tuttavia scrivi sopra le monete minori i tali numeri che quando saranno addizionati insieme restituiscano un numero intero e composto in modo tale che quando dovrai dividere per esso, risulterà più facile dividere. Scrivi dunque sopra quel 12 diviso in tre parti differenti, come 3 e 4 e 5, come più sopra vedi nello schema posto poiché il 12 è necessario nella realizzazione di una lega di monete e si trova intero in una libra perché essa è formata da 12 oncie. Per questo quando si divide una qualche quantità di libre per 12, ciò che avanzerà sul 12 saranno oncie. Lo stesso poi che abbiamo insegnato per le monete minori fallo per le maggiori. Scrivi pertanto sopra le suddette 4 maggiori monete il 12 diviso in quattro parti differenti, vale a dire 1, e 2 e 3 e 6 come sopra di esse sono poste nello schema. Dopo di ciò moltiplica il numero scritto sopra la moneta minore per la stessa minore moneta, vale a dire per 3 e per 1, risulterà 3 che devi conservare. Parimenti moltiplica il seguente numero scritto per la moneta seguente, vale a dire il 4 per il 2, risulterà 8 che devi conservare. Parimenti moltiplica il terzo numero posto per la terza moneta minore, vale a dire 5 per 3, risulterà 15 che devi addizionare con l'8 e con il 3 conservato più sopra, risulteranno 26 oncie d'argento. Addiziona pertanto i tre numeri posti sopra, vale a dire 3 e 4 e 5, risulterà 12 per il quale devi dividere il 26, risulterà $\frac{1}{6}$ 2 oncie che otterrai da una sola parte dell'operazione di fusione; parimenti moltiplica il numero posto sopra il numero minore delle monete maggiori, vale a dire 1 per 5, risulterà 5 che devi conservare; parimenti moltiplica il numero posto di seguito per la seguente moneta, vale a dire il 2 per il 6, risulterà 12 che devi conservare; parimenti moltiplica il 3 per il 7, risulterà 21 che devi conservare; parimenti moltiplica il numero posto più indietro, vale a dire il 6 per la moneta posta più indietro, vale a dire per 8, risulterà 48 che devi addizionare con il 5 e con il 12 e con il 21, risulterà 86 che devi dividere per la somma dei numeri posti sopra, che sono sopra le monete maggiori, vale a

dire per 12, risulteranno $\frac{1}{6}$ 7 oncie che otterrai dall'altra parte dell'operazione di fusione. Dopo ciò riporta la detta fusione di tutte le sette monete alla fusione di due monete, vale a dire come se tu dicessi 'ho una moneta da $\frac{1}{6}$ 2 oncie e una moneta da $\frac{1}{6}$ 7 oncie e voglio ricavare di lì una moneta da 4 oncie'. Pertanto dalla moneta minore fino alla moneta che vuoi ricavare, cioè da $\frac{1}{6}$ 2 fino a 4 manca $\frac{5}{6}$ 1 e tanto devi impiegare delle monete maggiori in parti differenti secondo la proporzione dei numeri posti sopra di esse. Vale a dire della moneta da 5 devi impegare una parte di tale $\frac{5}{6}$ 1 e di quella da 6 devi impegare 2 parti, e di quella da 7 impieghi tre parti e di quella da 8 impieghi 6 parti. Dunque addizionerai secondo il metodo delle società 1 e 2 e 3 e 6, risulterà 12. Poi moltiplicherai $\frac{5}{6}$ 1 per 1 e dividerai per 12, risulterà $\frac{11}{72}$ che devi scrivere sopra quella moneta che è da 5 oncie perché tale porzione di quella moneta bisognerà porre nella fusione di monete. Similmente moltiplicherai singolarmente il 2 e il 3 e il 6 per $\frac{5}{6}$ 1 e dividerai uno per uno i prodotti per 12, risulteranno $\frac{22}{72}$ e $\frac{33}{72}$ e $\frac{66}{72}$ che devi scrivere in ordine sopra le tre monete rimanenti come più sopra [p.158] si mostra nello schema. (3) E ancora, calcola la differenza che c'è fra 4 e $\frac{1}{6}$ 7, che è $\frac{1}{6}$ 3 e avrai quella proporzione che si dovrà porre delle tre minori monete nella suddetta lega di monete. E devi dividere questo $\frac{1}{6}$ 3 in 12 parti calcolando tre parti per la moneta minore e quattro parti per l'altra e cinque parti per la terza. E per fare ciò moltiplica il 3 che è posto sopra la moneta minore per $\frac{1}{6}$ 3 e dividi per 12, risulterà $\frac{57}{62}$ che devi scrivere sopra la moneta minore poiché tale porzione di questa moneta minore deve essere posta nella fusione di monete; similmente moltiplica il 4 che è posto sopra la moneta da 2 oncie per $\frac{1}{6}$ 3 e dividi per 12, risulterà $\frac{76}{72}$ che devi porre sopra la stessa moneta; parimenti moltiplica il 5 che è posto sopra la moneta da 3 per $\frac{1}{6}$ 3, risulterà $\frac{95}{72}$ che devi scrivere sopra la stessa moneta come si vede più sopra nello schema.

(4) E osserva che poiché abbiamo calcolato i settantaduesimi delle sette porzioni che bisogna porre delle suddette 7 monete in modo che quelle stesse porzioni che stanno con la stessa parte frazionaria, vale a dire i settantaduesimi, possano essere libre intere negli stessi numeri, cioè della moneta minore impiega 57 libre quando di essa dovremmo impiegare $\frac{57}{72}$, e per la stessa ragione della moneta da 2 oncie impiega 76 libre e di quella da 3 impiega 95 libre e della moneta da 5 oncie impiega 11 libre e di quella da 6 oncie impiega 22 libre e di quella da 7 oncie impiega 33 oncie e della moneta maggiore impiega 66 libre e così otterrai ciò che ti sei proposto. (5) Invero se della suddetta moneta in lega vorrai formare soltanto 30 libre

addiziona le suddette libre che devi impiegare delle suddette monete, vale a dire 57 e 76 e 95 e 11 e 22 e 33 e 66, risulterà 360 per cui devi dividere il prodotto della moltiplicazione del 30, che sono le libre che desideri forgiare, per le soddette 57 libre e per 76 e per 95 e per 11 e per 22 e per 33 e per 66. E ricaverai che della moneta minore devi impiegare 4 libre e 9 oncie e di quella da 2 oncie devi impiegare 6 libre e 4 oncie e di quella da 3 oncie devi impiegare 7 libre e 11 oncie e della moneta da 5 oncie devi impiegare 11 oncie e della moneta da 6 oncie devi impiegare 1 libra e 10 oncie e di quella da 7 due libre e nove oncie e di quella da 8 cinque libre e sei oncie.

(6) Un tale aveva 240 monete, delle quali la prima era da $\frac{1}{20}$ di un'oncia d'argento per libra; la seconda da $\frac{2}{20}$, cioè da $\frac{1}{10}$; la terza da $\frac{3}{20}$; la quarta da $\frac{4}{20}$, vale a dire da $\frac{1}{5}$, e così via per le rimanenti in successione c'era sempre $\frac{1}{10}$ d'oncia in più fino all'ultima moneta che era da $\frac{240}{20}$, cioè da 12 oncie d'argento, cioè tutta la moneta era d'argento. Da queste monete volle ricavare una moneta da $\frac{1}{2}$ 2 oncie: si chiede quanto impiegherebbe di ciascuna moneta. (7) Sebbene più sopra sia stato detto che le monete minori devono essere poste da una parte dell'operazione di fusione e le maggiori in un'altra, tuttavia indicheremo in che modo talora si debba operare altrimenti, poiché in questa fusione di monete sono state poste molte monete, si sommino tra loro monete a piacere per ordine a partire dalla minore finché dalla loro somma risulti una moneta da non meno di ½ 2 oncie. E si sommino di esse ottanta monete, nell'ultima delle quali ci sono 80/20 di un'oncia d'argento, e si addizioni l'argento che c'è in quelle 80 monete in ordine, vale a dire addizioniamo un ventesimo della prima moneta, e 2 ventesimi della seconda e 3 della terza e 4 e 5 e così via in ordine fino a 80. (8) La somma di questi ventesimi si calcola dalla moltiplicazione di 40 per 81, come si dimostrerà nella prima parte del dodicesimo capitolo. (9) La moltiplicazione invero dei 40 ventesimi per 81, vale a dire di 2 oncie per 81, risulta 162 oncie, e altrettanto argento c'è in queste 80 libre. Per questo, una volta divise le 12 oncie per le 80 monete, risulterà [p.159] $\frac{1}{40}$ 2 oncie d'argento per ciascuna libra di quelle 80 monete. Queste $\frac{1}{40}$ 2 oncie ponile da una parte della fusione di monete, e osserva quanto argento vi sia nelle altre 160 monete. Questo lo vedrai quando moltiplicherai 1 più i 240 ventesimi, vale a dire 241, per la metà di 240, vale a dire per 120, e dal prodotto della moltiplicazione sottrai le 162 oncie già calcolate che sono nelle 80 monete minori. Invero la moltiplicazione dei 120 ventesimi, cioè delle 6 oncie, per 241, risulta 1446 oncie e altrettante oncie d'argento sono nelle 240 monete poste. Da queste oncie sottrai 162, resta 1284 oncie, e altrettanto argento c'è nelle 160 libre maggiori. Per questo una volta diviso

1284 per 160, risultano $\frac{1}{40}$ 8 oncie e altrettanto argento risulta in ciascuna libra delle monete maggiori. Per questo poni $\frac{1}{40}$ 8 dall'altra parte della fusione di monete e poni $\frac{1}{2}$ 2 tra $\frac{1}{40}$ 2 e $\frac{1}{40}$ 8 come si mostra in margine. E scrivi sopra $\frac{1}{40}$ 8 la differenza che c'è fra $\frac{1}{40}$ 2 e $\frac{1}{2}$ 2, vale a dire $\frac{19}{40}$. E sopra $\frac{1}{40}$ 2 scrivi la differenza che c'è fra $\frac{1}{40}$ 8 e $\frac{1}{2}$ 2, vale a dire $\frac{21}{40}$ 5, e poiché sono 221 quarantesimi, scrivi 221 sopra $\frac{1}{40}$ 2. Dunque delle monete minori devi impiegare 221, cioè $\frac{221}{80}$ di ciascuna, dal momento che queste monete sono 80, e delle monete maggiori devi impiegarne 19, cioè $\frac{19}{160}$ di ciascuna, dal momento che queste monete sono 160. Poi affinché tu ottenga la quantità che di ciascuna moneta debba essere impiegato in numeri interi, trasforma $\frac{221}{80}$ e $\frac{19}{160}$ in frazioni con uguale denominatore. Una volta duplicato il 221 risulta 442, posto questo sopra l'80 duplicato risulta $\frac{442}{160}$. Dunque di ciascuna delle monete minori devi impiegare 442 e di ciascuna delle maggiori devi impiegarne 19.

Sezione Settima. Le regole che attengono alla fusione delle monete.

(1) Un uomo ha separato due porzioni d'oro il cui peso insieme era di una libra. Di queste due porzioni ne ha venduta una a 67 bizanti per libra, e l'altra a 50 bizanti per libra, ha ottenuto invero 56 bizanti per entrambi i pezzi. Si chiede qual era il peso di ciascun pezzo. (2) Riconduciamo la soluzione di questo problema all'insegnamento sulle monete, come se si dicesse ‘ho moneta da 67 oncie e da 50 e voglio ricavare da esse moneta da 56. Per tale regola si è spiegato che si procede così, vale a dire che la differenza che c'è fra 50 e 56, cioè 6, la si pone sopra il 67 e la differenza che c'è fra 56 e 67, vale a dire 11, la si pone sopra il 50, e si addiziona il 6 con l'11, risulterà 17, e si deve moltiplicare il 6 e l'11 per il 17, vale a dire per la quantità di oncie di ciascun pezzo, e si devono dividere i prodotti di entrambe le moltiplicazioni per 17, risulterà per il peso del pezzo più costoso $\frac{4}{17}$ 4 oncie e per il peso del pezzo più economico $\frac{13}{17}$ 7 oncie.

Parimenti su un uomo che ha ricavato 2 pezzi d'oro.

(1) Se poi si dicesse che quei due pezzi pesano 11 oncie e li si vendesse similmente per 56 bizanti, bisognerà operare così come se si dicesse 'poiché 11 oncie valgono 56 bizanti, quanto valgono allora 12 oncie, cioè una libra?'. (2) Si moltiplichi 12 per 56, risulterà 672 che si deve

dividere per 11, risulteranno $\frac{1}{11}$ 61 bizanti, ora si dirà: 'ho moneta da 67 oncie e da 50 e tu vuoi ricavare moneta da $\frac{1}{11}$ 61 e si opererà dopo in base al suddetto metodo.

(3) Parimenti se quei pezzi pesassero 13 oncie, si moltiplicherà similmente 12 per 56 e si dividerà per 13, risulterà $\frac{9}{13}$ 51 e si dirà allora: 'ho moneta da 50 e da 67 e voglio ricavare moneta da $\frac{9}{13}$ 51 oncie, e così puoi fare di tre o più pezzi. Tuttavia fai sempre in modo che il prezzo di tutti i pezzi sia ricondotto alla quantità di quella vendita come abbiamo fatto per le precedenti operazioni sui pezzi. Vale a dire quando abbiamo supposto che quei due pezzi sono da 11 oncie o 13 e li riconduciamo alla quantità del prezzo di una libra, poiché della libra è stato detto che valeva 50 e 67 bizanti.

[p.160]

Su un uomo che compra 7 libre di tre carni per 7 denari.

(1) Un tale compra carne di maiale per 3 denari la libra e di mucca per 2 denari e di cinghiale nero per $\frac{1}{2}$ denaro, e di quelle tre carni ottiene 7 libre per 7 denari. Si richiede quanto ottenga di ciascuna carne. (2) Dal momento che per 7 denari ottiene 7 libre di carni, dunque 1 libra vale 1 denaro. Dunque <è come se dicessi> ho moneta da 3 e da 2 e da $\frac{1}{2}$ e voglio ricavare moneta da 1, la qual cosa si calcola in base al metodo suddetto. (3) Vale a dire addizioni il 2 con il 3, risulterà 5, scrivi la differenza che c'è fra 1 fino alla metà di questo 5 sopra $\frac{1}{2}$; e la differenza che c'è fra $\frac{1}{2}$ fino a 1, vale a dire $\frac{1}{2}$, dividila per 2, risulterà $\frac{1}{4}$ che devi scrivere sopra il 2; e un altro $\frac{1}{4}$ scrivilo sopra il 3 e addiziona questi due quarti con il $\frac{1}{2}$ 1 scritto precedentemente, risulterà 2. Poi moltiplica il 7 per $\frac{1}{2}$ 1, risulterà $\frac{1}{2}$ 10 che devi dividere per 2, risulterà $\frac{1}{4}$ 5, e altrettante libre compra di carne di cinghiale. Parimenti $\frac{1}{4}$, che è posto sopra il 2, o lo stesso $\frac{1}{4}$, che è posto sopra il 3, moltiplicalo per 7 e dividilo per 2, risulterà $\frac{7}{4}$ di una libra e altrettanto compra delle restanti carni. (4) Invero se vorrai ottenere quantità differenti di ciascuna carne nella suddetta spesa, supponi, a piacere, di comprare 1 libra di carne di maiale per 3 denari e le rimanti 6 libre delle restanti carni per 4 denari, ciascuna delle quali carni vale $\frac{2}{3}$ di un denaro. (5) Per questo dirai: 'ho moneta da 2 e da $\frac{1}{2}$ e voglio realizzare 6 libre di moneta da $\frac{2}{3}$. Se in base al suddetto insegnamento saprai eseguire questi calcoli,

troverai che della carne bovina l'uomo compra $\frac{2}{3}$ di una libra per $\frac{1}{3}$ 1 denaro, e $\frac{1}{3}$ 5 di carne di cinghiale per $\frac{2}{3}$ 2 denari, e così ottiene 7 libre di carni per 7 denari, come è richiesto.

Sulla donna commerciante che compra mele e pere.

(1) Parimenti una donna commerciante compra 7 mele per 1 denaro e ne vende 6 per 1 denaro; e compra 8 pere per 1 denaro e ne vende 9, e ha speso 10 denari e ne ha guadagnato 1. Si richiede quanto ha speso in mele e quanto in pere. (2) Bisogna fare così come se si supponesse che ella ha investito in mele quei 10 denari, vale a dire moltiplica il 7 per il 10, risulteranno 70 mele. Poiché ne vende 6 per 1 denaro, dividilo per 6, risultano $\frac{2}{3}$ 11 denari. Similmente darai delle pere, poiché supporrai di investire in esse 10 denari e vedrai quante pere otterrai di lì. Moltiplicherai dunque 8 per 10 e devi dividere per 9, risulteranno $\frac{8}{9}$ 8 denari. (3) Poi dirai: 'ho moneta da $\frac{2}{3}$ 11 e da $\frac{8}{9}$ 8 e vorrei ricavare moneta da 11', cioè la somma del profitto e del capitale investito. Scrivi sopra $\frac{2}{3}$ 11, in base all'insegnamento descritto precedentemente, la differenza che c'è fra $\frac{8}{9}$ 8 e 11, vale a dire 19 noni. E viceversa scrivi sopra $\frac{8}{9}$ 8 la differenza che c'è tra 11 e $\frac{2}{3}$ 11, vale a dire $\frac{2}{3}$ 6, e addiziona il 6 con il 19, risulterà 25. Poi moltiplica il 10 per il 19 e dividi per 25, risulteranno $\frac{3}{5}$ 7 denari, e tanto ha investito in pere.

Su un operaio che lavora in un'impresa.

(1) Un tale avrebbe ricevuto al mese, per il suo lavoro, 7 bizanti, e se per qualche tempo si fosse astenuto dal lavoro, avrebbe restituito per la porzione di mese 4 bizanti. È rimasto per un mese nel quale talora ha lavorato e talora no. Così ciò che ha ottenuto per il periodo in cui ha lavorato è 1 bizante, una volta scontato il periodo in cui non ha lavorato. Si richiede quanto ha lavorato e quanto no in quel mese. (2) Opererai così: addiziona i giorni del mese, che sono 30, con i 7 bizanti che ha guadagnato, risulterà 37, e da questi 37 sottrai i 4 che avrebbe dovuto restituire se non avesse lavorato, resta 26. Parimenti addiziona con il 30 il profitto realizzato, vale a dire 1, risulterà 31. (3) Allora dirai 'ho moneta da 26 e da 37 e voglio ricavare da esse 30 libre, vale a dire per i giorni del mese, da 31'. Bisogna eseguire questi calcoli in base all'insegnamento descritto sopra, vale a dirre devi porre la differenza che c'è tra 37 e 31, vale a dire 6, sopra il 26; e la differenza che c'è tra [p.161] 26 e 31, vale a dire 5, scrivila sopra il 37, dunque apparirà evidente che ha lavorato per 5 frazioni di quel mese e per

6 frazioni di mese si è astenuto dal lavoro. (4) Dunque bisogna dividere i giorni del mese, cioè 30, in quelle frazioni in base al metodo utilizzato per le operazioni delle società. Cioè se addizioni il 5 con il 6, risulterà 11 per il quale devi dividere la moltiplicazione di 5 per 30, risulterà $\frac{7}{11}$ 13 giorni e per altrettanti giorni ha lavorato quell'uomo. Similmente moltiplicherai il 6 per il 30 e dividerai per 11, risulteranno $\frac{4}{11}$ 16 giorni nei quali l'uomo menzionato non ha lavorato.

<collazione fondamentale: questa parte non c'entra nulla col resto>

(1) Ho diviso il 20 in due parti e ho calcolato $\frac{1}{3}$ di una e $\frac{1}{8}$ di un'altra e li ho addizionati al 20 e dalla loro somma ho estratto la quinta parte ed è rimasto 20. Poiché da qualunque somma si estragga $\frac{1}{5}$ restano i $\frac{4}{5}$ di essa, dunque i $\frac{4}{5}$ della somma realizzata sono 20. E poiché $\frac{1}{5}$ di quel totale è la quarta parte di $\frac{4}{5}$, dunque $\frac{1}{5}$ della somma realizzata è $\frac{1}{4}$ di $\frac{4}{5}$. Questo $\frac{1}{4}$ è $\frac{1}{3}$ della prima parte e $\frac{1}{8}$ della seconda. Compreso pertanto ciò, supponi che il 20 sia diviso in due parti, una da 20 e una da 0, perciò se calcolerai $\frac{1}{3}$ della prima parte e $\frac{1}{8}$ della seconda, risulterà certo $\frac{1}{3}$ di tutto. Se poi calcolerai $\frac{1}{3}$ della seconda parte, vale a dire di 0, e $\frac{1}{8}$ della prima, risulterà $\frac{1}{8}$ di 20. Ma quando calcolerai $\frac{1}{3}$ di una delle due parti richieste e $\frac{1}{8}$ dell'altra, risulterà $\frac{1}{4}$ di 20. (2) Dunque ho moneta da $\frac{1}{3}$ di 20 e da $\frac{1}{8}$ di 20 e voglio ricavare moneta da $\frac{1}{4}$ di 20. Poiché queste sono le parti di uno stesso numero, vale a dire di 20, possiamo dire indifferentemente: ho moneta da $\frac{1}{3}$ e da $\frac{1}{8}$ e voglio ricavare moneta da $\frac{1}{4}$. Cioè: ho moneta da 8 e da 3 e voglio ricavare 20 libre da 6 attraverso il metodo della differenza invertita. E ricaverai che la prima parte è $\frac{3}{5}$ di 20, vale a dire 12, la seconda $\frac{2}{5}$, vale a dire 8.

(3) E se si supponesse che resti 19, quando dalla somma realizzata si sottrae $\frac{1}{5}$, addiziona a 19 la sua quarta parte, risulterà $\frac{3}{4}$ 23, che è la somma realizzata. Da questa sottrai 20, resta $\frac{3}{4}$ 3 al cui denominatore devi mettere il 20, vale a dire dividilo per 20, risulterà $\frac{3}{16}$. (4) E così hai moneta da $\frac{1}{3}$ e da $\frac{1}{8}$ e vuoi fare 20 libre da $\frac{3}{16}$. Cioè ho moneta da 16 e da 6 e voglio fare 20 libre da 9, una volta scambiate le differenze, ricaverai che la prima porzione è $\frac{3}{10}$ di 20, cioè 6, la seconda $\frac{7}{10}$, cioè 14.

(5) Parimenti ho diviso il 20 in tre parti e ad esso ho addizionato $\frac{1}{3}$ della prima parte, e $\frac{1}{7}$ della seconda e $\frac{1}{8}$ della terza, e dalla somma realizzata ho sottratto la sesta parte di essa ed è rimasto 20. In base all'esemplificazione spiegata precedentemente, pertanto, si troverà che $\frac{1}{6}$ della somma totale è $\frac{1}{5}$ dei suoi $\frac{5}{6}$, vale a dire di 20. Dunque ho moneta da $\frac{1}{3}$ e da $\frac{1}{7}$ e da $\frac{1}{8}$ e vuoi ricavare moneta da $\frac{1}{5}$. Posto il problema, in base al metodo descritto sopra, potrai ricavare le suddette frazioni e la seconda parte starà con la terza in qualsiasi proporzione.

Su un uomo che compra 90 moggi di 5 grani.

(1) Un tale compra a Costantinopoli 90 moggi tra frumento e miglio e fave e orzo e lenticchie per $\frac{1}{4}$ 21 bizanti. Ora, in base a quelle premesse per cui 100 moggi di frumento si vendevano per 29 bizanti, di orzo per 25 bizanti, di miglio poi per 22 bizanti, di fave ancora per 18 bizanti e di lenticchie per 16 bizanti, si chiede quanto compra di ciascun grano. (2) Procederai così: vedi quanto valgono 100 moggi di farine miste dal momento che 90 moggi di esse valgono $\frac{1}{4}$ 21 bizanti. Quando saprai ciò moltiplica i 100 moggi per $\frac{1}{4}$ 21 bizanti e dividi per 90, risulterà $\frac{11}{18}$ 23 bizanti come prezzo di cento moggi. (3) Per cui se si riporta questo problema al metodo della fusione delle monete, bisogna dire: ho monete da 29 oncie e da 25 e da 22 e da 18 e da 16 e da esse voglio ricavare moneta da $\frac{11}{18}$ 23 oncie e formare di essa 90 libre. (4) Per questo schematizza il problema in questo modo e addiziona insieme il prezzo del grano più costoso, vale a dire i 29 bizanti, con [p.162] i 25 bizanti, risulterà 54. E poiché hai addizionato insieme due grani, dividi il 54 per 2, risulterà 27 da cui devi sottrarre $\frac{11}{18}$ 23 bizanti, restano $\frac{7}{18}$ 3 bizanti, il cui numero è la porzione degli altri 3 grani. Per questo dividerai $\frac{7}{18}$ 3 per questi 3 grani, risulterà $\frac{7}{54}$ 1 che devi scrivere sopra il 22 e sopra il 18 e il 16 bizanti, come si mostra nello schema e addiziona insieme il prezzo degli altri tre grani, vale a dire 22 e 18 e 16, risulterà 56 che devi dividere per 3, risulterà $\frac{2}{3}$ 18, la cui differenza fino a $\frac{11}{18}$ 23 è $\frac{17}{18}$4 che è la porzione dei grani più cari. Per questo dividi $\frac{17}{18}$ 4 per 2, risulterà $\frac{17}{36}$ 2 che devi scrivere sopra il 29 e sopra il 25. (5) Una volta scrittili in questo modo, riporta questo problema ai problemi che riguardano le società. Vale a dire uno ha investito $\frac{17}{32}$ 2, e un altro altrettanto e un terzo $\frac{7}{54}$ 1 e un quarto e un quinto altrettanto, e si sono guadagnati 90 moggi. Per cui conviene che si trasformi ciascun numero in centottavi, poiché nel 108 sono contenute

le suddette frazioni. E scrivi ciascuno di essi sopra il numero corrispondente e così otterrai 267 sopra il 29 e il 25, e 122 sopra il 22 e il 18 e il 16. Una volta addizionatili insieme, vale a dire 267 più 267 più 122 più 122 più 122, risulterà 900, per la cui scomposizione devi dividere il prodotto fra i 90 moggi per ciascuno dei numeri suddetti. (6) Ovvero poiché 90 corrisponde a $\frac{1}{10}$ di 900, calcola $\frac{1}{10}$ dei suddetti numeri, risulterà $\frac{7}{10}$ 26 moggi di frumento per $\frac{3\ 4\ 7}{10\ 10\ 10}$ 7 bizanti, e $\frac{7}{10}$ 26 moggi di orzo per $\frac{5\ 7\ 6}{10\ 10\ 10}$ 6 bizanti, e $\frac{2}{10}$ 12 moggi di miglio per $\frac{4\ 8\ 6}{10\ 10\ 10}$ 2 bizanti, e $\frac{2}{10}$ 12 moggi di fave per $\frac{6\ 9\ 1}{10\ 10\ 10}$ 2 bizanti, e$\frac{2}{10}$ 12 moggi di lenticchie per $\frac{2\ 5\ 9}{10\ 10\ 10}$ 1 bizanti.

Altro sulla vendita di grano.

(1) Ma se tu proponessi che egli abbia quantità differenti di ciascuno dei suddetti grani, in modo differente da quello che abbiamo detto sopra per le quantità diverse di monete, vogliamo dire ciò: se vuoi risolvere simili problemi in tre modi differenti, supponi di comprare un quantità a piacere di una di esse. Invero affinché ciò risulti più facile, supponi di comprare 5 moggi di quella che vale 25 bizanti, poiché questi 5 moggi valgono $\frac{1}{4}$ 1 bizanti. Sottrai questi 5 moggi da 90, restano 85 moggi; poi sottrai $\frac{1}{4}$ 1 da $\frac{1}{4}$ 21, restano 20 bizanti. Ora ci restano da spartire 85 moggi per i 20 bizanti tra gli altri quattro grani. Per cui a piacere uno suppone che di quella che vale 16 bizanti ne compra 25 moggi che valgono 4 bizanti, restano 60 moggi per i 16 bizanti da spartire tra gli altri tre grani. Di nuovo supponi a piacere che quello abbia comprato 10 moggi di quel grano che vale 18 bizanti per 100 moggi, questi 10 moggi valgono $\frac{4}{5}$ 1 bizanti. Per cui scontati i 10 moggi da 60 e $\frac{1}{4}$ 1 bizanti da 16, restano 50 moggi per $\frac{1}{5}$ 14 bizanti da spartire tra quel grano il cui centenario vale 22 bizanti e quello che vale 29 bizanti. Per questo bisogna dire: se 56 moggi di due quantità miste di grano valgono $\frac{1}{5}$ 14 bizanti, quanto valgono 100 moggi? Moltiplicherai allora 100 per $\frac{1}{5}$ 14, e dividerai per 50, cioè lo raddoppierai, risulterà $\frac{2}{5}$ 28 bizanti. Dirai, pertanto, 'ho moneta da 29 e da 22 e voglio da esse ricavare 50 libre di moneta da $\frac{2}{5}$ 28. Scritta pertanto la suddetta operazione in base al metodo della fusione delle monete, come più sopra si è insegnato, calcola la differenza che c'è fra 22 e $\frac{2}{5}$ 28, vale a dire $\frac{2}{5}$ 6, e scrivila sopra il 29; e fra $\frac{2}{5}$ 28 e 29 la differenza è di $\frac{3}{5}$, che devi scrivere sopra il 22, e fai la fusione di $\frac{2}{5}$ 6 e di $\frac{3}{5}$, risulta 7. Per questo 7 devi dividere il

prodotto della moltiplicazione di $\frac{2}{5}$ 6 per 50, risulterà $\frac{2}{7}$ 45, e altrettanto ha comprato di quel grano che vale 29 bizanti. E di nuovo dividi per quel 7 il prodotto della moltiplicazione di $\frac{3}{5}$ per 50, risulterà $\frac{2}{7}$ 4 moggi e altrettanto ha comprato di quel grano che vale 22 bizanti.

[p.163]

Altro sugli stessi grani.

(1) Invero se supponesse che egli abbia comprato del grano da 29 tanto quanto ha comprato, e di quello da 25 la quarta parte di esso, e di quello da 22 tanto quanto ha comprato, e di quello da 18 la quarta parte di quel 22 e di quello da 16 la quinta parte di quello da 18, e così avrebbe, sulla base delle premesse precedenti, 90 moggi di quei cinque grani per $\frac{1}{4}$21 bizanti.

(2) Bisogna procedere così da schematizzare il problema come si vede più in basso. E poiché di quello da 25 compra la quarta parte che di quello da 29, dunque compra soltanto un quarto di quello da 29 che di quello da 25. Dunque bisogna porre un 4 sopra il 29 e l'1 sopra il 25 e bisogna moltiplicare il 4 per il 29, risulterà 116, e l'1 per il 25, risulterà 25 che bisogna addizionare con il 116, risulterà 141 che devi dividere per la somma di 4 e 1, vale a dire per 5, risulteranno $\frac{1}{5}$ 28 bizanti e tanto vangono 100 moggi dei grani suddetti così mescolati. Parimenti, per la stessa ragione, poiché di quello da 22 ha comprato quanto ha comprato e di quello da 18 la quarta parte di esso e di quello da 16 la quinta che quello da 18, bisogna cercare in quale numero siano contenuti $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$, per l'appunto nel 20 che si scrive sopra il 22. E calcola la quarta parte di esso, che è 5 e scrivilo sopra il 18; e poi calcola $\frac{1}{5}$ di esso, che è 1 e scrivilo sopra il 16. Poi moltiplica il 20 per il 22, risulterà 440; e 5 per 18, risulterà 90; e 1 per 16, risulterà 16 che devi addizionare con 90 e con 440, risulterà 546 che devi dividere per la somma di 20 con 5 e con 1, vale a dire per 26, risulterà 21, e tanto vangono 100 dei tre restanti grani mescolati assieme nella suddetta proporzione. (2) Per ricondurre questo problema allo schema usato per la fusione delle monete dirai: 'ho moneta da $\frac{1}{5}$ 28 e da 21 e voglio di lì ricavare 90 libre di moneta da $\frac{1\;5}{2\;9}$ 23 oncie'. Tale operazione di fusione se vorrai eseguirla magistralmente con la tecnica, schematizzati gli elementi della fusione, moltiplica il 28 per il 5 e addiziona l'1, risulterà 141 che devi moltiplicare per 9 e per il 2 della frazione del 23 e per il 5 della frazione del 28, risulterà 1890 che devi scrivere sopra il 21. Parimenti moltiplica il 23 per il 9 e addiziona il 5, poi moltiplica per il 2 e addiziona l'1, risulterà 425, poi moltiplica per il 5 che sta sotto la frazione che è con il 28, risulterà 2125 che devi scrivere

sopra $\frac{1\ 5}{2\ 9}$ 23, e di nuovo dirai: 'ho moneta da 2538 e da 1890' e voglio ricavare di lì 90 libre da 2125 oncie'. Per cui la differenza che c'è fra 1890 fino a 2125, vale a dire 235, devi scriverla sopra $\frac{1}{5}$ 28, e la differenza che c'è tra 2125 e 2538, vale a dire 413, devi scriverla sopra il 21, come si vede più in basso. addiziona pertanto 413 con 235, risulterà 648, per la cui scomposizione, che è $\frac{1\ 0\ 0}{8\ 9\ 9}$, deve essere diviso il prodotto della moltiplicazione dei 90 moggi suddetti per 235, e il risultato che verrà fuori sarà la somma di quelle due quantità di moggi di grano addizionati più sopra, vale a dire di 29 e di 25. Ma per dividere la parte dell'uno dall'altra moltiplica il prodotto della suddetta moltiplicazione, vale a dire di 235 per 90, per il 4 che sta sopra il 29 nello schema e dividi per la somma di quel 4 con l'1 che è posto sopra il 25, vale a dire per 5, e per la suddetta frazione, vale a dire per $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{4\ 9\ 9\ 10}$. Invero dal momento che risulta evidentissimo che la scomposizione del 90 nella suddetta frazione è lo stesso $\frac{1\ 0}{9\ 10}$, non occorre moltiplicare 235 per 90, ma ometti la fatica della moltiplicazione in modo da omettere ancora la fatica della divisione per tale 90, e resterà soltanto da moltiplicare 235 per 4 e da dividere per $\frac{1\ 0}{4\ 9}$: se semplificherai $\frac{1}{4}$ da essi, resterà 235 da dividere per 9, risulterà $\frac{1}{9}$ 26 moggi, e tanto ha comprato del grano da 29. Parimenti secondo lo stesso metodo e ordine moltiplica 235 per l'1 che sta sopra il 25, risulta 235 che devi dividere per $\frac{1\ 0}{4\ 9}$, risulterà $\frac{3\ 4}{4\ 9}$ 6, e tanto compra di quello da 25. E ancora, per ottenere le quantità delle restanti tre [p.164] quantità di grano addizionate assieme, bisogna moltiplicare 413 per i 90 moggi e dividere per $\frac{1\ 0\ 0}{8\ 9\ 9}$. Ma per separarle l'una dall'altra bisogna moltiplicare il prodotto di quella moltiplicazione, vale a dire di 413 per 90, per il 20 che è posto sopra il 22 e dividere per la stessa divisione vale a dire per $\frac{1\ 0\ 0}{8\ 9\ 9}$ e per 26 che è la somma di quel 20 e del 5 che sta sopra il 18 e dell'1 che sta sopra il 16, per bene disposti sulla frazione così: $\frac{1\ 0\ 0\ 0\ 0}{2\ 8\ 9\ 9\ 13}$ e così otterrà la quantità di quello che ha comprato per 22 bizanti la libra. Ma poiché si vede assai chiaramente che del suddetto 90 c'è $\frac{1}{9}$ sotto la frazione della divisione, calcola $\frac{1}{9}$ di 90, che è 10, e moltiplicalo per 413, risulterà 4130 che devi moltiplicare ancora per la metà di 20 in modo da poter omettere $\frac{1}{2}$ che è nella frazione, risulterà 41300 che devi dividere soltanto per $\frac{1\ 0\ 0}{8\ 9\ 13}$, risulteranno $\frac{4\ 5\ 1}{8\ 9\ 13}$ 44 moggi e tanto compra del grano da 22. Parimenti affinché tu ottenga quanto ne compra da 18, moltiplica 413 per 5, vale a dire per la diciottessima parte di 90, dal momento che è possibile omettere da questa divisione, vale a dire da $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{2\ 8\ 9\ 13}$, la scomposizione di 18 che è $\frac{1\ 0}{2\ 9}$. Sottratta questa dalla divisione resterà da dividere soltanto per $\frac{1\ 0\ 0}{8\ 9\ 13}$ il prodotto della moltiplicazione di 413 per 5 e ancora per l'altro 5 che è posto sopra il 18, il prodotto totale di tutta questa moltiplicazione è 10325 che devi dividere per $\frac{1\ 0\ 0}{8\ 9\ 13}$, risulterà $\frac{5\ 3\ 0}{8\ 9\ 13}$ 11 moggi e altrettanto compra di tale grano da 18. Parimenti affinché tu ottenga la quantità che compra del grano da 16, moltiplica 413 per 5, vale a dire per un diciottessimo di 90, risulterà 2065 che devi moltiplicare per l'1 che sta sopra il 16, risulterà similmente 2065 che devi dividere per $\frac{1\ 0\ 0}{8\ 9\ 13}$, risulterà $\frac{1\ 6\ 2}{8\ 9\ 13}$ 2 e tanto compra del grano da 16, come si mostra nello schema.

