UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

SCUOLA DI DOTTORATO
in
SCIENZE FILOSOFICHE
(XXVI CICLO)

QUESTIONI FILOSOFICHE DI TEORIA DEGLI INSIEMI PARACONSISTENTE.
IL SISTEMA FORMALE ZFU_1

Dottorando
Claudio Animato

Tutor:
Ch.mo Prof.
Nicola Grana

Coordinatore:
Ch.mo Prof.
Giuseppe Di Marco

Ἐμοὶ γὰρ δοκεῖ, ὦ Σώκρατες, περὶ τῶν τοιούτων ἴσως ὥσπερ καὶ σοὶ τὸ μὲν σαφὲς εἰδέναι ἐν τῷ νῦν βίῳ ἢ ἀδύνατον εἶναι ἢ παγχάλεπόν τι, τὸ μέντοι αὖ τὰ λεγόμενα περὶ αὐτῶν μὴ οὐχὶ παντὶ τρόπῳ ἐλέγχειν καὶ μὴ προαφίστασθαι πρὶν ἂν πανταχῇ σκοπῶν ἀπείπῃ τις, πάνυ μαλθακοῦ εἶναι ἀνδρός: δεῖν γὰρ περὶ αὐτὰ ἕν γέ τι τούτων διαπράξασθαι, ἢ μαθεῖν ὅπῃ ἔχει ἢ εὑρεῖν ἤ, εἰ ταῦτα ἀδύνατον, τὸν γοῦν βέλτιστον τῶν ἀνθρωπίνων λόγων λαβόντα καὶ δυσεξελεγκτότατον, ἐπὶ τούτου ὀχούμενον ὥσπερ ἐπὶ σχεδίας κινδυνεύοντα διαπλεῦσαι τὸν βίον, εἰ μή τις δύναιτο ἀσφαλέστερον καὶ ἀκινδυνότερον ἐπὶ βεβαιοτέρου ὀχήματος, ἢ λόγου θείου τινός, διαπορευθῆναι.

Perché su tali questioni a me pare, o Socrate, come forse anche a te, che avere in questa nostra vita un'idea sicura, o sia impossibile o molto difficile; ma d'altra parte non tentare ogni modo per metter alla prova quello che se ne dice, e cessare di insistervi prima di aver esaurita ogni indagine da ogni punto di vista, questo, o Socrate, non mi par degno di uno spirito saldo e sano. Perché insomma, trattandosi di tali argomenti, non c'è che una sola cosa da fare di queste tre: o apprendere da altri dove sia la soluzione; o trovarla da sé; oppure, se questo non è possibile, accogliere quello dei ragionamenti umani che sia se non altro il migliore e il meno confutabile, e, lasciandosi trarre su codesto come sopra una zattera, attraversare così, a proprio rischio, il mare della vita: salvo che uno non sia in grado di fare il tragitto più sicuramente e meno pericolosamente su più solida barca, affidandosi a una divina rivelazione.

Platone, *Fedone*, 85 *c-d*

Sommario

Introduzione

In questa ricerca abbiamo cercato di sviluppare l'idea del Professor Newton Da Costa concernente lo studio di una teoria degli insiemi paraconsistente con *Urelemente* contraddittori.

L'idea ha avuto origine da problemi connessi con i fondamenti della Fisica, con cui la scuola brasiliana si è confrontata da qualche decennio a questa parte. All'interno di tale dibattito è stata sollevata la questione circa la possibilità di trattare insiemisticamente alcune situazioni paradossali, antinomiche concernenti certi specifici oggetti. Il problema è stato così rielaborato in maniera tale che si richiedesse la formulazione di una teoria degli insiemi, in grado di sostenere possibili antinomie senza che l'impianto teorico generale perdesse la propria coerenza ed affidabilità.

In tale prospettiva abbiamo qui deciso di discutere degli oggetti contraddittori come di *Urelemente* e delle rispettive proprietà come di insiemi.

Gli scopi della nostra ricerca possono sintetizzarsi in due punti-chiave: il primo ha riguardato l'individuazione effettiva di quei criteri adeguati alla trattazione insiemistica di casi in cui fosse possibile riscontrare antinomie; il secondo invece ha avuto come obiettivo quello di formulare una teoria, che in quanto tale non dovesse rinunciare ai risultati ottenuti in sede classica.

Abbiamo indagato tali aspetti all'interno del sistema formale denominato 'ZFU_1', per il quale si è sin da subito chiarito cosa significasse l'assunzione ipotetica di "oggetti contraddittori". Non è propriamente corretto parlare di termini di un sistema formale che possano dirsi contraddittori in se stessi. La contraddittorietà non può essere attribuita intrinsecamente ai termini ma va espressa da formule che li riguardano.

In questo senso allora abbiamo inteso discutere di oggetti contraddittori come di individui elementari, insiemisticamente indecomponibili, per i quali potesse darsi la possibilità di isolare singole circostanze, all'interno delle quali riscontrare situazioni di inconsistenza, dovute all'attribuzione simultanea di proprietà tali che l'una risultasse essere la negazione dell'altra.

La *ratio* di questo specifico punto di vista è dovuta al fatto che gli enunciati del sistema formale studiato sono strutturati secondo quei criteri, attraverso cui si intende l'attribuzione di un predicato ad un determinato soggetto mediante l'ausilio della relazione di appartenenza. Da questa prospettiva risulta allora chiaro che la relazione fondamentale presa su un qualsiasi dominio di riferimento esprime una particolare declinazione della nozione di "essere", quella copulativa, a partire dalla quale vengono costruite tutte le altre possibili proposizioni. L'applicazione della negazione e l'eventuale considerazione di certi casi contraddittori ha riguardato così soltanto enunciati e mai singoli termini genuinamente intesi.

Per l'elaborazione del sistema formale qui presentato si è reso necessario suddividere il lavoro in due momenti fondamentali: al fine di costruire una teoria che rispondesse al meglio alle indicazioni fornite dal Professor Da Costa, abbiamo indagato dapprima gli aspetti squisitamente logici mediante i quali supportare eventuali contraddizioni; nel secondo invece abbiamo discusso puù approfonditamente degli assiomi propri del sistema, modificati in maniera che risultassero adeguati allo scopo prefissato.

Nella prima metà del lavoro abbiamo dedicato quindi la nostra attenzione al calcolo logico prescelto, cioè a dire C_1^*. Tale logica fa parte della gerarchia $C_i^{(*,=)}{}_{1 \leq i \leq \omega}$ (C-*logics*), elaborata dal logico brasiliano tra gli anni Sessanta e Settanta e sviluppata da alcuni dei suoi più importanti collaboratori. Abbiamo limitato il nostro studio al caso '1-*star*', che indica il calcolo dei predicati al primo ordine di livello 1 senza identità ed abbiamo dedicato ad esso una trattazione mirata da una parte ai teoremi fondamentali, che esso è in grado di provare, e dall'altra ad alcuni risultati metateorici di cui esso gode.

Abbiamo proceduto così alla formulazione dei relatvi assiomi, delle regole di inferenza e infine abbiamo dimostrato alcune tesi sia del calolo positivo, sia del calcolo con assiomi per la negazione. Gli obiettivi sono stati di due tipi: comprendere quali tesi del calcolo classico continuassero a mantenere la propria validità generale e valutare quale significato potessero avere questi ultimi per la nostra ricerca.

Sono stati inoltre provati alcuni metateoremi fondamentali, come quelli di correttezza e di completezza semantica, sia per il calcolo proposizionale (C_1) sia per la sua più ovvia estensione al primo ordine (C_1^*).

Nella seconda parte abbiamo invece discusso brevemente dell'uso e del significato degli *Urelemente* per la teoria degli insiemi: sono stati valutati alcuni aspetti delle concezioni di Zermelo e di Fraenkel in proposito, ai quali si devono sostanzialmente il dibattito e le scelte metodologiche che tutt'oggi caratterizzano lo studio in questo specifico ambito, sino alla breve disamina di alcuni usi oggi ricorrenti.

Infine si è passati alla discussione dei singoli assiomi di ZFU_1. La teoria di riferimento è stata quella di Zermelo-Fraenkel-Skolem (ZFS o ZF).

Si è scelto innanzitutto un linguaggio, che fosse adeguato alla discussione sia di fatti genuinamente insiemistici sia di fatti riguardanti gli eventuali *Urelemente*. A tale scopo si è scelto un linguaggio con tre sorte di variabili individuali: la prima per gli insiemi, la seconda per gli individui e la terza per gli elementi genericamente intesi.

Il sistema elaborato è stato concepito con l'obiettivo di consentire la presenza di *Urelemente* senza per questo presupporne in alcun modo l'esistenza. Con tale intento si è allora proceduto all'indebolimento dell'assioma di estensionalità, in maniera tale che gli eventuali individui, indecomponibili da un punto di vista insiemistico, non venissero a coincidere per ciò stesso con l'insieme vuoto. La classe nulla infatti condivide l'unica proprietà esplicitabile per gli *Urelemente*, quella concernente l'impossibilità di avere elementi, che intuitivamente asserisce la loro assoluta elementarità (per questo vengono anche detti "atomi").

Mediante l'impiego del linguaggio multisortale è stata quindi operata una distinzione all'interno della definizione di eguaglianza data, facendo sì che le classi rispondessero ai criteri di estensionalità e di sostitutività comunemente ammessi, mentre gli *Urelemente* rispettassero criteri di identità fondamentalmente legati alla coincidenza delle proprietà possedute.

Successivamente sono stati discussi e riformulati in base al linguaggio prescelto gli assiomi della coppia, dell'insieme vuoto, dell'unione. Rispetto ai primi due sono state fornite trattazioni separate, sebbene sia nota la loro derivabilità a partire da un adeguato schema di separazione. Ciò è stato necessario per ragioni di ordine e di correttezza espositiva. Non sarebbe stato corretto infatti discutere di tali concetti e provare dei risultati per essi, senza aver prima fornito un adeguato schema di comprensione.

Quest'ultimo è stato oggetto della nostra trattazione in un secondo momento ed è stato sostanzialmente concepito secondo le limitazioni sulla grandezza degli insiemi generabili a partire da esso, nel rispetto delle osservazioni di Zermelo, di Fraenkel e di Skolem, senza le quali non si sarebbe potuto ascrivere sensatamente ZFU_1 alla lista dei sitemi formali al primo ordine.

Tale scelta ci ha portato a svincolare lo studio qui condotto dai temi già trattati dalla precedente ricerca teorico-insiemistica paraconsistente. La scuola brasiliana in particolare ha cercato, attraverso l'uso delle C-*logics*, di recuperare alcuni degli aspetti concernenti la *Mengenlehre naïve* ed ha così considerato a più risprese la possibilità di ridiscutere l'eliminazione di certi particolari oggetti, ancorandosi alle questioni fondazionali della matematica.

Considerando tuttavia l'*input* che ci era stato fornito, abbiamo ritenuto appropriato tralasciare un'esplicita discussione delle questioni fondazionali sia perché queste sono fortemente limitate nelle loro possibilità dai teoremi di Gödel; sia perché una teoria con *Urelemente*, forse, si presta meglio alla formalizzazione di questioni provenienti dall'ambito delle scienze empiriche piuttosto che dalla matematica pura.

Tenendo conto dunque di questi fattori, abbiamo ritenuto opportuno non modificare sostanzialmente il vincolo sulla grandezza degli insiemi elaborato da Zermelo ed abbiamo invece concentrato la nostra attenzione sulla questione della definizione dei predicati, al fine di rendere lo schema di comprensione uno strumento tanto flessibile da potervi inserire una discussione a proposito degli eventuali individui inconsistenti.

L'idea alla base del nostro studio trova quindi il proprio nucleo fondamentale nella strutturazione di questo schema d'assiomi. Nella discussione della questione della *Definitheit* sono state fornite una serie di prescrizioni, mediante le quali istanziare i possibili predicati ammessi come tali. Ciò è avvenuto facendo uso del linguaggio insiemistico, mediante il quale ad ogni "ragionevole" predicato è stato associato un opportuno sottoinsieme. Nel rispetto del *Leitmotiv* della nostra ricerca è stato autorizzato allora l'impiego della negazione debole soltanto per quelle condizioni, attraverso le quali si fosse inteso esprimere predicati per *Urelemente*. Diversamente l'attribuzione di predicati a classi è stata consentita soltanto attraverso la determinazione di condizioni che facessero uso al più della negazione forte, per mezzo della quale è possibile riabilitare tutte le forme di ragionamento classico ed evitare contraddizioni. In questo modo si è cercato di veicolare formalmente l'idea per cui fossero soltanto gli individui non-insiemistici a possedere predicati contraddittori e non le classi in genere.

In seguito, per adempiere all'altro punto fondamentale della nostra ricerca, si è proceduto alla discussione e all'assunzione di ulteriori assiomi, i quali non hanno avuto un impatto particolarmente rilevante dal punto di vista della trattazione dei possibili individui contraddittori; tuttavia hanno consentito al sistema formale indagato di ottenere ZF come sottoteoria ed esprimere più compiutamente quei fatti matematici normalmente riconducibili ad essa. Tale lavoro è stato articolato in particolare attraverso la riformulazione degli assiomi dell'infinito, del rimpiazzamento (schema), della scelta e della fondazione.

Il primo di essi è stato formulato secondo il criterio di von Neumann e ha consentito dunque di assumere esplicitamente l'esistenza di almeno un insieme infinito "puro", privo cioè di *Urelemente*, accanto a quello dell'insieme (fortemente) vuoto. Il secondo ed il terzo invece sono stati formulati in maniera tale da poter poi costruire tutta la gerarchia transfinita immaginata da Cantor, altrimenti limitata o non rispondente a certi requisiti. Il quarto infine ha consentito di restringere l'attenzione più specificatamente agli individui di tipo non-iniemistico (escludendo ad esempio gli individui di Quine), i cui prototipi fossero da ricercarsi magari nell'ambito delle scienze empiriche, come la Fisica, la Biologia o la Chimica.

Infine sono state elaborate alcune definizioni utili allo studio di specifici eventuali casi di inconsistenza, trattabili a partire dagli assiomi così impostati. In particolare è stata definita la nozione di “regione”, presa in prestito da uno studio originario di Isaac Husik e riformulata in maniera tale da consentire lo studio di singoli casi conformi al contesto descritto: in tal senso sono stati distinti quattro casi possibili, al cui interno ricondurre certi tipi di contraddizioni. L’idea che si è tentato di sviluppare è stata quella di sfruttare lo schema di comprensione per consentire, in presenza di *Urelemente* inconsistenti, la determinazione di classi scomponibili in almeno due sottoinsiemi, ciascuno incompatibile con l’altro, definendone le condizioni determinanti per mezzo degli strumenti logici in grado di esprimere e sostenere eventuali inconsistenze. Impiegando le condizioni di “definitezza”, date a proposito dello schema di comprensione, è stato individuato nell’applicazione della negazione debole del calcolo logico soggiacente lo strumento-chiave per far sì che certi casi di inconsistenza venissero trattati senza rischi per la coerenza generale del sistema (non-trivialità).