Sulla campana formata da 5 metalli.
(1) Un tale volendo fare una campana di cinque metalli, dei quali un cantare di uno vale 16 libre; di un altro, invero, 18 libre; di un altro poi 20 libre; di un altro ancora 27 libre; di un altro, infine 31 libre, ha realizzato pertanto con questi metalli una campana che pesava 775 rotoli che corrispondono a $\frac{3}{4}$ 162 libre: si chiede quanto abbia impiegato di ciascun metallo. (2) Tutto questo puoi calcolarlo in base alla suddetta regola dei grani. Ma affinché ciò lo si comprenda più chiaramente, vediamolo con i rotoli. 775 rotoli di metalli misti, valgono $\frac{3}{4}$ 162 libre, quanto valgono 100 rotoli, cioè un cantare? (2) La qual cosa bisogna vederla così, se moltiplichi $\frac{3}{4}$ 162 libre per 100, risulterà 16275 che devi dividere per la scomposizione di 775 che è $\frac{1\ 0\ 0}{5\ 5\ 31}$, risulterà 21. Per cui bisogna dire, così da ricondurre questo problema al metodo della fusione delle monete: 'ho moneta da 31 e da 27 e da 20 e da 18 e da 16 e voglio con esse forgiare 775 libre di moneta da 21 libre. In questa fusione, se non sarai dimentico di tutte le dimostrazioni simili, troverai che ha impiegato nella suddetta campana $\frac{2\ 9}{3\ 11}$ 187 rotoli del metallo da 16 libre per 30 libre e $\frac{6}{11}$ 14 denari, e $\frac{2\ 9}{3\ 11}$ rotoli del metallo da 18 per 33 libre e 1 soldo e $\frac{4}{11}$ 4 denari, e $\frac{2\ 9}{3\ 11}$ 187 rotoli di quello da 20 per 37 libre e 2 soldi e $\frac{2}{11}$ 6 denari, e $\frac{1\ 7}{2\ 11}$ 105 rotoli di quello da 27 per 28 libre e 10 soldi e $\frac{2}{11}$ 8 denari, e $\frac{1\ 7}{2\ 11}$ 105 rotoli di quello da 31 per 32 libre e 15 soldi e $\frac{8}{11}$ 2 denari. (3) E se nella suddetta campana vorrai impiegare quantità differenti di ciascun metallo, procederai in base al metodo che più sopra abbiamo esemplificato nell'acquisto dei 90 moggi di cinque grani. Ma vuoi avere tutti questi risultati in rotoli interi, devi procedere secondo il metodo della fusione dei metalli. E otterrai del metallo meno pregiato 60 rotoli, del secondo 155, del terzo 400, del quarto 125 e del più caro 40. E

anche questi possono variare per la fusione con diversi numeri interi. E il prezzo del primo metallo è 9 libre e 12 soldi, del secondo 27 libre, del terzo 80 libre, del quarto 33 libre e 15 soldi, del più caro 12 libre e 8 soldi.
[p.165]

Su un uomo che compra 30 uccelli di tre tipi per 30 denari.
(1) Un tale comprò 30 uccelli per 30 denari. Tra questi c'erano pernici, colombe e passeri. Le pernici le ha comprate per 3 denari, la colombe per 2 denari e 2 passeri per 1 denaro, vale a dire 1 passero per $\frac{1}{2}$ denaro. Si chiede quanti uccelli ha comprato per ciascun tipo. (2) Dividi i 30 denari per i 30 uccelli, risulta 1 denaro. Dici, allora: 'ho moneta da $\frac{1}{2}$ e da 2 e da 3 e voglio ricavare moneta da 1'. Infatti in simili problemi bisogna procedere in base al metodo utilizzato per la fusione dei metalli, in modo che abbiamo numeri interi di uccelli. Per questo, affinché le specie degli uccelli più vili eguaglino in moltitudine le specie degli uccelli più cari, dirai: 'ho moneta da $\frac{1}{2}$ e da $\frac{1}{2}$ e da 2 e da 3, e voglio ricavare moneta da 1', cioè 'ho moneta da 1 e da 1 e da 4 e da 6 e voglio ricavare moneta da 2'. (3) Realizza la prima fusione di passeri e pernici e risulteranno 5 uccelli per 5 denari, vale a dire 4 passeri e 1 pernice; poi fai una seconda fusione di passeri e colombe e otterrai 3 uccelli per 3 denari, vale a dire 2 passeri e 1 colomba. Poi, affinché tu abbia 30 uccelli mescolati tra loro, impiega la prima fusione tre volte, in essa ci saranno 12 passeri e 3 pernici. E resteranno 15 uccelli da aggiungere alla quantità mescolata, per i quali devi impiegare la seconda fusione 5 volte e otterrai 10 passeri e 5 colombe e così nei suddetti uccelli ci saranno 22 passeri e 5 colombe e 3 pernici, come si mostra nello schema. (4) E sappi che dei suddetti uccelli ne potrai avere interi quanti ne vorrai per altrettanti denari oltre i 15, ma sotto i 15 non si possono ottenere un numero di uccelli intero se non 13 e 11 e 8. Invero in 13 è impiegata la prima fusione due volte e la seconda 1 volta, e negli 11 uccelli è impiegata la seconda fusione due volte e la prima una volta sola, e in 8 uccelli è impiegata solo una volta ogni fusione.

Sullo stesso argomento.
(1) E ancora la pernice vale 2 denari, e 2 colombe sono vendute per 1 denaro e 4 passeri per 1 denaro, e voglio 12 uccelli per 12 denari. (2) Dunque è come se tu avessi moneta da $\frac{1}{4}$ e da $\frac{1}{2}$ e da 2 e io volessi ricavare moneta da 1. (3) Fai una prima fusione di pernici e passeri e risulteranno 7 uccelli per 7 denari, vale a dire 4 passeri e 3 pernici. E fai una seconda fusione di pernici e colombe e risulteranno 3 uccelli per 3 denari, vale a dire 2 colombe e 1 pernice.

(4) E poiché con queste due fusioni non possiamo ricavare una quantità intera di 12 uccelli misti per 12 denari, formiamo una quantità mista di 24 uccelli, vale a dire il doppio dei 12 uccelli, in cui si impiega tre volte la prima fusione e una volta la seconda. Per questo di questi 24 uccelli, 10 saranno pernici e 2 colombe e 12 passeri, i quali numeri, poiché sono pari, si possono dividere esattamente a metà. Per questo dimezzali e otterrai 5 pernici e 1 colomba e 6 passeri, e cioè 12 uccelli per 12 denari. (5) E se si supponesse che una colomba vale soltanto 1 denaro allora avresti bisogno solo della prima fusione, nella quale ci sono 3 pernici e 4 passeri per 7 denari, i rimanenti 5 uccelli saranno colombe. E se vorrai formare con questi uccelli una quantità mista di 100 uccelli per 100 denari, puoi impiegare la prima fusione quante volte vorrai, senza che il totale della fusione superi il 100, e ciò che resterà fino al 100 saranno colombe.

Sullo stesso argomento quando i tipi di uccelli sono quattro.

(1) Parimenti una pernice vale 3 denari, una colomba 2, una tortora $\frac{1}{2}$ denaro, un passero $\frac{1}{4}$ di denaro, e voglio di essi 30 uccelli per 30 denari. (2) Fai una prima mescolanza di pernici e passeri, e otterrai 11 uccelli, vale a dire 3 pernici e 8 passeri, e in una seconda mescolanza ci saranno 2 tortore e 1 colomba, cioè 3 uccelli. E poiché con queste due mescolanze non si possono formare 30 uccelli misti, perché sottratta da 30 la prima fusione usata una sola volta non resta un numero divisibile per 3, vale a dire per il totale della seconda mescolanza. Per questo occorre cambiare le mescolanze: fai pertanto una terza fusione di colombe e passeri e otterrai 7 uccelli, vale a dire 3 colombe e 4 passeri, restano per la quarta fusione 5 uccelli, vale a dire 4 tortore e 1 pernice. (3) Quindi in tutti i problemi simili devi impiegare la prima mescolanza e la seconda o la terza e la quarta una sola volta e allora ti applicherai a completare il risultato cercato in base a ciò che servirà con uno o alcuni di essi. (4) Per esempio, poniamo il totale della prima mescolanza e della seconda una volta, risulteranno 14 uccelli, sottratti questi da 30, resteranno 16 uccelli da aggiungere alla mescolanza, in questo 16 rientra una volta la prima mescolanza e la quarta, o tre volte la seconda mescolanza e una volta la terza. Dunque in questi 30 uccelli rientra due volte la prima mescolanza, e due volte la seconda e una volta la quarta, e così otterrai 7 pernici e 1 colomba e 6 tortore e 16 passeri. Oppure impiegherò in questi 30 uccelli la terza e la quarta mescolanza e risulteranno 12 uccelli, sottratti i quali da 30, resteranno 18 uccelli in cui rientra una volta la prima mescolanza e la terza o tre volte la quarta mescolanza e una volta la seconda. E così otterrai 4 pernici, 6 colombe, 4 tortore, 16 passeri. E così possono mescolarsi in diversi modi qualora le specie siano anche di più. (5) E osserva che quando di una qualche specie di uccello si

supponga che 1 uccello vale 1 denaro, allora il problema è facilissimo, poiché tralasci quella specie e fai le mescolanze dei rimanenti che impieghi completando il totale richiesto con la specie tralasciata.

CAPITOLO DODICESIMO.

Il capitolo dodicesimo sui problemi di calcolo, lo dividiamo in nove parti.

La prima di esse sull'addizione dei numeri e altri simili problemi.

La seconda sulle proporzioni dei numeri attraverso la regola del quarto proporzionale.

La terza sui problemi che riguardano gli alberi, e cose simili, per i quali problemi ci sono le soluzioni.

La quarta sul borsello ritrovato.

La quinta sul'acquisto di un cavallo in società, secondo una data proporzione.

La sesta sui viaggiatori e su quei problemi che sono simili ai problemi dei viaggiatori.

La settima sulle altre questioni erratiche che mutano a vicenda nelle loro regole.

L'ottava su questioni di divinazione.

La nona sulla duplicazione della scacchiera e su altre questioni.

Parte prima sull'addizione dei numeri. Le progressioni numeriche.

(1) Quando poi vuoi addizionare ad un dato numero i numeri che derivano da tale numero in base ad una quantità uguale[2439], o per l'incremento di 1, o di 2 o di 3 o di qualsiasi altro numero, moltiplica la metà della quantità di tutti i numeri posti nell'addizione per il primo più l'ultimo numero della serie, o molplica la metà della somma degli estremi, cioè del primo e dell'ultimo numero, per il numero che indica la quantità dei numeri e otterrai il risultato cercato. (2) Per esempio, voglio addizionare al 7 i numeri che incrementano questo 7 di 3 fino al 31, come 7 e 10 e 13 e così via fino a 31. La quantità dei numeri suddetti è 9, cioè ci sono nove numeri nella suddetta serie, dei quali uno è il 7. Gli altri sono 8, numero che si ottiene dalla terza parte di 24 che resta da 31 una volta sottratto il 7. L'addizione poi degli estremi, cioè di 7 e di 31, è 38. Per questo se moltiplicherai la metà di [p.167] 9 per 38, o la metà di 38 per 9, risulterà 171 come somma dell'addizione dei nove numeri proposti. Attraverso questa regola si possono ricavare le addizioni descritte dopo, che risolveremo anche secondo un altro metodo.

Sullo stesso argomento con un altro metodo.

[2439] Nella parte introduttiva del capitolo, Fibonacci spiega come calcolare la somma dei termini di quelle che noi chiamiamo progressioni aritmetiche e che sono degli insiemi numerici $\{a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, ...\}$ in cui ogni termine differisce dal precedente, per una quantità costante, d, detta 'ragione della progressione. La ragione della progressione può essere 1 oppure 2 o 3 o qualunque altro numero, ma, qualunque sia la ragione, la somma cercata è uguale al prodotto tra la metà del numero dei numeri della successione e la somma tra il primo e l'ultimo numero. Noi scriviamo: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 +...a_n= n (a_1 + a_n)/2$. L'osservazione è spesso attribuita a Gauss (1777-1855) che - secondo la tradizione - vi sarebbe arrivato in giovanissima età. (cfr. N. Geronimi, Giochi matematici del Medioevo, Milano 2006, p. 1s).

(1) Se vuoi addizionare alcuni numeri che ordinatamente si incrementano o per l'incremento di 1, iniziando da 1, o per incremento di 2, iniziando da 2, o per incremento di qualche altro numero iniziando da esso, dividi l'ultimo numero per il primo, e addiziona 1 al quoziente della divisione e conserva il risultato, e poi moltiplicalo per la metà dell'ultimo numero o moltiplica l'ultimo numero per la metà del numero conservato. (2) Per esempio, voglio addizionare tutti i numeri che sono da 1 fino a 60, dividerò dunque 60 per 1, e addizionerò 1 al quoziente che moltiplicherò per la metà di 60, o moltiplicherò 60 per la metà di 61, risulterà 1830 come somma della suddetta addizione. (3) Similmente se dal 2 vuoi addizionare i numeri che incrementano di 2 fino a 60, cioè i numeri pari, dividi il 60 per il 2 e addiziona l'1, risulterà 31 che devi moltiplicare per la metà di 60. (4) Similmente se vuoi addizionare da 3 fino a 60 incrementando di tre, come 3 e 6 e 9, moltiplica 1 più la terza parte di 60, vale a dire 21, per la metà di 60, risulterà 630. E intendi così nei restanti casi simili.

(5) Invero se vuoi addizionare le serie di numeri soltanto cominciando da 1 fino a qualunque altro numero vuoi, puoi procedere in base alla regola precedente, ovvero, poiché è lo stesso, moltiplica la metà della somma degli estremi per se stessa e otterrai il risultato cercato. (6) Per esempio, se vuoi addizionare i numeri dispari da 1 a 19, moltiplica la metà della somma dell'unione degli estremi, vale a dire 10, per se stessa, vale a dire per il numero della quantità di quei numeri. Infatti i numeri dispari che sono da 1 fino a 19 sono 10, risulterà 100 come risultato di questa addizione.

(7) Se poi vuoi ottenere in ordine la somma dei quadrati di tutti i numeri che vanno dal quadrato di uno fino al quadrato di un altro numero come per esempio fino al quadrato di 10, il cui quadrato è 100, metti il 10 da una parte e davanti ad esso scrivi il numero seguente e scrivi sotto di essi la loro somma, vale a dire 21. Poi moltiplica il 10 per l'11 poi per il 21 e dividi il risultato per 6 e per 1 che è la differenza tra 10 e 11, e otterrai 285 per la suddetta somma e sarà sempre possibile semplificare in questo il 6 per il quale viene diviso. (8) E se vorrai ottenere la somma dei quadrati che vengono in ordine dai numeri dispari fino al quadrato del 9, davanti al 9 scrivi il numero seguente nella serie, cioè 11, e scrivi sotto di essi la loro somma, vale a dire 20. E moltiplica tra loro questi tre numeri e dividi il prodotto per 12 cioè per 6 e per il 2 che costituisce la differenza tra 9 e 11. Ma semplificherai, vale a dire moltiplica la terza parte di 9 per la quarta di 20, risulterà 15 che devi moltiplicare per 11, risulterà 165, e a questo ammonta la somma. (9) E se vuoi ottenere in ordine la somma dei quadrati dei numeri a partire dal quadrato di 2, che è 4, fino al quadrato di 10, che è 100, scrivi da una parte il 10 e il numero seguente, cioè 12, e la loro somma, cioè 22. E, in base alla regola spiegata prima, calcola la dodicesima parte del prodotto della loro moltiplicazione,

che sarà il risultato dell'addizione richiesta, ma semplificherai $\frac{1}{12}$ e otterrai 220. (10) Similmente puoi ottenere la somma di tutti i quadrati che ci saranno fra numeri che incrementano ordinatamente di 3 o di 4 o di qualsiasi altro numero. (11) Così se vuoi ottenere la somma dei quadrati [p.168] compresi tra i numeri che incrementano di quattro, iniziando dal quadrato di quattro, che è 16, fino al quadrato di un altro numero, per esempio del 20, che è 400. Scrivi innanzitutto il 20 e con esso scrivi il numero seguente che incrementa di 4, vale a dire 24, sotto di essi certo poni il 44, vale a dire il numero della loro somma. Poi moltiplicherai il 20 per il 24, e tutto questo per 44, e dividerai il prodotto per 6 e per il numero che incrementa di 4. Cioè: moltiplicherai il 20 per un quarto di un sesto di 24, cioè per 1, e per 44, risulterà 880 come loro somma, e così avviene negli altri casi. (12) Ho dimostrato infatti geometricamente le cose che qui sono state dette sull'addizione dei quadrati nel 'Libro sul Quadrato' che ho scritto.

Su due viaggiatori dei quali uno cammina dietro l'altro in base a numeri che incrementano ordinatamente.

(1) Una volta mostrate, certo, le regole sull'addizione dei numeri, ora, invero, si esemplificano gli i casi che riguardano queste regole, vale a dire ciò che è stato detto. (2) Ci sono due uomini che si proposero di percorrere un lungo cammino: il primo percorreva 20 miglia al giorno; l'altro, invero, il primo giorno 1 miglio, il secondo 2, il terzo 3 e così aggiungendo sempre un miglio al giorno tentava di perfezionare il suo cammino. Si richiede in quanti giorni l'uno raggiunga l'altro. (3) La qual cosa si calcola così: cioè se si duplica il 20, risulterà 40 da cui devi sottrarre 1, resta 39 e in altrettanti giorni lo raggiungerà. Poiché quello che ogni giorno percorreva 20 miglia ha percorso in quei 39 giorni 20 miglia per 39 che risultarono nel totale 780 miglia, l'altro, invero in quei 39 giorni ha percorso altrettante miglia quante ce ne sono nel totale dei numeri da 1 a 39, la quale somma si ricava similmente dalla moltiplicazione di 20 per 39. [2440]

[2440] Oggi il problema si risolve grazie all'uso delle equazioni. Se chiamiamo con il numero di giorni richiesti, dopo x giorni il primo viaggiatore avrà percorso 20 miglia, il secondo avrà percorso x(1+)/2 miglia (tenuto conto del calcolo della somma dei termini di una progressione aritmetica di primo termine 1 e di ragione 1). Uguagliando le due generiche distanze percorse, otteniamo: $(x^2 + x)/2= 20$, da cui ricaviamo le due soluzioni $x_1= 0$ (corrisponde al momento della partenza) e $x_2= 39$. Il secondo viaggiatore rivedrà, dunque, il primo dopo 39 giorni. se vogliamo verificare la soluzione, vediamo che dopo 39 giorni il primo viaggiatore avrà percorso 20 x 39= 780 miglia. Il secondo viaggiatore (percorrendo 1 miglio il primo giorno, 2 il secondo e così via fino al trentanovesimo giorno in cui percorre 39 miglia) complessivamente avrà percorso 1 + 2 + 3 + ... + 38 + 39= 780 miglia (esattamente lo stesso numero del primo viaggiatore). cfr. Geronimi, Giochi Matematici, p. 2.

Un altro esempio su due viaggiatori dei quali l'uno segue l'altro incrementando sulla base degli stessi numeri.

(1) Parimenti se fosse proposto che uno percorresse ogni giorno 21 miglia e un altro invece percorresse ogni giorno numeri dispari di miglia che incrementano ordinatamente iniziando dal numero 1, finché lo abbia raggiunto, sarà chiaro che in 21 giorni lo raggiungerebbe. Perché se prendiamo ordinatamente 21 numeri dispari, la loro serie sarà da 1 fino a 41, per cui la somma dei numeri dispari che sono da 1 a 41 arriva alla moltiplicazione del 21 per se stesso.

Su due viaggiatori dei quali l'uno viene dietro all'altro sulla base di numeri pari.

(1) Ma se si proponesse che uno percorra ogni giorno 30 miglia, un altro invero faccia il suo cammino incrementando il percorso sulla base dei numeri pari fino a raggiungerlo, bisogna procedere così. (2) Sottrai 1 da 30, resta 29 e in altrettanti giorni lo raggiungerà. Poiché 29 numeri pari vanno dal 2 fino al 58 e poiché la somma dei numeri pari fino a 58 risulta dalla moltiplicazione di 29 per 30, non ci sono dubbi su quando lo si raggiungerà.

Altro ancora su quando uno viene dietro all'altro con un incremento di tre o di qualche altro numero.

(1) Ma se fosse proposto che uno percorra ogni giorno un qualche miglio che possa essere diviso esattamente per l'incremento quotidiano delle miglia dell'altro che procede sulla base dell'incremento di numeri che incrementano di tre o di quattro o di cinque o di qualche altro numero finché lo raggiunga, bisogna fare così: devi dividere il numero delle miglia che il primo percorre ogni giorno per l'incremento dell'altro; duplica il risultato e da questa somma duplicata sottrai 1, il resto sarà la quantità di giorni in cui lo raggiungerà. (2) Per esempio, si supponga che uno percorra ogni giorno [p.169] 60 miglia e un altro invece proceda incrementando di tre, cioè 3 miglia il primo giorno, 6 miglia il secondo, 9 miglia il terzo e poi dividi 60 per 3, risulterà 20 che devi duplicare, risulterà 40 da cui devi sottrarre 1, resta 39 e in tanti giorni lo raggiungerà. Poiché i 39 numeri che incrementano per 3 arrivano fino al triplo di 39, cioè fino a 117, la somma invero dei numeri che incrementa di 3 fino a 117 arriva alla moltiplicazione di 39 per 60 come si è ricavato in base alla prima regola. E quello che ogni giorno ha percorso 60 miglia ha percorso similmente in quei 39 giorni 39 per 60 miglia.

Sullo stesso argomento con un incremento di cinque.

(1) Parimenti se sulla base dell'incremento di cinque uno segue l'altro, una volta raddoppiato il quinto di 60 e sottratto di lì 1, ricaverai 23 come numero della somma dei giorni, e così puoi fare per qualsiasi altro incremento di numeri.

Altro: quando il numero di altre miglia di quello che ogni giorno cammina in modo costante non si divide esattamente per l'incremento dell'altro.
(1) Invero se il numero di quello che procede sempre costantemente non si può affatto dividere esattamente per l'incremento dell'altro, bisogna procedere in mariera differente da quella spiegata finora. (2) Vale a dire che se si suppone che quello che procede costantemente percorra ogni giorno 10 miglia e l'altro invece lo segua con un incremento del tre, calcola un terzo di 10 che è $\frac{1}{3}$ 3 e raddoppialo, risulterà $\frac{2}{3}$ 6 da cui devi sottrarre 1, resta $\frac{2}{3}$ 5 da cui ancora devi sottrarre le frazioni, vale a dire $\frac{2}{3}$, resta 5 e pressappoco in altrettanti giorni lo raggiungerà. (3) Ma affinché tu conosca la loro vera somma, vedi quanto percorre in 5 giorni quello che cammina costantemente, percorre invero 50 miglia. L'altro invece percorre negli stessi 5 giorni una quantità d'incremento dei numeri che vanno per 3 fino a 15, cioè risalendo di tre da 1, si ottiene in quest'incremento il numero 45 dal quale fino al 50 c'è una differenza di 5 che devi conservare. E poiché è chiaro che in questi 5 giorni non lo ha raggiunto, bisogna sommare il cammino del sesto giorno. In questo sesto giorno quello che incrementa di 3 percorre 18 miglia, l'altro invece continua a percorrere costantemente 10 miglia. Da queste 10 miglia fino a 18 ne mancano 8 per il qual numero devi dividere il 5 conservato, risulterà $\frac{5}{8}$ che devi addizionare con i 5 giorni più sopra calcolati, risulterà $\frac{5}{8}$ 5 e in altrettanti giorni lo raggiungerà.
Altrimenti devi dividere il totale delle miglia di quello che procede incrementando di 3 nei 5 giorni suddetti, vale a dire 45, per l'8 ora calcolato, risulterà similmente $\frac{5}{8}$ 5 come abbiamo detto precedentemente, e così può procedere per tutti i casi simili.

Parte seconda sulla proporzione dei numeri.
(1) Un numero ha con un altro numero una proporzione uguale o maggiore o minore. Uguale quando i numeri sono uguali tra loro, come 3 e 3. I numeri che sono tra loro in proporzione maggiore hanno la proporzione secondo ciò che risulta dalla divisione del numero maggiore per il minore, come 8 rispetto a 4 con cui è in doppia proporzione, poiché l'8 diviso per il 4 dà come risultato 2 o perché l'8 è il doppio del 4. Parimenti il 9 è in tripla proporzione rispetto al

3 perché il 9 è il triplo di 3. E il 16 rispetto al 5 è in tripla proporzione più un quinto perché 16 diviso per 5 risulta $\frac{1}{5}$ 3. E così s'intenda per gli altri che hanno maggiore proporzione. (2) I numeri che hanno minore proporzione sono in quella proporzione che risulta dalla divisione del numero minore per il maggiore, come 4 rispetto ad 8 che è in proporzione dimezzata perché 4 diviso per 8 risulta la metà di uno, o perché 4 è la metà di 8. [p.170] Parimenti 3 rispetto al 9 sta nella proporzione di $\frac{1}{3}$ poiché il 3 è un terzo di 9, e il 5 rispetto al 16 sta nella proporzione di $\frac{5}{16}$ di un intero perché 5 diviso per 16 risulta proprio $\frac{5}{16}$ di un intero.

(3) Se si chiedesse rispetto a quale numero il 6 abbia la stessa proporzione che il 3 rispetto al 5, farai così[2441]. Moltiplica il 5 per il 6, risulterà 30 che devi dividere per 3, risulterà 10 che è il numero cercato perché come il 3 sta al 5 così il 6 sta al 10. (4) Sono soliti, invero, in base ad uso diffuso proporre questo stesso problema in altro modo: vale a dire che se il 3 sta al 5 come qualcosa sta al 6. Quando si pone il problema così, si moltiplica similmente il 5 per il 6 e si divide il quoziente per 3.

(5) Parimenti si richiede con quale numero l'11 abbia la stessa proporzione che il 5 rispetto al 9, cioè, secondo l'uso diffuso, se il 5 sta al 9, quale numero sta all'11? Moltiplicherai dunque il 9 per l'11 e dividerai per 5, risulterà $\frac{4}{5}$ 19 per il risultato cercato.

Altro metodo per le proporzioni.

(1) Se ti fosse proposto che 7 sta alla metà di 12 come x sta alla metà di 10, quanto sta alla metà di 10? Questo quesito può essere inteso in due modi, vale a dire quando si dice che 7 sta alla metà di 12 o s'intende che la metà di 12, che è 6, si accresce nel 7, o che il 7 decrementa nella metà di 12, cioè in 6. Per cui se il numero che costituisce la metà di 12 si accresce nel 7 dunque anche la metà di 10 si accresce. E ora avrai bisogno di tale regola: moltiplicherai il 7 per il 10 e dividerai per il 12, risulterà $\frac{5}{6}$ 5 per la metà di 10. (2) Se invece vogliamo intendere che il 7 decrementa nel 6, cioè nella metà del 12, dunque anche la metà di 10 decrementa. E allora moltiplicherai il 6 scritto prima per la metà di 10, vale a dire per 5, risulterà 30 che devi dividere per 7, risulterà $\frac{2}{7}$ 4 e altrettanto sta alla metà di 10. (3) E così potrai risolvere simili problemi attraverso il metodo che vorrai tra i due metodi descritti precedentemente. Tuttavia noi usiamo rispondere a chi ci interroga sempre con il primo metodo.

[2441] La proporzione è 6:x=3:5. E si risolve, com'è noto, moltiplicando i termini estremi e dividendo per il termine medio.

(4) Se $\frac{1}{3}$ sta a $\frac{1}{4}$, quanto sta a $\frac{1}{5}$? Questo quesito è come se si dicesse $\frac{1}{3}$ di un rotolo si vende per $\frac{1}{4}$ di un bizante, quanto vale $\frac{1}{5}$ di un rotolo? Per questo bisogna schematizzare questo quesito in base al metodo delle transazioni commerciali e fare i calcoli in base a ciò che abbiamo insegnato in casi simili nell'ottavo capitolo.

(5) Se si chiedesse di ricavare quattro numeri interi proporzionali, il primo dei quali stia al secondo come il terzo al quarto, cioè che quella frazione o frazioni che il primo numero sarà del secondo, la stessa frazione o frazioni il terzo numero sarà del quarto; ovvero quel multiplo che il primo sarà del secondo, lo stesso multiplo sarà il terzo del quarto numero. (6) Scrivi per il primo e il secondo numero due numeri a piacere, quelli che vorrai. E il primo numero sia 3 e il secondo 7 e come terzo numero scrivi un numero che possa essere diviso esattamente per il primo numero, e sia il 6. Poi dividi il 6 per il primo numero, vale a dire per 3, risulta 2, per questo 2 moltiplica lo stesso numero, vale a dire il 7, risulterà 14 che è il quarto numero.

(7) Per esempio, 3 è i tre settimi di 7, similmente anche 6 è i tre settimini di 14. Puoi anche avere 14 come primo numero, 6 per secondo, 7 per terzo e 3 per quarto, per questo quanto il 14 è multiplo di 6 tanto il 7 è multiplo di 3: il 14 infatti è soltanto due volte e un terzo di 6, e altrettanto il 7 è il multiplo di 3. (8) E bisogna notare che quando quattro numeri saranno proporzionali nel modo suddetto a sua volta il primo starà al terzo come il secondo al quarto, e infatti il primo 3 sta al terzo 6 come il secondo 7 sta al quarto 14: infatti ogni antecedente è la metà del suo conseguente. (9) E bisogna notare ancora che tra quattro numeri proporzionali il prodotto della moltiplicazione del primo numero numero con il quarto eguaglierà sempre la moltiplicazione del secondo per il terzo, come in questo quesito dove il prodotto della moltiplicazione di 3 per 14 eguaglia il prodotto della moltiplicazione di 6 per 7.

(10) Parimenti così come il primo numero sta al secondo e il terzo al quarto così il quinto sta al sesto. Ricavati dapprima i quattro numeri proporzionali, come sopra, scrivi un quinto numero a piacere che si divida esattamente per il primo numero. Sia 15 che, diviso per 3, risulta 5, per il quale devi moltiplicare il secondo numero, risulterà 35, che è il sesto numero.

(11) E se si proponesse di dividere il 10 in quattro parti diverse proporzionali tra loro vale a dire che la prima moltiplicata per la quarta realizzi il prodotto della moltiplicazione della seconda per la terza, trova dapprima i quattro numeri proporzionali, e siano 3 e 7 e 6 e 14 e addizionali insieme, risulterà 30 di cui 10 costituisce la terza parte. Per questo calcola la terza parte dei quattro numeri posti e otterrai come prima parte 1, come seconda parte $\frac{1}{3}$ 2, come terza 2, come quarta $\frac{2}{3}$ 4 e impara che tale proporzione si definisce 'proporzionalità'. (12) Si tratta infatti di un determinato altro tipo di proporzione che si chiama continua nella quale

tutti i numeri sono in una e nella stessa proporzione tra loro ordinatamente. Vale a dire come il primo numero sta al secondo così il secondo sta al terzo e il terzo al quarto e il quarto al quinto e così via in successione ogni numero sta ad ogni altro numero.
(13) Se vorrai ricavare i numeri che stanno in proporzione continua quanti che siano, scrivi come primo numero quello che vorrai, come secondo un qualche multiplo del primo - o il doppio, o il triplo o un altro multiplo che vorrai - e scrivi come terzo numero un numero che sia altrettanto multiplo del secondo quanto il secondo lo era del primo; similmente quanto il terzo sarà multiplo del secondo, scrivi un quarto che sia altrettanto multiplo del terzo e il quinto del quarto e ciascuno di ciascun suo antecedente. (14) Per esempio, vogliamo ricavare cinque numeri in proporzione continua. Sia 1 il primo di essi, 2 il secondo - cioè il doppio del primo -, il terzo sia il doppio del secondo, cioè 4, il quarto il doppio del terzo, cioè 8, il quinto il doppio del quarto, cioè 16. Invero 1 è la metà di 2 come 2 lo è di 4 e 4 di 8 e 8 di 16; similmente come 16 è il doppio di 8, così 8 è il doppio di 4 e 4 di 2 e 2 di 1. E così puoi porre il triplo dei numeri o trovare un altro qualunque multiplo del suo antecedente. (15) E bisogna notare che quando tre numeri saranno in proporzionalità continua, la moltiplicazione del primo per il terzo eguaglierà la moltiplicazione del secondo per se stesso. (16) Per esempio siano 3 e 9 e 27 in proporzione continua, infatti la moltiplicazione di 3 per 27 eguaglia la moltiplicazione di 9 per se stesso, vale a dire è 81. (17) E quando quattro numeri sono in proporzionalità continua la moltiplicazione del primo per il quarto dà lo stesso risultato che la moltiplicazione del secondo per il terzo, e la moltiplicazione del primo per il terzo dà lo stesso risultato della moltiplicazione del secondo per se stesso, e la moltiplicazione del secondo per il quarto quanto la moltiplicazione del terzo per se stesso. Così se il primo numero fosse 1, il secondo 2, il terzo 4, il quarto 8, potrai verificare grazie a questi numeri ciò che abbiamo detto. (18) Similmente quando più numeri sono in proporzionalità continua la moltiplicazione degli estremi sarà sempre uguale alla moltiplicazione degli altri estremi e ciò finché non resterà un numero in mezzo ai numeri proporzionali. (19) Per esempio se nove numeri fossero proporzionali la moltiplicazione del primo numero per il nono eguaglierà la moltiplicazione del secondo per l'ottavo e del terzo per il settimo e del quarto per il sesto e del quinto, che è in mezzo alla proporzione, per se stesso. (20) Per esemplificare questo argomento, siano dati nove numeri in proporzione continua: 1, [p.172] 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 e 256: invero la moltiplicazione di 1 per 256 eguaglia la moltiplicazione di 2 per 128 e di 4 per 64 e di 8 per 32 e di 16 per se stesso. (21) Da ciò invero procede la tecnica del moltiplicare le cifre che abbiamo insegnato nel secondo capitolo così come è contenuto nello stesso capitolo.

(22) Se si chiedesse di ricavare due numeri dei quali i $\frac{2}{7}$ dell'uno stia ai $\frac{3}{8}$ dell'altro, moltiplicherai in croce 7 per 3 e 8 per 2 e otterrai come primo numero 21 e come secondo 16, invero il 6 è i $\frac{2}{7}$ di 21 e i $\frac{3}{8}$ di 16. Questa regola invero procede da quelli che seguono poiché i $\frac{2}{7}$ dei $\frac{3}{8}$ di un numero qualunque equivalgono ai $\frac{3}{8}$ dei $\frac{2}{7}$ dello stesso numero. Per cui quando moltiplichiamo 7 per 3 allora calcoliamo i $\frac{3}{8}$ di 56. Questo 56 viene fuori dalla moltiplicazione di 7 e 8 che sono i denominatori delle frazioni, poiché la proporzione che c'è fra 3 e 8 è la stessa proporzione che c'è fra 3 settimi e 8 settimi e quando moltiplichiamo 8 per 2 allora ricaviamo i $\frac{2}{7}$ di questo 56. Per cui i $\frac{2}{7}$ di 21, vale a dire i $\frac{3}{8}$ di 56, equivalgono ai $\frac{3}{8}$ di 16, vale a dire ai $\frac{2}{7}$ di 56.

(23) Parimenti $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di un numero è $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ dell'altro. Trasforma $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ nella frazione di un solo numero, risulterà $\frac{7}{12}$; fai lo stesso di $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$, risulterà $\frac{9}{20}$. Dunque i $\frac{7}{12}$ del primo numero rappresentano i $\frac{9}{20}$ del secondo. Perciò, seguendo l'ordine spiegato prima, moltiplicherai il 12 per il 9 e il 20 per il 7, e otterrai come primo numero 108, come secondo 140, possiamo anche avere questi termini in numeri minori dal momento che entrambi i numeri sono esattamente divisibili per 4. Per questo se calcoleremo la quarta parte di ciascuno, otterremo come primo numero 27 e come secondo 35. (24) O altrimenti poiché in ciascuna delle due suddette moltiplicazioni si moltiplica il numero la cui quarta parte è intera, la prima delle quali è 12, la seconda 20. Per questo moltiplica soltanto la quarta parte di 12 per 9 e la quarta parte di 20 per 7 e otterrai similmente 27 e 35.

(25) Di nuovo $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ del primo numero rappresentano $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ del secondo, trasforma similmente $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ nella frazione di un solo numero, risulterà $\frac{47}{60}$; fai lo stesso per $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}$, risulterà $\frac{37}{60}$. Poi moltiplicherai il 60 che sta sotto il 47 per il 37 e il 60 che sta sotto il 37 per il 47. Ovvero, per avere numeri più piccoli, moltiplicherai soltanto i sessantesimi di 60 per il numero che gli si oppone in diagonale e otterrai come primo numero 37 e come secondo 47. E così potrai procedere in casi simili.

(26) Parimenti vi sono tre numeri dei quali i $\frac{2}{5}$ del primo rappresentano i $\frac{3}{7}$ del secondo e i $\frac{4}{9}$ del terzo. Scrivi le frazioni scritte precedentemente in ordine così: $\frac{4}{9}\frac{3}{7}\frac{2}{5}$. Poi moltiplicherai ciascun numero che sta sotto la linea di frazione per il numero che sta sopra una delle due linee di frazione rimanenti, e moltiplicherai il prodotto per l'altro numero che è sopra l'altra linea di frazione e otterrai i numeri cercati. (27) Per esempio, moltiplicherai il 5 che sta sotto la prima

linea di frazione per il 3 che sta sopra il 7 e poi per il 4 che sta sopra il 9, otterremo come primo numero 60. Parimenti moltiplicherai il 7 per il 4 poi per il 2, risulterà come secondo numero 56. E ancora, moltiplicherai il 9 che sta sotto la terza linea di frazione, per il 3 e per il 2, risulterà come terzo numero 54.

(28) Invero se vuoi sapere da dove questa regola venga fuori, considera come $\frac{2}{5}$ di $\frac{3}{7}$ di $\frac{4}{9}$ di un qualche numero siano quanto i $\frac{3}{7}$ dei $\frac{4}{9}$ dei $\frac{2}{5}$ dello stesso numero e quanto i $\frac{4}{9}$ dei $\frac{3}{7}$ dei $\frac{2}{5}$ dello stesso numero. Considerati questi elementi capirai che noi più sopra abbiamo calcolato i $\frac{4}{9}$ dei $\frac{3}{7}$ del numero che risulta dalla moltiplicazione di 9 per 7 per 5, cioè di 315 come quando abbiamo moltiplicato 5 per 3 e per 4, per cui abbiamo ottenuto 60. Similmente quando abbiamo ottenuto 56, abbiamo calcolato i $\frac{4}{9}$ dei $\frac{2}{5}$ di 315, e quando abbiamo ottenuto il 54 abbiamo calcolato i $\frac{3}{7}$ dei $\frac{2}{5}$ di 315. Per cui i $\frac{2}{5}$ di 60 che sono i $\frac{3}{7}$ dei $\frac{4}{9}$ di 315, sono quanto i $\frac{3}{7}$ di 56, che sono i $\frac{4}{9}$ dei $\frac{2}{5}$ di 315, e quanto i $\frac{4}{9}$ del 54 che sono i $\frac{3}{7}$ dei $\frac{2}{5}$ di tale 315.

(29) Invero è una delle suddette somme il 24 [p.173] che proviene dalla moltiplicazione di 2 per 3 per 4. Possono invero essere ricavati numeri minori se i tre numeri trovati, vale a dire 60 e 56 e 54 saranno divisi per il 2 che è il loro fattore comune: e il primo numero sarà 30, il secondo 28, il terzo 27.

(30) E se si proponesse che $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, vale a dire $\frac{7}{12}$ del primo numero sia $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$, vale a dire $\frac{9}{20}$ del secondo, e $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$, vale a dire $\frac{11}{30}$, del terzo, scrivi in ordine $\frac{11}{30}\frac{9}{20}\frac{7}{12}$, poi moltiplicherai il 12 per il 9 e poi per l'11 e il 20 per l'11 poi per il 7 e il 30 per il 9 poi per il 7 e semplificherai $\frac{1}{2}$ da ciascuna moltiplicazione, otterrai come primo numero 594, come secondo 770, come terzo 945.

(31) Parimenti ci sono tre numeri dei quali $\frac{1}{3}$ del primo è quanto $\frac{1}{4}$ del secondo e $\frac{1}{5}$ del secondo è quanto $\frac{4}{6}$ del terzo numero. Trova dapprima i due numeri dei quali $\frac{1}{3}$ dell'uno è $\frac{1}{4}$ dell'altro, risulteranno 3 e 4. Dopo ciò trova altri due numeri dei quali $\frac{1}{5}$ dell'uno sia $\frac{1}{6}$ dell'altro, risulteranno 5 e 6. Dunque il primo numero sta al secondo come il 3 sta al 3 e il secondo al terzo come il 5 sta al 6. Per questo scrivi il 3 e il 4 su una stessa linea e il 5 e il 6 su un'altra in modo che il 5 stia sopra il 4, come qui si mostra. Poi moltiplicherai il 5 per il 3 e il 5 per il 4 e il 4 per il 6 e otterrai come primo numero 15, come secondo 20, come terzo 24. (32) Per esempio, come il 3 sta al 4, così un qualche multiplo di 3 sta allo stesso multiplo di 4, dunque come il 3 sta al 4, così il quintuplo di 3, vale a dire 15, sta al quintuplo di 4, vale a dire a 20.

Parimenti come il 5 sta al 6 così un qualche multiplo di 5 sta allo stesso multiplo di 6. Dunque come il 5 sta al 6 così il quadruplo di 5, vale a dire 20, sta al quadruplo di 6, vale a dire a 24. Il primo numero trovato, il 15, sta al secondo, il 20, come il 3 sta al 4 e il secondo, il 20, sta al terzo, il 24, come il 5 sta al 6 come si richiedeva.

(33) E se si supponesse che i numeri siano quattro e il primo, il secondo e il terzo di essi abbiano tra loro le proporzioni descritte e che i $\frac{2}{5}$ del terzo numero siano i $\frac{3}{7}$ del quarto numero, ricavati dapprima i tre numeri suddetti, vale a dire 15 e 20 e 24, poi trova i due numeri dei quali i $\frac{2}{5}$ dell'uno siano i $\frac{3}{7}$ dell'altro, risulteranno 15 e 14, e scrivili sopra gli altri tre numeri, come qui si mostra. Poi moltiplicherai il 15 che sta sopra il 24 per 15 e per 20 e per 24, poi moltiplicherai il 14 per 24, e otterrai come primo numero 225 e come secondo 300 e come terzo 360 e come quarto 336. E il terzo numero sta al quarto come 15 sta a 14 dal momento che i $\frac{2}{5}$ del terzo numero è $\frac{3}{7}$ del quarto. E così potrai ricavare moltissimi numeri in qualunque proporzione.

Parte terza. Quesiti sugli alberi e simili per cui si trovano le soluzioni.

(1) C'è un albero del quale i $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ affonda sotto terra, e precisamente 21 palmi. Si chiede quale sia la lunghezza di quell'albero[2442]. (2) Poiché $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ si ritrovano nel 12, deducine che quest'albero è diviso in 12 parti uguali, di cui un terzo e un quarto, vale a dire 7 parti, sono 21 palmi. Per questo, proporzionalmente, come 7 sta a 21, così 12 parti stanno alla lunghezza dell'albero. E poiché quando quattro numeri sono proporzionali la moltiplicazione del primo per il quarto eguaglia la moltiplicazione del secondo per il terzo, per questo se moltiplicherai il secondo termine, 21, per il terzo termine, 12, che sono noti, e dividerai similmente per il primo numero, vale a dire per 7, risulterà 36 per il quarto numero, l'incognita, vale a dire per la lunghezza di quell'albero. (3) Ovvero poiché 21 è il triplo di 7, calcola il triplo di 12, e otterrai similmente 36[2443].

[2442] Nella matematica moderna il quesito si risolve facilmente con un'equazione: $\frac{7}{12}$x= 21, ovvero x = 36 palmi.

[2443] In una traduzione più scorrevole: 'Il minimo comune denominatore tra $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ è 12. Allora l'albero è divisibile in 12 parti uguali; 3 e 4 fanno 7 parti e misurano 21 palmi; perciò 7 sta a 21 come 12 sta all'altezza della pianta. Dato che i quattro numeri sono in proporzione, il prodotto tra il primo e il quarto è uguale al prodotto tra il secondo e il terzo; perciò moltiplica il secondo 21 per il terzo 12 e dividi per il primo 7; troverai il triplo di 12, che è 36'. In questo capitolo, Fibonacci usa spesso il metodo detto della falsa posizione. In questo caso, si suppone che l'albero misuri 12 palmi, Fibonacci infatti suggerisce di scegliere 12 perché è il più piccolo intero multiplo di 3 e di 4. Allora la somma di $\frac{1}{4}$ di 12 e di $\frac{1}{3}$ di 12 è uguale a 7 palmi. Questa sarebbe la lunghezza della parte interrata, se la pianta fosse alta 12 palmi. Ma il problema dice che la parte sotto terra misura 21 palmi, e

(4) C'è invero un altro metodo che possiamo utilizzare, vale a dire se poni come incognita un qualche numero noto a piacere che possa dividersi esattamente per le frazioni che sono poste in tale quesito. E in base alle premesse di tale quesito, applicati a ricavare la proporzione con questo numero posto nella soluzione di quel quesito.
(5) Per esempio, [p.174] il numero cercato di questo quesito è la lunghezza dell'albero. Per questo supponi che esso sia 12 dal momento che si divide esattamente per il 3 e per il 4 che sono i denominatori delle frazioni. E poiché si dice che $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ dell'albero corrisponde a 21, calcola $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ del 12 supposto, risulterà 7, se invece per caso fosse risultato 21 avremmo ottenuto l'incognita cercata, vale a dire che quell'albero è di 12 palmi. Ma poiché 7 non è 21, accade dunque proporzionalmente che come il 7 sta al 21, così la lunghezza supposta dell'albero sta a quella ricercata, vale a dire 12 a 36. Per questo ci si abitui a dire: 'se pongo 12, risulta 7, cosa devo porre perché risulti 21?'. E quando si dice così bisogna moltiplicare insieme i numeri estremi, vale a dire 12 per 21 e il prodotto va diviso per il numero restante.

Su un albero da cui resta 12 se si sottrae $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$.

(1) Parimenti c'è un albero di cui $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ affonda sottoterra, il resto, poi, che è sopra la terra, è di 21 palmi. (2) Dividi in dodicesimi quest'albero, risulteranno 12 parti uguali, da cui sottrai $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, vale a dire sette parti, resteranno 5 parti, che si suppone corrispondano a 21 palmi. Per questo come 5 parti stanno a 21 palmi, così 12 parti staranno alla lunghezza dell'albero. Per questo dividi per 5 il prodotto della moltiplicazione di 12 per 21, risulteranno $\frac{2}{5}$ 50 palmi. (3) Ovvero in base al secondo metodo ipotizza che quell'albero sia di 12 palmi, da cui sottratti i suoi $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, vale a dire 7, resteranno 5 palmi sopra la terra. Per questo dici: 'Se pongo 12, risulta 5. Cosa devo porre perché risulti 21?'. Moltiplica pertanto gli estremi, vale a dire 12 per 21 e dividi per il termine medio, risulterà similmente $\frac{2}{5}$ 50. (4) Se vuoi verificare questo risultato,

non 7. Osservando che 21 è il triplo di 7, l'altezza dell'albero sarà il triplo di 12 (l'altezza inizialmente presa come falsa posizione), cioè 36 palmi. Questo verrà spesso richiamato da Fibonacci, che ricorderà il suo procedimento risolutivo con il nome di metodo dell'albero. cfr. Geronimi, giochi matematici, p. 5.

poiché una volta sottratti i $\frac{7}{12}$ da qualunque cosa ne restano i $\frac{5}{12}$, per questo calcola i $\frac{5}{12}$ di $\frac{2}{5}$ 50: la qual cosa puoi calcolarla in due modi differenti. Calcola dapprima $\frac{5}{12}$ di 48, vale a dire calcola $\frac{1}{12}$ di 48, che è 4, quintuplicalo e risulterà 20. Dopodiché sottrai da 48 $\frac{2}{5}$ 50, resterà $\frac{2}{5}$ 2 di cui calcola i quinti, risulterà 12 quinti a cui devi addizionare di nuovo $\frac{5}{12}$, risulterà cinque quinti, vale a dire 1 che devi addizionare con il 20 calcolato, risulterà 21. Questo appunto volevamo: che sottratto $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ da $\frac{2}{5}$ 50, restasse 21. (5) O, altrimenti, moltiplica $\frac{2}{5}$ 50 per il 5 che sta sopra il 12, risulterà 252 che, diviso per 12, risulta 21. (6) Ovvero trasforma $\frac{2}{5}$ 50 in quinti, risulterà 252 quinti da cui sottrai i suoi $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, vale a dire 84 e 63, resteranno 105 quinti di 1 palmo che spuntano fuori dalla terra, cioè 21 palmi.

Sull'albero o sul numero che risulterà di 38 se gli si addiziona $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$.

(1) Parimenti se tu dicessi che se si addizionassero i $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di quell'albero a un albero, risulterebbe 38, supponi anche, in base alla suddetta esemplificazione della seconda regola, che quell'albero sia di 12. Di questo 12 calcola $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, vale a dire 7 e addizionalo al 12, risulterà 19. Volendo che questo 19 corrisponda a 38, dirai: ' se pongo il 12 come lunghezza dell'albero, mi risulta nell'addizione 19, cosa devo porre perché mi risulti in tale somma il 38?'. (2) Moltiplicherai invero il 12 per il 38, vale a dire il primo numero per l'ultimo e dividerai per 19, vale a dire per il secondo. Ma prima dividi il 38 per il 19, risulterà 2 che devi moltiplicare per 12, risulterà 24 per la lunghezza di quell'albero. (3) Per esempio $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di 24 corrisponde a 14 che addizionato con 24 risulta 38 e questo volevamo: questo sarebbe lo stesso se tu avessi detto: 'c'è un numero tale che se gli addizionerai i suoi $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, risulterà 38'.

Su un albero o un numero che risulterà 51 se ad essi addizionerai la differenza dei suoi $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$.

(1) E ancora c’è un albero dal quale, una volta sottrattogli $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, se si addizionerà la differenza che ne risulta alla sua lunghezza, risulterà 51. Si richiede la lunghezza di quell’albero. (2) Poiché se ne chiede la lunghezza, supponiamo che essa sia 12 e sottratti da questo i $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, vale a dire 7, resta 5. Una volta addizionatolo con 12, risulta 17. Volendo che invece che 17 risulti 51, dirai: ‘se pongo 12, risulta 17, che cosa devo porre perché risulti 51?’. Moltiplica 12 per 51 e dividi per 17, poi dividi 51 per 17, risulterà [p.175] 3 che devi moltiplicare per 12, risulterà come lunghezza dell’albero 36. (3) Per esempio, sottratti da 36 i suoi $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, che corrispondono a 21, resta 15 che, addizionato con 36 dà come risultato 51 come si richiedeva. Questo è lo stesso che se dicessi: ‘c’è un numero che risulterà 51 se ad esso addizionerai la sua differenza di $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$.

Sull’albero o numero i cui $\frac{4}{5}\frac{3}{4}$ sono 33 più dell’albero o del numero.

(1) Parimenti vi è un albero di cui una volta calcolati i $\frac{4}{5}\frac{3}{4}$ se da tale quantità calcolata sottrarrai la lunghezza di quell’albero, resterà 33. Si richiede ancora quale sia la lunghezza di quell’albero. (2) E poiché di esso si richiede la lunghezza, supponi che essa sia 20 dal momento che nel 20 si ritrovano $\frac{4}{5}\frac{3}{4}$. Di questo 20 calcola i $\frac{4}{5}\frac{3}{4}$, risulterà 31, dal quale sottrai il numero supposto come lunghezza dell’albero, vale a dire 20, resta 11. (3) Volendo che invece che 20 risulti 33, dirai: ‘se pongo il 20 come lunghezza dell’albero, risulta 11, cosa devo porre affinché risulti 33?’. Moltiplicherai il 20 per il 33 e dividerai per 11. Per questo dividi il 33 per l’11, risulterà 3 che devi moltiplicare per 20, risulterà 60 e tanti sono i palmi di quell’albero. (4) Per esempio, i $\frac{3}{4}$ di 60 sono 45 e i $\frac{4}{5}$ di 60 sono 48. Addizionati insieme questi numeri, risulta 93. Se da esso sottrarrai la lunghezza dell’albero, cioè 60, resterà 33, com’è stato chiesto. Invero è lo stesso che se dicesse: c’è un numero che se calcolerai i suoi $\frac{4}{5}\frac{3}{4}$, risulterà un numero che lo supera di 33. Questo numero è similmente 60. (4) Esposte appunto le regole sugli alberi, ora invece passiamo a questioni simili.

Sul ricavare un qualche numero i cui $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ corrispondano alla radice dello stesso numero.

(1) C'è un numero tale che se calcolerai i suoi $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ e moltiplicherai per se stesso il totale che ne risulterà otterrai il numero stesso, cioè quel totale risultante sarà la radice di quel numero: si richiede quale sia quel numero. (2) Per questo supponi ancora che sia 60 di cui calcola $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ che è 57 e moltiplicalo per se stesso, risulterà 3249. Volendo che invece che 3249 risulti 60, dici, dunque: 'se pongo 60 come quantità del numero, risulta 3249, cosa devo porre perché risulti soltanto 60?'. Moltiplicherai pertanto 60 per 60, risulterà 3600 che devi dividere per la scomposizione di 3249 che è $\frac{1}{9}\frac{0}{19}\frac{0}{19}$, risulterà $\frac{1}{19}\frac{2}{19}1$ e a questo corrisponde il numero cercato. (3) Per verificarlo moltiplica l'1 per il 19 e addiziona in aggiunta il 2 che sta sopra il 19, moltiplica il risultato per l'altro 19 e addizionaci l'1, risulterà 400 che sono $\frac{1}{19}\frac{0}{19}$, cioè trecentosessantunesimi, e per capire meglio si scrive così: $\frac{400}{361}$. Di esso calcola i $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ che risulta $\frac{380}{361}$, cioè $\frac{20}{19}$, che moltiplicato per se stesso, dà come risultato lo stesso $\frac{400}{361}$, cioè $\frac{1}{19}\frac{2}{19}1$, come richiedevamo. (3) Altrimenti poiché $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, vale a dire i $\frac{19}{20}$ di quel numero, moltiplicato per se stesso, realizza lo stesso numero, trova il numero che, moltiplicato per $\frac{19}{20}$, realizza 1. Troverai questo numero se dividerai 1 per $\frac{19}{20}$, vale a dire 20 per 19. Dalla cui divisione risulta $\frac{20}{19}$ che è la radice del numero cercato come abbiamo detto. Questo, moltiplicato per se stesso, realizza $\frac{400}{361}$ per il numero cercato, la qual cosa la dimostrerò anche con un'esemplificazione geometrica. (4) Giaccia dunque una linea .a.b. per il numero cercato, sul quale sia costruita una superficie rettangolare .a.d., tracciando per la larghezza la linea .a.t. che sia 1, per questo la superficie .a.d. è il numero cercato, perché da .t.a. per .a.b. risulta il numero .a.b. che è il numero cercato. E si desuma dal numero .a.b. il numero .a.c. che è $\frac{19}{20}$ del numero .a.b. E poiché da a.e. moltiplicato per se stesso si suppone provenga il numero .a.b., è chiaro che il numero a.e.

sia maggiore dell'unità, dal momento che il numero .a.b. è maggiore del numero .a.e., per questo .a.c. è maggiore dell'unità .a.e. e si costruisca sopra la retta .a.c. il tetragono .e.z. E dal momento che dai $\frac{19}{20}$ del numero cercato moltiplicato per se stesso risulta il numero cercato, dunque da .a.e. moltiplicato per se stesso risulta il numero .a.d. Ma da .a.c. [p.176] moltiplicato per se stesso, risulta il tetragono .e.z., dunque .e.z. è uguale al numero .a.d., dunque il numero .e.z. è il numero cercato, comunemente portato via il numero .a.I. resterà il numero .I.b. uguale al numero .t.k. Ma .b.I. risulta da .e.i. moltiplicato per .I.d. perché la superficie .b.I. è un rettangolo. E pertanto da .t.I. moltiplicato per .I.k. proviene la superficie del rettangolo .t.k. Infatti i numeri .t.I. I.d.e.I.I.k. sono proporzionali. Ed .e.I. è uno siccome è uguale all'unità .a.t. E come il primo numero .t.i. sta al secondo .I.d. così il terzo .e.I. sta al quarto .I.k. Per questo come .t.I. starà a .t.d. così .a.e. starà ad .a.b. così l'unità .e.i. al numero .e.k. cioè al numero .a.e. Ma .a.e. sta ad .a.b. come 19 sta a 20. Per questo .e.I. sta a .e.k. come 19 sta a 20. Per questo bisogna moltiplicare l'unità .e.I. per 20 e bisogna dividere il prodotto per 19 e risulterà $\frac{20}{19}$ per il numero .e.k. cioè per il numero .e.a., come occorreva dimostrare.

Trovare un numero la cui radice è la differenza di $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ rispetto ad esso.

(1) C'è un numero dal quale se sottrarrai e moltiplicherai la differenza per se stessa otterrai lo stesso numero, cioè la differenza sarà la radice di quel numero. Si chiede quale sia quel numero. (2) Supponi dunque che esso sia 60 dal momento che nel 60 si ritrovano come fattori $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$. Quindi calcola $\frac{1}{3}$ di 60, vale a dire 20, e $\frac{1}{4}$ di 60, vale a dire 15, e $\frac{1}{5}$ di 60, vale a dire 12, e $\frac{1}{6}$ di 60, vale a dire 10 e addizionali insieme, risulterà 57 che devi sottrarre da 60, resterà 3 che devi moltiplicare per se stesso, risulterà 9. (3) Volendo che invece che 9 risulti 60, per questo dirai: se pongo 60, risulta 9, cosa devo porre affinché risulti 60? Moltiplicherai dunque 60 per 60 e dividerai per 9, risulterà 400. Ma poiché la scomposizione di 9 è $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$, dividi uno di quei 60 per 3, risulterà 20; poi dividi l'altro 60 per l'altro 3 che resta nella scomposizione del 9, risulterà similmente 20: questi, moltiplicati fra loro, daranno come risultato similmente 400. E tanto è quel numero. (4)

Per esempio sottrai $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di 400, vale a dire 380, resterà 20 che, se lo moltiplicherai per se stesso, darà come risultato lo stesso 400 com'è necessario. (5) Altrimenti, poiché sottratti dal numero cercato i suoi $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, resta $\frac{1}{20}$, che è la radice di tale numero, per questo da $\frac{1}{20}$ moltiplicato per se stesso, risulta lo stesso numero. Per questo ricava il numero che, quando sarà moltiplicato per $\frac{1}{20}$ di un intero, darà come risultato 1: lo troverai se dividerai 1 per $\frac{1}{20}$, dalla cui divisione risulta 20 che è la radice del suddetto numero, il quale, moltiplicato per se stesso, dà come risultato 400 per il numero intero. La qual cosa è dimostrata anche attraverso la suddetta esemplificazione geometrica.

Trovare un altro numero, al quale se aggiungerai i suoi $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, risulterà la radice del numero precedente.

(1) Parimenti se fosse detto, c'è un numero al quale se addizionerai $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ e moltiplicherai per se stessa la somma calcolata, risulterà lo stesso numero, risulterà cioè un numero che sia la radice di quell'altro. Supponi pertanto che questo numero sia 60, al quale addiziona i suoi $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, cioè 57, risulterà 117, che devi moltiplicare per se stesso, risulterà 13689. Invece di questo 13689 vorresti risultasse 60, per questo dirai: se pongo 60 come quantità del numero risulta 13689, cosa porrò affinché risulti 60? Moltiplicherai 60 per 60, risulterà 3600 che devi dividere per la scomposizione di 13689, risulterà $\frac{400}{1521}$, la cui radice che troverai se dividerai 1 per $\frac{19}{20}1$: di lì risulterà $\frac{20}{39}$ come radice del numero cercato, che, moltiplicata per se stessa darà $\frac{400}{1521}$, come sopra.

Su un numero al quale se sarà addizionata la differenza rispetto ai suoi $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ risulterà la radice dello stesso numero.

(1) E ancora se fosse detto: c’è un numero al quale se si addizionasse la differenza rispetto ai suoi $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, e si moltiplicasse per se stesso il risultato, risulterebbe lo stesso numero, cioè sarebbe la radice di quel numero. (2) Supponi pertanto che esso sia 60 dal quale sottrai i suoi $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, resta 3 che addiziona con 60, risulterà 63 che devi moltiplicare per se stesso, risulterà 3969, mentre vorresti che risultasse 60. Per questo moltiplicherai 60 per 60, risulterà 3600 che devi dividere per 3969, risulterà $\frac{400}{441}$, e tale sarà quel numero. (3) Oppure addiziona $\frac{1}{20}$ a 1, vale a dire la differenza rispetto a $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, risulterà $\frac{1}{20}$ 1, per il quale devi dividere 1, risulterà $\frac{20}{21}$ che è la radice del suddetto numero e che moltiplicato per se stesso dà come risultato per il numero cercato similmente $\frac{400}{441}$.

(2) E ancora c’è un numero tale che se ne calcolerai i $\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}$ e dalla cifra risultante sottrarrai lo stesso numero e moltiplicherai la differenza per se stessa otterrai lo stesso numero, cioè quella differenza risulterà la radice di quel numero. (3) Supponi che quel numero sia 60 del quale calcola i $\frac{2}{3}$, che sono 40, e i $\frac{3}{4}$ che sono 45 e i $\frac{4}{5}$ che sono 48, e i $\frac{5}{6}$ che sono 50 e addizionali insieme, risulterà 183 da cui devi sottrarre 60, resterà 123 che devi moltiplicare per se stesso, risulterà 15129. Per questo dirai, se pongo 60, risulta 15129, che cosa devo porre affinché risulti 60? Moltiplicherai dunque il 60 per il 60 e dividerai per la scomposizione di 15129, risulterà $\frac{31}{41}\frac{9}{41}$ e a tanto ammonterà quel numero.

Calcolare gli anni di vita di un ragazzo.

(1) Un ragazzo ha vissuto per un certo tempo tale che se avesse vissuto per quanto ha vissuto e di nuovo per altrettanto tempo più $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di quanto ha vissuto e ancora per 1 anno, avrebbe vissuto per 100 anni. Si chiede quanto ha vissuto[2444]. (2) Invero questa postulazione è simile

[2444] Il problema è risolvibile con un'equazione di primo grado. Il risultato dovrà poi essere trasformato da un numero frazionario di anni nel corrispondente numero di anni, mesi e giorni. L'equazione è: $3x + (\frac{1}{4} + \frac{1}{3})x + 1 = 100$, da cui si ricava $x = \frac{1188}{43}$. Questo valore, trasformato, dà 27 anni, 7 mesi e 16 giorni. cfr. Giochi matematici, p.6.

alla regola dell'albero tale che se alla lua lunghezza aggiungerai 2 volte la lunghezza dello stesso albero più i suoi $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ più 1, risulterà 100[2445]. (3) Bisogna procedere così: sottrai da 100 1, vale a dire lo stesso 1 che hai aggiunto agli anni, resta 99. Poi supponi che il ragazzo abbia vissuto 12 anni: se questo avesse vissuto tanto quanto ha vissuto e ancora altrettanto e $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di questi 12 anni, avrebbe 43 anni. Dunque dirai: se suppongo che il giovane abbia vissuto 12 anni, risultano 43 anni, cosa devo porre affinché risultino 99 anni? Moltiplica il 12 per il 99, risulterà 1188 che devi dividere per 43, risulteranno $\frac{27}{43}27$ anni, e tanto ha vissuto quel ragazzo. Questo stesso risulta dividendo 99 per $\frac{1}{4}\frac{1}{3}3$.

Su un leone in un pozzo.

(1) Un leone è in un pozzo la cui profondità è di 50 palmi e risale ogni giorno $\frac{1}{7}$ di un palmo e discende di $\frac{1}{9}$. Si richiede in quanti giorni uscirà dal pozzo. (2) Supponi che esca dal pozzo in 63 giorni dal momento che nei fattori del 63 si ritrovano $\frac{1}{9}\frac{1}{7}$. Poi vedi quanto salirebbe quel leone, ridiscendendo in quei 63 giorni. Salirebbe invero 63 settimi di un palmo che sono 9 palmi e discenderebbe 63 noni che sono 7 palmi. Sottrai i 7 palmi dai 9, restano 2 palmi e tanto sale in più rispetto a quanto scende in 63 giorni. (3) Per cui dirai se pongo 63 giorni sale 2 palmi, cosa devo porre affinché salga 50 palmi? Moltiplica 63 per 50 e dividi per 2, risulteranno 1575 giorni e in altrettanti giorni il leone uscirà dal pozzo.[2446]

[2445] Ancora una volta Fibonacci risolve il problema utilizzando il metodo della falsa posizione. Fibonacci toglie anzitutto l'1 finale alla somma richiesta e ottiene 99. Poi, pone arbitrariamente che l'età del giovane sia di 12 anni poiché 12 è il minimo comune multiplo tra i due denominatori 3 e 4. Partendo da questa ipotesi, la falsa posizione, al triplo di 12 aggiunge 3 e 4 (rispettivamente $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ di 12) ottenendo 43. Si chiede: "Cosa devo mettere al posto di 12 per ottenere 99?". Risolve la proporzione e ottiene $\frac{1188}{43}$ anni, che corriponde a 27 anni, 7 mesi e 16 giorni.

[2446] Fibonacci sostiene che il leone raggiungerà la cima dopo 1575 giorni. In base al suo ragionamento, tra salita e discesa ogni giorno il leone procede verso l'alto di $\frac{1}{7}$ - $\frac{1}{9}$ = $\frac{2}{63}$ di palmo. Per trovare il numero di giorni necessario ad arrivare in cima, cioè per percorrere 50 palmi, bisogna calcolare: 50 : ($\frac{2}{63}$)= 1575 giorni. In realtà la soluzione data da Fibonacci non è corretta. Esaminiamo la situazione alcuni gioeni prima del 1575esimo. Dopo 1570 giorni, il leone sarà arrivato all'altezza di 1570x $\frac{2}{63}$ = 49,841 palmi. Il giorno successivo salirà di $\frac{1}{7}$ di palmo, cioè di 0,143 palmi, raggiungendo (prima di ridiscendere) l'altezza di 49,984 palmi. Ridiscende di 0,111 palmi e, dopo 1571 giorni, si ritrova dunque a 49,873 palmi dal suolo. Salendo, nella prima parte del giorno

Su due serpenti.

(1) Parimenti c'è un serpente alla base di una torre che è alta 100 palmi e risale ogni giorno di $\frac{1}{3}$ di un palmo, e ridiscende ogni giorno di $\frac{1}{4}$. Invece alla sommità della torre c'è un altro serpente che discende ogni giorno di $\frac{1}{5}$ di palmo, e risale di $\frac{1}{6}$. Si chiede in quanti giorni si incontreranno lungo la torre. (2) Supponi che s'incontrino in 60 giorni, dal momento che nel 60 sono contenuti i fattori $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$. Vedi dunque quanto i serpenti si avvicinano fra loro in quei 60 giorni. Il serpente in basso in quei 60 giorni sale 5 palmi in più di quanti ne ridiscende, mentre il serpente superiore scende 2 palmi in più di quanti ne risale. Dunque si avvicinano di 7 palmi. (3) Per questo bisogna dire: se pongo 60 i serpenti si avvicinano di 7 palmi, cosa devo porre affinché [p.178] si avvicinino di 100 palmi? Moltiplica il 60 per il 100, risulterà 6000 che devi dividere per 7, risulteranno $\frac{1}{7}$ 857 giorni, e in altrettanto tempo si ricongiungeranno. (4) Ora se tu chiedessi in quale parte della torre si ricongiungeranno, farai così: moltiplica 5, vale a dire l'ascesa del serpente più in basso per 100, risulterà 500 che devi dividere per 7, risulteranno $\frac{3}{7}$ 71 palmi e di tanto risale il serpente inferiore. E se moltiplicherai la discesa del serpente superiore, vale a dire 2, per lo stesso 100 e dividerai il prodotto per 7, risulteranno $\frac{4}{7}$ 28 palmi per il luogo del loro ricongiungimento a partire dall'alto.

Su quattro pezzi di panno.

(1) Un tale ha comprato 4 pezzi di panno per 80 bizanti, il primo dei quali li ha comprati per un certo prezzo, il secondo per $\frac{2}{3}$ del prezzo di quel primo, il terzo poi l'ha comprato per $\frac{3}{4}$ del prezzo del secondo, il quarto poi l'ha comprato per $\frac{4}{5}$ del prezzo del terzo. Si chiede quanto costi ciascun pezzo[2447]. (2) Supponi che il primo costi 60 bizanti dal momento che nei

successivo, di altri 0,142 palmi, il leone supera la quota di 50 palmi. Avrà così raggiunto la cima del pozzo nel corso del 1572esimo giorno. cfr. Geronimi, Giochi matematici, p. 8s.

[2447] Il problema si risolve facilmente impostando un'equazione. Poniamo che la prima pezza costi x, allora la seconda pezza costerà $\frac{2}{3}$ x. La terza pezza costerà $\frac{3}{4}$ di $\frac{2}{3}$ x ovvero $\frac{1}{2}$ x e la quarta pezza costerà $\frac{4}{5}$ di $\frac{1}{2}$ x, cioè $\frac{2}{5}$ x.

fattori del 60 si ritrovano $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$. Dunque se il primo vale 60, il secondo, poiché vale i suoi $\frac{2}{5}$, vale 40 bizanti e il terzo vale 30 bizanti, cioè $\frac{3}{4}$ del prezzo del secondo, il quarto poi vale 24 bizanti, poiché è i $\frac{4}{5}$ di 30. Poi addiziona 60 più 40 più 30 più 24 cioè i prezzi ipotizzati dei suddetti quattro panni, risulterà 154. (3) Ma volendo che questo 154 sia 80, dici: se ipotizzo 60 come prezzo del primo panno, risultano nel totale dell'acquisto dei quattro panni 154 bizanti, cosa devo porre perché io ottenga per la stessa somma soltanto 80? Moltiplica 60 per 80, risulterà 4800 che devi dividere per la scomposizione di 154 che è $\frac{1}{2}\frac{0}{7}\frac{0}{11}$, risultano $\frac{6}{7}\frac{1}{11}$ 31 bizanti, e tanto costa il primo panno; parimenti affinché tu ottenga il prezzo del secondo moltiplica 40 per 80 e dividi di nuovo per $\frac{1}{2}\frac{0}{7}\frac{0}{11}$, risulterà $\frac{4}{7}\frac{8}{11}$20 come prezzo del secondo panno; parimenti affinché tu conosca il prezzo del terzo, moltiplica 30 per 80 e dividi per $\frac{1}{2}\frac{0}{7}\frac{0}{11}$, risulterà come suo prezzo $\frac{3}{7}\frac{6}{11}$15 bizanti; infine affinché tu conosca il prezzo del quarto, moltiplica 24 per 80 e dividi per $\frac{1}{2}\frac{0}{7}\frac{0}{11}$, risulterà come suo prezzo $\frac{1}{7}\frac{5}{11}$15. E sappi che in ciascuna delle suddette quattro moltiplicazioni bisogna semplificare $\frac{1}{2}$.

Altrimenti su un altro argomento.

(1) Altrimenti, per ricondurre questo quesito al metodo utilizzato per le società[2448], scrivi le frazioni in ordine così $\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}$1 e moltiplica l'1 per 3 poi per 4 poi per 5 che sono i

---

Risolvendo l'equazione: x + $\frac{2}{3}$ x + $\frac{1}{2}$ x + $\frac{2}{5}$x= 80, otteniamo x= $\frac{2400}{77}$. Da ciò si ricavano i valori delle quattro pezze: prima pezza 31 + $\frac{13}{77}$ bisanti; seconda pezza: 20 + $\frac{60}{77}$ bisanti; terza pezza 15 + $\frac{45}{77}$ bisanti; quarta pezza 12 + $\frac{36}{77}$ bisanti.

2448 Fibonacci propone anche il metodo di soluzione che chiama 'regola delle società'. Noi lo conosciamo come problema di ripartizione di un numero in parti direttamente proporzionali a quattro numeri dati e lo sviluppiamo utilizzando la seguente tabella

Prima pezza	Seconda pezza	Terza pezza	Quarta pezza	Somma	
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{77}{30}$	Costante $\frac{2400}{77}$
				80	
$31 + \frac{13}{77}$	$20 + \frac{60}{77}$	$15 + \frac{45}{77}$	$12 + \frac{36}{77}$		

denominatori, risulterà 60 che devi conservare. Poi moltiplica il 2 che sta sopra il 3 per il 4 che sta sotto il 3, risulterà 8 che devi moltiplicare per 5, risulterà 80 che devi conservare. E ancora moltiplica il 2 che sta sopra il 3 per il 3 che sta sopra il 4, risulterà 6 che devi moltiplicare per 5, risulterà 30 che devi conservare. E ancora moltiplica il 2 che sta sopra il 3 per il 3 che sta sopra il 4, risulterà 6 che devi moltiplicare per il 4 che sta sopra il 5, risulterà 24. Addiziona pertanto insieme i quattro numeri conservati, vale a dire 60 più 40 più 30 più 24, risulterà 154 e ricava la sua scomposizione che è $\frac{1}{2}\frac{0}{7}\frac{0}{11}$. Poi moltiplica uno ad uno ciascuno dei suddetti quattro numeri e dividivi il prodotto di ciascuna moltiplicazione per $\frac{1}{2}\frac{0}{7}\frac{0}{11}$ e semplifica $\frac{1}{2}$, otterrai il prezzo di ciascun panno.

Sulla terza parte di un numero a partire dalla quarta parte per la quinta di quel numero.

(1) Se si interrogasse sulla terza parte di un numero che sia la quarta parte per la quinta di quel numero, supponi allora che quel numero sia 60 e di esso calcola $\frac{1}{4}$ che è 15 del quale calcola $\frac{1}{5}$ che è 3. Ma volendo che invece risulti soltanto $\frac{1}{3}$, moltiplica 60 per $\frac{1}{3}$, risulterà 20 che devi dividere per 3, risulterà $\frac{2}{3}6$ per quel numero.

(2) Altrimenti scrivi in ordine così $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$. Poi moltiplica l'1 che è sopra il 3 per il 4 poi per il 5, risulterà 20 che devi dividere per il prodotto della moltiplicazione dell'1 che è sopra il 5 per l'1 che è sopra il 4 e poi devi moltiplicare per 3, la quale moltiplicazione risulta 3, risulterà similmente $\frac{2}{3}6$.

[p.179]

Sulle uova.

(1) Un tale ha comprato 7 uova per un denaro e ha venduto 5 uova per un denaro e ha guadagnato 19 denari. Si chiede quanto egli abbia investito in uova. (2) Supponi che egli abbia investito 5 denari per i quali ha ottenuto 35 uova che ha venduto per 7 denari. Dunque ha guadagnato 2 denari per quei 5 denari. (3) Volendo che invece che 2 denari fossero 19,

---

La costante di proporzionalità è calcolata dividendo 80 per $\frac{77}{30}$. Moltiplicando poi tale costante per l'intero della prima pezza e le frazioni delle altre pezze, si trovano i valori delle quattro pezze espressi in bisanti.

moltiplica il 19 per 5 e dividi per 2, risulterà $\frac{1}{2}47$ denari e tanto ha investito quell'uomo. (4) Invero la tecnica per ricavare questa regola è questa: devi capire che la differenza fra 5 e 7 è 2 per il quale devi dividere la moltiplicazione di 5 per 19 come sopra abbiamo detto.

Sulle stesse uova.

(1) Parimenti se quel tale dicesse che ha comprato 7 uova per 2 denari e ha venduto 19 uova per 6 denari e ha guadagnato 21 denari e si richiede quanto abbia investito, schematizza il problema così[2449]. (2) Poi moltiplica 7 per 6, risulterà 42 che devi scrivere sopra il 7; poi moltiplica 19 per 2, risulterà 38 che devi scrivere sopra il 19; dopo ciò sottrai il 38 dal 42, resta 4; poi moltiplica 38 per 21, risulterà 789 che devi dividere per 4, risulteranno $\frac{1}{2}199$ denari, e tanto ha investito. (3) E se si supponesse che ha investito $\frac{1}{2}199$ denari e si chieda il suo profitto, moltiplicherai $\frac{1}{2}199$ per 4 e dividerai per 38 e otterrai per il profitto 21 denari.

Sui rotoli in base alla regola delle uova.

(1) Poi se si proponesse che per $\frac{1}{7}\frac{1}{2}4$ denari ottenesse $\frac{1}{2}\frac{3}{8}11$ rotoli e vendesse $\frac{2}{9}\frac{1}{5}17$ rotoli per $\frac{7}{10}7$ denari e guadagnando 27 denari, schematizza il problema come puoi vedere schematizzato in questa pagina. Poi moltiplica gli 11 rotoli per l'8 della sua frazione e addiziona il 3, risulterà 91 che devi moltiplicare per 2 e addizionare 1, risulterà 183 che devi scrivere sopra $\frac{1}{2}\frac{3}{8}11$. Parimenti moltiplica i 4 denari per 2 e addiziona 4, risulterà 9 che devi moltiplicare per il 7 dell'altra sua frazione, risulterà 63 a cui devi addizionare la

---

[2449] In questo caso, i dati numerici del problema non sono ben posti e il problema non ammette soluzione, perché quella trovata non corrisponde a un numero intero di uova. Infatti, con 199,5 denari si acquisterebbero 698,25 uova: un quarto di uovo di troppo. D'altra parte se si acquistassero esattamente 699 uova, l'investimento sarebbe di $199 + \frac{5}{7}$ denari e dalla vendita si ricaverebbero $220 + \frac{14}{19}$ denari, realizzando un guadagno di $21 + \frac{3}{133}$ denari (21,02) e non esattamente 21 denari. Volendo risolvere il problema in base ad un moderno procedimento, comunque, calcoliamo dapprima il guadagno che si realizza con la vendita di un solo uovo. Il ricavo è $\frac{6}{19}$ di denaro, mentre il costo è $\frac{2}{7}$ di denaro; il guadagno è dato dalla loro differenza ed è di $\frac{4}{133}$ di denaro. Calcoliamo poi quante uova si devono comprare per guadagnare esattamente 21 denari. Basta fare $21: (\frac{4}{133})$ e si trova che si dovrebbero acquistare e rivendere 698,25 uova che, essendo state acquistate a $\frac{2}{7}$ di denaro l'una, portano a un investimento di 199,5 denari.

moltiplicazione dell'1 che è sopra il 7 per il 2, risulterà 65 che devi scrivere sopra $\frac{1}{7}\frac{1}{2}4$. Di nuovo moltiplica i 17 rotoli per 5 e addiziona l'1 che devi moltiplicare per 9 e addiziona la moltiplicazione del 2 che sta sopra il 9 per il 5, risulterà 784 che devi scrivere sopra $\frac{2}{9}\frac{1}{5}17$. Parimenti moltiplica i 7 denari per 10 e addiziona 7, risulterà 77 che devi scrivere sopra $\frac{7}{10}7$.
(3) Dopo di ciò moltiplica il numero posto sopra $\frac{2}{9}\frac{1}{5}17$, vale a dire 784, per il numero posto sopra $\frac{1}{2}\frac{3}{8}11$, vale a dire 183, per il numero posto sopra $\frac{7}{10}7$, vale a dire per 77, risulterà 14091 che devi scrivere sopra 183. Dopo occorre moltiplicare 50960 per le parti frazionarie che sono a denominatore delle frazioni di 11 e di 7, vale a dire per 2 e per 8 e per 10. E infine occorre moltiplicare 14091 per le parti frazionarie che sono a denominatore delle frazioni del 17 e del 4, vale a dire per 5 e per 9 e per 2 e per 7. Per cui si moltiplicherà soltanto 5960 per 2 e per 8, cioè per 16, risulterà 815360 e si ometterà di moltiplicare per 10 poiché omettiamo di moltiplicare 14091 per 5 e per 2 per i quali non occorre moltiplicarlo, e si moltiplicherà soltanto per 7 e per 9, cioè per 63, risulterà 877733 da cui devi sottrarre 815360, resta 72373. Di quest'ultimo numero impegnati a trovare la scomposizione che è $\frac{1}{7}\frac{0}{7}\frac{0}{7}\frac{0}{211}$ per la quale devi dividere il prodotto della moltiplicazione di 815369 per 27, vale a dire per il profitto. Il prodotto di questa moltiplicazione è 22014720, risulteranno $\frac{0}{7}\frac{0}{7}\frac{6}{7}\frac{2}{2}\frac{8}{11}3041$, e tanto ha investito in quei rotoli.

(4) Altrimenti dividi $\frac{1}{2}\frac{3}{8}11$ per $\frac{1}{7}\frac{1}{2}4$, risulterà $\frac{1}{4}\frac{0}{10}\frac{6}{13}2$. Parimenti dividi $\frac{2}{9}\frac{1}{5}17$ per $\frac{7}{10}7$, risulterà $\frac{8}{9}\frac{2}{11}2$ che devi sottrarre da $\frac{1}{4}\frac{0}{10}\frac{6}{13}2$. E dividi la differenza per il prodotto della moltiplicazione di $\frac{8}{9}\frac{2}{11}2$ per 27 e otterrai il numero cercato.

Sul cane e la volpe.

(1) Parimenti se si chiedesse su una volpe che è davanti al cane di 50 passi e a 9 passi della volpe che corre [p.180] corrispondono 6 passi del cane che segue e si chiede in quanto tempo quella sia raggiunta. (2) Invero questo quesito si riporta alla stessa regola delle uova. Vale a dire che se sottrai 6 da 9, resta 3 per il quale devi dividere il prodotto della

moltiplicazione di 6 per 50, risulteranno 100 passi e fra altrettanti giorni il cane starà con la volpe nello stesso punto. (3) Se invece ignorassi la loro distanza e fosse proposto che il cane raggiunge la volpe in 100 passi, moltiplicherai il 3 per il 100 e dividerai per il suddetto 6.

Su quello che ha mandato il figlio ad Alessandria.