L’obiettivo fondamentale è stato quello di studiare e provare a fornire una giustificazione ragionevole di certi fenomeni comunemente riscontrati nelle scienze empiriche, in base ai quali proprietà teoricamente incompatibili tra loro, si trovano a coesistere in certe specifiche situazioni o con riferimento a certi specifici oggetti.

Il lavoro condotto nella prima parte si è rivelato in questa fase di grande utilità, soprattutto per quel che ha riguardato la valutazione positiva delle contraddizioni, in base alla quale è possibile immaginare modelli entro cui verificare tanto una proposizione quanto la sua negata.

Combinatoriamente sono stati allora distinti quattro caso: il primo ha fatto riferimento alla circostanza in cui una regione fosse consistente internamente ed esternamente, caso in cui cioè i sottoinsiemi in essa isolabili fossero tra loro (fortemente) disgiunti mentre la regione si trovasse ad essere essa stessa sottoregione di una regione più estesa, all’interno della quale essa non potesse sovrapporsi alle altre parti; il secondo invece ha riguardato la definizione di una regione che fosse internamente inconsistente ma esternamente consistente, nel senso che le sovrapposizioni sono state considerate come limitate ai sottoinsiemi della regione esaminata. Infine sono stati considerati gli ulteriori due casi, nei quali si è considerata una regione inconsistente esternamente ma consistente internamente, nonché il caso di una regione inconsistente sia internamente che esternamente.

Di una certa rilevanza, dal punto di vista degli *Urelemente* e delle regioni, è stata la formulazione dell’assioma dell’infinito e la dimostrazione del teorema di Cantor, mediante i quali è stato provato come anche in ZFU_1 sia trattabile un’adeguata nozione di Continuo e dunque anche come ZFU_1 risulti essere indirettamente uno spazio teorico sufficientemente ampio da potervi inserire le discussioni fondazionali, per il momento accantonate.

La definizione dei comuni sistemi numerici e in particolare del campo $\boldsymbol{R}$ ha permesso di introdurre un'ulteriore esempio di regione, denominato regione di tipo *star*, in cui l'appartenenza di un certo individuo ad una certa regione o sottoregione sia vincolata ad un "grado di inerenza" della proprietà espressa. Evitando il ricorso agli insiemi *fuzzy*, che avrebbero modificato sensibilmente tutto l'impianto teorico del sistema trattato, si è cercato di definire un criterio alternativo di vaghezza che, per così dire, rendesse gli oggetti insiemistici definiti sensibili anche alla circostanza in cui un certo predicato (e dunque l'appartenenza al corrispondente sottoinsieme) risultasse essere attribuibile soltanto con un certo grado, da non interpretare però come valore di verità sfumato bensì come pertinenza di un "predicato graduato" ad un certo individuo.

Lo studio è stato infine mirato anche alla ricerca di una dimostrazione di non-trivialità del sistema formale ZFU_1, che è stata fornita intuitivamente, considerando la circostanza per la quale ZF risulta essere una sottoteoria di ZFU_1. Tale circostanza fornisce un criterio adeguato per risolvere metà del problema, affermando che se ZFU_1 è non-triviale, allora non lo è neppure ZF.

Per completare la dimostrazione si può considerare il caso, in base al quale, poiché ZFU è non-triviale se e solo se ZF non lo è, sembra ragionevole affermare che ZFU_1 è non-triviale se e solo se ZFU non lo è, considerando il fatto che ZFU_1 è un sistema più debole di ZFU. Così ZFU_1 risulterebbe non-triviale se e solo se ZF è non-triviale.

I. Costruzione del sistema formale

1. Strutturazione del sistema formale ZFU_1

Per poter introdurre adeguatamente il sistema formale oggetto del nostro studio, procederemo in un primo momento all'analisi e all'esposizione dei calcoli paraconsistenti C_1 (calcolo proposizionale) e *par extension* C_1^* (calcolo dei predicati al primo ordine senza identità); in un secondo momento invece tratteremo degli assiomi propri del nostro sistema formale, ispirati alla teoria degli insiemi di nostro maggior interesse, cioè a dire ZF, eventualmente arricchita da *Urelemente*, la cui specifica natura sarà quella di essere occasionalmente inconsistenti. La trattazione procederà esaminando le caratteristiche sintattiche del sistema ZFU_1, attraverso le quali sarà possibile metterne in luce le caratteristiche fondamentali.

Richiameremo di seguito alcune importanti definizioni, che saranno utili a fissare i criteri canonici grazie ai quali si svilupperà la presentazione sintattica del sistema formale ZFU_1.

Quando si esamina una determinata teoria T, si esamina generalmente la strutturazione e l'articolazione di un certo linguaggio rispetto ad un certo universo di discorso U. Spesso ciò si riassume dicendo che una teoria è costituita da una coppia ordinata, i cui membri sono rispettivamente il suo linguaggio ed il suo universo di discorso: $T = \langle L, U \rangle$. Rispetto a questo tipo di considerazioni, possono essere allora presi in esame due ordini di problemi:

1) quelli concernenti i rapporti fra gli elementi linguistici della teoria, senza alcun riferimento all'universo di discorso (cioè a dire al loro significato (inteso));

2) quelli concernenti i rapporti fra gli elementi linguistici della teoria e gli elementi dell'universo di discorso (cioè a dire con uno specifico riferimento al proprio significato).

Nel caso 1) si parla di indagine di tipo sintattico[1]; mentre nel caso 2) di indagine di tipo semantico.

Talvolta può essere utile disporre di una formalizzazione completa della teoria T oggetto del proprio studio. L'obiettivo di un tale approccio è quello di offrire il sapere intorno a un certo ambito come un insieme di teoremi. Ciò significa dunque che occorrerà passare da un contenuto teorico di ordine più generale ad uno di tipo formale, all'interno del quale sarà necessario specificare ordinatamente la struttura dell'apparato deduttivo, così come il novero delle verità da cui si intende partire. Tutto questo comporta un procedimento graduale, attraverso cui procedere alla stipulazione di un apposito linguaggio L, entro cui formulare il sistema formale; alla scelta delle parole dotate di senso e dunque alla costituzione di un vero e proprio vocabolario per esso; alla scelta di quelle proposizioni ritenute valide e dalle quali saranno effettuate le deduzioni grazie agli assiomi e alle regole logiche prescelte.

Scendendo più nel dettaglio[2], l'esposizione sintattica di un sistema formale si declina tenendo conto dei seguenti punti-cardine:

1. La morfologia:

   a. quali sono le componenti primitive:

      1) fare una lista delle componenti primitive;
      2) fare una lista delle operazioni che vertono su tali componenti;
      3) dare delle regole di formazione, che indichino come ottenere nuove componenti da quelle primitive;

   b. quali componenti costituiscono delle proposizioni, dotate di senso:

      1) fare un lista degli operatori proposizionali che si applicano alle proposizioni;
      2) dare delle regole di costruzione delle proposizioni elementari e fornire delle regole attraverso cui ricavare (ricorsivamente) da esse le proposizioni più complesse.
2. L'assiomatizzazione:

[1] La sintassi di una teoria formalizzata si costituisce di due elementi: da un parte si fissano mediante il metalinguaggio sintattico le espressioni del sistema formale, stabilendo ricorsivamente quali siano le formule ben formate. Dall'altra invece si fissano gli assiomi e le regole impiegati nelle deduzioni. Cfr. Ladrière, J., *Les limitations internes des formalismes*, Gauthier-Villars, Paris, 1957, p. 548

[2] *Ibidem*, pp. 38-9

a. fornire una lista di proposizioni o di schemi considerati validi. Essi costituiranno gli assiomi o gli eventuali schemi di assioma del sistema formale;

b. fornire un elenco delle regole di deduzione, attraverso cui ottenere proposizioni valide da altre proposizioni anch'esse valide.

Per quel che concerne soprattutto la morfologia di un sistema formale, è prassi comune utilizzare come metalinguaggio una parte limitata della propria lingua di base, arricchita dagli elementi morfologici del sistema formale medesimo.

Relativizzando questo *modus operandi* al nostro caso specifico, occorrerà disporre innanzitutto di un linguaggio entro cui cominciare la descrizione del nostro sistema formale ZFU_1 e questo sarà costituito da una parte molto ristretta della lingua italiana. In seguito andremo a fissare un apposito linguaggio formale per la nostra teoria, indicato come $L(ZFU_1)$, che soddisferà i criteri sopra indicati.

Definiremo allora il nostro sistema formale[3] come la coppia ordinata costituita dal linguaggio in cui esso sarà espresso e dall'insieme di assiomi propri e logici, coadiuvati questi ultimi dalle regole di inferenza ammesse. Esprimiamo ciò formalmente, stabilendo che:

$$ZFU_1 = \langle L(ZFU_1), Ass(ZFU_1) \rangle$$

La discussione della prima coordinata di tale coppia sarà oggetto di riflessione e ricorrerà in entrambe le parti fondamentali della nostra trattazione. La seconda coordinata della coppia invece sarà scissa nelle sue due componenti fondamentali, costituite dagli assiomi propri di ZFU_1 da una parte e dagli assiomi e dalle regole logici dall'altra.

In particolare discuteremo più diffusamente del calcolo logico prescelto all'interno della prima parte e ne esamineremo le caratteristiche fondamentali;

[3] Cfr. Ladrière, J., *Les limitations internes des formalismes*, *op. cit.*, pp. 13-65. Agazzi, E., *Introduzione ai problemi dell'assiomatica*, Vita e Pensiero, Milano, 1961, pp. 38-60. Smullyan, R., *Theory of Formal Systems*, Princeton University Press, Princeton, 1961, pp. 1-10. Curry, H., Feys, R., Craig, W., *Combinatory Logic*, vol. 1, North Holland, Amsterdam, 1958, pp. 12-39. Dalla Chiara, M. L., *Modelli sintattici e semantici delle teorie elementari*, Feltrinelli, Milano, 1968, pp. 9-61. Kleene, S., *Introduction to Metamathematics*, North Holland, Amsterdam, 1952, pp. 69-85. Hilbert, D., Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1, Springer, Berlin, 1934; 1968^2, pp. 1-19

caratteristiche che evidentemente quest'ultimo preserverà a prescindere dall'applicazione al contesto insiemistico di nostro interesse.

A quest'ultimo sarà invece dedicata la parte seconda della nostra trattazione, all'interno della quale discuteremo in maggior dettaglio le proposizioni primitive valide del sistema e le conseguenze che da esse è possibile trarre mediante il calcolo logico paraconsistente precedentemente introdotto.

Disponendo di tali precisazioni, potremo finalmente guardare al sistema ZFU_1, in modo tale da comprendere come il suo linguaggio risulti da una sostanziale relativizzazione del linguaggio logico prescelto ad un determinato linguaggio teorico, come una restrizione cioè di $L(C_1^*)$ a $L(ZFU)$. Formalmente:

$$L(ZFU_1) = L(C_1^*) \cap L(ZFU)$$

Si comprendono a questo punto anche le ragioni onomastiche, che ci hanno indotto a designare il sistema formale oggetto del nostro studio con la sigla sopra riportata. In particolare essa è il risultato della combinazione di tre elementi-chiave: una certa porzione della teoria ZF, la presenza di *Urelemente*, la logica paraconsistente C_1^*. Detto altrimenti:

$$ZFU_1 = C_1^* + ZF + U$$

o anche:

1) Teoria: $ZFU = \langle L; U \rangle$

+

2) Logica: C_1^*

=

3) Sistema formale: $ZFU_1 = \langle L(ZFU_1),\ Ass(ZFU_1) \rangle$

Per muoverci con più comodità nella descrizione delle componenti del nostro sistema formale, faremo uso come già detto di una porzione opportunamente ampliata della lingua italiana quale metalinguaggio sintattico; inoltre affiancheremo a questo linguaggio, non espressamente formalizzato, la logica classica quale motore inferenziale. Laddove dovesse risultare agevole sia alla comprensione che all'enunciazione di alcuni metateoremi, faremo uso di alcune abbreviazioni linguistiche per indicare i funtori logici impiegati in questo livello di analisi. In particolare ci serviremo di '*non*', '*et*', '*vel*', '*seq*', '*aeq*', '*om*', '*ex*'[4] per indicare rispettivamente i più comuni operatori logici '*non*', '*e*', '*o*' (non esclusivo), '*se … allora*', '*se e solo se*', '*tutti*', '*qualcuno*', quando questi saranno impiegati nel metalinguaggio in questione. Ci serviremo occasionalmente anche delle comuni parentesi, il cui simbolo non differirà da quello impiegato all'interno del sistema formale stesso, giacché ciò non darà luogo evidentemente ad alcuna confusione.

[4] Cfr. Hermes, H., Scholz, H., *Mathematische Logik*, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band 1, 1. Teil, Heft 1, Teil I., Teubner, Leipzig, 1952. Hermes, H., *Einführung in die mathematische Logik*, Teubner, Stuttgart, 1963. Casari, E., *Lineamenti di logica matematica*, Feltrinelli, Milano, 1959; 1982[7]

PARTE PRIMA

Logica

II. Introduzione alla logica di ZFU_1

1. Logica paraconsistente. Idee fondamentali

La logica paraconsistente[5] è la logica dei sistemi formali inconsistenti. Parlando in maniera informale, si dice inconsistente un sistema in grado di ospitare al proprio interno proposizioni antinomiche, tali cioè che esistano almeno due proposizioni, di cui l'una sia la contraddittoria dell'altra[6]. Normalmente il verificarsi di tale condizione determina il collasso del sistema[7]. Detto altrimenti, il

---

[5] Il termine "paraconsistente" fu coniato dal filosofo peruviano Francisco Mirò Quesada Cantuarias (Lima – Perù, 1918) nel corso della *Third Latin America Conference on Mathematical Logic* nel 1976. Cfr. Arruda, A. I., Miró Quesada, F., Da Costa, N. C. A., Chuaqui, R., *Meeting of the Association for Symbolic Logic: Campinas, Brazil 1976*, «The Journal of Symbolic Logic», vol. 43, n. 2, 1978, pp. 352-64. Grana, N., *Logica paraconsistente*, L'Orientale, Napoli, 1983, p. 17

[6] Dato un sistema formale K ed una sua proposizione α, diciamo in genere $\neg\alpha$ la sua contraddittoria (nelle parole dello pseudo-Scoto: «[…] a contradiction cannot be given in a truer way than by positing a negation in front of the whole proposition». Cfr. pseudo-Scotus, *Questions on Aristotle's Prior Analytics*, Quaestio X, in Yrjönsuuri, M., *Medieval Formal Logic*, Kluwer, Dordrecht, 2001, p. 226). Un sistema che voglia definirsi paraconsistente deve ammettere nel proprio linguaggio di base un operatore di negazione, senza il quale non sarebbe possibile parlare sensatamente di "contraddittorietà", sebbene risulti comunque fondata la questione circa la sua "consistenz"a o "coerenza". Come ha infatti mostrato Kemeny, la questione della consistenza di un sistema non dipende strettamente dalla presenza o meno di un operatore di negazione all'interno del linguaggio su cui si è costruita una certa teoria; bensì dalla possibilità di poter dedurre o meno in essa tutte le sue formule. "Consistenza" e "non-contraddittorietà" possono coincidere dunque solo se si ammette un operatore di negazione con certe determinate caratteristiche. Cfr. Kemeny, J., *Models of Logical Systems*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 13, n. 1, 1948, pp. 16-30

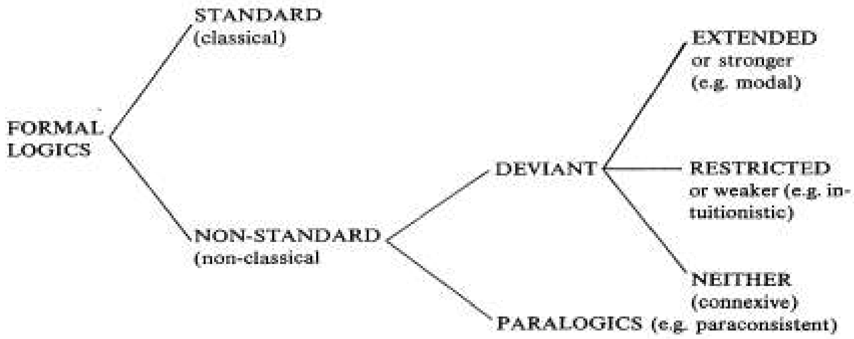
[7] Per tale ragione la logica paraconsistente è stata collocata tra le logiche non-standard; inoltre, a causa del suo statuto fortemente non-classico, relativamente alla trattazione dell'operatore di negazione all'interno delle "Logiche dell'Inconsistenza Formale" (*LFI*), essa è stata isolata dalle altre logiche cosiddette non-classiche, come nel caso ad esempio della logica intuizionista o

sistema è in grado di dedurre qualsiasi altro enunciato, rendendo per ciò stesso il calcolo banale o triviale[8].