(1) Un tale ha mandato suo figlio ad Alessandria e gli ha dato 100 bizanti precisando che comprasse con essi pepe e basilico. Un cantare di pepe costa 50 bizanti e un cantare di basilico ne costa 30. E il peso del pepe è $\frac{2}{9}\frac{3}{7}$ del peso del basilico. Si richiede quanto ha comprato di pepe e quanto di basilico. (2) Supponi che egli abbia comprato 63 cantari di basilico dal momento che nei fattori del 63 si ritrovano $\frac{2}{9}\frac{3}{7}$, e vedi quanto valgono quei 63 cantari. Valgono invero 1890 bizanti. Fatto ciò calcola i $\frac{2}{9}\frac{3}{7}$ di 63 che risulta 41 e poni altrettanti cantari che avrebbe comprato di pepe che valgono 2050 bizanti. Con questi addiziona i 1890 bizanti, risulteranno 3940 bizanti. (3) Cosa devo porre perché dall'addizione risultino 100 bizanti? Moltiplica il 63 per il 100 e dividi per 3940 la cui scomposizione è $\frac{1}{2}\frac{0}{10}\frac{0}{197}$. Tuttavia la moltiplicazione dei 63 cantari per 100 risulta 6300 cantari che sono 630000 rotoli che devi dividere per $\frac{1}{2}\frac{0}{10}\frac{0}{197}$, risulteranno $\frac{177}{197}159$ rotoli e tanti rotoli di basilico ha comprato. Parimenti moltiplica 41 cantari per 100, risulteranno 410000 rotoli che devi dividere per $\frac{1}{2}\frac{0}{10}\frac{0}{197}$, risulteranno $\frac{0}{2}\frac{0}{10}\frac{12}{197}104$ e tanto ha comprato di pepe. (4) Se poi tu volessi sapere quanti bizanti valga il pepe e quanti il basilico, moltiplica 2050 per 100 e dividi per $\frac{1}{2}\frac{0}{10}\frac{0}{197}$ e otterrai come prezzo del pepe $\frac{6}{197}52$ bizanti; parimenti moltiplica 1890 per 100 e dividi per $\frac{1}{2}\frac{0}{10}\frac{0}{197}$, risulterà come prezzo del basilico $\frac{191}{197}47$.

(5) E se il suddetto padre raccomandasse al figlio che $\frac{3}{7}$ della quantità di pepe corrispondano a $\frac{2}{9}$ della quantità di basilico, ricava dapprima i due numeri dei quali i $\frac{3}{7}$ dell'uno siano i $\frac{2}{9}$ dell'altro, saranno 14 e 27: infatti $\frac{3}{7}$ di 14 risultano quanto $\frac{2}{9}$ di 27. Per

questo supponi che egli abbia comprato 14 cantari di pepe e 27 cantari di basilico e procederai in base a ciò che abbiamo fatto più sopra, e troverai la quantità di entrambe le merci.

(6) Parimenti supponiamo che $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ della quantità di pepe corrisponda a $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ della quantità di basilico. Ricavi che i due numeri dei quali $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di uno corrispondono a $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ dell'altro, sono 27 e 35. Infatti $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di 27 corrispondono a $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ di 35. Per questo supponi che egli abbia comprato 27 cantari di pepe e 35 cantari di basilico e opererai in base al metodo descritto sopra.

(7) Di nuovo si suppone che egli abbia comprato con i suddetti 100 bizanti del pepe per 50 bizanti alla porzione, del lac per 40 bizanti la porzione, del basilico per 30 bizanti la porzione e del lino per 20 bizanti la porzione, e si suppone che $\frac{2}{3}$ della quantità di pepe corrisponda a $\frac{4}{5}$ della quantità di lac e che $\frac{6}{7}$ della quantità di basilico corrispondano a $\frac{8}{9}$ della quantità di lino. (8) Bisogna ricavare dapprima i quattro numeri dei quali $\frac{2}{3}$ del primo numero corrispondono a $\frac{4}{5}$ del secondo e a $\frac{6}{7}$ del terzo e a $\frac{8}{9}$. E otterrai come primo numero 36, come secondo 30, come terzo 28 e come quarto 27. (9) Per questo supponi che egli abbia comprato 36 cantari di pepe che costano 1800 bizanti, e 30 cantari di lac che costano 1200 bizanti, e 28 cantari di basilico che costano 840 bizanti e 27 cantari di lino che costano 540 bizanti. Una volta addizionati insieme questi bizanti delle quattro merci, si realizzano 4380 bizanti. (10) Ma volendo che invece risultino 100 bizanti, per questo moltiplicherai uno ad uno i 36 cantari di pepe, vale a dire i 3600 rotoli, e i 30 cantari di lac, vale a dire i 3000 rotoli, e i 28 cantari di basilico, vale a dire 2800 rotoli e i 27 cantari di lino, vale a dire [p.181] i 2700 rotoli e dividerai il prodotto di ciascuna moltiplicazione per la scomposizione di 4380 che è $\frac{1}{6}\frac{0}{10}\frac{0}{72}$ e otterrai come quantità di pepe $\frac{14}{73}82$ e per la quantità di lac $\frac{36}{73}68$ e per la quantità di basilico $\frac{4}{6}\frac{67}{73}63$ e come quantità di lino $\frac{47}{73}61$. E così possiamo proporre svariati quesiti dello stesso tipo che si risolvono secondo il procedimento descritto precedentemente.

Sulla divisione del 10 in tre parti differenti secondo una proporzione continua.

(1) Se si proponesse di dividere il 10 in tre parti differenti delle quali la minore moltiplicata per la maggiore realizzi quanto la seconda moltiplicata per se stessa, procederai nel modo seguente. (2) Supponi che la prima parte sia un qualche numero, per esempio 1, poi supponi che la seconda parte sia un qualche altro numero, per esempio 2 che devi moltiplicare per se stesso, risulterà 4 che devi dividere per 1, risulterà 4. Ora hai tre numeri, vale a dire 1, 2 e 4 dei quali il primo per il terzo, vale a dire 1 per 4, moltiplicati fra loro realizzano quanto il secondo per se stesso, vale a dire 2 per 2. (3) Dunque addiziona 1 + 2 + 4, risulta 7, volendo che invece risulti 10, dirai: per l'1 che pongo come prima di quelle tre parti, risulta 7 nella loro somma, cosa devo porre al suo posto affinché la somma risulti 10? Moltiplicherai pertanto l'1 per il 10 che dividerai per il 7, risulterà come quantità della prima parte $\frac{3}{7}1$; parimenti moltiplicherai, in base allo stesso metodo, la seconda parte, vale a dire il 2 per il 10, risulterà 20 che dividerai ancora per 7, risulterà $\frac{6}{7}2$ e a tanto corrisponde la seconda parte; di nuovo moltiplicherai il 4, che è la terza parte, per il 10, risulterà 40 che devi dividere per 7, risulterà come terza parte $\frac{5}{7}5$. (4) E allora la moltiplicazione di $\frac{3}{7}1$ per $\frac{5}{7}5$ è quanto la moltiplicazione di $\frac{6}{7}2$ per se stesso e $\frac{3}{7}1 + \frac{6}{7}2 + \frac{5}{7}5$ addizionati insieme, risultano 10, come si chiedeva. (5) Invero può dividere il 10, sulla base delle condizioni descritte precedentemente, in innumerevoli tre parti diverse, perché se all'inizio porremo altri numeri in proporzione continua, tranne che 1 e 2 e 4, il 10 risulterà diviso in altre parti, delle quali la prima, moltiplicata per la terza risulterà sempre quanto la seconda moltiplicata per se stessa.

Sullo stesso argomento, la divisione del 10 in quattro parti che abbiano un rapporto di proporzionalità continua.

(1) Parimenti se vorrai dividere il 10 in quattro parti, in modo che la prima moltiplicata per la quarta risulti quanto la seconda per la terza; e ancora la prima moltiplicata per la terza risulti quanto la seconda moltiplicata per se stessa; e ancora la seconda moltiplicata per la quarta risulti quanto la terza per se stessa. (2) Invero possiamo ricavare questa divisione in infinite parti differenti, per questo esemplificheremo un caso per molti. Supponi che la prima parte sia 1, la seconda due volte tanto, vale a dire 2, la terza due volte la seconda, vale a dire 4, la quarta due volte la terza, vale a dire 8: questi quattro numeri sono in proporzionalità continua, per cui sommate queste quattro parti, vale a dire 1 + 2 + 4 + 8, risulta 15. (3) Volendo che invece che 15 risulti 10, dirai: se pongo 1 come prima parte, risulta 15 come

somma di quelle quattro parti, che cosa devo porre per quella parte affinché risulti 10 nella loro somma? Moltiplicherai invero 1 per 10 e dividerai per 15, risulterà $\frac{2}{3}$ di un intero come prima parte. Parimenti moltiplicherai uno ad uno il 2 e il 4 e l'8 per il 10 e uno ad uno li dividerai per 15 e otterrai come seconda parte $\frac{1}{3}1$, come terza $\frac{2}{3}2$, e come quarta $\frac{1}{3}5$. Ovvero, ottenuta la prima parte, la duplicherai e otterrai la seconda, duplicata la quale, otterrai la terza, duplicata la quale otterrai la quarta. Ovvero poiché 10 è $\frac{2}{3}$ di 15, calcola i $\frac{2}{3}$ dei suddetti quattro numeri e otterrai i numeri cercati.

Sulla stessa divisione del 10, ma in cinque parti.

(1) E ancora se vorrai dividere il 10 in più di quattro parti, per esempio in cinque parti che siano tra loro in proporzionalità continua, [p.182] cioè la prima moltiplicata per la quinta risulterà quanto la seconda per la quarta e quanto la terza per se stessa; e ancora la prima per la quarta risulterà quanto la seconda per la terza, e ancora la prima per la terza quanto la seconda per se stessa, e ancora la seconda per la quinta quanto la terza per la quarta, e infine la terza per la quinta quanto la quarta per se stessa. (2) Supponi pertanto, come hai fatto prima, che ci sia 1 come prima parte, 2 come seconda, 4 come terza, 8 come quarta, 16 come quinta. Addiziona dunque 1 + 2 + 4 + 8 + 16, risulterà 31. (3) Volendo che invece risulti 10 moltiplicherai 1 per 10 e dividerai per 31, risulterà $\frac{10}{31}$ come quantità della prima parte; poi moltiplicherai il 2 per il 10 e dividerai per il 31, risulterà $\frac{20}{31}$ come seconda parte; e così farai per le altre tre parti: per la terza $\frac{40}{31}$, cioè $\frac{9}{31}1$; per la quarta $\frac{80}{31}$, cioè $\frac{18}{31}2$; e per la quinta $\frac{160}{31}$, cioè $\frac{5}{31}5$. Questi numeri, addizionati insieme, realizzeranno 10, come si chiedeva.

Su un leone, un leopardo e un orso.

(1) Un certo leone mangiava una pecora in 4 ore, e un leopardo in 5 ore, e un orso in 6 ore: si chiede in quante ore divorerebbero una pecora se fosse divisa tra loro. (2) Procederai così: per le quattro ore in cui il leone mangia la pecora, scrivi $\frac{1}{4}$; e per le 5 ore del leopardo

scrivi $\frac{1}{5}$, e per le 6 ore dell'orso scrivi $\frac{1}{6}$. E poiché $\frac{1}{4}\frac{1}{5}\frac{1}{6}$ si trovano tra i fattori del 60, supponi che in 60 ore essi la divorino. Considera poi quante pecore il leone mangerebbe in quelle 60 ore: dal momento che in 4 ore ne divora una, è chiaro che egli divorerebbe 15 capre in 60 ore, e il leopardo divorerebbe 12 capre perché 12 è un quinto di 60, similmente un orso divorerebbe 10 capre perché 10 è un sesto di 60. Dunque in 60 ore essi mangerebbero 15 capre + 12 + 10, cioè 37. (3) Per questo dirai, se pongo 60 ore, essi mangiano 37 capre, cosa devo porre perché essi mangino soltanto una capra? Moltiplica pertanto l'1 per il 60 e dividi per il 37, risulterà $\frac{23}{37}$ 1 ora. E in questo tempo essi divoreranno tale capra.

Su due formiche della quali una segue l'altra.

(1) Due formiche sono distanti su un piano 100 passi e si dirigono allo stesso luogo. La prima di esse percorre ogni giorno $\frac{1}{3}$ passi, ma torna indietro di $\frac{1}{4}$, l'altra percorre $\frac{1}{5}$ e torma indietro di $\frac{1}{6}$. Si richiede in quanti giorni si ricongiungeranno. (2) Supponi 60 giorni nei quali la prima percorrerebbe 60 terzi di un passo, vale a dire 20 passi e tornerebbe indietro di 15 passi, vale a dire $\frac{1}{4}$ di 60, e così in 60 giorni essa percorrerebbe 5 passi in più di quanto retrocederebbe; l'altra, negli stessi 60 giorni, percorrerebbe $\frac{1}{5}$ di 60, vale a dire 12 passi, e tornerebbe indietro di $\frac{1}{6}$, vale a dire 10 passi e così percorrerebbe 2 passi più di quanto retrocederebbe. Sottratti questi 2 passi dai 5 passi, restano 3 passi e di tanto di avvicinano in 60 giorni. Ma poiché si vuole che risulti 100 moltiplicherai $\frac{1}{3}$ di 60 per 100 e otterrai 2000 giorni per il tempo che ci metteranno a incontrarsi.

Su due navi che si congiungono a vicenda.

(1) Due navi distavano tra loro una certa distanza, questo percorso la prima nave lo compiva in 5 giorni, l'altra in 7 giorni. Si chiede in quanti giorni esse si incontrerebbero se cominciassero il cammino alla stessa ora. (2) Moltiplica il 5 per il 7, risulterà 35 e altrettanti giorni poni nei quali la prima nave compia il suo cammino sette volte; l'altra invece 5 volte, per questo addiziona 7 con 5, risulterà 12. E poiché tra l'una e l'altra nave devono compiere

solo una volta quel cammino, moltiplica 1 per 35 e dividi per 12, risulterà $\frac{11}{12}2$ e in altrettanti giorni si ricongiungeranno. (3) E se vuoi sapere in quale parte dividi 7 e 5 per 12, risulterà $\frac{7}{12}$ di tutto il cammino dalla parte della prima nave e $\frac{5}{12}$ dalla parte della seconda. (4) E se si supponesse che la prima nave proceda di sette verso il luogo dell'altra nave e l'altra retroceda di 5 per ogni giorno, dividi 1 per 12, risulterà un'ora per la loro unione, la quale congiunzione si verificherà nel luogo suddetto.

[p.183]

Su un catino che ha quattro fori sul fondo.

(1) C'è un catino che ha quattro fori sul fondo, attraverso il primo dei quali si svuota in 1 giorno, attraverso il secondo in 2 giorni, attraverso il terzo in 3 giorni, attraverso il quarto in 4 giorni. Si chiede in quante ore si svuoterà se i suddetti quattro fori saranno aperti insieme. (2) Supponi che ci vogliano 12 giorni per questo svuotamento. In questi 12 giorni il catino si svuoterà 12 volte attraverso il primo foro, dal momento che 12 è dodici volte 1 giorno; similmente nei 12 giorni ipotizzati il catino si svuoterebbe attraverso il secondo foro sei volte, attraverso il terzo 4 volte, attraverso il quarto 3 volte. E così in 12 giorni il catino si svuoterebbe 25 volte. (3) Cioè poiché in 12 giorni si svuotano 25 catini, si chiede in quanto tempo si svuoti un catino. Moltiplica dunque gli estremi, vale a dire 12 per 1 e dividi per il medio, risulteranno $\frac{12}{25}$ di un giorno. Se vorrai trasformare questo risultato in ore, moltiplica il 12 che sta sopra la linea di frazione per le ore di un giorno, vale a dire per 12, risulterà 144 che devi dividere per 25, risulteranno $\frac{19}{25}5$ ore per lo svuotamento del catino.

Sullo stesso catino sopra il quale ci sono 4 condutture.

(1) E se si supponesse che sopra tale catino ci siano 4 condutture che versano acqua, attraverso la prima delle quali il catino si riempie in 6 ore, attraverso la seconda in 9 ore, attraverso la terza in 24 ore, attraverso la quarta in 27 ore e si chiedesse in quante ore si riempirebbe il catino se il catino fosse vuoto e attraverso queste condutture insieme scorresse acqua e i fori fossero aperti. (2) Supponi anche qui che si riempia nei 12 in cui attraverso questi fori il catino si svuota 25 volte. Poi calcola le ore di questi 12 giorni, sono 144 che devi dividere per le ore della prima conduttura, vale a dire per 6, risulterà 24, e altrettanti catini si

riempiono attraverso la prima conduttura, poiché di quanto le 144 ore sono un multipli di 6, di altrettanto i 24 catini sono multipli di 1. Per questo stesso motivo dividi le 144 ore per le ore delle altre condutture, vale a dire per 9 e per 24 e per 27, risulteranno 16 catini e 6 e $\frac{1}{3}$ 5. Una volta addizionati questi con i 24 catini della prima conduttura, risulteranno $\frac{1}{3}$51 catini e altrettanti catini sono riempiti da questi quattro canali nei supposti 12 giorni. Sottratti da questi i 25 catini che si svuotano attraverso i fori, restano $\frac{1}{3}$26 catini. (3) Poiché si vuole che risulti 1 catino, moltiplica le 12 ore al giorno, vale a dire 144 e dividi per il secondo numero, vale a dire per $\frac{1}{3}$26, risulteranno $\frac{37}{79}$5 ore, e in altrettanto tempo si riempie quel catino.

Su una botte che ha quattro fori uno sopra l'altro.

(1) Parimenti una botte ha 4 fori uno sopra all'altro formati in quattro scompartimenti della botte. Se aprirai il primo di questi fori, quello più in alto, si svuoterà la quarta parte della botte in un giorno; una volta svuotata questa parte, se aprirai il secondo si svuoterà della botte dal primo scompartimento fino al secondo, cioè un'altra quarta parte in due giorni. E ancora, svuotati due quarti, se aprirai il terzo, si svuoterà un'altra quarta parte della botte dal secondo foro fino a sè in tre giorni. Di nuovo se aprirai il quarto foro svuoterai un'altra quarta parte della botte in 4 giorni. Si chiede se tutti i quattro fori della botte saranno aperti insieme in quanto tempo si svuoterà tutta la botte. Poiché svuotato uno di essi si suppone che nessun vaso possa aiutare gli altri, è necessario che ricaviamo singolarmente lo svuotamento di ciascun foro. Innanzitutto supponiamo che la botte contenga un numero a piacere di barili, per esempio 48, la cui quarta parte, una volta calcolata, la si tenga come contenuto di ciascun foro. Poi passiamo allo svuotamento del primo foro, cioè del foro superiore e supponiamo che tra quei quattro fori si svuoti dalla botte fino al foro superiore in 12 ore. Quindi osserviamo quanti barili si svuotino in quelle 12 ore attraverso ciascun foro. Attraverso il primo si svuotano certo [p.184] 12 barili in quelle 12 ore. Perciò, poiché si è ipotizzato nel quesito che attraverso di esso si svuoti la quarta parte di tutta la botte in un giorno solo e poiché attraverso il secondo foro si svuota un'altra quarta parte in due giorni, dunque in quelle 12 ore si svuotano attraverso quel secondo foro 6 barili; per la stessa ragione attraverso il terzo foro si svuotano 4 barili in quelle 12 ore; e attraverso il quarto si svuotano 3 barili. Addizionati pertanto 12 barili più 6 più 4 più 3, risultano 25 e tanti barili si svuotano attraverso quei 4 fori in quelle 12 ore. Per questo moltiplica 12 per 12, risulterà 144 che devi dividere per 25,

risulteranno $\frac{4}{5}\frac{2}{5}5$ ore e in altrettante ore si svuoterà la botte fino al foro superiore. Poi passiamo allo svuotamento del secondo quarto e supponi ancora che quello si svuoti similmente in altre 12 ore, nelle quali, come abbiamo detto, attraverso il secondo foro si svuotano 6 barili, attraverso il terzo ancora 4 barili, attraverso il quarto, poi, 3 barili. Per questo, attraverso questi tre fori si svuotano 13 barili. Per essi tu moltiplicherai 12 per 12 e dividerai per 13, risulteranno $\frac{1}{13}11$ ore come svuotamento di quella seconda parte. Poi supponi che il terzo foro svuoti la quarta parte ancora in 12 ore nelle quali attraverso il terzo foro si svuotano 4 barili e attraverso il quarto foro 3, cioè attraverso entrambi si svuotano 7 barili. Per questo moltiplica ancora 12 per 12 e dividi per 7, risulteranno $\frac{4}{7}20$ ore per lo svuotamento del terzo di un quarto; poi attraverso il quarto foro si svuota la restante quarta parte in quattro giorni. Per questo addiziona i 4 giorni e le $\frac{4}{5}\frac{3}{5}5$ ore e $\frac{1}{13}11$ ore e $\frac{4}{7}20$ ore, risulteranno 7 giorni e $\frac{4}{5}\frac{0}{5}\frac{2}{7}\frac{5}{13}1$ ora e in altrettanto tempo si svuoterà quella botte.

Altro sulla botte.

(1) E se tu dicessi che attraverso un solo foro tutta la botte si svuota nei suddetti giorni, supponi similmente che la botte contenga 48 barili, poi vedi in quanto tempo si svuoterà la botte fino al primo foro, naturalmente una volta aperti tutti i fori. (2) Supponi dunque che si svuoti in 12 ore nelle quali attraverso il primo si svuotano 12 barili; attraverso il secondo poi se ne svuotano altrettanti in 12 ore, dal momento che in due giorni si svuotano 24 barili; attraverso il terzo ancora nelle supposte 12 ore si svuotano altrettanti 12 barili, poiché in tre giorni attraverso di esso si svuotano 36 barili; attraverso il quarto in quelle 12 ore si svuotano altri 12 barili. Questi ultimi barili addizionati con i barili dello svuotamento degli altri tre fori, risulteranno 48. (3) Volendo che essi siano 12, moltiplica 12 per 12 e dividi per 48, risulteranno 3 ore e in tanto tempo si svuoterà fino al primo foro; parimenti se avrai supposto per lo svuotamento del secondo quarto altre 12 ore, troverai che attraverso gli altri tre fori si svuoteranno 36 barili. Per questo moltiplicherai 12 per 12 e dividerai per 36, risulteranno 4 ore, e in altrettanto tempo si svuoterà il secondo quarto. Parimenti se supporrai 12 ore per lo svuotamento del terzo quarto, poiché ricaverai che attraverso entrambi i fori si svuotano 24 barili, per questo moltiplica 12 per 12 e dividi per 24, risulteranno 6 ore per il terzo quarto dello svuotamento; del quarto foro non c'è nulla da dire poiché è chiaro che attraverso di esso

in 12 ore si svuota tutto il resto, cioè 12 barili. Per questo addiziona le ore di svuotamento dei detti quattro quarti, vale a dire 3 + 4 + 6 + 12, risulteranno 25 ore e in tante ore si svuoterà quella botte.

Ancora sulla botte.

(1) Poi si suppone che dalla sommità di una botte fino al foro superiore ci sia $\frac{1}{3}$ di tutto il contenuto della botte; da questo foro fino al secondo ci sia $\frac{1}{4}$ di quel contenuto; e da questo fino al terzo ci sia $\frac{1}{5}$; e da questo fino al foro inferiore ci sia il resto del contenuto della botte; e che attraverso il foro superiore la botte si svuoti fino ad esso in 1 giorno; attraverso il secondo da quello superiore fino a questo secondo in 2 giorni; attraverso il terzo da questo secondo fino a quel terzo in 3 giorni; attraverso il foro inferiore la botte si svuoti dal terzo foro fino a se stesso in 4 giorni. (2) Supponi che la botte contenga 60 barili, per questo fino al foro superiore ci sono 20 barili, vale a dire un terzo di 60; e dal secondo foro fino al superiore ci sono 15 barili, vale a dire 60 quarti; e dal terzo fino al secondo ci sono 12 barili; vale a dire un quinto di 20. Questi 12 barili + 15 + 20, addizionati insieme, danno come risultato 47 barili come contenuto della botte fino al terzo foro. Da questi 47 barili fino al 60 ci sono 13 barili dal foro inferiore fino al terzo. (3) Quindi supponi 1 giorno per lo svuotamento della botte fino al foro superiore, nel quale giorno ipotizzato attraverso il primo foro si svuotano 20 barili, attraverso il secondo $\frac{1}{2}7$, vale a dire $\frac{1}{2}$ di 15; attraverso il terzo 4, vale a dire un terzo di 12; attraverso il quarto $\frac{1}{4}3$, vale a dire un quarto di 13. Dunque attraverso i quattro fori si svuotano in 1 giorno 20 barili + $\frac{1}{2}7$ + 4 + $\frac{1}{4}3$, cioè in totale $\frac{3}{4}34$ barili. (4) Volendo che invece risulti 20, vale a dire il contenuto del foro superiore, per questo moltiplicherai 1 giorno per i 20 barili e dividerai per $\frac{3}{4}34$, risulterà $\frac{80}{139}$ di un giorno per lo svuotamento del foro superiore. Parimenti supponi 1 giorno per lo svuotamento dei 15 barili del secondo foro, per il quale secondo foro si svuotano, come abbiamo detto $\frac{1}{2}7$ barili; attraverso il terzo 4, attraverso quello più in basso $\frac{1}{4}3$, cioè, in totale, $\frac{3}{4}14$. Volendo che invece risultino 15, per

questo moltiplicherai 1 per 15 e dividerai per $\frac{3}{4}14$, risulteranno $\frac{1}{59}1$ giorno per lo svuotamento di 15 barili. E ancora ipotizza 1 giorno per lo svuotamento dei 12 barili del terzo foro, in questo giorno per tale foro si svuotano 4 barili; attraverso quello più in basso $\frac{1}{4}3$, cioè attraverso entrambi $\frac{1}{4}7$. Volendo che invece risulti 12, per questo moltiplica 1 per 12 e dividi per $\frac{1}{4}7$, risulterà $\frac{19}{29}1$ come svuotamento del terzo foro. Attraverso il foro inferiore, invero, si svuota il resto in 4 giorni, come si era proposto. Per questo addiziona i 4 giorni + i $\frac{19}{29}1$ + $\frac{1}{59}1$, + $\frac{80}{139}$ e otterrai 7 giorni e $\frac{24}{29}\frac{5}{59}\frac{135}{139}2$ per lo svuotamento di tutta la botte.

Un altro metodo per la botte.

(1) E se attraverso ciascun foro fino ad esso si proponesse di svuotare tutta la botte nei suddetti giorni, supponi similmente che la botte contenga 60 barili. Per questo attraverso il primo foro si svuotano 20 barili in un giorno; attraverso il secondo 20 + 15, vale a dire 35 barili, in due giorni; attraverso il terzo 20 + 15 + 12, vale a dire 47 barili in 3 giorni; attraverso quello più in basso si svuotano 60 barili, vale a dire tutta la botte in 4 giorni. (2) Per questo supponi per lo svuotamento dei 20 barili del foro superiore 1 giorno. In questo giorno si svuotano attraverso il primo foro 20 barili; attraverso il secondo $\frac{1}{2}17$, vale a dire la metà di 35; attraverso il terzo $\frac{2}{3}15$, vale a dire $\frac{1}{3}$ di 47; attraverso quello più in basso 15, vale a dire la quarta parte di 60, e così risultano in totale $\frac{1}{6}68$ barili. (3) Poiché si vuole che ne risultino 20, per questo moltiplica 1 per 26 e dividi per $\frac{1}{6}68$, risulterà $\frac{120}{409}$ di un giorno; parimenti per lo svuotamento dei 15 barili del secondo foro, supponi 1 giorno nel quale attraverso il secondo foro si svuotano $\frac{1}{2}17$ barili; attraverso il terzo $\frac{2}{3}15$; attraverso il quarto 15, vale a dire nel totale $\frac{1}{6}48$ barili. Volendo che invece ne risultino 15, per questo moltiplicherai 1 per 15 e dividerai per 15 e dividerai per $\frac{1}{6}48$, risulterà $\frac{90}{289}$ di un giorno. Di nuovo, per lo svuotamento

dei 12 barili del terzo foro, supponi 1 giorni, nel quale attraverso di esso si svuotano $\frac{2}{3}$ 15 barili; attraverso l'ultimo, 15, cioè attraverso entrambi $\frac{2}{3}$ 30. Volendo che invece risulti 12, per questo moltiplica 1 per 12 e dividi per $\frac{2}{3}$ 30, risulterà $\frac{9}{23}$ di un giorno. Parimenti ipotizza per lo svuotamento dei 13 barili del foro inferiore 1 giorno, nel quale si svuotano 15 barili. Volendo che invece ne risultino 13, per questo moltiplica 1 per 13 e dividi per 15, risulterà $\frac{13}{15}$ di un giorno, che addizionato con $\frac{9}{23}$ e con $\frac{120}{409}$ dà come risultato 1 giorno e $\frac{1\ \ 13\ \ 16\ \ 12\ \ 144}{5\ \ 17\ \ 17\ \ 23\ \ 409}$ 10 ore per lo svuotamento di tutta la botte. [p.186]

(5) Parimenti c'è una botte che ha in basso 10 fori, attraverso il primo si svuota in 1 giorno, attraverso il secondo nella metà di un giorno, attraverso il terzo in $\frac{1}{3}$, attraverso il quarto in $\frac{1}{4}$ e così via in ordine, fino a che attraverso il decimo foro la botte si svuota in $\frac{1}{10}$ di un giorno. Si chiede, se i fori fossero aperti insieme, in quanta parte del giorno tutta la botte si svuoterebbe. (6) Supponi che la botte si svuoti in un giorno nel quale attraverso il primo foro la botte si svuota una volta; attraverso il secondo due volte, poiché essa si svuota in mezza giornata; per questo, attraverso il terzo foro essa si svuota tre volte; attraverso il quarto, quattro; attraverso il quinto, cinque, cioè 5 botti; attraverso il sesto foro si svuotano 6 botti; attraverso il settimo, 7; attraverso l'ottavo, 8; attraverso il nono, 9; attraverso il decimo, 10. Dunque in 1 giorno, attraverso tutti i fori si svuotano tante botti, quante ce ne sono nell'addizione di tutti i numeri da 1 a 10, vale a dire 55. (7) Per questo dirai, se ipotizzo 1 giorno si svuotano 55 botti, cosa devo porre perché si svuoti una botte? Moltiplica 1 per 1 e dividi per 55, risulterà $\frac{1}{55}$ di un giorno, per lo svuotamento di tutta la botte.

Su quattro uomini che affittano una nave.

(1) Quattro uomini noleggiarono una nave per caricarla di frumento, e ciascuno di loro ne caricò un quarto. Il primo avrebbe dato al padrone della nave $\frac{1}{3}$ del suo frumento per il nolo; il secondo $\frac{1}{4}$; il terzo $\frac{1}{5}$; il quarto $\frac{1}{6}$. Da essi il padrone della nave ha ottenuto per il loro noleggio 1000 moggi. (2) Per conoscere la quantità dell'intero carico della nave, supponi che il carico della quarta parte di tutta la nave, vale a dire la porzione di ciascuno, sia di 60 moggi, per questo il carico di tutta la nave sarà di 240 moggi. E poiché il primo ha ceduto $\frac{1}{3}$ del suo carico, e il secondo $\frac{1}{4}$, e il terzo $\frac{1}{5}$, e il quarto $\frac{1}{6}$, calcola $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di 60, risulteranno 57 moggi,

mentre si vorrebbe che fossero 1000. (3) Per questo dirai: se ipotizzo 240 moggi come carico di tutta la nave, andranno al proprietario della nave 57 moggi, cosa devo ipotizzare perché egli ottenga 1000 moggi? Moltiplica 240 per 1000 e dividi per 57, risulteranno $\frac{10}{19}$ 4210 moggi come carico di tutta la nave.

Sullo stesso argomento.

(1) E se si supponesse che, pagato l'affitto al proprietario della nave rimanessero 1000 moggi, sottrai il 57 dal 240, restano 183 moggi, ma si vorrebbe fossero 100, per questo moltiplica 240 per 1000 e dividi per 183, risulteranno $\frac{29}{61}$ 1311 per il carico di tutta la nave.

Sull'uomo messo a riposo.

(1) Un tale ha messo a riposo un uomo, al quale avrebbe dato al mese tre somme di denaro delle quali la seconda era di 2 denari maggiore della prima e la terza di 2 denari maggiore della seconda, cioè di 4 denari maggiore della prima e in più gli avrebbe dato 10 denari. Accadde, tuttavia, che egli abbia lavorato 6 giorni, per i quali il padrone del cantiere gli ha pagato la metà della prima somma + la terza parte della seconda + la quarta parte della terza somma. E quello è stato saldato in base a ciò che gli spettava per quanto aveva lavorato. Si chiede quali furono quelle somme. (2) Poiché i 6 giorni in cui ha lavorato costituiscono un quinto del mese, vale a dire che egli dovrebbe ricevere per il suo lavoro $\frac{1}{5}$ di tutte e tre le somme suddette per i 30 giorni e dei 10 denari. E per questo $\frac{1}{5}$ il suo signore gli ha dato la metà della prima somma, e un terzo della seconda e un quarto della terza. Ed è chiaro che se dalla seconda somma fosse sottratto 2 e dalla terza 4, entrambe le somme sarebbero uguali alla prima. Per cui sottratto il 2 dalla seconda somma e il 4 dalla terza se calcoleremo la metà della prima somma e un terzo della seconda e un quarto della terza allora calcoleremo soltanto $\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ del primo numero. Dunque affinché calcoliamo $\frac{1}{3}$ dei 2 denari in cui la seconda somma supera la prima e $\frac{1}{4}$ del 4 in cui la terza somma supera la prima, risulterà $\frac{2}{3}$ 1. Dunque il padrone gli ha dato $\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ della prima somma, e inoltre $\frac{2}{3}$ 1 denaro. E sarebbe stato altrettanto se [p.187] gli avesse dato $\frac{1}{5}$ di tutte e tre le somme e del 10. Infatti sottratto di nuovo il 2 dalla seconda somma e il 4 dalla terza e calcolato $\frac{1}{5}$ della prima somma e della seconda e della terza, sarebbe altrettanto che se calcolassimo soltanto i $\frac{3}{5}$ della prima somma, quindi rimarrebbe da calcolare $\frac{1}{5}$ dei 2 denari suddetti che saranno stati estratti dal secondo numero e

dei 4 che saranno stati estratti dal terzo e dei 10, cioè in totale di 16, risulterà $\frac{1}{5}$ 3. Dunque l'operaio avrebbe ricevuto $\frac{3}{5}$ della prima somma e in più $\frac{1}{5}$3 denari, per i quali ha ricevuto $\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ di quella prima somma e in aggiunta $\frac{2}{3}$ 1 denaro. Per questo sottrai $\frac{2}{3}$ 1 da $\frac{1}{5}$ 3, resta $\frac{8}{15}$ 1. Dunque $\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ di quella prima somma sono $\frac{8}{15}$1 più dei $\frac{3}{5}$ di tale somma. (3) Per cui bisogna trovare il numero i cui $\frac{3}{5}$ sottratti da $\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ di tale numero, diano come resto $\frac{8}{15}$ 1. Supponi che quel numero sia 60 i cui $\frac{3}{5}$, che sono 36, una volta calcolati e sottratti da $\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ di 60, cioè da 65, danno come differenza 29, ma vorresti che risultasse $\frac{8}{15}$ 1. Moltiplicherai pertanto 60 per $\frac{8}{15}$ 1, risulterà 92, che devi dividere per 29, risulterà $\frac{5}{29}$ 3 come quantità del primo numero, addizionato a questo il 2, otterrai $\frac{5}{29}$ 5 come secondo numero, a cui di nuovo devi addizionare il 2, e otterrai $\frac{5}{29}$ 7 come terzo numero.

Su un numero al quale se si addiziona $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di esso e il 12 e da ciò si sottraggono i $\frac{1}{6}\frac{2}{5}$ di quest'ultimo, non resta nulla.

(1) C'è un numero tale che se ad esso addizionerai i suoi $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ e 12 e dalla somma calcolata sottrarrai $\frac{1}{6}\frac{2}{5}$ e 12, non resterà nulla. Si richiede quale sia quel numero. (2) Innanzitutto bisogna chiedersi quale sia quel numero dal quale se si estrarrà $\frac{1}{6}\frac{2}{5}$ e 12, non rimarrà nulla. Supponi che questo numero sia 30, dal quale sottrai i suoi $\frac{1}{6}\frac{2}{5}$, vale a dire 17, resta 13. Volendo che invece la differenza sia 12, moltiplica il 12 per il 30, risulterà 360, che devi dividere per 13, risulterà $\frac{9}{13}$ 27. (3) Per esso di nuovo dirai: c'è un numero tale che se ad esso addizionerai $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ e 12, risulterà $\frac{9}{13}$ 27. Per questo sottrai il 12 da $\frac{9}{13}$ 27, resterà $\frac{9}{13}$ 15. Dunque supponi che questo numero sia 12 al quale devi addizionare $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di esso, risulterà 19. Poiché vorresti che risultasse $\frac{9}{13}$ 15, moltiplicherai pertanto il 12 per $\frac{9}{13}$ 15 e dividerai per 19, risulterà $\frac{4\ \ 17}{13\ \ 19}$ 9 e a tanto ammonterà quel numero. (4) Per esempio, calcola $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di $\frac{4\ \ 17}{13\ \ 19}$ 9: esemplificheremo come si calcolano quelle frazioni. Vale a dire se moltiplichi il 9 per il 19 e addizioni il 17 che devi moltiplicare per 13 e addizionare il 4, risulterà 2448 al quale devi addizionare i suoi $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, che è 1428, risulterà 3876 che devi dividere per $\frac{1\ \ 0}{19\ \ 13}$ e prima per 19 che per 13 perché 3876 si divide esattamente per 19, risulterà $\frac{9}{13}$ 15 a cui devi addizionare il 12,

risulterà $\frac{9}{13}27$ da cui devi sottrarre $\frac{1}{6}\frac{2}{5}$, che è $\frac{9}{13}15$, la differenza è 12 se sottrarrai il quale non resterà nulla come si era proposto.

Su un numero a cui si addiziona $\frac{1}{9}\frac{3}{7}$ di esso più 60.

(1) Parimenti c'è un numero, al quale se addizionerai $\frac{1}{9}\frac{3}{7}$ più 60 denari e dalla somma calcolata sottrarrai $\frac{1}{8}\frac{1}{5}\frac{1}{3}$ e 60 denari, non resterà nulla. (2) Trova il numero dal quale sottratto $\frac{1}{8}\frac{1}{5}\frac{1}{3}$, resta 60. Quel numero sarà $\frac{25}{41}175$ da cui devi sottrarre 60, resta $\frac{25}{41}115$. Per questo numero devi trovare devi trovare quel numero al quale se si addiziona $\frac{1}{9}\frac{3}{7}$, risulta $\frac{25}{41}115$. Per cui bisogna moltiplicare 63 per $\frac{25}{41}115$ e dividere per 97, risulterà $\frac{17}{41}\frac{8}{97}75$ come quantità del numero richiesto.

Parimenti altri quesiti simili.

(1) Parimenti c'è un numero al quale se addizionerai $\frac{4}{9}\frac{3}{7}\frac{2}{5}$ di tale numero e in aggiunta altri due numeri uguali fra loro qualunque vorrai e $\frac{1}{5}\frac{1}{3}$ di uno di tali numeri, e dalla quantità calcolata sottrarrai $\frac{3}{11}\frac{2}{9}\frac{2}{7}$ e tre numeri tali quali erano quei 2 numeri uguali che per primi hai addizionato e $\frac{1}{9}\frac{1}{5}$ di uno di quei numeri, non resterà nulla. (2) Innanzitutto, certo, si deve ricavare quali siano quei numeri che devono essere aggiunti all'inizio e devono essere sottratti [p.188] alla fine. La qual cosa si ricava così: vedrai quale sia il numero nel qual si trovino $\frac{1}{5}\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}\frac{1}{5}$, questo numero è il 45, e altrettanto devi ipotizzare per quel numero. E poiché si propone che alla fine sia sottratto tre volte quel numero e $\frac{1}{9}\frac{1}{5}$ di esso, moltiplicherai il 45 per il 3, risulterà 135 al quale devi addizionare $\frac{1}{9}\frac{1}{5}$ di 45, vale a dire 14, risulterà 149. Se in base all'esempio fatto precedentemente per l'albero saprai ricavare la regola, ricaverai che esso è $\frac{16}{819}679$, da cui devi sottrarre il doppio di 45 e i $\frac{1}{5}\frac{1}{3}$ di 45, cioè 114, resterà $\frac{16}{819}565$. Per esso osserva attraverso la regola del terzo albero qual è quel numero tale che se gli addizionerai $\frac{4}{9}\frac{3}{7}\frac{2}{5}$ risulterà $\frac{16}{819}565$. Quel numero sarà $\frac{3}{4}\frac{4}{8}\frac{2}{19}\frac{27}{179}248$. E così eseguirai tutte le regole dello stesso tipo.

Quesito proposto da un maestro di Costantinopoli.

(1) Somma $\frac{1}{9}\frac{1}{3}$ di un numero e sottrai di lì $\frac{1}{9}\frac{1}{3}$, e dividi la differenza in due parti tali che se moltiplicherai una parte per $\frac{1}{7}\frac{1}{2}$ e un'altra per $\frac{4}{9}\frac{1}{2}$, risulteranno uguali. (2) Procederai così: supponi un numero tale dai cui $\frac{1}{9}\frac{1}{3}$ di esso si possa sottrarre esattamente $\frac{1}{9}\frac{1}{3}$, quel numero sarà 81. Di esso calcola i $\frac{1}{9}\frac{1}{3}$, vale a dire 36, e sottrai i suoi $\frac{1}{9}\frac{1}{3}$, vale a dire 16, resta 20 che bisogna dividere in due parti tali che una di esse, moltiplicata per $\frac{4}{9}\frac{1}{2}$, risulti qualto l'altra, moltiplicata per $\frac{1}{7}\frac{1}{2}$. (3) Per questo, poiché in questo svolgimento si segue la regola degli alberi, supponi che una parte sia 18 che devi moltiplicare per $\frac{4}{9}\frac{1}{2}$, risulta 17. Quindi osserva, attraverso la regola del primo albero, qual è quel numero del quale 17 sia i $\frac{1}{7}\frac{1}{2}$. Quel numero sarà $\frac{4}{9}$ 26 che devi addizionare con 18, risulterà $\frac{4}{9}$ 44, mentre vorresti risultasse 20. Pertanto moltiplicherai 18 per 20 e dividerai per $\frac{4}{9}$ 44, risulterà $\frac{1}{10}$ 8 come quantità di una parte: tra esso e 20, c'è una differenza di $\frac{9}{10}$ 11 che è l'altra parte.

Su una coppa il cui fondo è la terza parte di tutta la coppa e il coperchio è la quarta parte.

(1) Una certa coppa è tale che il suo fondo pesa un terzo di tutta la coppa e il coperchio, invece, pesa un quarto, il resto, poi, pesa 15 libre, si chiede il peso di tutta la coppa. Questo quesito è simile a quello dell'albero i cui $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ siano nascosti sottoterra e sopra la terra ci siano 15 palmi. (2) Per esempio, poiché il fondo della coppa è $\frac{1}{3}$ e il coperchio è $\frac{1}{4}$ di tutta la coppa, dunque tra fondo e coperchio ci sono $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di tutta la coppa e quello che resta pesa 15 libre. Per questo, poiché si richiede la quantità di tutta la coppa, bisogna supporre, in base alla regola dell'albero, che essa pesi una quantità tale che naturalmente in esso si ritrovino le frazioni del quesito, vale a dire $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, il quale numero è 12. (3) Per questo supponi che la coppa pesi 12 libre, poiché il fondo è la terza parte della coppa, peserebbe 4 libre; e il coperchio, poiché ne è $\frac{1}{4}$, peserebbe 3 libre. Dunque tra fondo e coperchio ci sarebbe un peso di 7 libre: tra esse fino a 12 mancherebbero 5 libre come quantità del resto della coppa, che vorrei fosse di 15 libre, mentre non lo è. Moltiplicherai il 12 per il 15 e dividerai per 5 e così risulterà 36 come peso di tutta la coppa.

Altro sulla coppa.

(1) Invero, supponiamo che tu dica che il fondo pesa soltanto $\frac{1}{3}$ della parte di mezzo più il coperchio, e il coperchio pesa quanto la parte di mezzo più il fondo, e la parte di mezzo pesa 15[2450]. (2) Se vorrai ricondurre questo quesito alla regola dell'albero, farai così: dal momento che il fondo pesa $\frac{1}{3}$ della parte di mezzo più il coperchio, se coperchio più la parte di mezzo pesassero 3, il fondo peserebbe 1, dunque il fondo peserebbe $\frac{1}{3}$ di tutta la coppa. Per la stessa ragione poichè il coperchio è $\frac{1}{4}$ della parte di mezzo più il fondo, se la parte di mezzo più fondo pesassero 4, il coperchio peserebbe 1, dunque il coperchio è $\frac{1}{5}$ di tutta [p.189] la coppa, e così il fondo più il coperchio sarebbero $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ di tutta la coppa[2451]. (3) Per questo bisogna trovare quel numero nel quale si ritrovano $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$, risulterà 20 che viene fuori dalla moltiplicazione di 4 per 5. Da esso sottrai $\frac{1}{5}\frac{1}{4}$, cioè 9, resta 11. Per questo moltiplica 20 per 15, risulterà 300 che devi dividere per 11, risulterà $\frac{3}{11}$ 27 come peso di tutta la coppa. (4) Ma se vorrai calcolare ciascuna di quelle parti, poiché il fondo è $\frac{1}{4}$ di tutta la coppa, calcola $\frac{1}{4}$ di 20, che è 5, che devi moltiplicare per 15, risulterà 75 che devi dividere per 11, risulterà come peso del fondo $\frac{9}{11}$ 6 libre. Parimenti poiché il coperchio è $\frac{1}{5}$ di tutta la coppa, calcola $\frac{1}{5}$ di 20, che è 4, che devi moltiplicare per 15, risulterà 60 che devi dividere per 11, risulterà come peso del coperchio $\frac{5}{11}$ 5 libre.

Parimenti sulla coppa.

(1) Parimenti c'è una coppa il cui fondo è $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ del coperchio e della parte di mezzo; il coperchio, invero, è $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ della parte di mezzo e del fondo; la parte di mezzo della coppa pesa 6 libre. Si chiede il peso del fondo e del coperchio. (2) Poiché il fondo è $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ del resto, allora se il resto pesasse 12 libre e il fondo pesasse 7 libre, dunque tutta la coppa peserebbe 19 libre, per questo il fondo peserebbe $\frac{7}{19}$ di tutta la coppa. Per la stessa ragione, poiché il coperchio è $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ del resto, sarà $\frac{11}{41}$ di tutta la coppa. (3) Per cui scrivi in ordine $\frac{11}{41}\frac{7}{19}$ e moltiplicherai il 7 che sta sopra il 19 per il 41, risulterà 287. Parimenti moltiplicherai l'11, che sta sopra il 41, per il 19,

2450 La soluzione moderna dell'esercizio è un'equazione a due incognite. Dove f=fondo, c=coperchio ed m=parte di mezzo =15. f= $\frac{1}{3}$ (15+c); c=15+f; f=$\frac{1}{3}$ (15+15+f); f= $\frac{1}{3}$ 15 + $\frac{1}{3}$ 15 + $\frac{1}{3}$f; f-$\frac{1}{3}$f= 5 + 5; f- $\frac{1}{3}$f=10; $\frac{2}{3}$ f= 10; f= 10 . $\frac{3}{2}$; f = 15; c= f+15; c= 15+15= 30.

2451 errore della tradizione. prima si dà una traccia, ma poi quando si schematizza il problema i dati sono altri: collazione indispensabile.

risulterà 209 che devi addizionare con il 287, risulterà 496. Poi moltiplicherai il 19 per il 41, risulterà 779 da cui devi sottrarre 496, resterà 283. Moltiplica 779 per 6, risulterà 4674 che devi dividere per 283, risulterà $\frac{146}{285}$ 16 come quantità del peso di tutta la coppa. E se avrai moltiplicato 287 per 6 e avrai diviso per 283, ricaverai $\frac{24}{283}$ 6 come quantità del fondo. Parimenti se moltiplicherai 209 per 6 e dividerai per 283, troverai $\frac{123}{283}$ 4 libre come peso del coperchio.

Su quattro uomini che hanno denari.

(1) Quattro uomini hanno alcuni denari. Tuttavia i denari del primo sono $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ dei denari degli altri tre; i denari poi del secondo sono $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ degli altri tre; del terzo, poi, sono $\frac{1}{8}\frac{1}{7}$ degli altri tre; i denari poi del quarto sono 27. Si richiede quanti denari abbia ciascuno degli altri. (2) Questo quesito riguarda la stessa regola della coppa, così: dal momento che i denari del primo uomo sono $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ dei denari dei restanti tre uomini, dunque egli ha $\frac{7}{19}$ di tutto il totale di quei quattro; per la stessa ragione anche il secondo ha $\frac{11}{41}$ di tale somma, e poiché il terzo ha $\frac{1}{8}\frac{1}{7}$ dei restanti, dunque se quei tre hanno 56 denari e egli ne ha $\frac{1}{8}\frac{1}{7}$ dei loro, cioè 15, dunque tra tutti hanno 71 denari, di cui egli stesso ha i $\frac{15}{71}$. (3) E allora si assimili questo al quesito dell'albero, ovvero sul numero dal quale sottratti i $\frac{15}{71}\frac{11}{41}\frac{7}{19}$, resta 27. La qual cosa procede così: moltiplica il 7, che sta sopra il 19, per il 41, poi per il 71, risulterà 20377 che devi scrivere sopra $\frac{7}{19}$. Parimenti moltiplica l'11, che sta sopra il 41, per il 71, poi per il 19, risulterà 14839 che devi scrivere sopra $\frac{11}{41}$. Di nuovo moltiplica il 15 che sta sopra il 71 per il 41, poi per il 19, risulterà 11685 che devi scrivere sopra il $\frac{15}{71}$. Addiziona pertanto 20377 con 14839 e con 11685, risulterà 46901 che devi sottrarre dalla moltiplicazione di 19 per 41 e per 71, vale a dire da 55309, resterà 8408 di cui devi ricavare la scomposizione che è $\frac{1\ \ 0}{8\ \ 1051}$. Poi moltiplica il 20377 per 27, risulterà 550179 che devi dividere per $\frac{1\ \ 0}{8\ \ 1051}$, risulterà $\frac{3\ \ 457}{8\ \ 1051}$ 65 denari, e altrettanti ne possiede il primo uomo. Parimenti moltiplica 14839 per 27, risulterà 400653 che devi dividere per $\frac{1\ \ 0}{8\ \ 1051}$, risulteranno $\frac{5\ \ 684}{8\ \ 1051}$ 47 denari, e altrettanti ne possiede il secondo. Parimenti moltiplica il 11685 per il 27, risulterà 315495 che devi dividere per $\frac{1\ \ 0}{8\ \ 1051}$ risulterà $\frac{7\ \ 549}{8\ \ 1051}$ 37 denari, e tanti ne possiede il terzo.

[p. 190]

Su due uomini che hanno denari, dei quali uno chiede all'altro una certa quantità e propone di superarlo in una certa proporzione.

(1) Due uomini hanno denari, uno di essi disse all'altro: se tu mi dessi uno dei tuoi denari, avrei la tua stessa somma. L'altro risponde: e se tu mi dessi uno dei tuoi denari avrei 10 volte la tua somma. Si chiede quanto possegga ciascuno di essi. (2) Per riportare questo quesito alla regola dell'albero, bisogna procedere nel modo seguente. Poiché il primo, ottenuta una somma dai denari dell'altro, ipotizza che egli possa avere la stessa somma di quello, allora non c'è dubbio che egli ottenga la metà di tutto il tolale dei denari come degli alberi, una volta ottenuto quell'un denaro. Per questo scrivi $\frac{1}{2}$. Parimenti poiché l'altro, ottenuto quell'uno dai denari del primo, annuncia che egli ha dieci volte tanto quanto egli stesso abbia, allora se quello all'inizio aveva 10 e il primo aveva 1, dunque insieme ne hanno 11, e poiché il secondo ne ha 10, si può affermare per l'appunto che egli abbia i $\frac{10}{11}$ di tutto il totale di entrambi. Dunque uno possiede $\frac{1}{2}$ di tutta la somma e l'altro i $\frac{10}{11}$, una volta avuto, naturalmente, il denaro richiesto. (3) Per questo dirai che c'è un albero i cui $\frac{1}{2}$ e $\frac{10}{11}$ superano l'altezza dell'albero di 2 palmi, vale a dire di quelli che essi stessi a vicenda richiedono. In base alla regola dell'albero occorre moltiplicare l'1, che sta sopra il 2, per 11, risulterà 11; e il 10 che sta sopra l'11 per il 2, risulterà 20 che devi addizionare con 11, risulterà 31; e 2 per 11, risulterà 22 che devi sottrarre da 31, resta 9 mentre vorresti risultasse 2. Per questo moltiplica il 2, vale a dire la somma di entrambi, per 11, risulterà 22 che devi dividere per 9, risulterà $\frac{4}{9}$ 2 e tanto ha ottenuto il primo, una volta ricevuto il denaro dall'altro uomo, dunque il primo possiede $\frac{4}{9}$ 1 denaro. Parimenti moltiplica lo stesso 2 per 20, risulterà 40 che devi dividere per 9, risulteranno $\frac{4}{9}$ 4 denari, e tanto ha ottenuto l'altro, una volta ottenuto il denaro dall'altro, dunque egli possedeva $\frac{4}{9}$ 3 denari.

Sullo stesso argomento.

(1) Altrimenti, in base alla loro addizione, poiché il secondo, una volta ottenuto 1 denaro dai denari del primo ipotizza che egli abbia dieci volte tanto il primo, sottrai 1 da 10, resta 9: uno ha $\frac{4}{9}$ 1 e l'altro $\frac{4}{9}$ 3. E se dicessi che egli avrebbe dodici volte tanto il primo, similmente sottrai

1 da 12, resta 11 e così uno avrebbe $\frac{4}{11}$ 1 e l'altro $\frac{4}{11}$ 3, e così potresti fare con qualunque simile quesito.

Quesito sullo stesso argomento che ci è stato proposto da un maestro a Costantinopoli.
(1) Parimenti se si ipotizzasse che uno di quelli chieda all'altro 7 denari e ottenga il quintuplo di esso, e il secondo chieda al primo 5 denari e abbia il suo sestuplo. (2) Per ricondurre la soluzione di questo quesito alla regola del secondo albero, e anche perché appaia più chiara davanti agli occhi, sia data come somma di quei denari la linea .a.b. della quale .a.g. sia la porzione del primo e .g.b. sia la porzione del secondo, e si segni in .g.b. il punto .d. e .g.d. sia 7, e si segni su .a.g. il punto .e. e sia .e.g. uguale a 5. (3) Poiché il primo chiede al secondo 7 denari, cioè il numero .g.d.. e quel primo numero corrisponde alla porzione .a.g., se si aggiunge ad esso il 7, si otterrà il numero .a.d. che si ipotizza sia il quintuplo del resto dei denari del secondo uomo, vale a dire del numero .d.b. Dunque se il numero .a.d. si dividesse in cinque parti uguali, ciascuna parte sarebbe uguale al numero .d.b., per questo .d.b. è la sesta parte di tutto il numero .a.b., vale a dire della somma dei denari di entrambi gli uomini. (4) E ancora, se ai denari del secondo uomo, vale a dire al numero .b.g. si aggiungono i 5 denari dei denari del primo uomo, vale a dire il numero .g.e., questo secondo uomo otterrà il numero .b.e. e del primo resterà il numero .e.a. E poiché il secondo, ottenuti i 5 denari dai denari del primo, sarà il settuplo del primo meno i suoi 5 denari, il numero .b.e. sarà il settuplo del numero .e.a., per questo .e.a. è $\frac{1}{8}$ di tutto (p.191] il numero .a.b.. Mostrando ancora che il numero .b.d. è $\frac{1}{6}$ del numero .a.b., dunque i numeri .b.d. e .e.a. sono $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ di tutto il numero .a.b., per questo se dal numero .a.b. si sottraggono i suoi $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$, vale a dire i numeri .b.d. e .e.a., resterà il numero .e.d., che è 12 poiché .e.g. è 5 e .g.d. è 7. E per questo, in base alla regola dell'albero, ipotizza come numero .a.b. 24, di cui $\frac{1}{6}$, cioè 4, sarà il numero .b.d; e di cui ancora $\frac{1}{8}$, vale a dire 3, sarà il numero .e.a. Per questo se dal numero posto per .b.a., vale a dire da 24, si sottraessero il numeri posti per .b.d. e .e.a., vale a dire 4 e 3, resterebbe 17 per il numero.e.d. che invece è 12. Per questo come 17 sta a .d.e., vale a dire a 12, così il 24 sta al numero .a.b., e così il 4 al numero .b.d. e il 3 al numero .e.a. Per questo se moltiplicheremo il 24 per il 12 e divideremo per 17, otterremo il numero .a.b. Similmente se moltiplicheremo il 4 per il 12 e divideremo per il 17, risulterà $\frac{14}{17}$ 2 per il numero .b.d., a cui addizionato il 7, vale a dire il numero .d.g., risulterà .b.g., vale a dire i denari del secondo uomo cioè $\frac{14}{17}$ 9. Parimenti

una volta diviso per 17 il prodotto della moltiplicazione di 12 per 3, risulterà $\frac{2}{17}$ 2 come numero .a.e., a cui addizionato il 5, cioè il numero .e.g. risulta, come numero .a.g., $\frac{2}{17}$ 7, e tanto possiede il primo.

Sullo stesso argomento in base alla regola 'diretta'.

(1) Per risolvere i quesiti vi è una regola detta 'diretta' che gli arabi usano. E il metodo di quella regola è assai lodevole perché attraverso di essa si possono risolvere innumerevoli problemi. (2) Se in questo quesito vuoi seguire questa regola, supponi che il secondo uomo abbia una somma più i 7 denari che gli richiede il primo, e intendi per quella somma una qualche quantità ignota che vuoi calcolare. E poiché il primo ha il quintuplo del secondo, una volta ottenuti i 7 denari, ne segue, necessariamente, che egli abbia cinque somme meno sette denari, poiché quando egli ottiene 7 denari dal secondo, allora ha cinque somme intere e al secondo ne resta solo una e così il primo avrà il suo quincuplo. Per questo se dalla porzione del primo uomo si addizionano 5 denari al secondo che glieli chiede, anche il secondo otterrà una somma più 12 denari, e al primo resterebbero cinque somme meno 12 denari, e così il secondo avrebbe il settuplo del primo. Cioè poiché una somma e 12 denari sono il settuplo di cinque somme meno 12 denari, per questo moltiplicate cinque somme meno 12 denari per 7, risulterà 35 somme meno 7 soldi che corrispondono a una somma più un soldo. Per questo se ad entrambe le parti si addizionano 7 soldi, risulteranno 35 somme uguali ad una somma, più 8 soldi, perché se si addizionano gli uguali sopra gli uguali, i totali saranno uguali. E ancora, sottraendo uguali dagli uguali, ciò che resterà saranno uguali: se dalle suddette due parti sottrai una parte, resteranno 34 somme uguali meno 8 soldi, per questo se dividerai gli 8 soldi per 34, otterrai $\frac{14}{17}$ 2 come totale di ciascuna somma, dunque il secondo possiede $\frac{14}{17}$ 9, poiché possiede una somma e 7 denari. Similmente se da cinque somme, cioè dalla moltiplicazione di $\frac{14}{17}$ 2 per 5, si sottraggono 7 denari, resteranno $\frac{2}{17}$ 7 denari come denari del secondo uomo, come più sopra abbiamo calcolato. Attraverso questo terzo metodo puoi risolvere tutti i quesiti seguenti su due uomini.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti se si supponesse che uno chieda all'altro 6 denari e dica che egli ottiene cinque volte tanto più un quarto dell'altro, e l'altro chieda al primo 4 denari e ottiene sette volte tanto più due terzi che il primo. (2) Poiché il primo suppone di avere cinque volte tanto più un quarto rispetto all'altro, dunque se egli avesse $\frac{1}{4}$ 5 e l'altro avesse 1, dunque insieme ne

avrebbero $\frac{1}{4}$ 6: di questa somma lo stesso secondo ne avrebbe una parte. Trasforma in quarti $\frac{1}{4}$ 6, [p.292], risulterà $\frac{25}{4}$, similmente trasforma in quarti 1, risulterà 4. Dunque al secondo uomo, una volta dati i 6 denari al primo, restano $\frac{4}{25}$ di tutti quei denari. Similmente, per la stessa ragione, al primo, una volta ceduti 4 denari al secondo, restano $\frac{3}{26}$. Per questo dirai, c'è un albero dal quale, se sottrarrai $\frac{3}{26}\frac{4}{25}$, resterà 6 + 4, vale a dire 10. Moltiplica pertanto il 4 per il 26, risulterà 104 e 3 per 25, risulterà 75 che devi addizionare con 104, risulterà 179 che devi sottrarre dal prodotto della moltiplicazione di 25 per 26, cioè da 650, resterà 471 per la cui scomposizione devi dividere il prodotto della moltiplicazione di 104 per 10, e otterrai $\frac{2\ 32}{3\ 157}$ 2 denari e tanto resta al secondo uomo, una volta ceduti i 6 denari al primo. Queste somme, addizionate insieme, ammontano a $\frac{2\ 32}{3\ 157}$ 8 denari e tanto possiede il secondo uomo. Parimenti moltiplica 10 per 75 e dividi per $\frac{1\ 0}{3\ 157}$, risulterà $\frac{0\ 93}{3\ 157}$ 1 a cui addizionati i 4 denari che il secondo uomo chiede al primo, risulterà $\frac{93}{157}$ 5 e tanto ottiene il primo.

Altro metodo per due uomini.

(1) E ancora, il primo, ottenuti 7 denari dal secondo, ottiene il quintuplo del secondo più un denaro. E il secondo, ottenuti 5 denari dal primo ottiene sette volte tanto il primo e in più 1 denaro. Chiamerai 'maggiore' la somma di tutti i denari di entrambi gli uomini, una volta sottratto da questa somma il denaro che avanza ad entrambi, chiamerai 'minore' la differenza. E poiché il primo, ottenuti 7 denari dal secondo, ottiene un denaro in più del quintuplo del secondo, sottratto pertanto questo denaro da quei 7 denari e conservatolo da parte, il primo uomo con i restanti 6 denari otterrà il quintuplo del secondo: infatti essi realizzano insieme, sottratto il suddetto denaro, la suddetta 'somma minore'. Di quest'ultima il primo ha il quintuplo del secondo, una volta ottenuti i suddetti 6 denari, cioè il primo ha cinque parti di quella 'somma minore' e il secondo ne ha una. Dunque il primo ha $\frac{5}{6}$ di quella 'somma minore' meno quei 6 denari, e il secondo ha $\frac{1}{6}$ di quella 'somma minore' più i 7 denari che cede al primo. Similmente se farai i calcoli partendo dalla richiesta del secondo, ricaverai che il secondo uomo ha $\frac{7}{8}$ della somma minore, meno 4 denari. E il primo ha 5 denari + $\frac{1}{8}$ di quella somma: infatti il primo ha meno denari che i $\frac{5}{6}$ di quella somma minore. Per questo insieme hanno $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ della somma minore, meno 6 denari + 4 denari, vale a dire meno 10 denari:

realizzano così anche la somma maggiore. Dunque $\frac{7\ 5}{8\ 6}$ della somma minore meno 10 denari corrispondono alla somma maggiore. Dunque se si sottrae 1 dalle suddette parti uguali di cui una è i $\frac{7\ 5}{8\ 6}$ della somma minore meno 10 denari, e l'altra è la somma maggiore, resteranno $\frac{7\ 5}{8\ 6}$ meno 11 denari, uguale alla somma minore dal momento che la somma minore è 1 in meno della maggiore, dunque la somma minore con 11 denari è quanto i $\frac{7\ 5}{8\ 6}$ della stessa somma. Per questo bisogna ricavare la somma i cui $\frac{7\ 5}{8\ 6}$ sottratti alla stessa somma, danno come differenza 11. Supponi che essa sia 24 i cui $\frac{7\ 5}{8\ 6}$, che sono 20 e 21, cioè 41, una volta che gli sia sottratto il 24, realizzano come differenza 17. Questo 17, poiché si vuole che invece sia 11, lo moltiplicherai per i $\frac{5}{6}$ di 24, cioè 20 per 11 e dividerai per 17, risulterà $\frac{16}{17}$ 12 come $\frac{5}{6}$ della somma minore. Da questo sottrai il 6 che il primo ha in meno rispetto ai $\frac{5}{6}$ della somma minore, resta $\frac{16}{17}$ 6 e tanto ha il primo. Parimenti moltiplica $\frac{7}{8}$ di 24, vale a dire 21 per 11, e dividi per 17 e otterrai $\frac{10}{17}$ 13 come $\frac{7}{8}$ della somma minore. Da questa, sottratti i 4 denari che al secondo mancano rispetto ai suddetti $\frac{7}{8}$, resterà $\frac{10}{17}$ 9 e tanto ha il secondo.

Sullo stesso argomento.

(1) Ricaviamo il risultato precedente secondo un altro metodo. Il primo uomo ha $\frac{1}{8}$ della somma minore più 5 denari, il secondo ha 7 denari più $\frac{1}{6}$ della stessa. Dunque insieme hanno $\frac{1\ 1}{8\ 6}$ [p.193] della somma minore più 12 denari. Realizzano anche la somma maggiore, perché $\frac{1\ 1}{8\ 6}$ della somma minore più 12 denari realizzano la somma maggiore e $\frac{1\ 1}{8\ 6}$ della somma minore più 11 denari realizzano la somma minore. Per cui sottratti $\frac{1\ 1}{8\ 6}$ della somma minore dalla stessa, resterà 11. Per questo supponi che questa somma sia 24 dalla quale sottratti $\frac{1\ 1}{8\ 6}$ resterà 17. Ma poiché deve risultare 11, moltiplicherai $\frac{1}{8}$ di 24, vale a dire 3, per 11 e dividerai per 17, risulterà, come $\frac{1}{8}$ della somma minore, $\frac{16}{17}$ 1: poiché quella parte del 24 che moltiplichi per 11 e dividi per 17, tale parte della somma minore ricaverai. A questi $\frac{16}{17}$ 1, una volta addizionati i 5 denari che il primo ha più dei suddetti ottavi, risulta $\frac{16}{17}$ 6 come denari del primo, come più sopra abbiamo ricavato attraverso un'altra regola. Similmente moltiplicherai il 3, vale a dire $\frac{1}{8}$

di 24, per 11, e dividerai per 17 e vi addizionerai il 7 della divisione e otterrai $\frac{16}{17}$ 9, vale a dire i denari del secondo.

Sullo stesso argomento.

(1) Parimenti si ricava in un altro modo lo stesso risultato che più sopra abbiamo ottenuto. Poiché il primo possiede i $\frac{5}{6}$ della somma minore meno 6 denari, ovvero $\frac{1}{8}$ della stessa somma più 5 denari, per cui i $\frac{5}{6}$ della somma minore meno 6 denari sono quanto $\frac{1}{8}$ della stessa somma più 5 denari. Per questo se si addiziona a ciascuna porzione 6 denari, risulterà che $\frac{5}{6}$ della somma minore corrisponde a $\frac{1}{8}$ della stessa somma più 11 denari. Dunque una volta sottratto $\frac{1}{8}$ da $\frac{5}{6}$ della somma minore, resta 11. (2) Supponi pertanto che questa somma sia 24, dai cui $\frac{5}{6}$, vale a dire da 20, sottrai $\frac{1}{8}$, vale a dire 3, resta 17. Volendo che invece resti 11, o moltiplicherai i $\frac{5}{6}$ di 24, vale a dire 20, per 11 e dividerai per 17 e sottrarrai 6, oppure moltiplicherai $\frac{1}{8}$ di 24 per 11 e dividerai per 17 e aggiungerai 5 e otterrai i denari del primo uomo. (3) Similmente poiché il secondo possiede i $\frac{7}{8}$ della somma minore meno 4 denari, ovvero 7 denari più $\frac{1}{6}$ della stessa somma, se insieme ad entrambe le porzioni si aggiungono 4 denari, risulterà che $\frac{7}{8}$ della somma minore corrispondono a 11 denari più $\frac{1}{6}$ della stessa somma. Per questo, sottratto $\frac{1}{6}$ da $\frac{7}{8}$ della somma minore resta 11. Supponi similmente che questa somma sia 24, dai cui $\frac{7}{8}$, vale a dire da 21, una volta sottratto $\frac{1}{6}$, vale a dire 4, resta 17. Poiché vorresti risultasse 11 o devi moltiplicare 21 per 11 e dividere per 17 e sottrarre di lì il 4, che il secondo ha in meno, oppure moltiplicherai il 4, vale a dire $\frac{1}{6}$ di 24, per 11 e dividerai per 17 e vi addizionerai il 7 e otterrai i denari del secondo uomo. (4) Invero attraverso questo metodo possono essere trovati i casi che si possono risolvere con simili problemi, e quelli che non si possono risolvere. In base alle suddette moltiplicazioni possono essere risolti quando a ciascuno dei suddetti uomini ugualmente avanzerà oltre al multiplo da uno dei suddetti denarii fino a 11 denari. Ma dimostreremo che da 11 denari in poi non si possono risolvere. (5) Ritornando all'esempio, il primo chieda al secondo 7 denari e ottenga 12 denari più il quintuplo di esso. Il secondo similmente chieda al primo 5 denari e ottenga sette volte tanto quanto il primo più 12 denari. Come abbiamo detto sopra l'insieme di tutti i denari è chiamato somma maggiore, ma con 12 denari in meno essa è chiamata 'somma minore' dal momento

che entrambi hanno 12 denari in più. E poiché il primo, ottenuti 7 denari dal secondo, possiede il quintuplo del secondo più 12 denari, da questi 12, sottraendo i 7 che vengono dai denari del secondo, resta come porzione del primo uomo 5 denari più $\frac{5}{6}$ della somma minore. Similmente ricaverai che la porzione del secondo è di 7 denari più i $\frac{7}{8}$ della somma minore. Dunque insieme hanno i $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ della somma minore più 12 denari, ed essi hanno similmente 12 denari più della somma minore. Dunque i $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ della somma minore più 12 denari corrispondono alla somma maggiore, e poiché quando dagli uguali si sottraggono uguali, quello che resta sono uguali, [p.194] se da entrambe le porzioni si sottrae 12, resterà che $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ della somma minore è uguale alla stessa somma minore, cosa che è impossibile. O altrimenti, quando il secondo cede 7 denari al primo e gli resta $\frac{1}{6}$ della somma minore, allora la sua porzione è di 7 denari più che $\frac{1}{6}$ della somma minore. Abbiamo invero calcolato prima che la sua porzione è 7 denari più $\frac{7}{8}$ della somma minore. Per questo $\frac{1}{6}$ della somma minore più 7 denari è quanto $\frac{7}{8}$ della stessa somma con 7 denari, entrambi hanno il 7 uguale, resta dunque $\frac{1}{6}$ della somma minore uguale a $\frac{7}{8}$ della stessa somma, cosa che è di nuovo impossibile. Nella porzione del primo uomo tuttavia troverai che $\frac{1}{8}$ della somma minore è uguale a $\frac{5}{6}$ della stessa somma, che non è opportuno. Similmente si dimostra davvero impossibile, per cui a nessuno possono avanzare 12 denari e più.

Terzo metodo sui quesiti di due uomini.

(1) Di nuovo il primo chiede al secondo 7 denari e ottiene un denaro più il quintuplo di quello. Il secondo chiede al primo 5 denari e ottiene 2 denari più sette volte il primo. In questo quesito devono essere prese in considerazione tre somme. Delle quali la maggiore è la quantità di tutti i denari dei due uomini, la media è di 1 in meno di essa, e la minore è di 2 in meno della somma maggiore o 1 in meno della media. E poiché il primo con i 7 denari del secondo ha cinque volte tanto che il secondo e 1 in più, è necessario che lo stesso primo abbia i $\frac{5}{6}$ della somma mediana meno 6 denari e il secondo uomo $\frac{1}{6}$ della stessa somma più 7 denari. Similmente poiché il secondo con 5 denari del primo ha sette volte tanto quanto il primo e due in più, una volta sottratti questi due denari dalla somma maggiore, resta la somma minore. Di essa il secondo, con 3 denari del primo ha sette volte tanto il primo, cioè i $\frac{7}{8}$ della somma minore meno 3 denari. Per questo il primo ha $\frac{1}{8}$ di quella somma minore e in più 5 denari più

di essa, vale a dire quelli che dà al secondo. Fatti tutti questi calcoli, le frazioni di entrambi possono essere trasformate nelle frazioni di ciascuno delle tre dette somme. Allora trasformiamo quelle quote dapprima in frazioni della somma minore. Poiché la somma mediana è 1 in più della minore, i $\frac{5}{6}$ della somma mediana sono i $\frac{5}{6}$ di un denaro più i $\frac{5}{6}$ della somma minore, dunque i $\frac{5}{6}$ della somma minore con i $\frac{5}{6}$ di un denaro è quanto i $\frac{5}{6}$ della somma mediana; e il primo ha i $\frac{5}{6}$ della somma mediana meno 6 denari, dunque ha i $\frac{5}{6}$ della somma minore meno 6 denari e in più i $\frac{5}{6}$ di un denaro. Per questo, una volta sottratti i $\frac{5}{6}$ di un denaro da 6, resta $\frac{1}{6}$ 5. Dunque il primo ha i $\frac{5}{6}$ della somma minore meno $\frac{1}{6}$ 5 denari. Di questa somma minore il secondo ha, come è stato calcolato, $\frac{7}{8}$ meno 3 denari, per questo insieme essi hanno i $\frac{7\ 5}{8\ 6}$ di tale somma minore, meno $\frac{1}{6}$ 8 denari.

Essi hanno anche la somma maggiore, vale a dire 2 denari più della somma minore, per cui è chiaro che i $\frac{7\ 5}{8\ 6}$ della somma minore meno $\frac{1}{6}$ 8 denari, sono quanto la somma minore con 2 denari. Per questo sottratto questo 2 da entrambe le quote, resta che la somma minore è uguale ai suoi $\frac{7\ 5}{8\ 6}$ meno $\frac{1}{6}$ 10. Per questo bisogna trovare la somma i cui $\frac{7\ 5}{8\ 6}$ avanzano da $\frac{1}{6}$ 10 della stessa somma. Supponi pertanto che questa somma sia 24 i cui $\frac{7\ 5}{8\ 6}$, vale a dire 41, eccedono di 17 quel 24. Poiché vorresti che invece di 17 fosse $\frac{1}{6}$ 10, moltiplicherai $\frac{1}{6}$ 10 per $\frac{5}{6}$ di 24, vale a dire per 20 e dividerai per 17, risulterà $\frac{1\ \ 16}{3\ \ 17}$ 11 come $\frac{5}{6}$ della somma minore, resterà $\frac{27}{34}$ 6 e tanto possiede il primo. Parimenti moltiplica $\frac{1}{6}$ 10 per i $\frac{7}{8}$ di 24, vale a dire per 21 e dividi per 17, e dal quoziente sottrai il 3 che il secondo ha in meno ai $\frac{7}{8}$ della somma minore, risulterà $\frac{19}{34}$ 9.

(8)Parimenti se tu vuoi ricondurli a frazioni della somma mediana della quale il primo ha $\frac{5}{6}$ meno 6 denari e il secondo, avendo $\frac{7}{8}$ della somma minore meno 3 denari avrà [p.195] i $\frac{7}{8}$ della somma mediana meno 3 denari e meno $\frac{7}{8}$ di un denaro. Poiché è tra la somma mediana, poiché dal momento che la somma minore è 1 in meno della mediana, i $\frac{7}{8}$ della minore, corrispondono ai $\frac{7}{8}$ di un denaro meno i $\frac{7}{8}$ della mediana. Dunque dal momento che il primo ha i $\frac{5}{6}$ della somma mediana meno 6 e il secondo i $\frac{7}{8}$ della stessa meno $\frac{7}{8}$3, insieme hanno $\frac{7\ 5}{8\ 6}$ di quella somma mediana, meno $\frac{7}{8}$9, e dal momento che essi hanno 1 denaro più della somma mediana, vale a dire che i $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ della somma mediana meno $\frac{7}{8}9$ denari corrispondono alla somma mediana più 1 denaro, una volta sottratto questo denaro da entrambe le porzioni, resta la somma mediana uguale ai $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ di essa meno $\frac{7}{8}$ 10 denari. Per questo bisogna moltiplicare $\frac{7}{8}$ 10 per 20 e dividere per 17 e dal risultato bisogna sottrarre i 6 che il primo ha meno dei $\frac{5}{6}$ della somma mediana e otterrai come denari del primo $\frac{27}{34}$ 6. Similmente bisogna moltiplicare ancora $\frac{5}{6}$ 10 per 21 e dividere per 17 e sottrarre $\frac{7}{8}$ 3 o otterrai $\frac{19}{34}$ 9 denari.