Gli studi compiuti in tal senso da Newton C. A. da Costa[9] sul finire degli anni Cinquanta e agli inizi degli anni Sessanta hanno però contribuito a chiarire una

---

modale, che pur appartengono ad una classe di logiche definite come "devianti", per costituire un paradigma di pensiero proprio e del tutto nuovo. Tale paradigma è stato definito da Mario Bunge come "paralogico". Cfr. Bunge, M., *Treatise on Basic Philosophy*, vol. 7, Reidel, Dordrecht, 1985, p. 55. Seguendo il suo schema, potremmo riassumere questa suddivisione nel seguente modo:



Si veda inoltre Noto, A., *Le logiche non classiche*, Bulzoni, Roma, 1975, pp. 13-30

[8] Tale condizione si verifica in virtù del "principio di esplosione", come viene denominato in area perlopiù australiana (così Priest: «Il motto latino in proposito è: *ex contradictione quodlibet*. Io preferisco l'espressione più colorita: Esplosione». Cfr. Priest, G., *What is so Bad about Contradictions?*, «Journal of Philosophy», vol. 94, 1998, pp. 410-26; trad. it., *Che c'è di male nelle contraddizioni?*, in Altea, F., Berto, F., (eds.), *Scenari dell'impossibile*, Il Poligrafo, Padova, 2007, p. 23). Esso identifica una tautologia ben nota della logica classica, per la quale, dato un sistema basato su di un calcolo logico di tipo classico, se da tale sistema $\vdash A$ e $\vdash \neg A$, allora $\vdash B$, per un qualunque enunciato B. In tal caso si dice anche che il sistema diviene "sovracompleto", secondo la definizione di Jaśkowski, o "banale" o ancora "triviale", secondo certa terminologia più recente, giacché in esso è possibile derivare qualunque proposizione. Cfr. Jaśkowski, S., *Rachunek zdań dla sustemów dedukcyjnych sprezecznych*, «Studia Societatis Scientiarum Torunensis», Sectio A, vol. 1, n. 5, 1948; trad. ingl., *Propositional Calculus for Contradictory Deductive Systems*, «Studia Logica», 1969, vol. 24, 1969, p. 145. Arruda, Y. I., *A Survey of Paraconsistent Logic*, in Arruda, A. I., Chuaqui, R., Da Costa, N. C. A., (eds.), *Mathematical Logic in Latin America*, North Holland, Amsterdam, 1980, pp. 1-41. Grana, N., *Logica paraconsistente*, *op. cit.*, pp. 21 e ss. Da Costa, N. C. A., Grana, N., *Il recupero dell'inconsistenza*, L'Orientale, Napoli, 2009, p. 85

[9] Newton Carneiro Affonso da Costa (Curitiba – Brasile, 1929) ha compiuto i propri studi presso l'Universidade Federal do Paranà, laureandosi dapprima ingegnere civile nel 1952 e proseguendo poi i propri studi nel campo della Matematica pura fra il 1955 e il 1956, anno in cui ottenne il "bacharelado" sempre in Matematica. Successivamente (1961) conseguì il proprio PhD in Matematica sotto la direzione del Professor Edison Farah. Newton da Costa è tutt'oggi professore titolare di Matematica e di Filosofia presso l'Universidade de São Paulo e presso l'Universidade Estadual de Campinas. Ricordiamo alcune delle sue più importanti pubblicazioni: Da Costa, N. C. A., *Introdução aos fundamentos da matematica*, Globo, Porto Alegre, 1962; HUCITEC, São Paulo, 2008[4]. Da Costa, N. C. A., *Sistemas formais inconsistentes*, UFPR, Curitiba, 1963; 1993[2]. Da Costa, N. C. A., *On the Theory of Inconsistent Formal Systems*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», vol. 15, n. 4, 1974, pp. 497-510. Arruda, A. I., Chuaqui, R., Da Costa, N. C. A., (eds.), *Mathematical Logic in Latin America*, *op. cit.* Da Costa, N. C. A., Subrahmanian, V. S., *Paraconsistent Logic as a Formalism for Reasoning about Inconsistent Knowledge Bases*, «Artificial Intelligence in Medicine», vol. 1, 1989, pp. 167-74. Da Costa, N. C. A., *Matématica e*

notevole differenza in proposito. Solitamente si ammette che i due termini "banale" (o "triviale"[10]) e "inconsistente" siano semanticamente equivalenti e che dunque non sia possibile scorgervi differenze di sorta.

Oggi invece sappiamo che fra i due concetti esiste un solco profondo, dovuto alla sostanziale differenza del loro significato tecnico: infatti si dice inconsistente un sistema formale, in cui siano presenti alcune contraddizioni; mentre si dice banale un sistema in cui ogni formula ben formata scritta nel suo alfabeto sia derivabile[11]. Esiste perciò uno scarto concettuale da osservare con molta attenzione. Per sistema formale inconsistente bisogna intendere una coppia

---

paraconsistência, SPM, Cutriba, 1989. Da Costa, N. C. A., *Conhecimento científico*, Discurso, São Paulo, 1997; 1999². N. C. A., Da Costa, *Lógica Indutiva e Probabilidade*, HUCITEC, São Paulo, 1993; 2008². N.C.A. da Costa, *Logique classique et non-classique*, Paris, Masson, 1997. Da Costa, N. C. A., Béziau, J.-Y., Bueno, O., *Elementos de teoria paraconsistente de conjuntos*, CLEHC, Campinas, 1998. Da Costa, N. C. A., French, S., *Science and Partial Truth*, Oxford University Press, Oxford, 2003. Da Costa, N. C. A., Grana, N., *Il recupero dell'inconsistenza*, *op. cit.* Da Costa, N. C. A., Sant'Anna, A., *Newton da Costa*, Azougue, Rio de Janeiro, 2011. Sulla sua oper sua opera: Priest, G., Routley, R., Norman, J., (eds.), *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*, Philosophia, München, 1989. Priest, G., *Paraconsistent Logic*, in Gabbay, D., Guenthner, F., (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 6, Kluwer, Dordrecht, pp. 287-393. Carnielli, W., Marcos, J., *A Taxonomy of C-Systems*, in Carnielli, W., Coniglio, M., D'Ottaviano Loffredo, I., (eds.), *Paraconsistency. The Logical Way to the Inconsistent*, Marcel Dekker, Basel, 2002. Carnielli, W., Coniglio, M., Marcos, J., *Logics of of Formal Inconsistency*, in Gabbay, D., Guenthner, F., (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 14, Kluwer, Dordrecht, 2007², pp. 1-93. Segnaliamo i numeri di due riviste, interamente dedicati alla logica paraconsistente: «Studia Logica», vol. 43, n. 1/2, 1984 e «Journal of Non-Classical Logic», vol. 7, n. 1/2, 1990, nonché l'articolo: Krause, D., Abe, J. M., *A obra de Newton C. A. Da Costa em Logica*, «Theoria», vol. 7, n. 1/2/3, 1992, pp. 347-86, che sintetizza i principali contributi del logico brasiliano almeno sino al 1992.

[10] Entrambi i termini sono in uso nel linguaggio tecnico italiano ed è possibile utilizzare equivalentemente l'uno o l'altro. L'impiego del vocabolo "triviale" mira fondamentalmente a conservare la forza espressiva del termine inglese "*trivial*", con cui nel gergo logico si intende esprimere la condizione per cui un sistema collassa, liberando completamente la propria forza deduttiva in maniera incontrollata. In effetti questo termine rende meglio il significato del corrispondente inglese, incorporando fra l'altro il significato stesso del lemma "banale". Cfr. Berto, F., *Non dire "Non!"*, in Altea, F., Berto, F., (eds.), *Scenari dell'impossibile*, *op. cit.*, p. 46, nota 2.

[11] Come osservato da Priest, lo slittamento dall'aggettivo "alcuni" all'aggettivo "tutti" è spesso causa di fraintendimenti e di alcune obiezioni al tentativo paraconsistente di trattare gli enunciati antinomici, come nel caso di chi sostiene che l'ammissibilità anche di una sola contraddizione porterebbe inevitabilmente all'accettazione di tutto. Pertanto è di assoluta importanza tenere ben distinti i due concetti su cui fa leva sostanzialmente il grimaldello della paraconsistenza. Il logico australiano si chiede infatti: «[…] "Che c'è di sbagliato nel credere in *alcune* contraddizioni?". Sottolineo l'"alcune": la domanda "che c'è di sbagliato in tutte le contraddizioni" è alquanto differente e, ne sono certo, ha una risposta alquanto differente». La mancata osservanza di questo punto solleva infatti numerose obiezioni contro il tentativo paraconsistente. Priest ne esamina cinque in particolare ed osserva come proprio questo dettaglio logico e teorico sia spesso la fonte comune dei fraintendimenti: «È importante rimarcare questa distinzione fin dall'inizio, dal momento che l'errato slittamento tra "qualche" e "tutte" è, come vedremo, endemico nelle discussioni sulla questione»; […] «il mero fatto che alcune contraddizioni siano razionalmente accettabili non implica che lo siano tutte». Cfr. Priest, G., *What is so Bad about Contradictions?*, *op. cit.*, pp. 21-43

ordinata costituita da un linguaggio e da assiomi e regole, dal quale almeno un enunciato α risulti non-derivabile. Un tale sistema si dice anche α-limitato.

Banalità e inconsistenza pertanto non coincidono come tradizionalmente supposto e i due termini non sono affatto l'uno sinonimo dell'altro. Non tutto ciò che è inconsistente è banale; tutto ciò che è banale o triviale è però forzatamente inconsistente, in modo totale e insanabile[12].

Per poter disporre adeguatamente della forza logica sottesa a un sistema del genere, occorre concentrare l'attenzione sui sistemi classici e comprenderne la struttura profonda. Nei calcoli classici è possibile rintracciare una legge in particolare, che si rende responsabile del collasso dell'inconsistenza sulla trivialità e che rende perfettamente simmetrici e sovrapponibili i due concetti. Essa è nota come:

legge di Duns Scoto[13] o dello pseudo-Scoto: *ex falso sequitur quodlibet*[14]

---

[12] Tale scoperta non è legata unicamente al nome dello studioso brasiliano, a cui pure si deve l'epocale chiarificazione della questione in esame; essa piuttosto trova tutta una serie di precursori, che in maniera indipendente e con relativo anticipo hanno per proprio conto maturato e portato avanti idee radicate nella medesima convinzione: la limitazione dello pseudo-Scoto. Fra questi potremmo ricordare in ordine temporale Vasil'ev, Husik, Jaśkowski, Asenjo, nonché lo stesso Newton Da Costa. La pubblicazione dei suoi primi lavori in materia tra il '58 ed il '63 diedero il via definitivo a tutto un campo di studi oggi riconducibile al settore delle logiche "paraconsistenti". Nome questo che non definisce un approccio unificato al problema di come trattare teorie, nelle quali siano presenti formule contraddittorie; quanto piuttosto ad una classe alquanto ramificata, cui fa riferimento tutto un grappolo di logiche molto variegate tra loro, che condivide però lo sforzo di inibire l'azione dello pseudo-Scoto (così come dell'altrettanto distruttivo sillogismo disgiuntivo). L'insegnamento della scuola australiana costituisce uno dei primi esempi; ma le vie alla paraconsistenza sono anche di tipo differente e si possono ricondurre a nostro avviso a tre strategie principali: la prima legata a variazioni sul tema della negazione; la seconda connessa con un approccio «pluralistico», se così possiamo dire, che coinvolge il funtore della congiunzione; la terza impegnata sul connettivo dell'implicazione. Le tre strade principali, che conducono tutt'e tre alla paraconsistenza, non sono affatto casuali. È sufficiente osservare che ciascuno di questi tre connettivi logici gioca un ruolo importante nella costruzione formale dello pseudo-Scoto (in una delle sue possibili formulazioni: $(A\wedge\neg A)\rightarrow B$); dunque i cambiamenti apportati ad una di queste costanti logiche potrebbero influenzare ed estromettere l'azione del principio di esplosione. In particolare possiamo considerare per ciascuna di esse paradigmatici i seguenti filoni di ricerca: la scuola polacca con Jaśkowski, per quanto riguarda la congiunzione logica; la scuola australiana, per quel che concerne la scelta di un funtore di implicazione rilevante anziché materiale; la scuola brasiliana, per la scelta di indebolire il funtore di negazione. Nel nostro lavoro di ricerca adotteremo le linee di quest'ultimo orientamento.

[13] Tale legge è stata associata nel corso della Storia della logica al nome di Giovanni Duns Scoto (Duns, Berwick, (?) 1265-6 (?) – Köln, 1308). Cfr. Gilson, E., *La philosophie au moyen âge*, Payot, Paris, 1952; trad. it., *La filosofia nel Medioevo*, a cura di M. A. Del Torre, La Nuova Italia, Firenze, 1973, pp. 708 e ss.). Le ragioni sono legate all'opera *In universam logicam Quaestiones* a lungo attribuita al filosofo e teologo scozzese (cfr. Łukasiewicz, J., *Zur Geschichte der Aussagenlogik*, «Erkenntnis», vol. 5, 1935, p. 124). Oggi si dubita fortemente della paternità dell'opera e anzi la si reputa un'opera spuria. L'assenza però di maggiori informazioni circa l'effettiva identità del suo autore impongono la cautela di adottare uno pseudonimo. Cfr. Kneale,

Essa dice che da una proposizione e dalla sua negata congiunte segue una proposizione qualunque.