(8) E ancora secondo un altro metodo trasformerai i loro denari in frazioni della somma maggiore, poiché il primo ha i $\frac{5}{6}$ della somma mediana meno 6 denari, otterrai pertanto i $\frac{5}{6}$ della somma maggiore meno 6 e meno i $\frac{5}{6}$ di quel denaro che avanza dalla somma mediana fino alla maggiore: dunque i $\frac{5}{6}$ della somma maggiore corrispondono ai $\frac{5}{6}$ di un denaro più i $\frac{5}{6}$ della somma mediana. Per questo il primo ha i $\frac{5}{6}$ della somma maggiore meno $\frac{5}{6}$ 6 denari. Similmente, poiché il secondo ha i $\frac{7}{8}$ della somma minore meno 3 denari, otterrai pertanto della somma maggiore i $\frac{7}{8}$ meno 3 denari e meno $\frac{7}{8}$ di 2 denari nei quali la somma maggiore supera la minore. Certo i $\frac{7}{8}$ di 2 corrisponde a $\frac{3}{4}$ 1, dunque il secondo ha i $\frac{7}{8}$ della somma maggiore meno 3 denari più $\frac{3}{4}$ 1, cioè $\frac{3}{4}$ 4. Infatti il primo ha, come abbiamo detto, i $\frac{5}{6}$ della somma maggiore meno $\frac{5}{6}$ 6, dunque insieme hanno i $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ della somma maggiore, meno $\frac{5}{6}6$ denari e $\frac{3}{4}$ 4, vale a dire meno $\frac{7}{12}$ 11: hanno infatti anch'essi altrettanto della somma maggiore. Poiché i $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$ della somma maggiore, sono $\frac{7}{12}$ 11 in più di tale somma, moltiplicherai dunque $\frac{7}{12}$ 11 per 20 e per 21 e dividerai i prodotti di entrambe le moltiplicazioni per 17, e dal quoziente della prima divisione sottrarrai $\frac{5}{6}6$ e dal secondo sottrarrai $\frac{3}{4}4$ e otterrai i loro denari. (9) Procediamo invero come sopra in un terzo modo con $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$, possiamo frattanto procedere in tre modi con $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ così come più sopra è stato calcolato. Poiché il primo ha $\frac{1}{8}$ della somma minore più 5 denari e il secondo ha $\frac{1}{6}$ della somma mediana più 7. Per cui puoi, in base a ciò, trasformare i loro denari in porzioni di qualunque delle tre somme. (10) E noi li trasformiamo dapprima in frazioni della somma minore della quale la prima ha $\frac{1}{8}$ più 5 denari, e poiché il secondo ha $\frac{1}{6}$ della somma mediana più 7, otterrà similmente $\frac{1}{6}$ della somma minore più 7 denari, più $\frac{1}{6}$ di tale denaro che manca alla somma minore fino alla metà. Dunque il secondo

ha $\frac{1}{6}7$ denari più $\frac{1}{6}$ della somma minore. Per questo insieme hanno $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma minore più $\frac{1}{6}$ 12 denari. Questa quantità, dal momento che è la loro somma totale, vale a dire la somma maggiore, e che questa somma maggiore è di 2 denari maggiore della somma minore, dunque $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma minore con $\frac{1}{6}$ 12 denari, corrisponde alla somma minore più due denari. Per questo una volta sottratti i 2 denari da entrambe le porzioni, restano $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma minore più $\frac{1}{6}$ 10 denari come somma minore. Per questo, una volta sottratto $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ dalla somma minore, resta $\frac{1}{6}$ 10. Per questo se supponessimo che fosse 24 e sottraessimo di lì $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$, resterebbe 17. Poiché invece che 17 vorremmo risultasse $\frac{1}{6}$ 10, moltiplicherai $\frac{1}{8}$ di 24, vale a dire 3, per $\frac{1}{6}$ 10 e dividerai per 17, risulterà, come $\frac{1}{8}$ della somma minore, $\frac{27}{34}$ 1. Una volta addizionato a questa quantità il 5 che il primo ha in più a $\frac{1}{8}$ della somma minore, $\frac{27}{34}$ 6 e altrettanto più sopra è stato calcolato che ne ha il primo. Per la stessa ragione moltiplicherai $\frac{1}{6}$ di 24, vale a dire 4, per $\frac{1}{6}$ 10 e dividerai per 17, e addizionerai poi al numero che risulterà dalla divisione $\frac{1}{6}$ 7 che il secondo ha in più di $\frac{1}{6}$ della somma minore. E otterrai $\frac{19}{34}$ 9 come denari del secondo, come sopra. [p.196]

(9) Se poi avrai saputo trasformare i loro denari in porzioni della soma mediana, ricaverai che il primo ha $\frac{1}{8}$ della somma mediana più $\frac{7}{8}$ 4 denari; il secondo, ancora, ha $\frac{1}{6}$ della stessa somma più 7 denari, cioè insieme hanno $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma mediana più $\frac{7}{8}$ 11 denari. E dal momento che insieme hanno 1 denaro più la somma mediana, vale a dire la somma maggiore, se da entrambe le porzioni si sottrae 1, resterà $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma mediana più $\frac{7}{8}$ 10 denari uguali alla somma mediana. Eseguirai i calcoli in base al procedimento che abbiamo seguito per la somma minore e ricaverai i loro denari. (10) Similmente puoi trovare i loro denari se li trasformerai in frazioni della somma maggiore, della quale il primo ha $\frac{1}{8}$ più $\frac{3}{4}$ 4 denari; il secondo $\frac{1}{6}$ più $\frac{5}{6}$ 6 denari. Trasformati ancora i loro denari in frazioni di qualcuna delle suddette tre somme, possiamo ricavare le loro quantità secondo un altro metodo. Vale a dire che poiché più sopra è stato calcolato che il primo abbia $\frac{1}{8}$ della somma minore più 5 denari, ovvero i $\frac{5}{6}$ della medesima somma meno $\frac{1}{6}$ 5 denari, dunque $\frac{1}{8}$ della somma minore con 5 denari corrisponde a $\frac{5}{6}$ della medesima somma meno $\frac{1}{6}$ 5. Per questo se ad entrambi

aggiungeremo $\frac{1}{6}$ 5, allora $\frac{1}{8}$ della somma minore più $\frac{1}{6}$ 10 denari sarà quanto i $\frac{5}{6}$ della stessa somma. Per cui se da 20, che è i $\frac{5}{6}$ di 24, sottrarrai i suoi $\frac{1}{8}$, resterà 17. Moltiplicherai $\frac{1}{6}$ 10 per 3 e dividerai per 17 e addizionerai 5 che il primo ha in più a $\frac{1}{8}$ della somma minore. O moltiplicherai $\frac{1}{6}$ 10 per 20 e dividerai per 17 e sottrarrai di lì $\frac{1}{6}$ 5 che il primo ha in meno ai $\frac{5}{6}$ di tale somma. E così otterrai i denari del primo uomo. Similmente se farai i calcoli in base a ciò potrai trovare i denari del primo attraverso le due porzioni che il primo possiede in qualunque delle altre due somme, lo stesso devi intendere per i denari del secondo. (11) Ma bisogna notare che alcuni di questi problemi sono insolubili, e per capire quali sono, si propone un problema insolubile.

Quarto metodo in simili problemi di due uomini.

(1) Vi siano parimenti due uomini e il primo chieda al secondo 7 e ottenga similmente il quintuplo del secondo e uno in più. Il secondo, ancora, chieda 5 al primo e ottenga sette volte tanto il primo e 15 in più. In questo problema la somma maggiore è la quantità dei due e la loro somma mediana è 1 in meno, la minore è 15 in meno della somma maggiore. E poiché il primo, ottenuti 7 denari dal secondo, ha il quintuplo del secondo e 1 in più, è necessario che il secondo uomo abbia $\frac{1}{6}$ della somma mediana e 7 in più. Similmente, come abbiamo detto sopra, il primo ha $\frac{1}{8}$ della somma minore e 5 in più. E dal momento che il secondo ha $\frac{1}{6}$ della somma mediana e 7 in più, è necessario che per $\frac{1}{6}$ della somma mediana, abbia $\frac{1}{6}$ della minore e in più la sesta parte dei 14 denari nei quali la somma mediana eccede la minore. Dunque il secondo ha $\frac{1}{6}$ della somma minore e la sesta parte di 14, vale a dire $\frac{1}{3}$ 2 + 7, cioè $\frac{1}{3}$ 9 + $\frac{1}{6}$ della somma minore. Poiché il primo ha $\frac{1}{8}$ + 5 di questa somma, insieme hanno $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma minore + $\frac{1}{3}$ 14 denari: essi realizzano allora la somma minore + 15 denari, vale a dire la somma maggiore. Se da entrambe le porzioni si sottraggono $\frac{1}{3}$ 14 denari, resterà la somma minore con $\frac{2}{3}$ di un denaro, uguale a $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ di tale somma, cosa che è impossibile. Similmente se trasformerai le loro porzioni in porzioni della somma mediana, ricaverai che il primo ha $\frac{1}{8}$ della somma mediana meno l'ottava parte dei 14 denari che ci sono dalla somma minore fino alla mediana, dunque il primo ha $\frac{1}{8}$ della somma mediana e $\frac{1}{4}$ 3 in più, dunque insieme hanno $\frac{1}{4}$ 10 più $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma mediana, hanno infatti uno in più della somma mediana, vale a dire la

somma maggiore: sottratto questo 1 da entrambe [p.196] le porzioni, resta $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma mediana più $\frac{1}{4}$9denari, uguale alla somma mediana. Poiché, in base alle suddette dimostrazioni, per ottenere i denari del primo, bisogna moltiplicare $\frac{1}{8}$ di 24, vale a dire 3, per $\frac{1}{4}$9 e bisogna dividere il prodotto della moltiplicazione per 17 e dopo bisogna aggiungere $\frac{1}{4}$3 denari che il primo ha in più di $\frac{1}{8}$della somma mediana e otterrai, come denari del primo, $\frac{15}{17}$4 che è impossibile perché è meno di 5 che il secondo chiede al primo uomo, troverai lo stesso risultato se trasformerai le loro quote in frazioni della somma maggiore.

Quinto metodo sul problema dei due uomini.

(1) Parimenti il primo chieda al secondo 7 e ottenga il quintuplo di quello ma con 1 in meno; il secondo chieda 5 al primo e ottenga sette volte tanto il primo ma con 3 in meno. Invero un gran numero di questi problemi sono risolvibili e si risolvono in quest'ordine. La quantità dei loro denari è chiamata somma minore; uno in più è chiamata mediana; due in più della mediana, vale a dire 3 in più della minore, poiché 3 mancano al secondo, è chiamata somma maggiore. E dal momento che il primo, una volta ottenuti 7 denari dal secondo, ha 1 in meno del quintuplo del secondo, se questo denaro è addizionato ai denari del primo e ai 7 denari che chiede al secondo, questo primo otterrà i $\frac{5}{6}$ della somma mediana. Per questo la quota del primo uomo è i $\frac{5}{6}$ della somma mediana, meno i 7 denari che gli dà il secondo e meno 1 denaro che gli si aggiunge, vale a dire meno 8 denari. Il secondo, invero, è $\frac{1}{6}$ della stessa somma mediana, più i 7 denari suddetti. similmente ricaverai, dalla richiesta del secondo, che il primo ha $\frac{1}{8}$ della somma maggiore + i 5 denari che gli dà il secondo. E il secondo ha i $\frac{7}{8}$ di tale somma maggiore, meno gli stessi 5 e meno i 3 che gli mancano per arrivare al settuplo del primo. In base a ciò, pertanto, se avrai dato ogni cosa, potrai trasmormare le loro quote in frazioni di qualunque delle tre suddette somme, e poi potrai fare i calcoli in quei tre metodi differenti che abbiamo utilizzato prima.

(2) Ma affinché ciò sia mostrato più chiaramente, trasformiamoli in frazioni della somma mediana, in base ad uno dei tre procedimenti. Infatti il secondo ha $\frac{1}{6}$ della somma mediana più 7 denari; il primo invece ha $\frac{1}{8}$ della somma maggiore, più 5 denari. E dal momento che la somma maggiore è di 2 denari in più rispetto alla somma mediana, sarà $\frac{1}{8}$ della somma maggiore più $\frac{1}{8}$ di 2 denari, vale a dire $\frac{1}{4}$ di un denaro più $\frac{1}{8}$ della somma mediana. Per questo $\frac{1}{8}$

della somma mediana con $\frac{1}{4}$ di un denaro corrisponde a $\frac{1}{8}$ della somma maggiore. E dal momento che il primo ha $\frac{1}{8}$ della somma maggiore più 5 denari, avrà $\frac{1}{8}$ della somma mediana più $\frac{1}{4}$ 5 denari. Dunque insieme hanno $\frac{1}{8}\frac{1}{5}$ della somma mediana, + 7 denari + 5 + $\frac{1}{4}$, vale a dire $\frac{1}{4}$ 12. Essi hanno anche quote della somma minore: dunque $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma minore con $\frac{1}{4}$ 12 denari corrispondono alla somma minore, dal momento che essa è 1 più della minore. Dunque sottratti $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma mediana da questa somma, resta $\frac{1}{4}$ 13. E si richiede la quantità di $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ di tale somma. Per questo moltiplicherai $\frac{1}{8}$ di 24, vale a dire 3, per $\frac{1}{4}$ 13 e dividerai il prodotto per 17, e otterrai come $\frac{1}{8}$ della somma mediana $\frac{3}{4}\frac{5}{17}$ 2. Addizionati a questi i $\frac{1}{4}$ 5 denari, risultano come denari del primo uomo $\frac{10}{17}$ 7. Parimenti moltiplicherai $\frac{1}{6}$ di 24, vale a dire 4, per $\frac{1}{4}$ 13, e dividerai per 17, risulterà come $\frac{1}{6}$ della somma mediana $\frac{2}{17}$ 3, addizionati a questi i 7 denari che il secondo ha in più all'$\frac{1}{6}$ della somma mediana, risulta come sua quota $\frac{2}{17}$ 10.

(3) Dalle cose che sono state dette hai abbastanza indizi per fare i calcoli se si proponesse che ad uno di essi avanzi qualcosa oltre il suo prodotto e ad un altro invece manchi. Tuttavia, affinché lo si comprenda meglio, viene proposto un problema simile nel quale il primo, ottenuti 7 denari dal secondo, ottenga più che il quintuplo di esso e il secondo, ottenuti 5 denari dal primo abbia il settuplo del primo, meno 3 denari. (4) Invero in questo problema la somma minore è 6 in meno della quantità [p.198] di tutti i loro denari. Se non avrai dimenticato le cose dette precedentemente, troverai che il primo ha $\frac{5}{6}$ della somma minore meno 1 denaro; il secondo $\frac{1}{6}$ della stessa somma più 7 denari. La somma mediana, poi, è la quantità dei loro denari; la maggiore è 8 più della mediana. Della quale somma maggiore il primo ha $\frac{1}{8}$ più 5 denari e il secondo, della stessa somma maggiore, ha i $\frac{7}{8}$ meno i suddetti 5 denari, e meno ancora gli stessi 8 che gli mancano per avere il settuplo della quota del primo uomo. (5) Conosciuti questi dati, trasformiamoli in frazioni della somma mediana, sebbene possano essere ridotti in frazioni delle altre somme. E facciamo ciò in base ad uno dei tre metodi attraverso il quale ciò può essere fatto. (6) Dal momento che la somma maggiore è di 3 denari in più della mediana, l'ottava parte della somma maggiore sarà $\frac{1}{8}$ di 8 denari, vale a dire 1 in più dell'ottava parte della somma mediana. Per cui dal momento che il primo ha $\frac{1}{8}$ della somma maggiore + 5 denari, otterrai similmente $\frac{1}{8}$ della somma mediana + 6 denari. Parimenti poiché la somma minore è di 6 in meno della mediana, sarà $\frac{1}{6}$ della somma minore

più la sesta parte di 6 denari, vale a dire 1 in meno di $\frac{1}{6}$ della somma mediana. Per cui poiché il secondo ha $\frac{1}{6}$ della somma minore più 6 denari, avrà similmente $\frac{1}{6}$ della somma mediana meno 1 denaro più 7 denari, cioè 6 denari in più. Dunque il secondo e il primo hanno $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma mediana e la stessa somma mediana più 12. Per questo $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma mediana più 12 denari è quanto la stessa somma mediana. Dunque sottratti $\frac{1}{8}\frac{1}{6}$ della somma mediana da essa resta 12. Per cui affinché tu calcoli $\frac{1}{8}$ di tale somma mediana, moltiplicherai $\frac{1}{8}$ di 24, vale a dire 3, per 12 e dividerai per 17, risulterà $\frac{2}{17}2$, a cui devi aggiungere il 6 che il primo ha più di $\frac{1}{8}$ della somma mediana, risulterà $\frac{2}{17}8$ e tanto ha il primo. Parimenti affinche tu calcoli $\frac{1}{8}$ della somma mediana, moltiplicheai 4 per 12 e dividerai per 17 e addizionerai 6 che il secondo ha in più all'$\frac{1}{6}$ della somma mediana, risulterà $\frac{14}{17}8$ come denari del secondo uomo.

(7) Questo risultato lo puoi trovare anche attraverso la 'regola diretta' se supponi che il secondo abbia una certa quantità più 7 denari, e il primo 5 quantità meno 1 denaro, poiché quando il primo ha 7 denari dal secondo, resterà al secondo solo una cosa e il primo avrà 5 cose meno 1 denaro, scontati i 6 denari che ha più il suo quintuplo da quei 7 denari che gli dà il secondo. Similmente se il secondo otterrà 5 dal primo, resteranno a quel primo 5 cose meno 6 denari, e il secondo avrà solo una cosa e 12 denari che con gli 8 denari eguagliano il settuplo dei denari del secondo vale a dire 35 cose meno 42 denari. Una volta addizionati questi 42 denari ad entrambe le quote, risulteranno 35 cose che corrisponderanno ad una cosa più 62 denari. Per questo, diminuendo da entrambe le parti, resteranno 34 cose che corrisponderanno a 62 denari, cioè 17 cose corrispondono a 31 denari. Per questo dividi 31 per 17, risulterà $\frac{14}{17}1$ denari per una cosa. E poiché il secondo ha una cosa con 7 denari, dunque ha $\frac{14}{17}8$ denari. Similmente poiché il secondo ha 5 cose meno 1 denaro, moltiplica $\frac{14}{17}1$ per 5, risulterà $\frac{2}{17}9$ da cui sottrai 1, resteranno $\frac{2}{17}8$ denari e tanto ha il primo. (8) Attraverso questo metodo, pertanto possiamo risolvere tutti i suddetti problemi con due uomini. Vi sono invero infiniti di simili problemi che non possono essere risolti, e che devi riconoscere attraverso il metodo descritto precedentemente.

Problema simile con tre uomini.

(1) Parimenti tre uomini hanno denari, uno dei quali disse agli altri uomini: se mi darete entrambi 7 denari, avrò cinque volte tanto voi; il secondo disse agli altri: se mi darete

entrambi 9 denari avrò sette volte tanto voi; il terzo chiese 11 denari e suppose che avrebbe avuto sette volte tanto loro. Si chiede quanto ciascuno avesse. (2) Questa regola viene svolta attraverso la regola del quinto albero, così [p.199] vedrai quale sia la quota di ciascuno di tutta la somma dei loro denari, una volta ottenuti quei denari che ciascuno chiede agli altri. (3) Questo lo si scopre così: dal momento che il primo, ricevuti 7 denari dagli altri sostiene di avere il loro quintuplo, se allora ha cinque quantità qualunque e gli altri due hanno una di tali quantità, per questo il primo ha $\frac{5}{6}$ di tutti i denari, meno 7 denari, per la stessa ragione il secondo avrà i $\frac{6}{7}$ di tutta la somma meno i 9 denari che ha chiesto agli altri. Similmente anche il terzo ha i $\frac{7}{8}$ dell'intera somma dei denari, meno quegli 11 denari che chiede agli altri. Dunque tra di loro hanno $\frac{7}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}$ dell'intera somma meno 7 denari + 9 + 11, cioè 27 denari. (4) Per cui si assimili questo problema a quello dell'albero. Questi $\frac{7}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}$ superano la lunghezza dell'albero di 27 palmi. Per questo bisogna trovare il numero nel quale sono contenuti $\frac{1}{8}\frac{1}{7}\frac{1}{6}$, vale a dire in 168. Di esso calcola i $\frac{5}{6}$ che corrispondono a 140, e i $\frac{3}{7}$ che corrispondono a 144, e i $\frac{7}{8}$ che corrispondono a 147 e addizionali insieme, risulterà 431 da cui devi sottrarre 168, resterà 263. Ma poiché tu hai ipotizzato che restasse 27, per questo moltiplicherai 140 per 27 e dividerai per 263, risulteranno $\frac{98}{162}$ 14 denari e tanto ha il primo uomo, una volta ottenuti i 7 denari che chiede agli altri. Per questo sottrai 7 da $\frac{98}{263}$ 14, resterà $\frac{98}{263}$ 7 e tanto ha il primo. Parimenti affinché tu calcoli i denari del secondo, moltiplica 144 per 27 e dividi per 263, risulterà $\frac{206}{263}$ 14 da cui devi sottrarre i 9 denari che il secondo chiede agli altri, resteranno $\frac{206}{263}$ 5 denari e tanto ha il secondo. Parimenti affinché tu calcoli i denari del terzo uomo, moltiplica 147 per 27 e dividi ancora per 263, risulterà $\frac{24}{263}$ 15, da cui devi sottrarre gli 11 denari che il terzo chiede, resteranno $\frac{24}{263}$ 4 denari e tanto ha il terzo. (5) Quando invero il terzo li chiede al secondo, il secondo al terzo e il terzo al primo, troverai il metodo della soluzione nella quarta parte di questo capitolo e anche nella seconda parte dell'elchatain.

Sullo stesso argomento secondo un altro metodo.

(1) Parimenti ci sono tre uomini. E il primo, ottenuti 7 denari dai secondi ha cinque volte tanto quelli e uno in più; il secondo, ottenutone 9 dagli altri, ha sette volte tanto quelli e uno in più; il terzo, ottenutone 11 dagli altri, ha sette volte tanto rispetto a loro e similmente uno in più. (2) In questo problema, tuttavia, devono essere considerate due somme, la maggiore delle

quali è la quantità delle loro tre quote, la minore è di 1 meno della maggiore. E dal momento che il primo con i 7 denari degli altri ha cinque volte tanto gli stessi e 1 in più, è necessario che lo stesso abbia i $\frac{5}{6}$ della somma minore meno 6 denari; per questa stessa ragione troverai che il secondo, con i 9 denari degli altri, ha i $\frac{6}{7}$ della somma minore meno 8 denari, dal momento che egli con 9 denari ha sette volte tanto quanto gli altri e 1 in più; e ancora, poiché il terzo, ottenuti 11 denari dagli altri ha sette volte tanto quanto gli stessi e 1 in più, non si dubiti che egli abbia i $\frac{7}{8}$ della somma minore, meno 10 denari. Dunque tutti insieme hanno $\frac{7}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}$ della somma minore, meno 6 denari + 8 + 10, vale a dire meno 24 denari. Essi realizzano anche la somma maggiore: $\frac{7}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}$ della somma minore, meno 24 denari, realizzano la somma maggiore. Per questo se si sottrae di lì l'1 nel quale la somma maggiore eccede la minore, resterà $\frac{7}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}$ della somma minore, meno i 25 denari uguali alla stessa somma minore. Per cui i $\frac{7}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}$ della somma minore eccedono la stessa somma di 25, per questo, come abbiamo fatto nel precedente problema, moltiplicherai 104 per 25 e dividerai per 263 e otterrai per i $\frac{5}{6}$ della somma minore $\frac{81}{263}$ 13, da cui devi sottrarre il 6 che il primo ha in meno ai $\frac{5}{6}$ della somma minore, resterà $\frac{81}{263}$ 7 e tanto ha il primo. Parimenti moltiplicherai 144 per 25 e dividerai per 263 e per i $\frac{6}{7}$ della somma minore, otterrai $\frac{181}{263}$ 13, da cui devi sottrarre 8 che il secondo ha [p.200] in meno ai $\frac{6}{7}$ della somma minore, resterà $\frac{181}{263}$ 5 e tanto ha il secondo. Parimenti moltiplicherai 147 per 25 e dividerai per 263 e otterrai per i $\frac{7}{8}$ della somma minore $\frac{256}{263}$ 13, da cui, una volta sottratto il 10 che il terzo ha in meno ai $\frac{7}{8}$ della somma minore, resterà $\frac{256}{263}$ 3 e tanti ne ha il terzo.

(3) Parimenti, il primo chiede agli altri 7 denari e ottiene il loro quintuplo + 1; il secondo ne chiede 9 e ottiene il settuplo + 2; il terzo chiede agli altri 11, e ottiene i loro settuplo + 3. (4) In questo problema, invero, sono da considerare quattro somme, la prima e la maggiore delle quali, è la quantità dei loro denari; la seconda è 1 in meno; la terza è 2 in meno della prima o 1 in meno della seconda; la quarta e la minore è di 3 in meno della prima o 2 in meno della seconda o 1 in meno della terza. (5) E dal momento che il primo, ottenuti 7 denari dagli altri due uomini, ottiene il quintuplo di essi + 1, è necessario che egli abbia i $\frac{5}{6}$ della seconda somma meno 6 in modo che gli rimanga 1 denaro dei suddetti 7 senza il quale si faccia la seconda somma. Da ciò tuttavia potrai comprendere che il secondo ha $\frac{6}{7}$ della terza somma

meno 7, per cui gliene avanzano 2 dai 9 che chiede agli altri. E il terzo ne ha 3, una volta sottratti 11, vale a dire 8 in meno dei $\frac{7}{8}$ della somma minore. (6) Comprese pertanto queste cose, potrai trasformare i denari di uno qualunque nella frazione di qualunque delle suddette quattro somme. Si trasformano invero in frazioni della somma minore nel modo seguente: poiché la seconda somma è di 2 in più della minore, allora $\frac{5}{6}$ della seconda somma saranno i $\frac{5}{6}$ di 2 denari, vale a dire $\frac{2}{3}$ 1 più i $\frac{5}{6}$ della somma minore. Per cui dal momento che il primo ha $\frac{5}{6}$ della seconda somma meno 6, otterrai i $\frac{5}{6}$ della minore meno $\frac{1}{3}$ 4 poiché una volta sottratto $\frac{2}{3}$ 1 da 6, resta $\frac{1}{3}$ 4. Parimenti poiché la terza somma è di 1 in più della minore, i $\frac{6}{7}$ della terza somma saranno i $\frac{6}{7}$ di quella più i $\frac{6}{7}$ della somma minore. Per cui dal momento che il secondo ha i$\frac{6}{7}$ della terza somma, meno 7, otterrai i $\frac{6}{7}$ della minore, meno $\frac{1}{7}$ 6 denari. E il terzo uomo ha i $\frac{7}{8}$ della somma minore meno 8 denari. Dunque tutti insieme hanno $\frac{7}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}$ della somma minore, meno $\frac{1}{3}$ 4 denari, più $\frac{1}{7}$ 6 più 8, vale a dire meno $\frac{1}{7}\frac{1}{3}$ 18. Tutti questi hanno anche 3 in più della somma minore, vale a dire la somma maggiore. Per questo sottratti questi 3 ugualmente da entrambe le porzioni resteranno i $\frac{7}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}$ della somma minore, meno $\frac{1}{7}\frac{1}{3}$ 21 denari corrispondenti alla somma minore. Per questo, in base a ciò che abbiamo detto prima, moltiplicherai i $\frac{5}{6}$ di 168, vale a dire 140, per $\frac{1}{7}\frac{1}{3}$ 21, poi devi dividere il prodotto per 263 e sottrai di lì $\frac{1}{3}$ 4 e ricaverai che il primo ha $\frac{26}{263}$ 7. Di nuovo moltiplicherai $\frac{1}{7}\frac{1}{3}$ 21 per 144, che è i $\frac{6}{7}$ di 168, e devi dividere il prodotto per 263 e devi sottrarre di lì $\frac{1}{7}$ 6 e otterrai, come denari del secondo, $\frac{162}{263}$ 5. Parimenti moltiplicherai $\frac{1}{7}\frac{1}{3}$ 21 per 147, che è i $\frac{7}{8}$ di 168, e dividerai per 263 e sottrarrai di lì 8 e otterrai come denari del terzo $\frac{1}{263}$ 4. (7) In base ai suddetti insegnamenti, puoi invero chiaramente comprendere se da quei prodotti sarà sottratto qualcosa e anche se si opererà fra più uomini quando uno di loro chiede a tutti gli altri.

Ulteriore metodo fra tre uomini.

(1) Parimenti, vi sono tre uomini, il primo e il secondo dei quali chiedono al terzo uomo 7 denari e ottengono il suo quintuplo; il terzo e il primo chiedono al secondo 11 denari e ottengono il suo settuplo. (2) Poiché il primo e il secondo, ottenuti 7 denari dal terzo, ottengono il suo quintuplo, è necessario che il terzo uomo abbia $\frac{1}{6}$ di tutta la somma + 7

denari. Similmente, dalle richieste degli altri uomini si comprende che il primo abbia $\frac{1}{7}$ di tutta la somma + 9 denari, il secondo $\frac{1}{8}$ della stessa somma + 11 denari. Dunque insieme hanno $\frac{1}{8}\frac{1}{7}\frac{1}{6}$ + 27 denari. Per questo supponi che tutti insieme abbiano 168 denari, $\frac{1}{6}$ dei quali, vale a dire 28, e $\frac{1}{7}$, vale a dire 24, e $\frac{1}{8}$, vale a dire 21, addizionati insieme, realizzano 73. Da 73 fino a 168 ne mancano 95. Poiché invece che 95 si vorrebbe risultasse 27, per ottenere $\frac{1}{6}$ di tutta la loro somma [p.201] moltiplicherai 27 per 28 e dividerai per 95, risulterà $\frac{91}{95}$ 7 con cui devi addizionare i 7 denari che il terzo uomo ha in più a $\frac{1}{6}$ di tutta la somma, risulterà $\frac{91}{95}$ 14 e tanto ottiene il terzo. Parimenti moltiplica il 27 per il 24 e dividi per 95 e in più addiziona 9, risulterà $\frac{78}{95}$ 15 e tanto ottiene il primo. E ancora, moltiplicherai il 27 per il 21 e dividerai per 95 e vi addizionerai 11, risulterà $\frac{92}{95}$ 16 e tanto ottiene il secondo. (3) Invero, secondo questo procedimento puoi eseguire i calcoli fra più uomini quando i restanti chiedono ad uno di essi un qualche numero di denari e diventino un suo multiplo. Anche se non dimenticherai le cose suddette, potrai effettuare i calcoli come l'aumento o la diminuzione di quei multipli.

Problema insolubile sullo stesso argomento con quattro uomini.

(1) Quattro uomini posseggono dei denari, il primo e il secondo di essi chiedono agli altri 7 denari e si postula che realizzino il triplo di questi; il secondo e il terzo chiedono agli altri 8 denari così da avere il quadruplo di essi; il terzo e il quarto chiedono ai restanti 9 denari così da avere il loro quintuplo; il quarto e il primo ne chiedono 11 e li superano di sei volte: si richiede quanti denari abbia ciascuno di essi. (2) Questo problema è insolubile e lo si capisce nel modo seguente. Poiché il primo e il secondo con i 7 denari degli altri ottengono tre volte tanto, allora essi hanno i $\frac{3}{4}$ dell'intera somma di denari e al terzo e al quarto uomo resta $\frac{1}{4}$ di tale somma. Dunque il terzo e il quarto uomo hanno $\frac{1}{4}$ dell'intera somma + i 7 denari che danno al primo e al secondo uomo. Similmente dalle richieste e dalle cose postulate per gli altri uomini, ricaverai che il quarto e il primo uomo hanno $\frac{1}{5}$ della somma totale + 8 denari; e il primo e il secondo hanno $\frac{1}{6}$ della somma suddetta + 9 denari; e il secondo e il terzo hanno $\frac{1}{7}$ di tale somma + 11 denari. E dal momento che il primo e il secondo hanno $\frac{1}{6}$ dell'intera somma + 9 denari e il terzo e il quarto hanno $\frac{1}{4}$ di tale somma + 7 denari, dunque tutti e quattro hanno $\frac{1}{6}\frac{1}{4}$ della detta somma + 16 denari. Per questo la loro somma è il numero da cui,

sottratti $\frac{1}{6}\frac{1}{4}$, resta 16. Attraverso la regola del secondo albero ricaverai che questo numero è $\frac{3}{7}$ 27. Parimenti poiché il quarto e il primo hanno $\frac{1}{5}$ dell'intera somma + 8 denari e il secondo e il terzo hanno $\frac{1}{7}$ + 11 denari, dunque la somma di quei quattro uomini sarà $\frac{1}{7}\frac{1}{5}$ di tale somma + 19 denari. Per questo la loro somma è quel numero da cui, sottratti $\frac{1}{7}\frac{1}{5}$, resta 19. Attraverso la regola dello stesso secondo albero, troverai che questo numero è $\frac{21}{23}$ 82 che è impossibile, dal momento che attraverso i primi calcoli avevamo ricavato che la loro somma è un'altra, vale a dire $\frac{3}{7}$ 27. Per cui questo problema è insolubile.

(3) Invero se vogliamo proporne uno solubile, il primo e il secondo chiedano agli altri 100 denari; il secondo e il terzo 106 denari; il terzo e il quarto 145; il quarto e il primo 170, e ricaverai, attraverso entrambi i metodi di calcolo che la loro somma è 420. Di essa il primo e il secondo ne hanno $\frac{1}{6}$ + 145, vale a dire 215; il secondo e il terzo hanno $\frac{1}{7}$ di tale 420 + 170, vale a dire 230; il terzo e il quarto hanno $\frac{1}{4}$ di 420 + 100, vale a dire 205; e il quarto e il primo hanno $\frac{1}{5}$ di 420 + 106 denari, cioè 190. (4) Puoi dividere questi numeri tra loro a piacere, cioè: poiché il primo e il secondo ne hanno 215, supponi che il primo ne abbia 100 e il secondo 115, e poiché il secondo insieme al terzo uomo ne ha 230, sottrai di lì i 115 che ha il secondo, resteranno 115 denari per il terzo; poiché il terzo, insieme al quarto uomo, ha 205 denari, sottrai di lì i 115 denari che ha il terzo uomo, resteranno 90 denari per il quarto uomo.

[p.202]

Simile problema con 5 uomini.

(1) Parimenti siano cinque gli uomini e il primo, il secondo e il terzo chiedano al quarto e al quinto uomo 7 denari e ottengano il doppio di questi; il secondo, il terzo e il quarto chiedano al quinto e al primo 8 denari e ottengano il loro triplo; il terzo e il quarto e il quinto chiedano al primo e al secondo 9 denari e ottengano il loro quadruplo; il quarto, il quinto e il primo chiedano al secondo e al terzo 10 denari e ottengano il loro quintuplo; il quinto, il primo e il secondo chiedano al terzo e al quarto 11 denari e ottengano il loro settuplo. (2) Dal momento che il primo, il secondo e il terzo con i 7 denari del quarto e del quinto realizzano il doppio di questi ultimi, è necessario che il primo più il secondo e il terzo abbiano i $\frac{2}{3}$ di tutta la somma meno quei 7, e il quarto e il quinto abbiano $\frac{1}{3}$ di tale somma + 7. Similmente dalle richieste e dalle concessioni degli altri si capisce che il quinto e il primo hanno $\frac{1}{4}$ di tutta la somma + 8

denari; e il primo e il secondo hanno $\frac{1}{5}$ di tutta la somma + 9 denari; e il primo e il terzo hanno $\frac{1}{6}$ di tutta la somma + 10 denari; e il terzo e il quarto hanno $\frac{1}{7}$ di tutta la somma + 11 denari. Per cui tutti insieme hanno $\frac{1}{7}\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di mezza somma e la metà di 7 denari + 8 + 9 + 10 + 11, cioè di 45 denari, dal momento che ciascuno come nelle suddette frazioni, anche nei numeri è stato contato due volte. Per questo troverai il numero in cui siano contenuti $\frac{1}{7}\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, risulterà 420, duplicalo per avere la loro doppia computazione, risulterà 840 e calcola $\frac{1}{7}\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ di 420 e sottrailo da 840, resterà 381 che si vorrebbe corrispondesse a 45. Per questo moltiplicherai 45 per 420 e dividerai per 381 e otterrai come loro somma $\frac{77}{127}$ 49. Di questa somma il quarto più il quinto ne hanno la terza parte + 7, cioè $\frac{68}{127}$ 23; e il quinto e il primo ne hanno la quarta parte + 8, vale a dire $\frac{51}{127}$ 20; e il primo e il secondo hanno la quinta parte + 9, vale a dire $\frac{117}{127}$ 18; e il secondo e il terzo hanno la sesta parte + 10, vale a dire $\frac{34}{127}$ 18; e il terzo e il quarto hanno la settima parte + 11 di tale somma, vale a dire $\frac{11}{127}$ 18. (3) Quindi per separare i denari dell'uno dai denari dell'altro, addiziona i denari del primo e del secondo, vale a dire $\frac{117}{127}$ 18, con i denari del terzo e del quarto, vale a dire con $\frac{11}{127}$ 18, risulterà $\frac{1}{127}$ 37: la differenza, poi, che c'è tra la somma di questi quattro e la somma totale, vale a dire $\frac{77}{127}$ 49, è la quota del quinto uomo, questa differenza è $\frac{76}{127}$ 12, una volta sottratta questa quota dai denari del quinto e del primo, resteranno al primo $\frac{12}{127}$ 7; sottratta questa quota ai denari del primo e del secondo, resteranno per il secondo $\frac{15}{127}$ 11 che, sottratti dai denari del secondo e del terzo, fanno rimanere per il terzo uomo $\frac{19}{127}$ 7, una volta sottratti questi dai denari del terzo e del quarto, restano $\frac{119}{127}$ 10 per il quarto uomo.

(4) Altrimenti, dal momento che il secondo più il terzo, come si è mostrato più sopra, hanno $\frac{1}{6}$ dell'intera somma dei cinque uomini + 10 denari e il quarto più il quinto hanno $\frac{1}{3}$ di tale somma + 7 denari, dunque tutti e quattro hanno $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$, vale a dire $\frac{1}{2}$, della somma + 17 denari. Per questo al primo resta $\frac{1}{2}$ di tale somma, meno quei 17 . Similmente poiché il terzo e il quarto hanno $\frac{1}{7}$ della somma + 11 denari e il quinto più il primo hanno $\frac{1}{4}$ della somma + 8 denari, dunque questi quattro hanno $\frac{1}{7}\frac{1}{4}$, vale a dire $\frac{11}{28}$ della somma + 19 denari, per questo al

secondo uomo resta il resto della somma, vale a dire $\frac{17}{28}$ meno quei 19. Similmente se addizionerai la quota del quarto più il quinto con la quota del primo più il secondo, vale a dire $\frac{1}{3}$ della somma + 7 denari con $\frac{1}{5}$ + 9 denari, risulterà $\frac{8}{15}$ della somma + 16 denari. Una volta sottratti questi dalla somma, restano per il terzo uomo $\frac{7}{15}$ della somma meno quei 16. Parimenti addizionata [p.203] la quota del quinto e del primo con la quota del secondo e del terzo, vale a dire $\frac{1}{4}$ della somma + 8 denari con $\frac{1}{6}$ della somma + 10 denari, risultano $\frac{5}{12}$ della somma + 18 denari. Per questo restano al quarto uomo $\frac{7}{12}$ della somma meno quei 18. E ancora, addizionata la quota del primo e del secondo con la quota del terzo e del quarto, vale a dire $\frac{1}{5}$ della somma + 9 con $\frac{1}{7}$ della somma + 11, risultano $\frac{12}{35}$ della somma + 20 denari. Per questo restano al quinto uomo $\frac{23}{35}$ meno quei 20. Una volta trovata, poi, in ordine la quota di ciascuno, puoi fare i calcoli attraverso la prima regola dei tre uomini.

Su un uomo che si dirige a Costantinopoli per vendere tre perle.

(1) Un mercante portò a Costantinopoli tre perle per venderle. Una delle quali valeva una certa somma; la seconda il doppio della prima; la terza poi il doppio della seconda meno un terzo di un bizante. La tassa sul commercio di Costantinopoli, poi, esigeva un decimo delle suddette perle come diritto di commercio. Il mercante dunque vendette la prima delle perle, vale a dire la meno pregiata e pagò all'esattore la decima di tutte le suddette perle e gli avanzò $\frac{1}{8}$ del prezzo della seconda perla + $\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 bizanti. Si chiede il prezzo di ciascuna perla e bisogna invero procedere nel modo seguente. Se ipotizziamo una cifra qualunque come prezzo della prima perla, per esempio 10, per la seconda allora sarà 20, per la terza sarà $\frac{2}{3}$ 39, cioè il doppio del prezzo della seconda perla, meno $\frac{1}{3}$ di un bizante. Tutti questi, addizionati insieme, realizzeranno $\frac{2}{3}$ 69. Di questa somma calcola $\frac{1}{10}$, che è $\frac{2\ \ 9}{3\ \ 10}$ 6, da questa somma fino a 10, vale a dire fino al prezzo della prima perla, ne mancano $\frac{1\ \ 0}{3\ \ 10}$ 3, da cui sottratto $\frac{1}{8}$ di 20, vale a dire del prezzo della seconda perla, che è $\frac{1}{2}$ 2, resta $\frac{26}{30}$ che devi sottrarre da $\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21, restano $\frac{9}{10}$ 20 che devi conservare.

(3)E poni tale problema: che la prima perla vale una certa somma, la seconda il doppio, la terza il quadruplo della prima. E sottratta la loro tassa di commercio dal prezzo della prima perla, resta $\frac{1}{8}$ del prezzo della seconda + $\frac{9}{10}$ 20 bizanti. Poi supponi a piacere come prezzo della prima perla 20 e per la seconda 40 e per la terza 80: questi, addizionati assieme, realizzano 140. Di questa somma $\frac{1}{10}$, vale a dire 14, devi sottrarlo da 20, vale a dire dal prezzo della prima perla, resta 6 da cui devi sottrarre $\frac{1}{8}$ del prezzo della seconda perla, cioè di 40, vale a dire 5, resta 1. Ma poiché dovrebbe risultare $\frac{9}{10}$ 20, moltiplica $\frac{9}{10}$ 20 per 20 e dividi per 1, risulterà 418 a cui devi aggiungere i 10 bizanti che abbiamo ipotizzato per la prima perla, risulteranno 428 bizanti come prezzo della prima perla. Per questo il prezzo della seconda è 856 e della terza è $\frac{2}{3}$ 1711.

Sullo stesso argomento attraverso la regola diretta.
(1) Poni come prezzo della prima perla una cosa, per questo il prezzo della seconda sarà di due cose, della terza di quattro cose meno $\frac{1}{3}$ di un bizante. Tutte queste somme addizionate assieme realizzano 7 cose meno $\frac{1}{3}$ di un bizante. Un decimo di questa somma, vale a dire $\frac{7}{10}$ di una cosa meno $\frac{1}{30}$ di bizante, sottrailo da una cosa, vale a dire dal prezzo della prima perla, resterà $\frac{3}{10}$ di una cosa e $\frac{1}{30}$ di un bizante che equivale a $\frac{1}{3}$ del prezzo della seconda perla e $\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 bizanti, cioè $\frac{1}{4}$ della prima perla e $\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 bizanti. Se da entrambe le quote si sottrae $\frac{1}{30}$ di un bizante, resteranno $\frac{3}{10}$ di una cosa che equivalgono a $\frac{1}{4}$ di una cosa e $\frac{2}{5}$ 21 bizanti. Parimenti se da entrambe si sottrae $\frac{1}{4}$ di una cosa, resterà $\frac{1}{20}$ di una cosa uguale a $\frac{2}{5}$ 21 bizanti. Per questo il multiplo di $\frac{1}{20}$ di una cosa, vale a dire la cosa, equivale al multiplo di $\frac{2}{5}$ 21 bizanti, vale a dire 428 bizanti, dunque il prezzo della prima perla è 428 come abbiamo detto.

(2) C'è invero un altro metodo che si definisce 'metodo indiretto' attraverso il quale si possono risolvere molti problemi. Se attraverso la regola diretta andiamo dall'inizio alla fine del problema, attraverso il metodo indiretto facciamo il contrario. (3) Vogliamo dimostrare ciò in questo problema nel quale proponiamo che oltre a $\frac{1}{10}$ del prezzo [p.204] delle tre perle sottratto dalla prima perla, rimanga $\frac{1}{8}$ del prezzo della seconda + $\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 bizanti, da ciò prendiamo le mosse. Dal momento che il prezzo della seconda perla è il doppio del prezzo della prima, dunque $\frac{1}{8}$ del prezzo della seconda corrisponde a $\frac{1}{4}$ del prezzo della prima. Dunque dal prezzo della prima perla, che ipotizzi sia una cosa, resta $\frac{1}{4}$ di esso + $\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 bizanti dopo la sottrazione della suddetta decima. Questo $\frac{1}{10}$, come è stato detto sopra, è $\frac{7}{10}$ di una

cosa meno $\frac{1}{30}$ di un bizante. Ma dal momento che dalla cosa si sottrae $\frac{1}{4}$ di essa + $\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 bizanti, resta $\frac{3}{4}$ della cosa meno $\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 bizanti che equivale a $\frac{7}{10}$ di una cosa meno $\frac{1}{30}$ di un bizante. Se ad entrambe le quote si addiziona $\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 bizanti, resta $\frac{3}{4}$ di una cosa che equivale a $\frac{7}{10}$ della stessa + $\frac{2}{5}$ 21 bizanti. Per questo se ad entrambe le quote si sottrae $\frac{7}{10}$ di una cosa, resterà $\frac{1}{20}$ della cosa uguale a $\frac{2}{5}$ 21 bizanti, come abbiamo calcolato attraverso la regola diretta.

Altro su tre perle.

(1) Valga la seconda perla un quarto di un bizante più il doppio del prezzo della prima, anche la terza valga il doppio della seconda meno un terzo di un bizante. (2) Se vuoi trovare la soluzione di questo problema attraverso la regola diretta, supponi che la prima perla valga una cosa, per questo la seconda varrà 2 cose più un quarto di bizante, e la terza varrà quattro cose più un sesto di bizante. Queste somme, addizionate assieme, realizzeranno sette cose più un quarto più un sesto di bizante. La decima di queste somme, che è $\frac{7}{10}$ di una cosa + $\frac{1}{24}$ di un bizante, sottratta dalla cosa, cioè dal prezzo della prima perla, realizza una differenza di $\frac{3}{10}$ di una cosa + $\frac{1}{24}$ di un bizante che equivale a $\frac{1}{8}$ della seconda + $\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 bizanti. Ma $\frac{1}{8}$ della seconda equivale a $\frac{1}{4}$ della prima + $\frac{1}{32}$ di bizante. Quindi $\frac{3}{10}$ di una cosa meno $\frac{1}{24}$ di bizante equivale a $\frac{1}{4}$ di una cosa + $\frac{1}{32}\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21. Se ad entrambe le quote si addiziona $\frac{1}{24}$ di bizante, risulterà $\frac{3}{10}$ di una cosa che equivale a $\frac{1}{4}$ di una cosa + $\frac{1}{32}\frac{1}{24}\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21. Se ad entrambe si sottrae $\frac{1}{4}$ di una cosa, resta $\frac{1}{20}$ di una cosa che equivale a $\frac{1}{32}\frac{1}{24}\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21. Dunque ricostituisci la tua cosa, vale a dire moltiplica $\frac{1}{32}\frac{1}{24}\frac{1}{10}\frac{1}{3}$ 21 per 20. Questa moltiplicazione generalmente si svolge così: si moltiplica dapprima 20 per 21, risulta 420; poi 20 per $\frac{1}{3}$, risulta $\frac{2}{3}$ 6; poi 20 per $\frac{1}{10}$, risulta 2; poi 20 per $\frac{1}{24}$, risulta $\frac{5}{6}$; poi 20 per $\frac{1}{22}$, risulta $\frac{5}{8}$. Queste somme, addizionate insieme, realizzano $\frac{1}{84}$ 30 come prezzo della prima perla. Per questo il prezzo della seconda è $\frac{1}{2}$ 860; della terza $\frac{2}{3}$ 1720. Questo problema, allora, e quelli simili ad esso, si risolve attraverso il primo metodo e anche attraverso la regola indiretta.

Su tre uomini che addizionano somme diverse.

(1) Tre uomini trovarono dei bisanzi, ciascuno di essi ne prese in misura differente, così che la moltiplicazione dei bizanti del primo per un terzo della somma risulta quanto la

moltiplicazione dei bizanti del secondo per un quarto della somma e quanto la moltiplicazione dei bizanti del terzo per un quinto della stessa somma. Questi tre prodotti uguali tra loro, addizionati in uno realizzano la stessa somma di bizanti che quei tre uomini hanno trovato. (2) Si richiede quale sia quella somma e quanto ciascuno avesse preso di essa. Supponi pertanto che il primo abbia preso 3 bizanti, e il secondo 4 e il terzo 5, questo perché la moltiplicazione di un numero qualunque per la terza parte di tre risulta quanto la moltiplicazione di quello stesso numero per la quarta parte di 4 o per la quinta parte di 5. Dunque anche la moltiplicazione di un numero qualunque per 3 risulta quanto la moltiplicazione di un quarto dello stesso numero per 4 e quanto la moltiplicazione di un quinto dello stesso numero per 5. Addiziona 3 + 4 + 5, risulterà 12 come somma dei bizanti trovati. Moltiplica pertanto il 3, vale a dire i bizanti del primo per un terzo della somma, vale a dire per 4, risulterà 12 che devi mettere da parte; poi moltiplica i bizanti del secondo, vale a dire 4, per un quarto della somma, vale a dire per 3, risulterà similmente 12, che devi mettere da parte; poi moltiplica ancora i bizanti del terzo, vale a dire 5, per un quinto della somma, vale a dire per $\frac{2}{5}$ 2, risulterà similmente 12. Dunque addiziona insieme questi tre [p.205] prodotti, risulterà 36, che dovrebbe corrispondere a 12. Per questo dirai: se pongo 3 come quantità di bizanti del primo, risulta 36, cosa devo porre affinché risulti solo 12? Moltiplicherai dunque 3 per 12 e dividerai per 36, risulterà 1 bizante, e tanto ha preso il primo uomo dai bizanti trovati. Parimenti per la stessa ragione moltiplica il 4, vale a dire i bizanti del secondo, per 12 e dividi per 36, risulterà $\frac{1}{3}$ 1 bizanti, e tanto ha preso il secondo uomo di quei bizanti. Ancora in base al procedimento descritto sopra, moltiplica i 5 bizanti del terzo uomo per 12 e dividi ancora per 36, risulteranno $\frac{2}{3}$ 1 bizanti come quantità trovata dal terzo uomo.

(3) Altrimenti per i suddetti $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ poni 3 e 4 e 5 e addizionali assieme, risulterà 12 che devi dividere per il numero degli uomini, vale a dire per 3, risulterà 4 e altrettanti bizanti quelli hanno trovati. Di essi il primo ne ha presi i $\frac{2}{3}$, vale a dire 1 bizante; il secondo $\frac{4}{3}$, vale a dire $\frac{1}{3}$ 1 bizante. Il terzo ha preso $\frac{5}{3}$ di un bizante, cioè $\frac{2}{3}$ 1 bizante, come abbiamo detto precedentemente.

Sullo stesso argomento con cinque uomini.

(1) Parimenti cinque uomini si procurarono dei bizanti, e parimenti ciascuno ne attinse in quantità differente in modo tale che la moltiplicazione dei bizanti del primo per un terzo della somma risulta quanto la moltiplicazione dei bizanti del secondo per un quarto della somma e

quanto la moltiplicazione dei bizanti del terzo per un quinto della stessa somma e quanto la moltiplicazione dei bizanti del quarto uomo per un sesto della somma e anche quanto la moltiplicazione dei bizanti del quinto uomo per un settimo della stessa somma, e questi cinque prodotti, addizionati assieme, realizzano la stessa somma trovata. (2) Nonostante questo problema possa essere risolto attraverso la prima regola, cioè attraverso il metodo degli alberi, tuttavia desideriamo dimostrare in quale altro modo possa essere risolto. (3) Per i suddetti $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{7}$ poni, in successione, 3 e 4 e 5 e 6 e 7, e addizionali assieme, risulterà 25 e altrettanti quinti essi si saranno procurati, poichè i 5 prodotti uguali erano 5, di questi quinti il primo ha preso $\frac{3}{5}$ di un bizante, il secondo $\frac{4}{5}$, il terzo $\frac{5}{5}$, cioè 1 bizante, il quarto $\frac{6}{5}$, cioè $\frac{1}{5}$ 1, il quinto $\frac{7}{5}$, cioè $\frac{2}{5}$ 1.

Altro metodo con cinque uomini.

(1) E ancora, cinque uomini ricavarono dei bizanti, ciascuno di essi ne raccolse in misura differente in modo che la moltiplicazione dei bizanti del primo per un terzo della somma, cioè la moltiplicazione di tutta la somma per la terza parte dei bizanti di quel primo uomo, risulta un certo numero; e la moltiplicazione della quarta parte di tutta la somma per i bizanti del secondo uomo, o il contrario, risulta il doppio della suddetta moltiplicazione del primo uomo; e la moltiplicazione dei bizanti del terzo per la quinta parte della somma, o il contrario, risulta il triplo della moltiplicazione del secondo uomo, cioè il sestuplo della moltiplicazione del primo; e la moltiplicazione dei bizanti del quarto per la sesta parte della somma, o il contrario, realizza il quadruplo della moltiplicazione del terzo uomo e 24 volte la moltiplicazione del primo uomo. Parimenti anche la moltiplicazione dei bizanti del quinto uomo per la settima parte della somma, o la settima parte dei bizanti di quel quinto uomo per l'intera somma, risulta il quintuplo della moltiplicazione del quarto uomo, cioè 120 volte la moltiplicazione del primo uomo. E queste cinque moltiplicazioni, addizionate in una, realizzano la stessa somma trovata. Si richiede quale sia quella somma e quanto ciascuno ha raccolto da essa. (2) Poiché si suppone che la moltiplicazione dell'intera somma per la terza parte dei bizanti del primo risulta un certo numero, bisogna supporre che il primo uomo raccolga un tale numero di bizanti che sia divisibile per $\frac{1}{3}$. Si supponga dunque che egli raccolga 3 bizanti, di cui la terza parte è 1. Questo 1 moltiplicato per la somma di tutti i bizanti realizza un certo numero, vale a dire la stessa [p.206]somma. E poiché si suppone che la moltiplicazione della quarta parte dei bizanti del secondo uomo per l'intera somma risulta il doppio della moltiplicazione della terza parte dei bizanti del primo per quella stessa somma, bisogna supporre che il

secondo raccolga un tale numero di bizanti la quarta parte dei quali sia il doppio della terza parte dei bizanti del primo, e quel numero sarà 8, la cui quarta parte è 2 che è il doppio della terza parte dei bizanti del primo, vale a dire di 1. Parimenti poiché si suppone che la moltiplicazione della quinta parte dei bizanti del terzo uomo per l'intera somma risulti il triplo della moltiplicazione della quarta parte dei bizanti del secondo per la stessa somma è opportuno, dunque, che il terzo uomo raccolga tanti bizanti la quinta parte dei quali sia il triplo della quarta parte dei bizanti del secondo, dunque supponi che egli raccolga 30 bizanti, la quinta parte dei quali, vale a dire 6 bizanti, è il triplo della quarta parte dei bizanti del secondo, vale a dire di 2. E ancora, poiché si suppone che la moltiplicazione della sesta parte dei bizanti del quarto uomo per la suddetta somma risulti il quadruplo della moltiplicazione della quinta parte dei bizanti del terzo per la stessa somma, bisogna supporre che questo quarto uomo raccolga tanti bizanti la sesta parte dei quali sia il quadruplo della quinta parte dei bizanti del terzo uomo, risulterà 144 bizanti, la quinta parte dei quali sono 24 bizanti che sono il quadruplo della quinta parte dei bizanti del terzo uomo, vale a dire di 6. Di nuovo, poiché si suppone che la moltiplicazione della settima parte dei bizanti del quinto uomo per l'intera somma risulti il quintuplo della moltiplicazione della sesta parte dei bizanti del quarto uomo per la stessa somma, è necessario che si supponga che il quinto uomo raccolga 840 bizanti poiché la settima parte di 840 è 120 bizanti che sono il quintuplo di 24 bizanti, vale a dire della sesta parte dei bizanti del quarto uomo. Fatto ciò, addiziona insieme le suddette quote supposte di bizanti, vale a dire i 3 bizanti del primo uomo, e gli 8 bizanti del secondo e i 30 bizanti del terzo e i 144 bizanti del quarto e gli 840 bizanti del quinto, risulteranno 1025 bizanti che è il nuumero supposto per la somma ricavata. (3) Poi verifica a quanto ammontano le cinque suddette moltiplicazioni per questa somma. Appunto la moltiplicazione della terza parte dei bizanti del primo per questa somma, vale a dire 1 per 1025, fa una sola volta 1025, per questo riporterai 1 da parte. Parimenti la moltiplicazione della quarta parte dei bizanti del secondo, vale a dire 2, per tutta la somma, vale a dire per 1025, risulta due volte 1025, per questo riporterai 2. Parimenti la quinta parte dei bizanti del terzo uomo, vale a dire 6, moltiplicata per 1025 fa sei volte 1025, per questo riporterai parimenti 6. E ancora, la sesta parte del quarto uomo, vale a dire 24, moltiplicata per 1025, risulta 24 volte 1025, per questo riporterai 24. Infine, la settima parte dei bizanti del quinto uomo, vale a dire 120 bizanti, moltiplicata per la suddetta somma, vale a dire per 1025, realizza 120 volte 1025, per questo riporterai 120 che addizionerai con 24 e con 6 e con 2 e con 1 riportati, risulterà 153. Dunque nelle suddette cinque moltiplicazioni ci saranno 153 volte 1025. (4) Ma dal momento che queste cinque moltiplicazioni non devono risultare più di una volta soltanto quella somma, dirai: se pongo 3 nella raccolta dei bizanti, risulta 153 volte quella somma, cosa devo porre perché questa risulti una sola volta? Moltiplicherai dunque 3 per 1 e dividerai per 153, risulterà $\frac{3}{153}$ di un bizante e tanto si procura il primo uomo della somma trovata. Similmente se si farà lo stesso con i bizanti supposti per gli altri quattro uomini, vale a dire con gli 8 bizanti del secondo uomo e con i 30 bizanti del terzo uomo e con i 144 bizanti del quarto e con gli 840 bizanti del quinto uomo, troverai che il secondo uomo ha raccolto dalla somma trovata $\frac{8}{153}$ di un bizante e il terzo uomo ha raccolto $\frac{20}{153}$ e il quarto $\frac{144}{153}$ e il quinto $\frac{840}{153}$ cioè $\frac{75}{153}$ 5 bizanti. addiziona quindi queste cinque addizioni in una, risulta $\frac{1025}{153}$, cioè $\frac{107}{153}$ 6 bizanti, e tanto essi si sono procurati. [p. 207]

Su due uomini che hanno trovato dei bizanti.

(1) Due uomini hanno trovato dei bizanti, e ciascuno ne ha raccolto in misura differente. Ciò che ha raccolto il primo è stato $\frac{1}{13}\frac{1}{3}$ di ciò che ha raccolto il secondo, e il primo, mettendo a profitto la sua porzione, ha trasformato 11 bizanti in 12 bizanti e l'altro invece ha trasformato 13 bizanti in 14, e così insieme hanno ottenuto 100 bizanti. Si richiede a quanto ammonti la somma trovata e quanto ciascuno ha preso di essa. (2) Dapprima certo troverai il numero nel quale si ritrovino $\frac{1}{13}\frac{1}{3}$, risulterà 39 e supponi che il secondo abbia raccolto tanto. Di questo 39 calcola $\frac{1}{13}\frac{1}{3}$, vale a dire 16, e poni altrettanti bizanti come quantità del primo. Poiché il primo ne ha fatti 12 di ogni 11, moltiplica i 16 bizanti per 12 e dividi per 11, risulterà $\frac{5}{11}$ 17, che conserva. Poi, poiché il secondo ogni 13 li ha trasformati in 14, moltiplica 39 per 14 e dividi per 13, risulteranno 42 bizanti che devi addizionare con $\frac{5}{11}$ 17, risulteranno $\frac{5}{11}$ 59 bizanti invece dei 100 bizanti della traccia. Per questo moltiplicherai 16 per 100 e dividerai per $\frac{5}{11}$ 59, risulterà come quota del primo uomo $\frac{1\ \ 99}{3\ \ 109}$ 26 bizanti. Parimenti, in base alla stessa regola, moltiplica i 39 bizanti per 100 e dividi per $\frac{5}{11}$ 59, risulterà come quota del secondo uomo, $\frac{65}{109}$ 65 bizanti. Questi, addizionati con i 26 bizanti del primo uomo, realizzano $\frac{1\ \ 55}{3\ \ 109}$ 92 bizanti come intera somma.

Divisione di 11 in due parti.

(1) Dividi 11 in due parti, una delle quali, moltiplicata per 9, risulta quanto l'altra moltiplicata per 10. (2) Poiché la moltiplicazione di una parte qualunque di un numero per il numero dal

quale la stessa parte ha tratto origine risulta quanto la moltiplicazione dell'altra parte dello stesso numero per il numero, bisogna calcolare innanzitutto da dove questa parte derivi. (3) Ad esempio, certo la moltiplicazione di un terzo di qualunque numero per 3, trae origine da questo $\frac{1}{3}$, risulta quanto la moltiplicazione di un quarto dello stesso numero per il 4 e trae origine da questo $\frac{1}{4}$, per questo $\frac{1}{9}$ di un numero, moltiplicato per 9, risulta quanto $\frac{1}{10}$ dello stesso numero moltiplicato per 10. Per cui la proporzione che c'è fra un decimo di un numero e un nono dello stesso numero è la stessa che c'è fra una parte di 11 e l'altra. Per questo bisogna trovare il numero nel quale si trovino $\frac{1}{9}\frac{1}{10}$ e sarà 90 i cui $\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{10}$ sono 10 e 9. Dunque la moltiplicazione di 9, vale a dire della decima parte di 90, per 10 risulta quanto la moltiplicazione di 10, vale a dire $\frac{1}{9}$ di 90, per 9. Per cui addiziona 9 e 10, risulterà 19 mentre vorresti risultasse 11. Moltiplica allora 10 per 11 e dividi per 19, risulterà $\frac{15}{19}$ 5 e a tanto ammonta una parte. La differenza poi che c'è fino all'11 sarà l'altra parte, vale a dire $\frac{4}{19}$ 5, che è il numero che risulta dalla moltiplicazione di 9 per 11 diviso per 19. (4) Altrimenti poiché la moltiplicazione della prima parte per 9 è uguale alla moltiplicazione della seconda parte per 10, proporzionalmente come 10 sta a 9 così la prima parte sta alla seconda. Per cui 9 addizionato a 10, vale a dire 19, starà al totale delle parti, vale a dire a 11, come 10 alla prima parte e 9 alla seconda. Per questo bisogna moltiplicare 11 per 10 e per 9 e bisogna dividere entrambi i prodotti per 19. (5) Se invece vuoi procedere attraverso il metodo diretto, poni come prima parte una cosa, per cui la seconda parte sarà 11 meno la cosa. E moltiplica la cosa, vale a dire la prima parte, per 9, risulteranno 9 cose. Parimenti moltiplica 11 meno la cosa, vale a dire la seconda parte, per 10, risulterà 110 meno 10 cose che è uguale alle 9 cose. Per questo se all'una e all'altra parte si addizionano 10 cose, risulteranno 19 cose che equivalgono a 110. Dividi pertanto 110 per 19, risulterà come prima parte $\frac{15}{19}$ 5 che, sottratto da 11, darà come differenza per la seconda parte $\frac{4}{19}$ 5, come più sopra abbiamo calcolato.

Divisione di 11 in tre parti.

(1) Parimenti se vorrai dividere 11 in tre parti, la prima delle quali, moltiplicata per 4 risulta [p.208] quanto l'altra moltiplicata per 5 e quanto l'altra moltiplicata per 6, poiché la moltiplicazione di un quarto di un numero per 4 risulta quanto la moltiplicazione di un quinto di tale numero per 5 e quanto la moltiplicazione di un sesto dello stesso numero per 6, devi trovare il numero che sia divisibile per $\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}$, risulterà 60, di cui un quarto è 15, un quinto è 12,

un sesto è 10. Addiziona quindi 15 + 12 + 10, risulterà 37, mentre vorresti risultasse 11. Per questo moltiplicherai 15 e 12 e 10 uno ad uno per 11 e dividerai ciascuna moltiplicazione per 37 e così otterrai come prima parte $\frac{17}{37}4$, come seconda $\frac{21}{37}3$, come terza $\frac{36}{37}2$. E così possiamo dividere 11 e qualsiasi altro numero in più parti.

Divisione di 11 in due parti secondo un altro metodo.

(1) Parimenti se si proponesse di dividere 11 in due parti, una delle quali, moltiplicata per 9, risulta $\frac{1}{4}30$ più dell'altra moltiplicata per 9, poiché la parte maggiore moltiplicata per 9 risulta $\frac{1}{4}30$ più dell'altra moltiplicazione, dividi $\frac{1}{4}30$ per 9, risulta $\frac{1\ 3}{4\ 9}3$ e in tanto la parte maggiore supera la minore. Per cui poiché $\frac{1\ 3}{4\ 9}3$ moltiplicato per 9, risulta $\frac{1}{4}30$, dunque sottrai $\frac{1\ 3}{4\ 9}3$ da 11, resterà $\frac{3\ 5}{4\ 9}7$, cioè $\frac{23}{36}7$ che devi dividere in due parti uguali, risulterà $\frac{59}{72}3$ per una parte, e questa è la parte minore. La differenza poi che c'è fino a 11, vale a dire $\frac{13}{72}7$, sarà l'altra parte.

Altro sullo stesso argomento.

(1) Invero se si proponesse di dividere 11 in due parti, la seconda delle quali, moltiplicata per 10, risulta $\frac{1}{4}30$ più della moltiplicazione della prima parte per 9, sottrai da 11 il numero che quando è moltiplicato per 10, risulta $\frac{1}{4}30$. Questo numero lo si trova quando $\frac{1}{4}30$ viene diviso per 10, e quel numero risulterà $\frac{1}{40}3$. Una volta sottratto quest'ultimo da 11, resta $\frac{39}{40}7$ che devi dividere in due parti in base alla regola scritta precedentemente. Così poiché la moltiplicazione della prima parte per 9 risulta quanto l'altra moltiplicata per 10 e la prima parte risulterà $\frac{3\ 7\ 14}{4\ 10\ 19}3$, una volta trovatala, la si sottragga da 11, la qual cosa devi farla attraverso il metodo che ho esemplificato nel decimo capitolo. (2) Vale a dire prendi il 3 che sta sopra il 4 e sottrailo da tale 4 e poni il resto sopra il 4 di una linea di frazione sotto la quale siano in successione le suddette parti frazionarie, vale a dire $\frac{1\ 0\ 0}{4\ 10\ 19}$. E per completare riporta in mano 1 che devi addizionare con il 7 che sta sopra il 10, risulterà 8 dal quale fino al 10 ne mancano 2 che devi riportare sopra il 10 e per completare il 10 riporta l'1 che devi addizionare con il 14 che sta sopra il 19, risulterà 15, dal quale fino al 19 ne mancano 4 che devi porre sopra il 19 della linea di frazione e per completare il 19 riporta l'1 che devi addizionare con il 3 che sta davanti alla frazione e sottrai il 4 dall'11, resterà 7 che devi porre davanti alla frazione. E così avrai come seconda parte $\frac{1\ 2\ 4}{4\ 10\ 19}7$.

(3) Parimenti se si proponesse di dividere l'11 in tre parti, la seconda delle quali, moltiplicata per 5, risulta 10 in più della moltiplicazione della prima per 4 e la moltiplicazione della terza per 6 fa 11 in più della moltiplicazione della seconda per 5, cioè 21 in più della moltiplicazione della prima parte per 4. Pertanto poiché l'ultima parte moltiplicata per 6 risulta 21 in più che la prima parte moltiplicata per 4, dunque se da questa ultima parte si sottrae il numero che moltiplicato per 6 risulta 21, vale a dire $\frac{1}{2}$ 3 che risulta dalla divisione di 21 per 6, resta da quest'ultima parte il numero che, quando sarà moltiplicato per 6, realizzerà quanto la prima parte moltiplicata per 4. Parimenti poiché la seconda parte moltiplicata per 5 fa 10 in più della prima moltiplicata per 4, se dalla seconda parte si sottrae il numero che moltiplicato per 5 risulta 10, vale a dire 2, resterà da quella seconda parte il numero che moltiplicato per 5 risulterà quanto la prima parte moltiplicata per 4. Si sottragga il 2 e $\frac{1}{2}$ 3 da 11, resterà $\frac{1}{2}$ 5 che, in base alla suddetta regola, devi dividere [p.209] in tre parti, la seconda delle quali, moltiplicata per 5 e la terza moltiplicata per 6 risultano quanto la prima moltiplicata per 4. E la prima parte risulterà $\frac{1\ \ 8}{2\ \ 37}$ 2, la seconda $\frac{0\ \ 29}{2\ \ 37}$ 1, la terza $\frac{0\ \ 18}{2\ \ 37}$ 1. Addiziona dunque il 2 con la seconda parte, risulterà $\frac{29}{37}$ 3, similmente addiziona $\frac{1}{2}$ 3 con la terza parte, risulterà $\frac{1\ \ 36}{2\ \ 37}$ 4, e così potrai fare in casi simili.

Su due numeri da trovare in base ad una certa proporzione data.
(1) Ci sono due numeri, dei quali $\frac{1}{5}$ dell'uno è $\frac{1}{7}$ dell'altro, e la loro moltiplicazione è quanto la loro addizione. (2) Trova dapprima i due numeri dei quali $\frac{1}{5}$ dell'uno è $\frac{1}{7}$ dell'altro, e saranno 5 e 7 che devi porre come numeri ricercati e addiziona il 5 con il 7, risulterà 12. Ma la moltiplicazione di 5 per 7 fa 35, poiché vorresti fosse 12, moltiplica 12 per 5 e 12 per 7 e dividi entrambe le moltiplicazioni per 35 e otterrai come primo numero $\frac{5}{7}$ 1 e come secondo numero $\frac{2}{5}$ 2. O altrimenti dividi il suddetto 12 per 7 e per 5.

Altro.
(1) E se si proponesse che la quinta parte di uno addizionata con la settima dell'altro risulti quanto la moltiplicazione dei numeri tra loro, addiziona la quinta parte di 5, vale a dire 1, con $\frac{1}{7}$ di 7, risulterà 2 che devi moltiplicare per 5 e per 7, poi dividi entrambe le moltiplicazioni per

35. Oppure dividi quel 2 per 7 e per 5 e otterrai come primo numero $\frac{2}{7}$ e come secondo numero $\frac{2}{5}$.

Altro.

(2) E ancora, se si proponesse che la quinta parte di uno per la settima dell'altro risulti quanto l'addizione di un numero con l'altro, moltiplicherai la quinta parte di 5 per $\frac{1}{7}$ di 7, vale a dire 1 per 1, risulterà 1. Poi addizionerai 5 con 7, come sopra, risulterà 12 che moltiplicherai per 5 e per 7 e dividerai entrambe le moltiplicazioni per 1 che è il prodotto della moltiplicazione di 1 per l'1 suddetto e otterrai come primo numero 60, il cui quinto è 12; come secondo numero otterrai 84, il cui settimo è similmente 12, come è necessario. Infatti la moltiplicazione di 12 per 12 risulta quanto l'addizione di 60 con 84.

Altro metodo per trovare i due numeri.

(1) Parimenti un quinto di uno dei numeri corrisponde a un settimo dell'altro e la quinta parte dell'uno moltiplicata per la settima dell'altro risulta quanto la quinta parte dell'uno addizionata con la settima dell'altro. Moltiplicherai 1 per 1, come sopra, risulterà 1 e addizionerai insieme questi 1, risulterà 2 per il quale moltiplicherai il 5 e il 7 e dividerai entrambi i prodotti per 1 e otterrai come primo numero 10 e come secondo 14.

Altro problema su due numeri.

(1) Ancora, se si proponesse che da un numero moltiplicato per l'altro risulti un qualche multiplo della loro soma, per esempio il doppio, addiziona allora il 5 con il 7, risulterà 12 che raddoppierai, risulterà 24. Moltiplicherai allora il 24 per il 5 e il 24 per il 7 e dividerai entrambi i prodotti per il prodotto della moltiplicazione di 5 per 7, vale a dire per 35, e otterrai come primo numero $\frac{3}{7}$ 3 e come secondo numero $\frac{4}{5}$ 4. (2) E nota che in tutti i suddetti problemi e anche nei seguenti, operiamo sempre la divisione dal numero che si origina dalla moltiplicazione dei due numeri moltiplicati.

Altro problema su due numeri.

(1) Parimenti se si supponesse che l'addizione di due numeri risulti quanto un multiplo della loro moltiplicazione, per esempio il triplo, moltiplicherai il 12, che corrisponde all'addizione di 5 e 7, per quei numeri, risulteranno 60 e 84 che devi dividere per il suddetto multiplo della

moltiplicazione di 5 per 7, vale a dire per il triplo di 35, cioè per 105. Otterrai come primo numero $\frac{4}{7}$ e come secondo $\frac{4}{5}$.

[p.210]

Altro secondo un altro problema.

(1) E ancora, la moltiplicazione dei numeri per se stessi risulta un qualche multiplo, per esempio il quadruplo, dell'addizione della quinta parte di un numero con la settima parte dell'altro. Moltiplica il quadruplo di 2, che è l'addizione della quinta parte di 5 con la settima parte di 7, vale a dire 8, per 5 e per 7, risulteranno 40 e 56 che devi dividere per la moltiplicazione del 5 per il 7, vale a dire per 35 e otterrai come primo numero $\frac{1}{7}$ 1 e come secondo $\frac{3}{5}$ 1.

(2) Parimenti l'addizione della quinta parte di uno con la settima dell'altro risulta il quintuplo della moltiplicazione di un numero per l'altro. Moltiplicherai il 2 suddetto per il 5 e per il 7, risulteranno 10 e 14 che devi dividere per il quintuplo di 35, vale a dire per 175. Otterrai come primo numero $\frac{2}{35}$ e come secondo numero $\frac{2}{25}$.

Un altro problema su due numeri.

(1) E ancora, supponiamo che la moltiplicazione della quinta parte dell'uno per la settima dell'altro risulti il sestuplo dell'addizione di quelle due parti. Addiziona $\frac{1}{5}$ di 5 con $\frac{1}{7}$ di 7, risulterà 2, il cui sestuplo, vale a dire 12, devi moltiplicarlo per 5 e per 7, risulteranno 60 e 84 che devi dividere per la moltiplicazione della quinta parte di 5 per la settima parte di 7, vale a dire per 1. Otterrai come primo numero 60 e come secondo 84.

Sullo stesso argomento in base ad un'altra divisione.

(1) Parimenti l'addizione della quinta parte di un numero con la settima parte dell'altro risulta sette volte tanto la moltiplicazione di quelle parti fra loro. Moltiplicherai 2 per 5 e per 7, risulteranno 10 e 14 che devi dividere per il settuplo della moltiplicazione della quinta parte di 5 per la settima parte di 7, vale a dire per 7. E otterrai come primo numero $\frac{3}{7}$ 1 e come secondo 2. (2) Invero possiamo proporre molti altri problemi diversi dai suddetti, le soluzioni dei quali possono essere completamente trovate attraverso le regole suddette.

Altra divisione tra due numeri.

(1) Parimenti ci sono due numeri, fra i quali $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ dell'uno corrispondono a $\frac{1\ 1}{5\ 4}$ dell'altro e moltiplicati tra loro risultano quanto la loro addizione. Trova dapprima i due suddetti numeri dei quali $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ dell'uno corrisponde a $\frac{1\ 1}{5\ 4}$ dell'altro. Risulteranno 27 e 35. E addiziona il 27 con il 35, risulterà 62 per il quale devi moltiplicare il 27 e il 35 e dividere entrambi i prodotti per il prodotto della moltiplicazione di 27 per 35. Ovvero dividi 62 per 35 e per 27 e otterrai come primo numero $\frac{27}{35}$ 1 e come secondo $\frac{8}{27}$ 2.

Sullo stesso argomento.
E se fosse proposto che la moltiplicazione di uno dei suddetti numeri per l'altro sia il doppio della loro addizione, moltiplica il doppio di 62, vale a dire 124, per 27 e per 35 e dividi entrambi i prodotti per il prodotto della moltiplicazione di 27 per 35. Oppure dividi 124 per 35 e per 27 e otterrai come primo numero $\frac{19}{35}$ 3 e come secondo $\frac{16}{27}$ 4.

Sullo stesso argomento.
(1) E se l'addizione è il doppio della loro moltiplicazione, dividi la moltiplicazione di 62 per 27 e per 35 per il doppio della moltiplicazione di 27 per 35. Oppure dividi 62 per il doppio di 35 e di 27, e otterrai come primo numero $\frac{31}{35}$ e come secondo numero $\frac{4}{27}$ 1.

Sullo stesso argomento.
(1) Parimenti $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ del primo numero corrisponda a $\frac{1\ 1}{5\ 4}$ del secondo e la moltiplicazione del primo per il secondo risulti quanto l'addizione di una o più parti del primo con una o più parti del secondo, per esempio l'addizione di $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ di uno con $\frac{1\ 1}{5\ 4}$ dell'altro corrisponda alla moltiplicazione di un numero per l'altro. Calcola $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ di 27 che è $\frac{3}{4}$ 15 e addizionalo con [p.211] $\frac{1\ 1}{5\ 4}$ di 35, vale a dire con $\frac{3}{4}$ 15, risulterà $\frac{1}{2}$ 31. Moltiplicherai $\frac{1}{2}$ 31 per 27 e $\frac{1}{2}$ 31 per 35 e dividerai entrambi i prodotti per il prodotto della moltiplicazione di 27 per 35. Oppure dividerai $\frac{1}{2}$ 31 per 35 e per 27 e otterrai come primo numero $\frac{9}{10}$ e come secondo numero $\frac{1}{6}$ 1.

Sullo stesso argomento.
(1) E se la moltiplicazione dei numeri corrisponde al quadruplo dell'addizione di $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ dell'uno con $\frac{1\ 1}{5\ 4}$ dell'altro, moltiplica il quadruplo di $\frac{1}{2}$ 31, vale a dire 126, per 27 e per 35 e dividi

entrambi i prodotti per il prodotto della moltiplicazione di 27 per 35. Oppure dividi 126 per 35 e per 27 e otterrai come primo numero $\frac{3}{5}\,3$, e come secondo $\frac{2}{3}\,4$. (2) E se la moltiplicazione di $\frac{1\;1}{4\;3}$ del primo numero per $\frac{1\;1}{5\;4}$ del secondo corrisponde all'addizione del primo numero con il secondo, poiché $\frac{1\;1}{4\;3}$ di 27 e $\frac{1\;1}{5\;4}$ di 35 non risultano un numero intero, poiché risultano $\frac{3}{4}\,15$, bisogna moltiplicare 27 e 35 per 4, risulteranno 108 e 140 e calcola $\frac{1\;1}{4\;3}$ di 108, che è 63 e moltiplicalo per 63, che sono i $\frac{1\;1}{5\;4}$ di 140, risulterà 3969. Poi addiziona 108 con 140, risulterà 218 che devi moltiplicare per 108 e per 140 e devi dividere entrambi i prodotti per la scomposizione di 3969. Semplificherai ciò che potrai semplificare e otterrai come primo numero $\frac{2\;1\;5}{3\;7\;7}\,6$ e come secondo $\frac{4\;6\;6}{7\;9\;9}\,8$.

Sullo stesso argomento.

(1) Se poi la moltiplicazione di $\frac{1\;1}{4\;3}$ del primo per $\frac{1\;1}{5\;4}$ del secondo fosse il quintuplo dell'addizione dei numeri, moltiplica il quincuplo di 248, vale a dire 1240, per 108 e per 140 e dividi entrambi i prodotti per la scomposizione di 3969 e semplifica. Otterrai come primo numero $\frac{1\;1\;5}{3\;7\;7}\,6$ e come secondo numero $\frac{6\;5\;6}{7\;9\;9}\,43$.

(2) E ancora, per esempio, $\frac{1\;1}{4\;3}$ del primo numero corrisponda a $\frac{1\;1}{5\;4}$ del secondo e la moltiplicazione di $\frac{1\;1}{4\;3}$ del primo e $\frac{1\;1}{5\;4}$ del secondo risulti quanto l'addizione di $\frac{1\;1}{4\;3}$ del primo con $\frac{1\;1}{5\;4}$ del secondo. Addiziona 63 con 63, vale a dire $\frac{1\;1}{4\;3}$ di 108 con $\frac{1\;1}{5\;4}$ di 140, risulterà 126 per il quale moltiplica 108 e 140 e dividi entrambi i prodotti per 3969 e semplifica. Otterrai come primo numero $\frac{3}{7}\,3$ e come secondo $\frac{4}{9}\,4$.

Sullo stesso argomento.

(1) E se la moltiplicazione di $\frac{1\;1}{4\;3}$ dell'uno per $\frac{1\;1}{5\;4}$ dell'altro è il sestuplo dell'addizione di $\frac{1\;1}{4\;3}$ di uno con $\frac{1\;1}{5\;4}$ di un altro. Moltiplicherai il sestuplo di 126 per 108 e per 140 e dividerai entrambi i prodotti per 3969 e semplificherai ciò che potrai e otterrai come primo numero $\frac{1}{7}\,20$ e come secondo $\frac{2}{3}\,26$.

(2) E se l'addizione di $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ di uno con $\frac{1\ 1}{5\ 4}$ dell'altro è il sestuplo della moltiplicazione di $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ di uno per $\frac{1\ 1}{5\ 4}$ dell'altro, dividi i prodotti di 126 per 108 e per 140 per il settuplo di 3969 e semplifica. E otterrai come primo numero $\frac{3\ 3}{7\ 7}$ e come secondo $\frac{5\ 5}{7\ 9}$.

Sul trovare due numeri che sono tra loro in una data proporzione.