Tale enunciato costituisce una normale tautologia nei sistemi le cui costanti logiche siano caratterizzate dalle canoniche matrici booliane ed è dunque una legge logica nei calcoli classici. Essa comporta l'indifferenziabilità dei due concetti sopra esposti: se infatti fossero deducibili tanto una proposizione quanto la sua negata, allora sarebbe derivabile da essi una proposizione qualunque. Per poter quindi superare tale *impasse*, occorre «sospendere» o «limitare» tale principio e far sì che la sua deducibilità sia solo parzialmente applicabile all'interno del sistema che si andrà a delineare.

Per giungere a tale risultato è importante procedere innanzitutto all'individuazione e all'eventuale isolamento di quelle proposizioni, che normalmente giocano un ruolo fondamentale nel caratterizzare il comportamento della negazione in ambito classico[15]. La compresenza e l'interazione infatti di

---

W., Kneale, M., *The Development of Logic,* Oxford University Press, Oxford, 1962; trad. it., *Storia della logica*, a cura di A. Conte, Einaudi, Torino, 1972, pp. 281-2. Malatesta, M., *Dialettica e logica formale*, Liguori, Napoli, 1982, pp. 52-60

[14] Letteralmente: «Dal falso segue qualsiasi cosa» (così lo pseudo-Scoto: «Ad quamlibet propositionem falsam sequitur quaelibet alia propositio in consequentia bona materiali ut nunc» (cfr. Prantl, K., *Geschichte der Logik im Abendlande*, vol. 3, Hirzel, Leipzig, 1861, p. 141. Di particolare rilievo in tal senso è la *Quaestio X* sugli *Analitici Primi di Aristotele*. Si veda: pseudo-Scotus, *Questions on Aristotle's Prior Analytics*, Quaestio X, *op. cit.*, pp. 231-4, dove l'autore espone entrambi i paradossi dell'implicazione materiale (cioè a dire quello "positivo" e quello "negativo"), costituiti dal "*verum ex quodlibet*" (formalmente: $A\rightarrow(B\rightarrow A)$) e dal "*ex falso quodlibet*" (formalmente: $(A\wedge\neg A)\rightarrow B$). La prima proposizione viene così dimostrata: «"Socrates currit et Socrates non currit; igitur tu es Romae". Probatur, quia ad dictam copulativam sequitur quaelibet eius pars gratia formae. Tunc reservata ista parte "Socrates non currit", arguatur ex alia sic: "Socrates currit, igitur Socrates currit vel tu es Romae», quia quaelibet propositio infert seipsam formaliter cum qualibet alia in una disiunctiva (formalmente: $A\rightarrow(A\vee B)$). Et ultra sequitur: "Socrates currit vel tu es Romae; sed Socrates non currit (ut reservatum fuit) ; igitur tu es Romae" (formalmente: $((A\vee B)\wedge\neg^{*}A)\vdash B$), quod fuit probatum per illam regulam: ex disiunctiva cum contradictoria unius partis ad reliquam partem est bona consequentia» (cfr. Łukasiewicz, J., *Zur Geschichte der Aussagenlogik*, *op. cit.*, pp. 130-1)). In virtù infatti della definizione classica di implicazione (quella materiale), le condizioni per cui essa possa essere soddisfatta sono sostanzialmente riconducibili a due: l'antecedente è falso o il conseguente è vero. Essendo l'antecedente della legge dello pseudo-Scoto sempre falso (interpretando i connettivi che in essa compaiono secondo gli standard classici), va da sé che l'implicazione sarà sempre soddisfatta qualunque sia la proposizione conseguente e soprattutto qualunque sia il suo valore di verità, consentendo così in presenza di una contraddizione di affermare sistematicamente il conseguente.

[15] Le possibilità di catturare sintatticamente il comportamento della negazione classica sono varie. Da esse segue necessariamente la legge dello pseudo-Scoto. Occorre dunque tentare qualche variazione in sede assiomatica al fine di limitare la validità del principio in questione. Assumendo i comuni assiomi per gli altri operatori logici e la legge della doppia negazione ($A\rightarrow\neg\neg A$ e $\neg\neg A\rightarrow A$) più il principio di *reductio ad absurdum* debole ($(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A)$) o la legge di contrapposizione debole ($(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$) si ottiene ancora un sistema di tipo classico (ad esempio il sistema di Frege (cfr. Frege, G., *Begriffsschrift*, Nebert, Halle, 1879)) o quello di Hilbert-Bernays (cfr. Hilbert, D., Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik*, 2 voll., Springer, Berlin, 1934-1939; 1968-1970^{2})). Allo stesso modo si può ricavare un calcolo di tipo classico nel

taluni enunciati potrebbe avere un peso notevole nella gestione degli insiemi *inconsistenti* di proposizioni, sino alla loro totale eliminazione.

Le logiche di tipo classico, che contengono come teorema la legge dello pseudo-Scoto o quelle che la contengono come assioma[16], non possono trattare insiemi inconsistenti di enunciati. Esse pertanto osservano un comportamento standard relativamente alle contraddizioni e vengono anche dette logiche di tipo "scotiano"; quelle che invece ne limitano o ne sospendono la validità generale

---

caso in cui la negazione sia caratterizzata dalla legge di *reductio ad absurdum forte* $((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \rightarrow B))$ o dalla legge di contrapposizione forte $((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B))$ (come si può notare, queste ultime due possibilità di scelta richiedono un solo assioma per regolamentare la negazione al fine di conferirle un comportamento di tipo classico. Gli esempi di calcoli logici che fanno uso di questo tipo di assiomi sono vari: ricordiamo in particolare il sistema di Mendelson e quello di Rosenbloom (cfr. Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, Van Nostrand, Princeton, 1964; Chapman & Hall, London, 1997[4]. Rosenbloom, P., *The Elements of Mathematical Logic*, Dover, New York, 1950). I tentativi di indebolire la forza dell'operatore di negazione studiati invece in sede intuizionista (cfr. Heyting, A., *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, Parts I-II*, «*Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*», 1930, pp. 42-56; pp. 57-71; pp. 158-169. Heyting, A., *Sur la logique intuitionniste*, (Académie de Belgique) «Bulletin de la Classe des Sciences», vol. 16, 1930, pp. 957-63) e in sede minimale (cfr. Johansson, I., *Der Minimalkalkül, ein reduzierer intuitionistischer Formalismus*, «Compositio Mathematica», vol. 4, 1937, pp. 119-36) hanno prodotto sistemi sì più deboli rispetto alla logica classica, nel senso che vi sono teoremi del calcolo classico che non sono validi al loro interno; ma il "principio dell'esplosione" si configura in essi ancora come una legge valida (nel caso intuizionista la legge è assunta quale assioma; mentre in quello minimale, dove non è possibile derivare *tout court* la legge dello pseudo-Scoto, è pur sempre dimostrabile una sua variante negativa. Essendo infatti ogni formula negata dimostrabile nel calcolo di Johansson, il principio dello pseudo-Scoto sarà ovviamente valido nel caso in cui il conseguente sia costituito da una formula preceduta dall'operatore di negazione). Come già Jaśkowski aveva osservato, è però proprio la possibilità di sospendere la validità generale di tale principio a consentire la manipolazione di insiemi inconsistenti di proposizioni (le logiche discussive introdotte da Jaśkowski aggiravano l'ostacolo ridefinendo l'operatore di congiunzione, anziché operare degli indebolimenti sul connettivo della negazione. Intuitivamente, Jaśkowski aveva fatto osservare che due formule contraddittorie avrebbero potuto aver origine da fonti informate completamente distinte. In tal caso sarebbe venuto meno il monito aristotelico circa l'unicità della fonte che proferisce un giudizio contraddittorio. Risulta ovvio allora considerare che due fonti distinte potrebbero fondare le proprie affermazioni su *backgrounds* di informazione profondamente differenti, magari consistenti ciascuna per sé; con ciò sarebbe dunque inappropriato pensare che le due fonti vogliano ritenere vero tutto quanto deducibile dalle loro rispettive informazioni a causa della legge dello pseudo-Scoto. Cfr. Jaśkowski, S., *On the Rules of Supposition in Formal Logic*, «Studia Logica», vol. 1, 1934, pp. 5-32).

[16] Nel caso del calcolo proposizionale intuizionista, i due assiomi impiegati per caratterizzare sintatticamente l'operatore di negazione sono: $A \rightarrow \neg\neg A$ e $(A \wedge \neg A) \rightarrow B$. Quest'ultimo assioma costituisce una delle possibili versioni dello pseudo-Scoto. Nel caso invece della logica minimale, l'unico assioma ammesso per la negazione è: $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$. In quest'ultimo calcolo, sebbene non sia presente una forma positiva del principio scotiano, resta pur sempre valida una sua variante negativa e cioè: $(A \wedge \neg A) \rightarrow \neg B$. Nel calcolo minimale infatti tutte le proposizioni precedute dall'operatore di negazione possono essere sempre soddisfatte in un mondo "non normale" ed essendo il conseguente negato e per ciò anche vero in almeno un tipo di realizzazione, alloral'implicazione stessa risulterà in essa sempre vera. Cfr. Galvan, S., *Non contraddizione e Terzo escluso*, Franco Angeli, Milano, 1997, p. 60

logiche "non-scotiane". A quest'ultimo gruppo di calcoli si possono certamente ascrivere le gerarchie $C_n^{(*)}$, dove $1 \leq n \leq \omega$, studiate da Newton da Costa.

III. Il linguaggio logico del sistema ZFU_1

1. Linguaggio della logica proposizionale paraconsistente C_1

$$\begin{cases} \text{alfabeto} \begin{cases} \text{logico: connettivi: } \wedge, \vee, \rightarrow^{17}, \leftrightarrow, \neg \\ \text{descrittivo: variabili proposizionali: } A_1, A_2, A_3, \dots, B_1, B_2, B_3, \dots \\ \text{ausiliario: (,) [ ]} \end{cases} \\ \text{espressioni} \begin{cases} \text{formule}^{18} \text{ (fbff): } \dfrac{\alpha, \beta}{\alpha\wedge\beta}, \dfrac{\alpha, \beta}{\alpha\vee\beta}, \dfrac{\alpha, \beta}{\alpha\rightarrow\beta}, \dfrac{\alpha, \beta}{\alpha\leftrightarrow\beta^{19}}, \dfrac{\alpha}{\neg\alpha}, \dfrac{\alpha}{\alpha^{\circ}} \quad {}^{20} \\ \qquad \text{nient'altro} \end{cases} \end{cases}$$

In tale schema le lettere greche minuscole 'α' e 'β' vanno considerate quali metavariabili su formule[21]. Tutte le formule ammesse sono quelle che è possibile ricavare ricorsivamente, reiterando le procedure sopra indicate. Impiegheremo inoltre il simbolo '$\vdash$' seguito da una formula atomica o molecolare[22] per indicare che essa è una tesi dimostrata o equivalentemente un teorema del sistema (useremo invece '$\nvdash$' per indicare che una certa formula non è deducibile dal sistema considerato). Le lettere greche maiuscole indicheranno insiemi di formule ben formate del calcolo. Infine utilizzeremo il più comune '$\overset{\text{def}}{=}$' per stabilire una relazione di definizione tra due espressioni del linguaggio[23].

---

[17] Si può inoltre definire il connettivo '$\leftarrow$', qui omesso fra i simboli di costanti logiche primitive, come segue: $A\leftarrow B \overset{\text{def}}{=} B\rightarrow A$.
[18] Formule ben formate (fbff).
[19] Il connettivo logico a due posti '$\leftrightarrow$', sebbene compaia tra i funtori primitivi, sarà introdotto nel corso della trattazione della logica del nostro sistema formale mediante un'apposita definizione e non saranno formulati assiomi in proposito. Dunque la sua presenza accanto ai connettivi primitivi è solo apparente. Lo annoveriamo qui nel linguaggio di base per sole ragioni di praticità. Altrettanto accadrà nel linguaggio per il calcolo paraconsistente al primo ordine.
[20] Se 'α' e 'β' stanno per formule ben formate (fbff), allora anche '$\alpha\wedge\beta$', '$\alpha\vee\beta$', '$\alpha\rightarrow\beta$', '$\neg\alpha$', 'α°' sono fbff. Tale definizione fornisce un metodo ricorsivo, con cui riconoscere o costruire tutte le fbff di cui ci serviremo in questa prima parte.
[21] Esse fanno parte del cosiddetto "linguaggio sintattico".
[22] Nel linguaggio sintattico si può definire una formula ben formata α "atomica" come: $Atom(\alpha) \overset{\text{def}}{=} [non\ Occ\ (\alpha, \wedge)\ ]vel\ [non\ Occ\ (\alpha, \vee)\ ]vel\ [non\ Occ\ (\alpha, \rightarrow)]\ vel\ [non\ Occ\ (\alpha, \neg)]$, dove il predicato a due posti '$Occ(\alpha, *)$' indica l'occorrenza nella fbf α del connettivo logico '$*$', dove $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\}$. Una fbf α si definisce invece "molecolare" se: $Mol(\alpha) \overset{\text{def}}{=} [non\ Atom(\alpha)]$.
[23] In tal caso ciò che verrà scritto alla sinistra del simbolo '$\overset{\text{def}}{=}$' costituirà un'abbreviazione di ciò che è scritto alla sua destra. Dunque, ogni qualvolta si incontrerà tale simbolo, si dovrà sempre ricordare che ogni occorrenza del *definiendum* (il termine a sinistra del simbolo di definizione)

2. *Linguaggio della logica paraconsistente al primo ordine* C_1^*

- alfabeto[24]
  - logico
    - connettivi: $\wedge, \vee, \rightarrow$[25]$, \leftrightarrow, \neg$
    - quantificatori: $\forall, \exists$
  - descrittivo
    - variabili individuali: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$
    - costanti
      - individuali: $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$
      - funzioni k − arie: $f_1^k, f_2^k, \dots$
      - proposizionali: $P_1^0, P_2^0, \dots$
      - predicati k − ari[26]: $P_1^k, P_2^k, \dots$
  - ausiliario: (,) [ ]
- espressioni[27]
  - termini
    - variabili e costanti individuali
    - $\dfrac{t_1, \dots, t_k}{f_i^k(t_1, \dots, t_k)}$
    - nient'altro
  - formule (fbf)
    - se $t_1, \dots, t_k$ sono termini, allora $P_i^k(t_1, \dots, t_k)$ è una fbf
    - $\dfrac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}, \dfrac{\alpha, \beta}{\alpha \vee \beta}, \dfrac{\alpha, \beta}{\alpha \rightarrow \beta}, \dfrac{\alpha, \beta}{\alpha \leftrightarrow \beta}, \dfrac{\alpha}{\neg \alpha}, \dfrac{\alpha}{\alpha^\circ}$
    - $\dfrac{\alpha}{\forall x \alpha}, \dfrac{\alpha}{\exists x \alpha}$
    - nient'altro

Anche in tale schema le lettere greche minuscole 'α' e 'β' sono metavariabili su formule. Impiegheremo ancora il simbolo '$\vdash$' seguito da una formula atomica o molecolare per indicare che essa è una tesi dimostrata o equivalentemente un teorema del sistema (useremo allo stesso modo '$\nvdash$' per indicare che una certa formula non è deducibile dal sistema considerato). Infine continueremo a far uso del simbolo '$\stackrel{\text{def}}{=}$' per stabilire una relazione di definizione tra due espressioni del linguaggio.