(1) Ho preso $\frac{1\ 1}{6\ 5}$ di un numero e l'ho sottratto da $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ dell'altro e ho moltiplicato la differenza per $\frac{1}{4}$ 9 e ho ottenuto 100. Dividi pertanto 100 per $\frac{1}{4}$ 9, risulterà $\frac{30}{37}$ 10. Per questo bisogna trovare i due numeri $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ dell'uno superi di $\frac{30}{37}$ 10 $\frac{1\ 1}{6\ 5}$ dell'altro. Poni come primo numero 30 e come secondo 24. Sottrai $\frac{1\ 1}{6\ 5}$ di 30, vale a dire 11, da $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ di 24, cioè da 14, la differenza è 3. Ma poiché vorresti che la differenza fosse $\frac{30}{37}$ 10, moltiplicherai $\frac{30}{37}$ 10 per 30 e per 24 e dividerai entrambe le moltiplicazioni per 3. Risulterà come primo numero $\frac{4}{37}$ 108, e come secondo $\frac{18}{37}$ 86. (2) Oppure considera come primo numero 30 e ai suoi $\frac{1\ 1}{6\ 5}$ addiziona $\frac{30}{37}$ 10, risulterà $\frac{30}{37}$ 21 che è i $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ del secondo numero. Per questo moltiplica 12 per $\frac{30}{37}$ 21 e dividi per 7. E se vuoi, sia 24 il secondo numero dai cui $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ sottrai $\frac{30}{37}$ 10, resterà $\frac{7}{37}$ 3 che è $\frac{1\ 1}{6\ 5}$ del primo numero.

(3) E se si proponesse che $\frac{2}{3}$ del primo corrispondano a $\frac{3}{5}$ del secondo e che da essi provengano i risultati precedenti, trova i due numeri i $\frac{2}{3}$ di uno dei quali corrispondano ai $\frac{3}{5}$ dell'altro, risulteranno 9 e 10 che [p.212] devi moltiplicare per 30 affinchè, com'è necessario, si trasformino in numeri interi, risulterà come primo numero 270 e come secondo 300. Sottrai dunque $\frac{1\ 1}{6\ 5}$ di 270, vale a dire 99, da $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ di 300, vale a dire da 175, resta 76. E poiché vorresti che invece la differenza sia $\frac{30}{37}$ 10, moltiplicherai $\frac{30}{37}$ 10 per 270 e per 300 e dividerai ciascun prodotto per 76, risulterà come primo numero $\frac{1\ \ 15}{19\ \ 37}$ 38, e come secondo $\frac{18\ \ 24}{19\ \ 37}$ 42. E se vuoi, affinché, moltiplicata per se stessa, la differenza che c'è tra $\frac{1\ 1}{6\ 5}$ del primo numero e $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ del secondo risulti uno di questi due numeri, qualunque tu voglia, per esempio il primo, poni come questo primo numero un numero che abbia una radice tale per cui $\frac{1\ 1}{6\ 5}$ siano interi e risulterà 900, e a $\frac{1\ 1}{6\ 5}$ di questo 900 addiziona la sua radice, vale a dire 30, risulterà 360. Per questo trova il numero i cui $\frac{1\ 1}{4\ 3}$ sia 360. Vale a dire dividi per 7 il prodotto di 12 per 360,

risulterà come secondo numero $\frac{1}{7}$ 617. E ancora, se vuoi, affinché la moltiplicazione della suddetta differenza per se stessa risulti il secondo numero, supponi che questo secondo numero sia 144, dai cui $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, vale a dire da 84, sottrai la sua radice, che è 12, resterà 72. Trova dunque il numero i cui $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ sia 72, risulterà $\frac{4}{11}$ 196 come secondo numero. (3) Parimenti ho moltiplicato $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ del primo numero per $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ del secondo ed è risultato 100. Trova i due numeri che moltiplicati tra loro risultano 100: sono 5 e 20. Per questo come primo numero avrai i numero i cui $\frac{1}{6}\frac{1}{5}$ è 5, e come secondo numero avrai quel numero i cui $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ risulti 20. Per questo moltiplica 30 per 5 e dividi per 11; e 12 per 20 e dividi per 7. E otterrai come primo numero $\frac{7}{11}$ 13 e come secondo $\frac{2}{7}$ 34. (4) Altrimenti poiché da 10, moltiplicato per se stesso, risulta 100, trova come primo numero quello i cui $\frac{1}{5}\frac{1}{6}$ sia 10, risulterà $\frac{3}{11}$ 27. E come secondo trova quel numero i cui $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ sia 10, risulterà $\frac{1}{7}$ 17. E così possiamo risolvere innumerevoli problemi attraverso la regola degli alberi.

Parte quarta del docidesimo capitolo sul rinvenimento dei borselli.

(1) Due uomini che già posseggono dei denari, hanno trovato una borsa di denari. Una volta trovatala, il primo disse al secondo: se aggiungessi questi denari della borsa con i denari che già posseggo, avrei tre volte tanto la tua quantità di denari. A lui, di contro, l'altro rispose: e se io aggiungessi i denari della borsa ai miei denari, avrei quattro volte tanto la tua quantità di denari. Si chiede quanti denari abbia ciascuno e quanti essi ne hanno trovati nel borsello. (2) Bisogna notare, pertanto, che poiché il primo, ottenuto il borsello, ha tre volte tanto il secondo, se egli, con la borsa ha 3 denari, e il secondo ne ha 1, allora essi più la borsa ne hanno 4. Di questi 4 il primo, con la borsa, ne ha 3, dunque ha i $\frac{3}{4}$ della somma dei loro denari con la borsa. Per questo stesso ragionamento anche il secondo, poiché ha, con la borsa, quattro volte tanto la quantità del primo, è evidente che egli possegga i $\frac{4}{5}$ della somma totale. (3) Per questo devi trovare il numero nel quale siano contenuti i $\frac{4}{5}\frac{3}{4}$ e sarà 20. Supponi allora che la somma dei loro denari sia 20 dei quali il primo, con il borsello, ne abbia i $\frac{3}{4}$, vale a dire 15. E il secondo, con il borsello, ne abbia i $\frac{4}{5}$, vale a dire 16. Dunque i due insieme con la borsa contata due volte hanno 31 denari. La differenza poi che c'è fra 20 e 31, vale a dire 11, è la quantità dei denari del borsello. Per questo, poiché la borsa è contata due volte, e poiché invece deve essere contata solo una volta, così la borsa è stata contata una volta di più di

quanto dovrebbe. Ma i denari della differenza che c'è fra 20 e 30, vale a dire 11, sono una volta sola ciò che è stato trovato nella borsa. Per questo sottrai 11 da 15, resta 4, e tanti denari aveva il primo. Poi sottrai 11 da 16, resta 5 e tanti denari ha il secondo. Dunque il primo ha 4 denati e il secondo 5, e questi addizionati con gli 11 del borsello ne totalizzano 20, come abbiamo supposto come loro somma.
(4) Altrimenti poiché il primo, con la borsa, ha i $\frac{3}{4}$ dell'intera somma dei loro denari più la borsa [p.213], dunque il secondo ha $\frac{1}{4}$ di tutta la somma. E il primo ha $\frac{1}{5}$ di tutta la somma poiché il secondo, con la borsa, ha i $\frac{4}{5}$ della somma. Per questo calcola $\frac{1}{5}$ di 20, che è 4, e tanto ha il primo. Parimenti calcola $\frac{1}{4}$ di 20, che è 5, e tanto ha il secondo. Dunque insieme ne hanno 9 la cui differenza fino a 20 è 11 che è la quantità dei denari del borsello, come abbiamo detto precedentemente.
(5) Parimenti, in altro modo. Supponi che il primo abbia una cosa, per questo, con la borsa, egli ha la cosa più la borsa che è il triplo dei denari del secondo, dunque il secondo ha un terzo della cosa più la borsa. Per questo se il secondo avesse la borsa avrebbe la borsa + un terzo della borsa + un terzo della cosa che equivarrebbe a 4 cose, vale a dire il quadruplo dei denari del primo dal momento che il secondo, con la borsa, ha quattro volte tanto la quantità di denari del primo. (6) Sottrai pertanto da entrambe le parti un terzo della cosa, resteranno la borsa + un terzo della borsa che equivalgono a 4 cose meno un terzo di una cosa. Per questo il triplo di una borsa + un terzo, vale a dire 4 borse, equivalgono al triplo di 4 cose meno un terzo, vale a dire 11 cose, e poiché 4 volte 11 equivalgono a 11 volte 4, la proporzione dei denari della borsa ai denari del primo uomo, è come 11 a 4. Per cui se nella borsa ci sono 11 denari, il primo uomo ne ha 4, un terzo poi del totale, vale a dire 5, è necessario che sia la quantità del secondo, dal momento che il primo, con la borsa, ha il triplo del secondo.

Su un borsello trovato da tre uomini.
Lo stesso vale per 3 uomini che hanno già dei denari e hanno trovato una borsa di denari, il primo dei quali ha detto agli altri: se darete a me la borsa di denari, con i denari che già ho avrei due volte tanto la quantità dei vostri denari. Il secondo propone che, ottenuti i denari della borsa, egli avrebbe tre volte tanto gli altri. Il terzo afferma che se la borsa l'avesse lui, avrebbe quattro volte tanto gli altri due. Si richiede quale sia la quantità di ciascuno e quanti denari siano stati trovati nella borsa. (2) Poiché il primo postula che, ottenuta la borsa, egli avrebbe due volte tanto gli altri due, dunque se il primo avesse 2 con la borsa, gli altri avrebbe

1, e tutti insieme ne avrebbero 3. Allora il primo, ottenuta la borsa, avrebbe i $\frac{2}{3}$ dell'intera somma dei denari di tutti e tre gli uomini più la borsa. Per la stessa ragione il secondo uomo avrebbe i $\frac{3}{4}$ di tale somma e il terzo ne avrebbe i $\frac{4}{5}$. (3) Per questo bisogna vedere in quale numero siano contenuti $\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}$, ed è il 60. Calcola dunque i $\frac{2}{3}$ di 60, che è 40, e i $\frac{3}{4}$ che è 45, e i $\frac{4}{5}$ che è 48 e addizionali insieme, risulterà 133. Questo numero è più grande del denominatore, vale a dire di 60, e questo avviene perché i denari della borsa sono contati tre volte nella suddetta somma, vale a dire con ciascuno di loro. E poiché invece bisogna contarli soltanto una volta, è chiaro che sono stati contati due volte di più di quanto si dovrebbe, dunque la differenza che c'è fra 60 e 133, che è 73, è il doppio dei denari della borsa. Per questo bisogna dividere 73 per 2 o moltiplicare 60 per 2. Ma è meglio moltiplicare 60 per 2 anziché dividere 73 per 2 poiché 73 non può essere diviso esattamente per 2. La moltiplicazione di 2 per 60 ammonta a 120 che è la somma dei denari di tutti + la borsa. E 73 deve essere considerata la quantità dei denari della borsa. E poiché il primo ha i $\frac{2}{3}$ di tutta la somma con la borsa, vale a dire di 120, non c'è dubbio che egli abbia 80 denari. Da questi, sottratti i denari della borsa, vale a dire 73, restano 7 e tanti sono i denari del primo. Parimenti calcola i $\frac{3}{4}$ di 120, vale a dire 90, dai quali sottrai 73, resta 17 e tanti ne ha l'altro. Di nuovo prendi i $\frac{4}{5}$ di 120, che sono 96 e sottrai 73, restano 23 e tanti ne ha il terzo.

(4) Altrimenti, poiché il primo con la borsa ha i $\frac{2}{3}$ di tutta la somma, è necessario che agli altri due resti $\frac{1}{3}$ di tale somma. Parimenti poiché il secondo con la borsa detiene i $\frac{3}{4}$ di tutta la somma, non si dubiti che agli altri resti $\frac{1}{4}$ di tale somma. E ancora, poiché il terzo uomo ha [p.214] i $\frac{4}{5}$, allora gli altri hanno $\frac{1}{5}$. (5) Per questo bisogna trovare il numero nel quale siano contenuti $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, cioè 60. Supponi dunque che la somma dei denari dei tre uomini + la borsa sia 60. $\frac{1}{3}$ di questo 60, vale a dire 20, lo posseggono insieme il secondo e il terzo; e $\frac{1}{4}$, vale a dire 15, lo posseggono insieme il terzo e il primo; e $\frac{1}{4}$ di questa somma, vale a dire 12, lo posseggono insieme il primo e il secondo: e così, ciascuno contato due volte, hanno tutti insieme 47. Per questo la somma dei loro denari e della borsa sia il doppio di 60 e la loro somma sia 47. E poiché il secondo e il terzo uomo posseggono $\frac{1}{3}$ di questo 120, vale a dire 40, e tutti e tre insieme ne hanno 47, il primo uomo possiede la differenza che c'è fra 40 e 47, vale a dire 7 denari. Similmente se si sottrae $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ di 120 da 47, restano 17 denari come quota del

secondo e 23 denari per il terzo, come più sopra abbiamo calcolato. Infatti 7 + 17 + 23, una volta addizionati, risultano 47, come abbiamo trovato come loro somma.

Su una borsa, quando in essa si trova una determinata quantità.

(1) Infatti se si dicesse che in una borsa trovata ci sia una certa quantità di denari, per esempio 23, poiché i denari della borsa che sono stati trovati sono 73 e vuoi che siano 73, scrivi il 23 sotto il 73, vale a dire borsa sotto borsa, e dietro il 73 poni i denari dei tre uomini come si vede nel margine. Poi moltiplicherai il 23, vale a dire la borsa, per il 7 e dividi per 73 e otterrai i denari del primo; parimenti moltiplica il 17 per il 23 e dividi per 73 e otterrai i denari del secondo; e ancora moltiplica il 23 per il 23 e dividi per 73 e otterrai i denari del terzo uomo.

Su una borsa trovata da quattro uomini.

(1) Parimenti se si proponesse che gli uomini siano 4 e che il primo, ottenuta la borsa supponga di avere tre volte tanto gli altri, il secondo quattro volte tanto, il terzo cinque volte tanto, e il quarto, sempre ottenuta la borsa, affermi di avere sei volte tanto gli altri, troverai la soluzione attraverso la regola precedente. (2) Poiché il primo con la borsa ha i $\frac{3}{4}$ di tutta la somma e agli altri resta $\frac{1}{4}$; e il secondo ha i $\frac{4}{5}$ e agli altri resta $\frac{1}{5}$; e il terzo ha i $\frac{5}{6}$ e agli altri resta $\frac{1}{6}$; e il quarto ha, con tale borsa, i $\frac{6}{7}$ e agli altri resta $\frac{1}{7}$, quindi, in base alla postulazione della prima regola, bisogna vedere in quale numero siano contenuti $\frac{6}{7}\frac{5}{6}\frac{4}{5}\frac{3}{4}$, vale a dire in 420 che devi porre come somma dei loro denari + la borsa. Di questa somma calcola i $\frac{3}{4}$, vale a dire 315, e i $\frac{4}{5}$ che sono 336, e i $\frac{5}{6}$, che sono 350, e i $\frac{6}{7}$ che sono 360, poi addizionali assieme, risulterà 1361 da cui devi sottrarre 420, resterà 941. E poiché gli uomini sono 4 e sempre con ciascuno di essi è contata la borsa, dunque la borsa è contata quattro volte nel suddetto 1361, mentre non bisogna contarla che una volta sola, dunque è stata contata tre volte in più del dovuto. Per cui moltiplica 420 per 3, risulterà 1260 che è la somma dei denari dei 4 uomini + la borsa e 941 saranno i denari della borsa. Calcola dunque i $\frac{3}{4}$ di 1260, risulterà 945 e tanto possiede il primo uomo con la borsa, poi sottrai di lì 941, resta 4 e tanto possiede il primo uomo. Parimenti calcola i $\frac{4}{5}$ di 1260, che sono 1008, e sottrai di lì 941, resta 67 e tanto possiede l'altro. E ancora calcola i $\frac{5}{6}$ di 1260, che è 1050, sottrai di lì 941, resta 109 e tanto possiede il terzo. E infine calcola i $\frac{6}{7}$ di 1260 che è 1080 e sottrai di lì 941, resta 139 e tanto

possiede il quarto. (3) Otterrai lo stesso risultato se opererai secondo l'altra regola, vale a dire se calcolerai in successione $\frac{1}{7}\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}$ di 420 che restano ai tre uomini, risulterà 319 che è la somma dei denari dei 4 uomini che devi sottrarre da 1260 trovato più sopra, restano 941 denari, che sono quelli della borsa. E calcola la quarta parte di 1260 che è 315 e sottraila da 319, restano 4 denari e tanto possiede il primo. Parimenti calcola $\frac{1}{5}$ di 1260, che è 252 e sottrailo da 319, resta 67, e tanto ottiene il secondo. [p.215] Parimenti $\frac{1}{6}$ di 1260, che è 210, sottrailo da 319, resta 109 e tanto ha il terzo. E ancora prendi $\frac{1}{7}$ di 1260 e sottrailo da 319, resta 139 e tanto possiede il quarto come sopra hai calcolato per mezzo della prima regola.

Sulla borsa trovata da cinque uomini.

(1) Parimenti si svolge se si proponesse che gli uomini siano 5 e il primo supponga che egli, ottenuta la borsa, avrebbe due volte volte e mezza gli altri; e un altro proponga che se egli ottenesse la borsa avrebbe tre volte e un terzo gli altri; e anche il terzo che egli avrebbe quattro volte tanto e un quarto; e il quarto che egli avrebbe cinque volte tanto e un quinto; e il quinto poi afferma che con quella borsa egli avrebbe sei volte tanto e un sesto. (2) In base all'insegnamento descritto precedentemente, poiché il primo con la borsa ha due volte e mezzo tanto gli altri, dunque se egli con la borsa avesse $\frac{1}{2}$ 2, tutti gli altri avrebbero 1, e allora se egli avesse 5, gli altri avrebbero 2 e insieme ne avrebbero 7. Dei quali 7, poiché il primo, con la borsa, ne possiede 5, si dimostra che egli ha i $\frac{5}{7}$ di tutta la somma dei loro denari + la borsa, e per questo non c'è dubbia che agli altri quattro uomini restino i $\frac{2}{7}$ di tale somma. Pertanto, in base allo stesso ragionamento, se guarderai al secondo uomo, troverai che egli con la borsa ha i $\frac{10}{13}$ dell'intera somma e agli altri restano i $\frac{3}{13}$. Allo stesso modo se guarderai al terzo, saprai che egli con la borsa ha i $\frac{17}{21}$ dell'intera somma e agli altri restano i $\frac{4}{21}$ di tale somma. E se indagherai sul quarto non avrai dubbi che egli con la borsa abbia i $\frac{26}{31}$ e agli altri restano $\frac{5}{31}$. Infine se nello stesso modo ti procurerai di indagare sul quinto uomo, troverai che egli con la borsa ha i $\frac{37}{43}$ di tutta la somma e agli altri quattro uomini restano i $\frac{6}{43}$ di tale somma. (3) Per cui devi vedere in quale numero sono contenuti $\frac{37}{43}\frac{26}{31}\frac{17}{21}\frac{10}{13}\frac{5}{7}$. Se vorrai trovare questo numero in base al nostro insegnamento, cioè a quello delle nostre cifre, moltiplica il 7 che sta sotto il 5 per il 13, risulterà 91 che dovresti moltiplicare per 21, ma tralascia il 7 che sta nella scomposizione del 21 per via di quel 7 che or ora hai moltiplicato per 13.

Moltiplicherai invece il 91 per il 3 che resta nella scomposizione del 21, poi moltiplica per 31 e per 43, risulterà 363909. Di questa cifra devi calcolare i $\frac{5}{7}$ e i $\frac{10}{13}$ e i $\frac{17}{21}$ e i $\frac{26}{31}$ e i $\frac{27}{43}$. (4) Se vorrai calcolarli magistralmente secondo quell'arte, scrivi le suddette frazioni in successione così:

313131	305214	294593	279930	259935
$\frac{37}{43}$	$\frac{26}{31}$	$\frac{17}{21}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{5}{7}$

Poi moltiplica il 5 che sta sopra il 7 per il 13, risulterà 65 che devi moltiplicare soltanto per il 3 che sta nella scomposizione del 21 perché non serve ripetere la moltiplicazione per il 7 che sta nella scomposizione del 21 per via del 7 che sta sotto il 5 e dal quale hai iniziato or ora a moltiplicare. E così 65 moltiplicato per 3 risulta 195 che moltiplicato per 31 e per 43 risulta 259935 che è i $\frac{5}{7}$ del suddetto numero, e bisogna scriverlo sopra $\frac{5}{7}$ come si vede scritto più sopra. Parimenti moltiplica il 10 che sta sopra il 13 per 21 poi per 31 e per 43, risulterà 279930 che si lascia così poiché non lo si moltiplica per il 7 che sta sotto il 5 poiché questo 7 sta anche nella scomposizione di 21, si scrive 279930 sopra $\frac{10}{13}$. E ancora moltiplica il 17 che sta sopra il 21 per 31 e per 43 e per 13 e si tralasci di moltiplicarlo per il 7 che sta sotto il 5, risulterà 294593 che devi scrivere sopra $\frac{17}{21}$. Parimenti moltiplica il 26 che sta sopra il 31, per 43 e per 21 e per 13, risulterà 305214 che devi scrivere sopra $\frac{26}{31}$. E infine moltiplica il 37 che sta sopra il 43 per 31 e per 21 e per 13, risulterà 313131 che devi scrivere sopra $\frac{37}{43}$. Poi addiziona 259935 + 279930 + 294593 + 305214 + 313131, risulterà 1452803 da cui devi sottrarre 363909, resta1088894 che è la quantità dei denari della borsa. E poiché gli uomini sono 5, la borsa è stata contata quattro volte più del necessario. Per questo bisogna moltiplicare 363969 per 4, risulterà 1455636, [p.216] che è la somma della borsa e dei denari dei cinque uomini. E poiché il primo ha i $\frac{5}{7}$ di tutta la somma, calcola i $\frac{5}{7}$ di 1455636, che è 1039740 e tanto ha il primo + la borsa. Ma poiché più sopra è stato calcolato che nella borsa c'è più di quello che hanno insieme la borsa e il primo uomo, o la postulazione di questo problema è insolubile oppure il primo uomo ha un debito, vale a dire ciò che manca dalla somma dei suoi denari + la borsa fino alla somma dei denari della borsa, vale a dire la differenza tra 1039740 e 1088894, che è 49154. Parimenti calcola i $\frac{10}{13}$ di 1455636, che è 1119720 e a tanto ammonta la somma del secondo uomo + la borsa, da ciò, sottratti i denari della borsa, vale a dire 1088894, resta 30826 e tanto possiede il secondo. Parimenti calcola i $\frac{17}{21}$ di 1455636 che è 1178372, da ciò sottrai i denari della borsa, resta 89478 e tanto ha il terzo. E ancora, calcola i $\frac{26}{31}$ di 1455636, che è 1220856 da cui devi sottrarre i denari della borsa, vale a dire 1088894, resta 131962, e tanto ha il quarto. E infine calcola i $\frac{27}{48}$ di 1455636 che è 12552524, da cui devi sottrarre 1088894, resta 163630 e tanto ha il quinto uomo.

Altro metodo per il ritrovamento della borsa tra tre uomini.

(1) Tre uomini che hanno dei denari, hanno trovato una borsa di denari. Il primo di essi ha detto al secondo: se avessi i denari della borsa ti supererei del doppio; il secondo ha detto al terzo che se avesse la borsa lo supererebbe del triplo; il terzo postula che se avesse la borsa egli avrebbe quattro volte tanto il primo. Si richiede quanto essi abbiano trovato nella borsa e quanto ciascuno di essi possegga. (2) Invece del doppio considera la metà, cioè che i denari del secondo sono $\frac{1}{2}$ dei denari del primo + la borsa, dal momento che il primo con la borsa ha il doppio del secondo; e invece del triplo considera $\frac{1}{3}$, e invece del quadruplo $\frac{1}{4}$. E scrivili in successione così: $\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$. Poi moltiplica 2 per 3, risulterà 6 che devi moltiplicare per 4, risulterà 24 da cui devi sottrarre il prodotto della moltiplicazione dell'1 che è sopra il 2 per l'1 che è sopra il 3 per l'1 che è sopra il 4, la quale moltiplicazione ammonta soltanto ad 1: resta 23 e tanti sono i denari trovati nella borsa. Dopo ciò passa da $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$ poiché il secondo ha $\frac{1}{3}$ della somma dei suoi denari + quelli del primo + quelli della borsa. Similmente per la stessa ragione passa da $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$ e da $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{5}$ e ponili da parte così: $\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$. Poi moltiplica 3 per 4 e per 5, risulterà 60 a cui devi addizionare 1 che risulta dalla moltiplicazione dell'1 che sta sopra il 3 per l'1 che sta sopra il 4 per l'1 che sta sopra il 5, risulterà 61 che è la somma dei denari dei tre uomini + la borsa. Dopo di ciò sottrai l'1 che è sopra il 3 dallo stesso 3, resta 2 che devi moltiplicare per 4, risulterà 8 a cui devi addizionare il prodotto della moltiplicazione dell'1 che sta sopra il 3 per l'1 che sta sopra il 4, risulterà 9 che devi moltiplicare per l'1 che sta sopra il 5, risulterà 9, e tanti sono i denari del primo. Parimenti sottrai l'1 che sta sopra il 4, dallo stesso 4, resta 3 che devi moltiplicare per 5 e addizionarci il prodotto della moltiplicazione dell'1 che sta sopra il 4 per l'1 che sta sopra il 5, risulterà 16 che devi moltiplicare per l'1 che sta sopra il 3, risulterà 16 e tanti sono i denari dell'altro. Parimenti sottrai l'1 che sta sopra il 5 dal 5, resta 4 che devi moltiplicare per 3, risulta 12, poi moltiplica l'1 che sta sopra il 5 per l'1 che sta sopra il 3 e addizionalo al 12, risulterà 13 che devi moltiplicare per l'1 che sta sopra il 4, risulterà similmente 13 e tanti denari ha il terzo.

(3) Invero puoi calcolare più velocemente i denari di ciascuno. Poni $\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ in successione, come sopra e del suddetto 24 trattienine un quarto, vale a dire 6. A questo 6 addiziona il suo terzo,

vale a dire 2, risulterà 8. A questo 8 addiziona la metà del 2 che or ora hai addizionato con il 6, risulterà 9 e tanti sono i denari del primo. A questo 9 addiziona i denari della borsa, vale a dire 23, risulterà 32, la cui metà, cioè 16, sono i denari del secondo. Addizionata la borsa ai 16 denari, risulta 39 la cui terza parte sono i denari del terzo.
[p.217]

Sulla borsa trovata tra gli uomini in base a questo metodo.
(1) E ancora vediamo se si proponesse che uno di loro, ottenuta la borsa, avesse due volte e mezzo il secondo; e il secondo tre volte tanto + un terzo del terzo; e il terzo avesse quattro volte tanto + un quarto del primo. (2) Poiché il primo, ottenuta la borsa, avrebbe due volte e mezzo il secondo, allora se il primo avesse $\frac{1}{2}$ 2, il secondo avrebbe 1, e se il primo avesse 5, il secondo avrebbe 2: dunque il secondo ha $\frac{2}{5}$ del primo + la borsa e ha $\frac{2}{7}$ della somma dei suoi denari + quelli del primo + quelli della borsa. Scrivi quindi $\frac{2}{5}$ da una parte e $\frac{2}{7}$ da un'altra. (3) Parimenti, poiché il secondo, ottenuta la borsa ha tre volte + un terzo del terzo, dunque se il secondo ha 10, il terzo ha 3, e allora il terzo ha i $\frac{3}{10}$ del secondo + la borsa e ha $\frac{3}{13}$ dei suoi denari + quelli del secondo + quelli della borsa. Scrivi $\frac{3}{10}$ con i $\frac{2}{5}$ trovati più sopra e scrivi $\frac{3}{13}$ con $\frac{2}{7}$. (4) Parimenti poiché il terzo, ottenuta la borsa, ha quattro volte + un quarto il primo, dunque il primo ha $\frac{4}{17}$ del terzo + la borsa e ha $\frac{4}{21}$ dei suoi denari + quelli del terzo + quelli della borsa. Scrivi $\frac{4}{17}$ con $\frac{3}{10}\frac{2}{5}$ e scrivi $\frac{4}{21}$ con $\frac{3}{13}\frac{2}{7}$ come si mostra in margine in modo da fare i calcoli come sopra.
(5) Tre uomini hanno dei denari, e hanno trovato una borsa di denari. Il primo di essi, con la borsa, eccede il secondo del doppio; il secondo supera il terzo del triplo; il terzo supera il primo del quadruplo. Si chiede quanto ciascuno abbia e quanto abbiano trovato nella borsa. (6) Invece del doppio scrivi $\frac{1}{2}$, vale a dire la parte che il secondo ha dei denari del primo + la borsa. E invece del triplo scrivi $\frac{1}{3}$, che è la parte che il terzo uomo ha dei denari del secondo + la borsa. Similmente invece del quadruplo scrivi $\frac{1}{4}$ dietro $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$, così: $\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$. Infatti $\frac{1}{4}$ è la parte che il primo uomo ha dei denari del terzo uomo + la borsa. (7) Poi moltiplica 2 per 3 e per 4, risulterà 24 da cui devi sottrarre 1 che si proviene dalla moltiplicazione dell'1 che sta sopra il 2 per l'1 che sta sopra il 3 per l'1 che sta sopra il 4, resta 23 come denari della borsa. (8) Poi calcola $\frac{1}{4}$ di 24, che è 6, con il quale devi addizionare il suo terzo, vale a dire 2, risulterà 8 a

cui devi addizionare la metà di quel 2, vale a dire 1, risulterà 9 e tanti denari possiede il primo. Se addizioni questi con i denari della borsa, vale a dire con 23, risulterà 32, la cui metà, vale a dire 16 denari, li possiede il secondo. Addizionata la borsa a questi 16, risulterà 39, la cui terza parte, vale a dire 13 denari, è la quota del terzo.

(9) Altrimenti, scritti $\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$, moltiplica l'1 che sta sopra il 4 per il 3 che sta sotto la linea di frazione, poi per il 2, risulterà 6: e questo significa calcolare la quarta parte di 24. Parimenti moltiplica l'1 che sta sopra il 4 per l'1 che sta sopra il 3 poi per il 2 che sta sotto la linea di frazione, risulterà 2 che è la quota di $\frac{1}{3}$ di 6 - che è $\frac{1}{4}$ di 24 - che abbiamo calcolato più sopra. E ancora, moltiplica l'1 che sta sopra il 4 per l'1 che sta sopra il 3, poi per l'1 che sta sopra il 2, risulterà 1 e ciò è calcolare $\frac{1}{2}$ del 2 che è $\frac{1}{3}$ di 6. Addiziona dunque 6 + 2 + 1, risulterà 9, vale a dire i denari del primo uomo.

Bibliografia

AISSANI 1994: AÏSSANI D. *et al.*, *Les mathématiques à Bougie médiéval et Fibonacci*, in *Il tempo, le opere, l'eredità scientifica*, Atti del Congresso internazionale di Pisa, Pisa, 1994.

ALLARD 1994: ALLARD A. *Les sources arithmétiques et le calcul indien dans le Liber Abaci*, in *Il tempo, le opere, l'eredità scientifica*, Atti del Congresso internazionale di Pisa, Pisa, 1994.

AMBROSETTI 2008: AMBROSETTI N., *L'eredità arabo-islamica nelle scienze e nelle arti del calcolo dell'europa medievale*, Milano, 2008.

ANTONI 1994: ANTONI T., *Leonardo Pisano detto il Fibonacci e lo sviluppo della contabilità mercantile del '200* in *Il tempo, le opere, l'eredità scientifica* a cura di M. Morelli e M. Tangheroni, Pisa 1994.

ARRIGI 1994: ARRIGI G. *Il tempo, le opere, l'eredità scientifica* a cura di M. Morelli e M. Tangheroni, Pisa 1994.

BERSCHIN 1992: BERSCHIN W., *Traduzioni in latino nel secolo XIII in Aspetti della letteratura latina nel secolo XIII.* Atti del primo Convegno internazionale di studi dell'associazione per il Medioevo e l'Umanesimo latini (AMUL) Perugia 3-5 ottobre 1983 a cura di Claudio Leonardi e Giovanni Orlandi, Spoleto 1992.

BOCCHI 2009: BOCCHI A., *Geometria in Volgare* in *Lingua e Stile* 2/2009.

BOYER 1976, BOYER B. C., Storia della matematica, Milano 1976.

BONAINI 1857: BONAINI F., *Memoria unica sincrona di Leonardo Fibonacci, nuovamente scoperta* in «Giornale storico degli Archivi toscani» I, 1857, p. 239s.

BONCOMPAGNNI 1857: BONCOMPAGNI B., *Scritti di Leonardo Pisano*, Tipografia Scienze Matematiche e Fisiche, Roma 1857.

BRAMBILLA 1975: F. BRAMBILLA AGENO, *L'edizione critica dei testi volgari*, Padova 1975.

BRAMANTI 2008: BRAMANTI M., *L'abaco di Gerberto e l'apprendimento della scrittura posizionale dei numeri* in «Emmeciquadro» 34, 2008.

BURNETT 2006: BURNETT C., *The semantics of indian numerals in arabic, greek and latin* in «*Journal of Indian Philosophy*» 34 2006.

CAIANIELLO 2012: BURATTINI E., CAIANIELLO E., CAROTENUTO C., GERMANO G., *Per un'edizione critica del Liber Abaci di Leonardo Pisano detto il Fibonacci*, in *Forme e Modi dei testi tecnici antichi* a cura di Matino G. e Grisolia R, Napoli 2012. pp. 59-85.

CAROTENUTO 2012: BURATTINI E., CAIANIELLO E., CAROTENUTO C., GERMANO G., *Per un'edizione critica del Liber Abaci di Leonardo Pisano detto il Fibonacci*, in *Forme e Modi dei testi tecnici antichi* a cura di Matino G. e Grisolia R, Napoli 2012, pp. 88-103.

CURTIUS 1992: CURTIUS E. R., *Letteratura europea e Medio Evo latino*, ed. it. a cura di R. Antonelli, Firenze 1992.
DEVLIN 2012: DEVLIN K., I numeri magici di Fibonacci, Bergamo 2012.
DJEBBAR 2005: DJEBBAR A., *L'algébre arabe*, Parigi 2005.
FANFANI 1994: FANFANI T. "Brevi note in margine ad un convegno" in *Il tempo, le opere, l'eredità scientifica* a cura di M. Morelli e M. Tangheroni, Pisa 1994.
FRANCI 2000: R. FRANCI, *L'insegnamento dell'aritmetica nel Medioevo* in *Scienze matematiche e insegnamento in epoca medioevale*, Atti del convegno internazionale di studio, Chieti 2-4 maggio 1996 a cura di Paolo Freguglia, Luigi Pellegrini e Roberto Paciocco, Napoli, 2000.
FRANCI RIGATELLI 1982: FRANCI R. - RIGATELLI L.T., *Introduzione all'aritmetica mercantile del Medioevo e del Rinascimento* 1982.
FUMAGALLI 1987: FUMAGALLI BEONIO BROCCHIERI M., *L'intellettuale* in "L'uomo medievale", a cura di J. Le Goff, Milano, 1987, p. 203s.
GERMANO 2012: Burattini E., Caianiello E., Carotenuto C., Germano G., *Per un'edizione critica del Liber Abaci di Leonardo Pisano detto il Fibonacci*, in *Forme e Modi dei testi tecnici antichi* a cura di Matino G. e Grisolia R, Napoli 2012, pp. 55-58, 85-88, 117-138.
GRAF 1984: GRAF A., *La leggenda di un filosofo. Michele Scotto*, in Id., *Miti, leggende e superstizioni del Medio Evo*, Torino 1892-1893 (rist. Milano 1984).
GRIMM 1973: GRIMM R. E., *The Autobiography of Leonardo Pisano* in «The Fibonacci Quaterley» II 1973.
HASKINS : HASKINS C. H., *Michael Scot and Frederick II.*
HOCK 1846: HOCK C.F., *Gerberto ossia Silvestro II Papa*, trad. Stelzi p. 206 (Milano 1846).
KANTOROWICZ 1939: KANTOROWICZ H., *The Quaestiones disputatae of the Glossators*, in «Revue d'histoire du Droit», 1939, pp. 1-67.
KARPINSKI 1928: KARPINSKI L.C. e WATERS E.G.R. in "A thirteenth Century Algorism in French Verse" Isis, t.11, 1928.
KHALDUN 1958: KHALDUN IBN, *The Muqaddimah. An Introduction to History*, trad. dall'arabo di F. Rosenthal, New York 1958, vol III.
Langlow 2005: R. Langslow*, 'Langues reduites au lexique'?The Languages of Latin Tecnical Prose* in *Aspects of the Language of Latin Prose,* a cura di Tobias Reinhardt, Michael Lapidge, James N. Adams, Oxford 2005, pp. 287-302.

LORIA 1921:LORIA G., *Leonardo Fibonacci*, in "Gli scienziati italiani", a cura di Aldo Mieli, Roma 1921.
MANSELLI 1979: MANSELLI R., *La corte di Federico II e Michele Scoto*, in *L'averroismo in Italia*, Atti del convegno internazionale, Roma, Accademia nazionale dei Lincei, 1979.
MAZZINI 2010: MAZZINI I., *Storia della lingua latina e del suo contesto*, II. *Lingue socialmente marcate*, Casoria 2010.
MILANESI 1867: MILANESI G., *Documento inedito intorno a Leonardo Fibonacci*, Roma 1867.
Pasche 1994: Pasche, *Le scienze alla corte di Federico II*, Leida 1994.
NENCI 2002: NENCI E. (ed), N. Tartaglia, *Quantità, unità e numero. selezione dal General Trattato,* Milano 2011.
PALMER 2002: PALMER L. R., *La lingua latina*, Treviso 2002.
SCARPA 2008, SCARPA F., La traduzione specializzata, Milano 2008.
SFORTUNATI 1545: SFORTUNATI G., *Nuovo Lume, libro di arithmetica* Venezia, 1545.
SIMI 2004: A. Simi, *L'eredità della Practica geometriae di Leonardo Pisano nella geometria del basso Medioevo e del primo Rinascimento*, in *BSSM* XXIV (2004) Fasc. 1.
SMITH 2004: SMITH D.E. - Karpinski L.C. *The Hindu-Arabic Numerals,* Mineola, N.Y, 2004 p. 122.
SMITH 1925: SMITH D.E., *History of Mathematics*, vol. II, Boston 1925.
TANGHERONI 1994: TANGHERONI M.*, Fibonacci, Pisa e il Mediterraneo* in *Il tempo, le opere, l'eredità scientifica* a cura di M. Morelli e M. Tangheroni, Pisa 1994.
TUCCI 1994: TUCCI U., *Manuali d'aritmetica e mentalità mercantile tra Medioevo e Rinascimento* in *Il tempo, le opere, l'eredità scientifica* a cura di M. Morelli e M. Tangheroni, Pisa 1994.
SIGLER 2002: SIGLER L. E., *Fibonacci's Liber Abaci, A traslation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, New York Berlin Heidelberg, 2002.
ULIVI 2000: E. ULIVI, *Le scuole d'Abaco e l'insegnamento della matematica a Firenze nei secoli XIII-XVI* in *Scienze matematiche e insegnamento in epoca medioevale*, Atti del convegno internazionale di studio, Chieti 2-4 maggio 1996 a cura di Paolo Freguglia, Luigi Pellegrini e Roberto Paciocco, Napoli, 2000.
URSO 2006 : ANNA MARIA URSO, *I preverbi nel latino tardo: il caso di Celio Aureliano*, in *Latin vulgaire latin tardif VIII.* Atti dell'VIII colloquio internazionale sul latino volgare e tardo, Oxford 6-9 settembre 2006 a cura di Roger Wright- New York 2008, pp.292-300.

Zurli 1990: L. Zurli, *Le* praefationes *ai* Passionum Libri *di Celio Aureliano* in Prefazioni*, prologhi, proemi di opere tecnico-scientifiche latine* a cura di C. Santini e N. Scivoletto, I, Roma 1990.

VAN EGMOND 1980: W. VAN EGMOND, *Practical Mathematics in the Italian Renaissance: a Catalog of Italian Abbacus Manuscripts and Printed Books to 1600*, Firenze 1980.