---

andrebbe rimpiazzata da un'opportuna occorrenza del *definiens* (il termina a destra del simbolo di definizione), giacché il primo non appartiene al linguaggio primitivo, in cui vengono scritte le fbff.

[24] Come si può osservare, l'alfabeto di C_1^* amplia C_1 in virtù dell'arricchimento operato dalla sua componente "descrittiva".

[25] Essendo il linguaggio di C_1^* un'estensione del linguaggio precedentemente adottato, disporremo anche qui dei funtori '$\leftarrow$' e '$\leftrightarrow$'.

[26] Per il momento non specificheremo le costanti predicative del sistema formale e ci limiteremo a considerare la logica prescelta secondo criteri molto generali.

[27] L'insieme di espressioni accettate viene dunque esteso grazie alla presenza dei termini, vale a dire grazie ai simboli che occorrono per gli individui che «abitano» un certo dominio di riferimento. Inoltre l'insieme delle stesse formule subisce un notevole accrescimento, giacché accanto alle forme proposizionali canoniche precedentemente illustrate, troviamo ora le matrici con eventuali prefissi.

IV. Elementi di calcolo proposizionale C_1

1. Introduzione

In questo paragrafo esporremo le caratteristiche del calcolo proposizionale paraconsistente elaborato da Newton Da Costa. Esso verrà indicato con la consueta simbologia 'C_1', divenuta standard in letteratura[28].

Cominciamo con l'osservare che il calcolo C_1 è una logica normale. Esso rispetta cioè tre condizioni fondamentali in certa prassi:Γ

1) **Riflessività** $[(\alpha \in \Gamma)\ seq\ (\Gamma \vdash \alpha)]$

2) **Monotonia** $[(\Gamma \vdash \alpha\ et\ \Gamma \subseteq \Gamma')\ seq\ (\Gamma' \vdash \alpha)]$

3) **Cut** $\big[[(om\ \alpha)(\alpha \in \Gamma' \rightarrow \Gamma \vdash \alpha)\ et\ (\Gamma' \vdash \beta)]\ seq\ (\Gamma \vdash \beta)\big]$

Definizione 4.1 $Norm(K) \stackrel{\text{def}}{=} [Rifl(K)\ et\ Mon(K)\ et\ Tr(K)]$

Possiamo così definire di conseguenza anche una logica *non-normale*:

Definizione 4.2 $non\ Norm(K) \stackrel{\text{def}}{=} non\ [Rifl(K)\ et\ Mon(K)\ et\ Tr(K)]$

ossia:

$$non\ Norm(K) \stackrel{\text{def}}{=} \big[\big(non\ Rifl(K)\big)\ vel\ \big(non\ Mon(K)\big)\ vel\ \big(non\ Tr(K)\big)\big]$$

C_1 gode delle proprietà che definiscono una logica normale. La dimostrazione di questo fatto sarà presto evidente, allorché avremo esposto più in dettaglio alcune delle caratteristiche assiomatiche del calcolo.

---

[28] Cfr. Da Costa, N. C. A., *Sistemas formais inconsistentes*, *op. cit.*, pp. 3-5

C_1 dispone di dodici assiomi e di due regole di inferenza. Cominceremo con l'esporre le caratteristiche fondamentali del calcolo positivo, cioè di quella parte assiomatica priva di espressioni ed assiomi in cui occorra il funtore di negazione '¬' e che indicheremo con 'C_1^+'. Esso riprende la più nota base assiomatica delineata da Stephen Kleene nel 1952[29]. Sebbene il numero di assiomi che si presentano già a livello proposizionale sia considerevole, i vantaggi che possono essere rilevati da una tale formulazioni consistono nel poter considerare assiomi specifici per ciascuno dei quattro connettivi fondamentali, senza dover presupporre dunque alcuna reciproca dipendenza, data dall'eventualità di una interdefinizione[30]. Questo fatto, come avremo modo di apprezzare quando avremo parlato più compiutamente del calcolo C_1, risulterà inevitabile in relazione alle consuete forme di definizione dei connettivi logici: la caratterizzazione infatti dell'operatore di negazione, che andremo ad esaminare, renderà inadeguate le consuete forme di interdefinibilità[31]. L'esigenza di un elenco così numeroso non scaturisce dunque dalla mancata volontà di restringere il calcolo in sede assiomatica, bensì da ragioni di probabile non-riducibilità dei connettivi ad un'unica funzione fondamentale, come nel caso della logica classica[32].

Diamo quindi i lineamenti fondamentali di C_1^+:

Assiomi logici

1) $A \to (B \to A)$

2) $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$

---

[29] Cfr. Kleene, S., *Introduction to Metamathematics*, North Holland, Amsterdam, 1952

[30] Quest'ultima non è sempre presente nei vari calcoli. Occorre di volta in volta verificare certe specifiche condizioni. La logica classica ad esempio possiede questa proprietà, come dimostrato da Sheffer. Cfr. Sheffer, H., *A Set of Five Postulates for Boolean Algebras, with Application to Logical Constants*, «Transactions of the American Mathematical Society», vol. 14, 1913, pp. 481-8.

[31] Sappiamo infatti che i tre seguenti insiemi di connettivi $\{\to, \neg\}$, $\{\wedge, \neg\}$ e $\{\vee, \neg\}$, classicamente intesi, sono sufficienti a definire le restanti costanti logiche.

[32] La negazione paraconsistente non ha un carattere propriamente vero-funzionale e per essa non è possibile definire alcuna matrice caratteristica con un numero finito di valori di verità. Le sue condizioni di verità risultano più articolate di quanto non accada ad esempio nella logica classica. Così la logica paraconsistente che andremo a trattare non avrà certe utili simmetrie o carratteristiche, che si presentano invece in logica classica. Cfr. Arruda, A. I., *Remarques sur les systèmes C_n*, «Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris», Série A, t. 280, 1975, pp. 1253-6. Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, Van Nostrand, New York, 1964; Chapman & Hall, London, 1997[4], pp. 35-6. Rosenbloom, P., *The Elements of Mathematical Logic*, Dover, New York, 1950, p. 33 e pp. 38-9

3) $(A \wedge B) \rightarrow A$

4) $(A \wedge B) \rightarrow B$

5) $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$

6) $A \rightarrow (A \vee B)$

7) $B \rightarrow (A \vee B)$

8) $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$

Regole di inferenza

1) *Modus Ponendo Ponens* (MP). $(\vdash \alpha\, et\ \vdash \alpha \rightarrow \beta)\ seq\ \vdash \beta$

2) Regola di sostituzione. Sostituendo uniformemente le occorrenze di una certa variabile proposizionale con un'altra variabile o con un complesso di variabili proposizionali combinate fra loro secondo le regole di formazione date in § 3.1 all'interno di una fbf valida, quest'ultima continuerà ad essere una fbf valida del calcolo. Tale sostituzione è per ciò detta "uniforme" e può essere ricorsivamente definita come segue:

a) $\mathfrak{S}_{\alpha}^{A}\ \mathrm{C} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \alpha, \text{se C} = \mathrm{A} \\ \mathrm{C}, \textit{altrimenti} \end{cases}$

b) $\mathfrak{S}_{\alpha}^{A}\ \neg\mathrm{C} \stackrel{\text{def}}{=} \neg\mathfrak{S}_{\alpha}^{A}\ \mathrm{C}$

c) $\mathfrak{S}_{\alpha}^{A}\ \mathrm{C} * \mathrm{B} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{S}_{\alpha}^{A}\ \mathrm{C} * \mathfrak{S}_{\alpha}^{A}\ \mathrm{B},\ dove\ * \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\}$

L'uso della regola 2) è per certi aspetti superfluo ed il calcolo potrebbe esserne emendato. Ciò avrebbe comportato però la necessità di considerare non più singoli assiomi, come fatto, bensì schemi di assiomi[33], ossia insiemi di infinite proposizioni equiformi. A rigore avremmo allora dovuto utilizzare variabili di tipo differente e sostituire i simboli elencati nel linguaggio per i connettivi logici con una simbologia adeguata a questo livello espressivo oppure considerare i simboli proposizionali e quelli logici come nomi per se stessi in quell'occorrenza, impiegando magari delle virgolette. Per ragioni di chiarezza preferiamo però qui introdurre la regola 2) e proseguire con essa nello sviluppo e nella trattazione di C_1.

A questo punto possiamo introdurre gli assiomi che regolano il comportamento della negazione paraconsistente nel calcolo considerato. La vera caratteristica di questo calcolo risiede infatti proprio nella definizione di questo funtore, che risulta estremamente debole rispetto a quanto accade in sede classica. I due assiomi che andremo a presentare, sono intuitivamente considerabili come due forme del terzo escluso (TND)[34]. Da un punto di vista simbolico infatti uno è del tutto analogo alle versioni di TND più comunemente conosciute; l'altro invece ne è la versione resa mediante l'impiego di '→' e perciò anche detta *implicativa*[35].

Essi sono (C_1^-):

9) $A \lor \neg A$

10) $\neg\neg A \to A$

Non vi sono ulteriori assiomi da aggiungere per ottenere la negazione paraconsistente.

Come avevamo anticipato, gli assiomi sono dodici e mancano dunque ancora due proposizioni da assumere come primitive. Per poterle inserire nel nostro elenco, dovremo introdurre però prima la seguente definizione:

---

[33] Tale denominazione è dovuta a John von Neumann, come ha sottolineato lo stesso Curry. Cfr. Neumann, J. von, *Zur Hilbertschen Beweistheorie*, «Mathematische Zeitschrift», vol. 26, 1927, pp. 13-4. Curry, H., *Some Aspects of the Problem of Mathematical Rigor*, «Bulletin of the American Mathematical Society», vol. 47, 1941, pp. 221-41

[34] Cfr. Rybakov, V., *Admissibility of Logical Inference Rules*, North Holland, Amsterdam, 1997, p. 22

[35] La logica intuizionista, che rifiuta l'applicazione generalizzata del terzo escluso, respinge entrambe queste formule (nel senso cioè che esse sono indipendenti dal calcolo). Tra i suoi assiomi – come già segnalato – compare solo una delle due forme deboli di doppia negazione, ossia: $A \to \neg\neg A$.

Definizione 4.3 $A^{\circ} \stackrel{\text{def}}{=} \neg(A \wedge \neg A)$

Osserviamo innanzitutto che nella precedente definizione "A" va inteso come nome di variabile proposizionale e non come una proposizione esso stesso. Il contesto è infatti quello di una definizione, relazione questa che non compare nel linguaggio del calcolo e che ci colloca dunque al suo esterno. Qui come in altri contesti definitori e non di ZFU_1, trascureremo di sottolineare questo aspetto mediante un opportuno accorgimento linguistico, come l'uso ad esempio delle virgolette, quando ciò non costituirà difficoltà di interpretazione e non si presterà dunque a fraintendimenti; nella maggior parte dei casi lasceremo che sia dunque il contesto stesso a chiarirlo. Mentre, laddove lo riterremo efficace, impiegheremo i segni diacritici ' " ' e ' " ', che, posti prima e dopo una certa espressione, indicheranno la volontà di parlare o menzionare una data espressione, piuttosto che utilizzarla.

Con tale premessa si indicherà mediante A° una formula ben formata, che assume un comportamento standard, del tutto simile cioè a quello che normalmente si riscontra nei calcoli classici. La caratteristica fondamentale di tale definizione è allora quella di separare formule stabili (o *formulas well-behaved*) da formule non-stabili (*formulas ill-behaved*). Una formula è stabile quando per essa è applicabile lo schema di non-contraddizione. Una simile formula si comporta in un certo senso in maniera classica e, come vedremo, per essa varranno tutte le proprietà generalmente attribuibili alla negazione mediante la deduzione di tipo classico. Si dice invece che una formula è non-stabile se e solo se per essa la condizione sopra enunciata non vale ed è possibile quindi che all'interno di un dato sistema formale tanto A quanto ¬A siano entrambe teoremi.

Nel caso di formule stabili, indicate come A°, il fatto che queste abbiano un comportamento di tipo classico è determinato non solo da ragioni intuitive, che sarebbe facile scorgere, ma è stabilito chiaramente proprio da due specifici assiomi.

Possiamo a questo punto completare la lista di postulati[36] per il calcolo proposizionale paraconsistente C_1, aggiungendo:

11) $B^{\circ} \to [((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)]$

12) $(A^{\circ} \wedge B^{\circ}) \to [(A \wedge B)^{\circ} \wedge (A \vee B)^{\circ} \wedge (A \to B)^{\circ}]$

[36] Intenderemo qui e nel seguito i termini "assioma" e "postulato" come equivalenti.

La base assiomatica di C_1 sarà dunque così riassumibile:

Assiomi per l'implicazione

$(\rightarrow_1)$ $A\rightarrow(B\rightarrow A)$
$(\rightarrow_2)$ $(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow(A\rightarrow C))$

Assiomi per la congiunzione

$(\wedge_1)$ $(A\wedge B)\rightarrow A$
$(\wedge_2)$ $(A\wedge B)\rightarrow B$
$(\wedge_3)$ $A\rightarrow(B\rightarrow(A\wedge B))$

Assiomi per la disgiunzione

$(\vee_1)$ $A\rightarrow(A\vee B)$
$(\vee_2)$ $B\rightarrow(A\vee B)$
$(\vee_3)$ $(A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow((A\vee B)\rightarrow C))$

Assiomi per la negazione

$(\neg_1)$ $B^{\circ}\rightarrow[((A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A)]$
$(\neg_2)$ $(A^{\circ}\wedge B^{\circ})\rightarrow[(A\wedge B)^{\circ}\wedge(A\vee B)^{\circ}\wedge(A\rightarrow B)^{\circ}]$
$(\neg_3)$ $A\vee\neg A$
$(\neg_4)$ $\neg\neg A\rightarrow A$

Regole di inferenza

1) *Modus Ponendo Ponens* (MP). $(\vdash \alpha\, et \vdash \alpha \rightarrow \beta)\ seq\ \vdash \beta$

2) Regola di sostituzione di variabili proposizionali ($\mathfrak{S}^{A}_{\beta}$). Intuitivamente diciamo che sostituendo uniformemente le occorrenze di una certa variabile proposizionale con un'altra variabile o con un complesso di

variabili proposizionali combinate fra loro secondo le regole di formazione date in § 3.1 all'interno di una fbf valida quest'ultima continuerà ad essere una fbf valida del calcolo. Più esattamente ad un successione di n espressioni in cui occora l'espressione α può aggiungersi come $n+1$-esimo termine l'espressione $\alpha = \mathfrak{S}_{\beta}^{A}\alpha$ che si ottiene sostituendo in α tutte le occorrenze della variabile "A" con l'espressione β. Formalmente:

$$\frac{\alpha}{\mathfrak{S}_{\beta}^{A}\alpha}$$

Tale sostituzione è anche detta uniforme e può essere ricorsivamente definita come segue:

a) $\mathfrak{S}_{\alpha}^{A}\ \mathrm{C} \overset{\text{def}}{\equiv} \begin{cases} \alpha, \text{se C} = \text{A} \\ \text{C, altrimenti} \end{cases}$

b) $\mathfrak{S}_{\alpha}^{A}\ \neg\mathrm{C} \overset{\text{def}}{\equiv} \neg\mathfrak{S}_{\alpha}^{A}\ \mathrm{C}$

c) $\mathfrak{S}_{\alpha}^{A}\ \mathrm{C} * \mathrm{B} \overset{\text{def}}{\equiv} \mathfrak{S}_{\alpha}^{A}\ \mathrm{C} * \mathfrak{S}_{\alpha}^{A}\ \mathrm{B}$, dove $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\}$

Il calcolo così costituito sarà allora in grado di soddisfare pienamente alle due condizioni fondamentali delineate da Da Costa per individuare e definire un determinato calcolo logico come paraconsistente.

Esse richiedono quanto segue:

1° *condizione*: dato un calcolo C ($Calc(C)$), lo schema "$\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)$" non è generalmente valido in C;

2° *condizione*: se due proposizioni antinomiche sono entrambe deducibili da un certo insieme di formule, allora non può dedursi da ciò qualunque altra proposizione (cioè se: $\Gamma \vdash_C \alpha$ e $\Gamma \vdash_C \neg\alpha$, allora $\Gamma \nvdash_C \beta$, per *ogni* β)[37].

[37] Allo stesso modo il principio dello pseudo-Scoto non dovrà essere generalmente valido affinché il calcolo logico soggiacente possa dirsi paraconsistente nel senso di Da Costa.

Diciamo inoltre che SF è un sistema formale paraconsistente nel senso di Da Costa, se il suo apparato deduttivo poggia su di un calcolo logico che rispetti le due conizioni precedentemente elencate:

Definizione 4.4.1 $Par(C)$[38] $\stackrel{\text{def}}{=} \nvdash_C PNC\ et\ \nvdash_C PSC$[39]

Definizione 4.4.2 $Par(SF) \stackrel{\text{def}}{=} [(Log(SF) = C) \wedge Par(C)]$

[38] Indicheremo con '$Par(C)$' un calcolo che è paraconsistente nel senso di Da Costa.

[39] In un tale calcolo non sono quindi deducibili le proposizioni $\neg(A \wedge \neg A)$ e $(A \wedge \neg A) \rightarrow B$, per ogni A ed ogni B. Si darà con ciò la possibilità di ospitare all'interno di un determinato sistema formale SF proposizioni aventi un certo grado di contraddittorietà, senza che questo comporti la trivializzazione dell'intero sistema.

§ 4.2 *Sinossi del calcolo C_1. Concetto di dimostrazione e teorema*

Assiomi

1) $A\to(B\to A)$

2) $(A\to B)\to((A\to(B\to C))\to(A\to C))$

3) $(A\wedge B)\to A$

4) $(A\wedge B)\to B$

5) $A\to(B\to(A\wedge B))$

6) $A\to(A\vee B)$

7) $B\to(A\vee B)$

8) $(A\to C)\to((B\to C)\to((A\vee B)\to C))$

9) $B^{\circ}\to[(A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A)]$

10) $(A^{\circ}\wedge B^{\circ})\to[\,(A\wedge B)^{\circ}\wedge(A\vee B)^{\circ}\wedge(A\to B)^{\circ}]$

11) $A\vee\neg A$

12) $\neg\neg A\to A$

*) $A\leftrightarrow B \overset{\text{def}}{=} (A\to B)\wedge(B\to A)$

**) $A^{\circ}\wedge B^{\circ}\to(A\leftrightarrow B)^{\circ}$

Regole di inferenza

1) *Modus Ponendo Ponens* (MP). $\dfrac{\alpha,\ \alpha\to\beta}{\beta}$

2) Regola di sostituzione di variabili proposizionali ($\mathfrak{S}^{A}_{\beta}$). d un successione di n espressioni in cui occora l'espressione α può aggiungersi come $n+1$-esimo termine l'espressione $\alpha = \mathfrak{S}^{A}_{\beta}\alpha$ che si ottiene sostituendo in α tutte le occorrenze della variabile "A" con l'espressione β.

Formalmente:

$$\frac{\alpha}{\mathfrak{S}^{A}_{\beta}\alpha}$$

Tale sostituzione è anche detta uniforme e può essere ricorsivamente definita come segue:

1) $\mathfrak{S}^{A}_{\alpha}\, \mathrm{C} \overset{\text{def}}{\equiv} \begin{cases} \alpha, \text{se C} = \text{A} \\ \text{C, altrimenti} \end{cases}$

2) $\mathfrak{S}^{A}_{\alpha} \neg \mathrm{C} \overset{\text{def}}{\equiv} \neg\mathfrak{S}^{A}_{\alpha}\, \mathrm{C}$

3) $\mathfrak{S}^{A}_{\alpha}\, \mathrm{C} * \mathrm{B} \overset{\text{def}}{\equiv} \mathfrak{S}^{A}_{\alpha}\, \mathrm{C} * \mathfrak{S}^{A}_{\alpha}\, \mathrm{B}$, dove $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\}$

Possiamo ora definire con maggior rigore cosa sia una dimostrazione e cosa sia una tesi dimostrata o più brevemente un teorema in C_1:

Definizione 4.5 C_1-$Dim\{\theta_i\}_{i\leq s}$ A[40] $\overset{\text{def}}{\equiv}$ $s < \omega$ *et* (*om i*) ($i \leq s$ *seq* ($\theta_i \in Ax$[41] *vel* (*ex j*, *k*) ($j \neq k < i$ *et* θ_i = *Reg*-1(θ_j, θ_k)[42]) *vel* (*ex j*) ($j < i$ *et* θ_i = *Reg*-2(θ_j)[43]))) *et* θ_s= A

Definizione 4.6 $\vdash_{C_1}$A $\overset{\text{def}}{\equiv}$ (*ex* $\{\theta_i\}_{i\leq s}$) (C_1-$Dim\{\theta_i\}_{i\leq s}$ A)

40 'C_1-$Dim\{\theta_i\}_{i\leq s}$ A' indica che la successione 'θ' è una dimostrazione della formula A se e solo se le espressioni occorrenti in 'θ' sono assiomi di C_1 o sequenze ottenute attraverso l'utilizzo delle regole di inferenza applicate agli assiomi o ai teoremi già ottenuti secondo questa procedura.
41 '*Ax*' indica l'insieme degli assiomi logici di C_1.
42 L'espressione '*Reg*-1(θ_j, θ_k)' indica che la formula 'θ_i' è una dimostrazione ottenuta mediante l'applicazione della regola 1, vale a dire la regola del *modus ponens*, applicato alle formule θ_j e θ_k.
43 L'espressione '*Reg*-1(θ_j, θ_k)' indica che la formula θ_i è una dimostrazione ottenuta mediante l'applicazione della regola 2, vale a dire la regola di sostituzione uniforme, applicata alla formula θ_j.

2. *Riflessività di C_1 e metateorema di deduzione (MD)*

In questo paragrafo ci soffermeremo sulla verifica di una proprietà molto importante del calcolo C_1 ovvero la metaproprietà detta di riflessività e proveremo un utile metateorema, detto di deduzione o metateorema di Herbrand-Tarski[44], anch'esso valido per C_1.

I due risultati che otterremo sono in parte legati in quanto, una volta stabilita la validità del principio di identità per C_1, è possibile disporne in un passo della dimostrazione per il teorema di deduzione. Tuttavia non è del tutto corretto pensare che quest'ultimo riposi sulla validità della prima condizione giacché entrambi dipendono sostanzialmente da condizioni che li precedono e che sono dettate dalla scelta degli assiomi che caratterizzano l'implicazione e dalla regola MP[45].

In generale i calcoli che dispongono di quest'ultimo metateorema possono contare su un utilissimo strumento di derivazione, che semplifica enormemente le dimostrazioni. Sarà dunque importante provarne la validità anche per la logica proposizionale paraconsistente in esame, la quale è – come visto – dotata di un funtore di implicazione materiale.

Da un punto di vista teorico, a livello proposizionale il teorema di deduzione è in grado di offrire il seguente beneficio: scaricare le assunzioni scritte alla sinistra del simbolo di deduzione, introducendole come antecedenti di un condizionale, il cui conseguente è appunto la formula dedotta da un certo insieme di formule Γ.

Da un punto di vista pratico invece il metateorema di deduzione giustifica pienamente un ragionamento fatto sotto ipotesi e permette così di assumere quelle espressioni che vanno a costituire la protasi di un determinato teorema, all'interno del quale compaia ovviamente il connettivo '$\rightarrow$'. In tal modo il risultato ottenuto da Herbrand-Tarski permette di riflettere certe modalità di ragionamento abbastanza spontanee e naturali soprattutto nella pratica dei sistemi formali matematici e non, evitando la difficoltà di dover provare un'intera espressione di tipo implicativo[46], semplicemente assumendo la verità degli antecedenti, sui quali

---

[44] Cfr. Dalla Chiara, M. L., *Modelli sintattici e semantici delle teorie elementari*, *op. cit.*, p. 45

[45] La presenza degli assiomi 1) e 2) di cui al § 4.1 più la regola del *modus ponens* determineranno qui il comportamento del funtore di implicazione. Un calcolo dotato di tali assiomi si dice generalmente possedere una vera e propria implicazione (materiale). Cfr. Malinowski, G., *Many-Valued Logics*, Clarendon Press, Oxford, 1993, p. 34

[46] Cfr. Kneebone, G. T., *Mathematical Logic and The Foundations of Mathematics*, Van Nostrand, New York, 1963; Dover, New York, 2001, pp. 78-86

varrà con opportune limitazioni la regola di sostituzione $\frac{\alpha}{\mathfrak{S}^A_\beta \alpha}$[47].

Al fine di semplificare le dimostrazioni di alcuni importanti teoremi di C_1 presi in esame nei paragrafi successivi e agevolare così la nostra indagine, dimostreremo di seguito la disponibilità immediata del teorema di deduzione per C_1.

Procederemo dapprima col dimostrare il "principio di identità" per la logica proposizionale e dunque verificheremo la riflessività[48] di C_1:

Teorema 4.1 $A \to A$

Dimostrazione

1)	A→(A→A)	$Ass.1$
2)	(A→(A→A))→((A→((A→A)→A))→(A→A))	$\mathfrak{S}^C_A(\mathfrak{S}^B_{A\to A}Ass.2)$
3)	(A→((A→A)→A))→(A→A)	da 1), 2) per MP
4)	A→((A→A)→A)	$\mathfrak{S}^B_{A\to A}Ass.1$
5)	A→A	da 3), 4) per MP

Metateorema 4.1 Se da Γ, che è un insieme di formule, e da una fbf α[49] si deduce una fbf β, allora $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$. Se Γ è vuoto, allora $\vdash \alpha \to \beta$.

Dimostrazione[50]

Per provare questo metateorema abbiamo bisogno di considerare quattro casi e di procedere per induzione sulla complessità delle formule[51]. Innanzitutto

[47] Non devono esserci applicazioni della regola di sostituzione per variabili proposizionali alle assunzioni fatte.

[48] La riflessività è una metaproprietà di calcolo ed afferma – come già visto – che: $[(\alpha \in \Gamma)\ seq\ (\Gamma \vdash \alpha)]$. Se si considera il caso in cui $\Gamma = \{\alpha\}$, allora si ha che $\alpha \vdash \alpha$. Applicando ad esso il metateorema di deduzione è possibile ottenere: $\vdash \alpha \to \alpha$. Si tratta allora, come ha osservato Galvan, di un modo «tecnicamente elaborato» di dire che «la posizione di uno stato di cose implica il tenersi fermo di tale stato di cose». All'interno di una certa pratica logica, essa è anche nota come "regola di assunzione a zero premesse". Cfr. Galvan, S., *Logiche intensionali*, Franco Angeli, 1991, pp. 22-3

[49] Più precisamente se $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, allora $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, dove "$\Gamma, \alpha \vdash \beta$" va inteso come "$[(\Gamma \cup \{\alpha\}) \vdash \beta$".

[50] Cfr. Mendelson, E., *Intrduction to Mathematical Logic*, *op. cit.*, pp. 37-8

[51] Per "complessità" di una formula ben formata si intende il numero di occorrenze di connettivi logici presenti in una data espressione.

ipotizziamo una dimostrazione "$\beta_1, \dots, \beta_n$" di β a partire da $\Gamma \cup \{\alpha\}$, dove $\beta = \beta_n$. Per induzione su m proveremo allora che $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta_m$, dove $1 \leqslant m \leqslant n$.

Base. β_m, dove $m = 1$

1° caso: sia β_1 un assioma del calcolo. In questo caso, in virtù dell'assioma 1, otteniamo $\beta_1 \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta_1)$ e per MP $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta_1$.

2° caso: sia β_1 in Γ. Se β_1 è in Γ, allora $\beta_1 \in \Gamma$ implica $\Gamma \vdash \beta_1$ e dunque $\Gamma \vdash \beta_1$. Inoltre sempre per l'assioma 1 possiamo provare che $\Gamma \vdash \beta_1 \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta_1)$ e così, ancora per MP, $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta_1$.

3° caso: sia β_1 α. In questo caso, in virtù del teorema 4.1, abbiamo $\vdash \alpha \rightarrow \beta_1$, ossia $\alpha \rightarrow \beta_1$ è deducibile da qualsiasi insieme di formule e dunque anche da Γ. Così $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta_1$.

Passo induttivo. β_m, dove $m > 1$

4° caso: si supponga che $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta_l$, per ogni $l < m$. Ora β_m può essere un assioma, può essere α, può essere in Γ oppure ancora potrebbe essere derivata per MP da due proposizioni β_h e β_i, dove $h < m$, $i < m$ e β_i, risulta della forma $\beta_h \rightarrow \beta_m$. Nelle prime tre circostanze si può ragionare come nei casi 1-3 esaminati in precedenza. Per quanto riguarda invece l'ultima ipotesi, ragioneremo come segue: per ipotesi di induzione, assumiamo che $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta_h$ e $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow (\beta_h \rightarrow \beta_m)$. Applicando l'assioma 2, possiamo ricavare $\Gamma \vdash (\alpha \rightarrow \beta_h) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta_h \rightarrow \beta_m)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta_m))$. Considerando la prima delle due ipotesi fatte e applicando la regola del *modus ponens*, otteniamo dapprima $\Gamma \vdash (\alpha \rightarrow (\beta_h \rightarrow \beta_m)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta_m)$ e poi $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta_m$. La dimostrazione per induzione è così completa e si può osservare che se $m = n$, allora il risultato da dimostrare è proprio quello ottenuto.

3. *Alcuni teoremi, esempi di dimostrazione e metateoremi di* C_1^+

Nel calcolo proposizionale paraconsistente C_1 abbiamo un certo numero di teoremi del tutto analoghi a quelli ottenibili nei calcoli di tipo classico. Essi riguardano una serie di enunciati del calcolo positivo C_1^+, per i quali si dispone di connettivi capaci quanto quelli dei calcoli logici standard.

Daremo di seguito alcuni esempi di dimostrazione:

Teorema 4.2 $\vdash A \leftrightarrow A$

Dimostrazione

1) $A \rightarrow A$	$teor.$ 4.1
2) $A \leftarrow A$	da 1) per def. '$\leftarrow$'
3) $(A \rightarrow A) \rightarrow [(A \leftarrow A) \rightarrow [(A \rightarrow A) \wedge (A \leftarrow A)]]$	$\mathfrak{S}^B_{A\leftarrow A}(\mathfrak{S}^A_{A\rightarrow A} Ass. 5)$
4) $(A \leftarrow A) \rightarrow [(A \rightarrow A) \wedge (A \leftarrow A)]$	da 1), 2) per MP
5) $(A \rightarrow A) \wedge (A \leftarrow A)$	da 2), 3) per MP
6) $A \leftrightarrow A$	da 4) per def. '$\leftrightarrow$'

Teorema 4.3 $\vdash A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$

Dimostrazione

1) $A \rightarrow B$	Ip. 1
2) $B \rightarrow C$	Ip. 2
3) A	Ip. 3
4) B	da 1), 3) per MP
5) C	da 2), 4) per MP
6) $A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash C$	da 1)-5)
7) $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$	da 6) per MD

Teorema 4.4 $\big(A \rightarrow (B \rightarrow C)\big) \vdash \big(B \rightarrow (A \rightarrow C)\big)$

Dimostrazione

1) A→(B→C)	Ip. 1
2) B	Ip. 2
3) A	Ip. 3
4) B→C	da 1), 3) per MP
5) C	da 2), 4) per MP
6) A→(B→C), B, A⊢C	da 1)-5)
7) A→(B→C), B⊢A→C	da 6) per MD
8) A→(B→C)⊢B→(A→C)	da 7) per MD

Teorema 4.5 $\left(A \to (B \to C)\right) \vdash \left((A \wedge B) \to C\right)$

Dimostrazione

1) A→(B→C)	Ip. 1
2) A∧B	Ip. 2
3) (A∧B)→A	$Ass.3$
4) A	da 2), 3) per MP
5) (A∧B)→B	$Ass.4$
6) B	da 2), 5) per MP
7) B→C	da 1), 4) per MP
8) C	da 6), 7) per MP
9) A→(B→C), (A∧B)⊢C	da 1)-8)
10) A→(B→C)⊢(A∧B)→C	da 9) per MD

Teorema 4.6 $\left((A \wedge B) \to C\right) \vdash \left(A \to (B \to C)\right)$

Dimostrazione

1) (A∧B)→C	Ip. 1
2) A	Ip. 2
3) B	Ip. 3
4) A→(B→(A∧B))	$Ass.5$
5) (B→(A∧B))	da 2), 4) per MP
6) A∧B	da 3), 5) per MP
7) C	da 1), 6) per MP
8) (A∧B)→C, A, B⊢C	da 1)-7)
9) (A∧B)→C, A, ⊢B→C	da 8) per MD
10) (A∧B)→C⊢A→(B→C)	da 9) per MD

Teorema 4.7 $(A \to B) \vdash [(B \to C) \to (A \to C)]$

Dimostrazione

1)	$A \to B$	Ip. 1
2)	$B \to C$	Ip. 2
3)	A	Ip. 3
4)	B	da 1), 3) per MP
5)	C	da 2), 4) per MP
6)	$A \to B, B \to C, A \vdash C$	da 1)-5)
7)	$A \to B, B \to C \vdash A \to C$	da 6) per MD
8)	$A \to B \vdash (B \to C) \to (A \to C)$	da 7) per MD

Teorema 4.8 $(A \to B) \vdash [(C \to A) \to (C \to B)]$

Dimostrazione

1)	$A \to B$	Ip. 1
2)	$C \to A$	Ip. 2
3)	C	Ip. 3
4)	A	da 2), 3) per MP
5)	B	da 1), 4) per MP
6)	$A \to B, C \to A, C \vdash B$	da 1)-5)
7)	$A \to B, C \to A \vdash C \to B$	da 6) per MD
8)	$A \to B \vdash (C \to A) \to (C \to B)$	da 7) per MD

Teorema 4.9 $(A \to B) \vdash [(A \wedge C) \to (B \wedge C)]$

Dimostrazione

1)	$A \to B$	Ip. 1
2)	$A \wedge C$	Ip. 2
3)	$(A \wedge C) \to A$	$\mathfrak{S}_C^B Ass. 4$
4)	A	da 2), 3) per MP
5)	B	da 1), 4) per MP
6)	C	da 2) per Ass. 4

7) $B\to(C\to(B\wedge C))$	$\mathfrak{S}_C^B(\mathfrak{S}_B^A Ass.5)$
8) $C\to(B\wedge C)$	da 5), 7) per MP
9) $B\wedge C$	da 6), 7) per MP
10) $A\to B, (A\wedge C)\vdash(B\wedge C)$	da 1)-9)
11) $A\to B\vdash(A\wedge C)\to(B\wedge C)$	da 10) per MD

Teorema 4.10 $(A \to B) \vdash [(C\wedge A) \to (C\wedge B)]$

Dimostrazione

1) $A\to B$	Ip. 1
2) $C\wedge A$	Ip. 2
3) $(C\wedge A)\to C$	$\mathfrak{S}_A^B(\mathfrak{S}_C^A Ass.3)$
4) C	da 2), 3) per MP
5) $(C\wedge A)\to A$	$\mathfrak{S}_A^B(\mathfrak{S}_C^A Ass.4)$
6) A	da 2), 5) per MP
7) B	da 1), 6) per MP
8) $C\to(B\to(C\wedge B))$	$\mathfrak{S}_C^A Ass.5$
9) $B\to(C\wedge B)$	da 4), 8) per MP
10) $C\wedge B$	da 7), 9) per MP
11) $A\to B, C\wedge A\vdash C\wedge B$	da 1)-10)
12) $A\to B\vdash(C\wedge A)\to(C\wedge B)$	da 11) per MD

Teorema 4.11 $(A \to B) \to \big[(A \to C) \to \big(A \to (B\wedge C)\big)\big]$

Dimostrazione

1) $A\to B$	Ip. 1
2) $A\to C$	Ip. 2
3) A	Ip. 3
4) B	da 1), 3) per MP
5) C	da 2), 3) per MP
6) $B\to(C\to(B\wedge C))$	$\mathfrak{S}_C^B(\mathfrak{S}_B^A Ass.5)$
7) $C\to(B\wedge C)$	da 4), 6) per MP
8) $(B\wedge C)$	da 5), 7) per MP
9) $A\to B, A\to C, A\vdash(B\wedge C)$	da 1)-8)
10) $A\to B, A\to C\vdash(A\to(B\wedge C))$	da 9) per MD

11) A→B⊢(A→C)→(A→(B∧C)) da 10) per MD
12) (A→B)→((A→C)→(A→(B∧C))) da 11) per MD

Teorema 4.12 $\vdash [A \to (A \to (A \to B))] \to [A \to (A \to \mathrm{B})]$

Dimostrazione

1)	A→(A→(A→B))	Ip. 1
2)	A	Ip. 2
3)	A	Ip. 3
4)	A→(A→B)	da 1), 2) per MP
5)	A→B	da 2), 4) per MP
6)	B	da 2), 5) per MP
7)	A→(A→(A→B)), A, A⊢B	da 1)-6)
8)	A→(A→(A→B)), A⊢A→B	da 7) per MD
9)	(A→(A→(A→B)))⊢(A→(A→B))	da 8) per MD
10)	(A→(A→(A→B)))→(A→(A→B))	da 9) per MD

Teorema 4.13 $\vdash \underbrace{(A \to (\ldots \to (A \to B) \ldots))}_{n+1\ volte} \to \underbrace{(A \to \cdots (A \to B) \ldots)}_{n\ volte}$

Dimostrazione

Questo teorema richiede una dimostrazione per induzione. La base dell'induzione consiste nel $teor.$ 4.16. Il passo può essere così concepito: sia dimostrato che $\underbrace{(A\to(\ldots\to(A\to B)\ldots)}_{n+2\ volte}\to\underbrace{(A\to\ldots(A\to B)\ldots)}_{n+1\ volte}$. Per compiere il passo basta tener presente che la riduzione delle premesse ridondanti, dovuta alla possibilità di contrarre una premessa che compaia più volte nell'antecedente, è sostanzialmente legata all'applicazione del MP. Dovremo quindi dimostrare che $[\underbrace{(A\to(\ldots\to(A\to B)\ldots)}_{n+2\ volte}\to\underbrace{(A\to\ldots(A\to B)\ldots)}_{n+1\ volte}]\to$ $\to[\underbrace{(A\to(\ldots\to(A\to B)\ldots)}_{n+1\ volte}\to\underbrace{(A\to\ldots(A\to B)\ldots)}_{n\ volte}]$. Avendo a disposizione "A" fra le ipotesi, per qualunque numero di volte si ripeta "A" come antecedente nell'implicazione "A→B", si potrà sempre applicare la regola MP, riducendo di un'occorrenza l'enunciato "A" figurante nella protasi. Così se l'ipotesi "A" ci consente di passare da $n+2$ a $n+1$, reiterando questa medesima operazione logica (MP), possiamo passare senza particolari difficoltà da $n+1$ ad n.

Diamo di seguito alcune tra le tesi più importanti valide in C_1^+:

Teorema 4.14 $\vdash \big(A \to (A \to B)\big) \to (A \to B)$

Teorema 4.15 $(A \to B) \vdash [(A \vee C) \to (B \vee C)]$

Teorema 4.16 $(A \to B) \vdash [(C \vee A) \to (C \vee B)]$

Teorema 4.17 $\vdash (A \leftrightarrow B) \to (B \leftrightarrow A)$

Teorema 4.18 $(A \leftrightarrow B), (B \leftrightarrow C) \vdash (A \leftrightarrow C)$

Teorema 4.19 $\vdash (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$

Teorema 4.20 $\vdash \big(A \to (A \to B)\big) \to (A \to B)$

Teorema 4.21 $\vdash \big((A \to B) \to A\big) \to A$

Teorema 4.22 $\vdash A \vee (A \to B)$

Possiamo a questo punto riprendere il discorso avviato al § 4.1 e stabilire con maggior esattezza che C_1 è un calcolo normale, ossia:

Metateorema 4.2 $Norm(C_1)$[52]

Dimostrazione

Immediata in quanto C_1 possiede la regola del *modus ponens* e deduce il teorema 4.1. Inoltre esso è monotono.

Stabiliamo un ultimo metateorema prima di chiudere questo paragrafo. Esso proverà che il calcolo positivo intuizionista (J_1^+) è contenuto in C_1.

Metateorema 4.3 $J_1^+ \dot{\subseteq} C_1$[53]

Dimostrazione

Per provare il metateorema 4.3 occorrerà dimostrare sostanzialmente che C_1 «contiene» J_1^+. Cominciamo col precisare la nozione di "contenimento" di un calcolo o di una sua parte all'interno di un altro. Diciamo che un calcolo è teoreticamente incluso in un altro se e solo vale la seguente condizione:

$$Ass(K\ ) \subseteq Teor(K')$$[54]

Trattandosi qui di indagare un rapporto tra calcoli logici, privi di assiomi propri, la relazione di inclusione tra calcoli costituirà un'estensione teoretica di K rispetto a K', essi sono linguisticamente invarianti, nel senso di contenere in partenza tutte le lettere predicative e tutte le lettere funzionali[55].

Nel nostro caso specfico occorrerà dunque verificare che:

[52] La simbologia '$Norm(C_1)$' sta per "C_1 è normale".

[53] Questo tipo di relazione, indicata mediante '$\dot{\subseteq}$', è anche detta "estensione teoretica (im)propria" di un calcolo logico K da parte di un calcolo K' (cfr. Dalla Chiara, M. L., *Modelli sintattici e semantici delle teorie elementari*, *op. cit.*, pp. 44-61). L'enunciato del metateorema 4.3 asserisce allora che C_1 è un'estensione teoretica di J_1^+.

[54] L'espressione '$Teor(K)$' indica l'insieme dei teoremi di C_1, mentre '$Ass(K'\ )$' l'insieme degli assiomi di K'. Pertanto la relazione di inclusione insiemistica così delineata indicherà il fatto che ogni assioma di K è un teorema di K'.

[55] In tal caso si può anche ridefinire l'estensione teoretica tra due calcoli K e K', tale cioè che $(K \dot{\subseteq} K')$, come la condizione per cui K' si dice essere una "soprateoria" di K. Inversamente allora K' si dirà un sottoteoria di K. In base all'enunciato del metateorema si dimostrerà allora che J_1^+ è una sottoteoria di C_1 o inversamente che C_1 è una soprateoria di J_1^+ $(C_1 \dot{\supseteq} J_1^+)$.

$$Ass(J_1^+) \subseteq Teor(C_1)$$ [56]

Tale relazione è facilmente verificabile osservando direttamente la lista di assiomi per J_1^+. Essa si compone generalmente in questo modo[57]:

Assiomi di J_1^+:

1) A→(B→A)
2) (A→B)→((A→(B→C))→(A→C))
3) (A∧B)→A
4) (A∧B)→B
5) A→(B→(A∧B))

---

[56] L'espressione '$Teor(C_1)$' indica l'insieme dei teoremi di C_1, mentre '$Ass(J_1^+)$' l'insieme degli assiomi di J_1^+.

[57] Abbiamo qui utilizzato la costruzione di Kleene (cfr. Kleene, S., *Introduction to Metamathematics*, *op. cit.*, p. 82), limitatamente al gruppo A e senza indicare ovviamente gli assiomi che regolano il funtore di negazione. Per ulteriori trattazioni è possibile consultare: Heyting, A., *Intuitionism. An Introduction*, North Holland, Amsterdam, 1956, pp. 97-114, dove l'autore fa uso della base assiomatica esposta nel 1930 (cfr. Heyting, A., *Die formalen Regeln der intuitionistichen Logik*, *op. cit.*), facente uso della seguente tavola originale di postulati:

Assiomi:

A→(A∧A)
(A∧B)→(B∧A)
(A→B)→((A∧C)→(B∧C))
((A→B)∧((B→ C))→(A→C)
A→(B→A)
(A∧(A→B))→B
A→(A∨B)
(A∨B)→(B∨A)
((A→C)∧(B→C))→((A∨B)→C)

Regola:

$$\frac{\alpha, \alpha\to\beta}{\beta} \qquad \text{MP}$$

Cfr. Priest, G., *An Introduction to Non-Classical Logic*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001, pp. 103-19. Troelstra, A., *Principles of Intuitionism*, Springer, Berlin-Heidelberg, 1969, pp. 5-11. Galvan, S., *Non contraddizione e Terzo escluso*, Franco Angeli, Milano, 1997, pp. 13-37. Noto, A., *Logiche non classiche*, Bulzoni, Roma, 1975, pp. 127-48

6) $A \to (A \vee B)$

7) $B \to (A \vee B)$

8) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

Regola di J_1^+:

$$\frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$$

Si può notare allora che il calcolo J_1^+ condivide gli stessi assiomi di C_1^+; inoltre dato che C_1^+ è un sottocalcolo di C_1, costituendone la parte positiva, ed essendo tutti gli assiomi teoremi essi stessi, allora ne consegue che $Ass(J_1^+) \subseteq Teor(C_1)$.

4. *Alcuni teoremi in C_1*

Dimostreremo ora alcune proposizioni di C_1 particolarmente rilevanti, che si avvalgono dell'operatore di negazione. Fra di esse vi sono anche leggi molto controverse, presenti nel calcolo classico stesso. Esse sono note come legge dell'autofondazione e legge dell'autocontraddizione[58] e costituiscono due particolari forme di *reductio ad absurdum*, con cui oggi si usa riscrivere una legge molto impiegata nel corso dei secoli, soprattutto nel Settecento, e nota come *consequentia mirabilis* o legge di Clavius[59].

Dimostreremo poi alcuni teoremi del calcolo paraconsistente C_1, che fanno uso dell'operatore di stabilità illustrato nella definizione 4.3 a titolo di esempio.

Teorema 4.23 $B^{\circ}, A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$

Dimostrazione

1) B°	Ip. 1
2) $A \rightarrow B$	Ip. 2
3) $\neg B$	Ip. 3
4) $B^{\circ} \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)]$	$Ass.9$
5) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$	da 1) e 4) per MP
6) $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$	da 2) e 5) per MP
7) $\neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$	$\mathfrak{S}_A^B(\mathfrak{S}_{\neg B}^A Ass.1)$
8) $A \rightarrow \neg B$	da 3), 7) per MP
9) $\neg A$	da 6), 8) per MP
10) $B^{\circ}, A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$	da 1)-9)
11) $B^{\circ}, A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$	da 10) per MD

Teorema 4.24 $A^{\circ}, \neg A \rightarrow A \vdash \neg\neg A$

Dimostrazione

1) A°	Ip. 1

[58] Cfr. Galvan, S., *Logiche intensionali*, *op. cit.*, pp. 32-3

[59] Cfr. Bellissima, F., Pagli, P., *Consequentia mirabilis: una regola logica fra matematica e filosofia*, Olschki, Firenze, 1996

2) $\neg A \rightarrow A$ — Ip. 2
3) $A^{\circ} \rightarrow [(\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg\neg A)]$ — $\mathfrak{S}_{A}^{B}(\mathfrak{S}_{\neg A}^{A} Ass.9)$
4) $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg\neg A)$ — da 1), 3) per MP
5) $(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg\neg A$ — da 2), 4) per MP
6) $\neg A \rightarrow \neg A$ — $\mathfrak{S}_{\neg A}^{A} teor. 4.1$
7) $\neg\neg A$ — da 5), 6) per MP
8) $A^{\circ}, \neg A \rightarrow A \vdash \neg\neg A$ — da 1)-8)

Teorema 4.25 $A^{\circ}, A \vdash \neg\neg A$

Dimostrazione

1) A° — Ip. 1
2) A — Ip. 2
3) $A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$ — $\mathfrak{S}_{\neg A}^{B} Ass.1$
4) $A^{\circ} \rightarrow [(\neg A \rightarrow A) \rightarrow \neg\neg A]$ — $teor.19$
5) $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow \neg\neg A$ — da 1), 4) per MP
6) $A \rightarrow \neg\neg A$ — $\mathfrak{S}_{\neg\neg A}^{C}(\mathfrak{S}_{\neg A \rightarrow A}^{B} teor. 4.3)$
7) $\neg\neg A$ — da 2), 6) per MP
8) $A^{\circ}, A \vdash \neg\neg A$ — da 1)-7)

Teorema 4.26 $B^{\circ}, A \rightarrow \neg B \vdash B \rightarrow \neg A$

Dimostrazione

1) B° — Ip. 1
2) $A \rightarrow \neg B$ — Ip. 2
3) B — Ip. 3
4) $B^{\circ} \rightarrow [(A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg A)]$ — $\mathfrak{S}_{\neg B}^{B} Ass.9$
5) $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg A)$ — da 1), 4) per MP
6) $(A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg A$ — da 2), 5) per MP
7) $B^{\circ}, B \vdash \neg\neg B$ — $\mathfrak{S}_{B}^{A} teor. 4.21$
8) $B^{\circ} \vdash B \rightarrow \neg\neg B$ — da 7) per MD
9) $B^{\circ} \rightarrow (B \rightarrow \neg\neg B)$ — da 8) per MD
10) $B \rightarrow \neg\neg B$ — da 1), 9) per MP
11) $\neg\neg B$ — da 3), 10) per MP

12) $\neg\neg B\to(A\to\neg\neg B)$	$\mathfrak{S}^{B}_{A}(\mathfrak{S}^{A}_{\neg\neg B}Ass.1)$
13) $A\to\neg\neg B$	da 11), 12) per MP
14) $\neg A$	da 7), 13) per MP
15) $B^{\circ}, A\to\neg B, B\vdash\neg A$	da 1)-14)
16) $B^{\circ}, A\to\neg B\vdash B\to\neg A$	da 15) per MD

Teorema 4.27 $B^{\circ},\neg A\to B \vdash \neg B\to A$

Dimostrazione

1) B°	Ip. 1
2) $\neg A\to B$	Ip. 2
3) $\neg B$	Ip. 3
4) $B^{\circ}\to[(\neg A\to B)\to((\neg A\to\neg B)\to\neg\neg A)]$	$\mathfrak{S}^{A}_{\neg A}Ass.9$
5) $(\neg A\to B)\to((\neg A\to\neg B)\to\neg\neg A)$	da 1), 4) per MP
6) $(\neg A\to\neg B)\to\neg\neg A$	da 2), 5) per MP
7) $\neg B\to(\neg A\to\neg B)$	$\mathfrak{S}^{B}_{\neg A}(\mathfrak{S}^{A}_{\neg B}Ass.1)$
8) $\neg A\to\neg B$	da 3), 7) per MP
9) $\neg\neg A$	da 6), 8) per MP
10) $\neg\neg A\to A$	$Ass.12$
11) A	da 9), 10) per MP
12) $B^{\circ}, \neg A\to B, \neg B\vdash A$	da 1)-11)
13) $B^{\circ}, \neg A\to B\vdash\neg B\to A$	da 12) per MD

Teorema 4.28 $B^{\circ},\neg A\to\neg B \vdash B\to A$

Dimostrazione

1) B°	Ip. 1
2) $\neg A\to\neg B$	Ip. 2
3) B	Ip. 3
4) $B^{\circ}\to[(\neg A\to B)\to((\neg A\to\neg B)\to\neg\neg A)]$	$\mathfrak{S}^{A}_{\neg A}Ass.9$
5) $(\neg A\to B)\to((\neg A\to\neg B)\to\neg\neg A)$	da 1), 4) per MP
6) $B\to(\neg A\to B)$	$\mathfrak{S}^{B}_{\neg A}(\mathfrak{S}^{A}_{B}Ass.1)$
7) $\neg A\to B$	da 3), 6) per MP
8) $(\neg A\to\neg B)\to\neg\neg A)$	da 5), 7) per MP

9)	$\neg\neg A$	da 2), 8) per MP
10)	$\neg\neg A\to A$	$Ass.12$
11)	A	da 9), 10) per MP
12)	$B^{\circ}, \neg A\to\neg B, B\vdash A$	da 1)-11)
13)	$B^{\circ}, \neg A\to\neg B\vdash B\to A$	da 12) per MD

Teorema 4.29 $\vdash (A\to\neg A)\to\neg A$

Dimostrazione

1)	$A\to\neg A$	Ip.
2)	$A\vee\neg A$	$Ass.11$
3)	$\neg A\to\neg A$	$\mathfrak{S}^{A}_{\neg A} teor.4.1$
4)	$(A\to\neg A)\to((\neg A\to\neg A)\to((A\vee\neg A)\to A))$	$\mathfrak{S}^{C}_{\neg A}(\mathfrak{S}^{B}_{\neg A} Ass.8)$
5)	$(\neg A\to\neg A)\to((A\vee\neg A)\to A)$	da 1), 4) per MP
6)	$(A\vee\neg A)\to A$	da 3), 5) per MP
7)	A	da 2), 6) per MP
8)	$A\to\neg A\vdash\neg A$	da 1)-7)
9)	$(A\to\neg A)\to\neg A$	da 8) per MD

Teorema 4.30 $\vdash (\neg A\to A)\to A$

Dimostrazione

1)	$\neg A\to A$	Ip.
2)	$A\vee\neg A$	$Ass.11$
3)	$A\to A$	$teor.4.1$
4)	$(\neg A\to A)\to((A\to A)\to((\neg A\vee A)\to A))$	$\mathfrak{S}^{B}_{A}(\mathfrak{S}^{A}_{\neg A} Ass.8)$
5)	$(A\to A)\to((\neg A\vee A)\to A)$	da 1), 4) per MP
6)	$(\neg A\vee A)\to A$	da 3), 5) per MP
7)	A	da 2), 6) per MP[60]
8)	$\neg A\to A\vdash A$	da 1)-7)
9)	$(\neg A\to A)\to A$	da 8) per MD

[60] Sfruttiamo qui l'implicazione "$(A\vee\neg A) \to (\neg A\vee A)$".

Teorema 4.31 $\vdash A^{\circ\circ}$

Dimostrazione

1) $\neg\neg[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)]$ Ip.

2) $\neg\neg[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)]\rightarrow[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)]$
$\mathfrak{S}^{A}_{[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)]}Ass.12$

3) $\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)$ da 1), 2) per MP

4) $[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)]\rightarrow\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)$ $\mathfrak{S}^{B}_{\neg\neg(A\wedge\neg A}\left(\mathfrak{S}^{A}_{\neg(A\wedge\neg A)}Ass.4\right)$

5) $\neg\neg(A\wedge\neg A)$ da 3), 4) per MP

6) $[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)]\rightarrow\neg(A\wedge\neg A)$ $\mathfrak{S}^{B}_{\neg\neg(A\wedge\neg A}\left(\mathfrak{S}^{A}_{\neg(A\wedge\neg A)}Ass.3\right)$

7) $\neg(A\wedge\neg A)$ da 3), 6) per MP

8) $\neg\neg(A\wedge\neg A)\rightarrow(A\wedge\neg A)$ $\mathfrak{S}^{A}_{A\wedge\neg A}Ass.12$

9) $A\wedge\neg A$ da 5), 8) per MP

10) $(A\wedge\neg A)\rightarrow A$ $\mathfrak{S}^{B}_{\neg A}Ass.3$

11) A da 7), 8) per MP

12) A° da 7) per def. '°'

13) $(A\wedge\neg A)\rightarrow[(\neg\neg[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)])\rightarrow(A\wedge\neg A)]$
$\mathfrak{S}^{B}_{\neg\neg[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)]}(\mathfrak{S}^{A}_{A\wedge\neg A}Ass.1)$

14) $(\neg\neg[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)])\rightarrow(A\wedge\neg A)$ da 9), 13) per MP

15) $\neg(A\wedge\neg A)\rightarrow[(\neg\neg[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)])\rightarrow\neg(A\wedge\neg A)]$
$\mathfrak{S}^{B}_{\neg\neg[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)]}\left(\mathfrak{S}^{A}_{\neg(A\wedge\neg A)}Ass.1\right)$

16) $(\neg\neg[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)])\rightarrow\neg(A\wedge\neg A)$ da 7), 15) per MP

17) $A^{\circ}\rightarrow[((\neg\neg[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)])\rightarrow$
$\rightarrow(A\wedge\neg A))\rightarrow[((\neg\neg[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)])\rightarrow$
$\rightarrow(\neg(A\wedge\neg A)))\rightarrow\neg\neg\neg[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)]]]$
$\mathfrak{S}^{A}_{\neg\neg[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)]}\left(\mathfrak{S}^{B}_{A\wedge\neg A}\left(\mathfrak{S}^{B^{\circ}}_{A^{\circ}}Ass.9\right)\right)$

18) $[((\neg\neg[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)])\rightarrow$
$\rightarrow(A\wedge\neg A))\rightarrow[((\neg\neg[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)])\rightarrow$
$\rightarrow(\neg(A\wedge\neg A)))\rightarrow\neg\neg\neg[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)]]$ da 12), 17) per MP

19) $[((\neg\neg[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)])\rightarrow$
$\rightarrow(\neg(A\wedge\neg A)))\rightarrow\neg\neg\neg[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)]$ da 14), 18) per MP

20) $\neg\neg\neg[\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg(\neg(A\wedge\neg A))]$ da 16), 19) per MP

21) $\neg\neg\neg[\neg(A\wedge\neg A))\wedge\neg(\neg(A\wedge\neg A))]\rightarrow\neg[\neg(A\wedge\neg A))\wedge\neg(\neg(A\wedge\neg A))]$
$\left(\mathfrak{S}^{A}_{\neg(A\wedge\neg A))\wedge\neg\neg\neg(A\wedge\neg A)}Ass.12\right)$

22) $\neg[\neg(A\wedge\neg A))\wedge\neg(\neg(A\wedge\neg A))]$ da 20), 21) per MP

23) $\neg[A^{\circ}\wedge\neg A^{\circ}]$ da 22) per def. ‘∘’

24) $A^{\circ\circ}$ da 23) per de. ‘∘’

Teorema 4.32 $\vdash A^{\circ}\rightarrow(\neg A)^{\circ}$

Dimostrazione

1) A°	Ip. 1
2) $\neg\neg[\neg A\wedge\neg\neg A]$	Ip. 2
3) $\neg\neg[\neg A\wedge\neg\neg A]\rightarrow\neg A\wedge\neg\neg A$	$\mathfrak{S}^{A}_{\neg\neg[\neg A\wedge\neg\neg A]}Ass.12$
4) $\neg A\wedge\neg\neg A$	da 2), 3) per MP
5) $(\neg A\wedge\neg\neg A)\rightarrow\neg\neg A$	$\mathfrak{S}^{B}_{\neg\neg A}(\mathfrak{S}^{A}_{\neg A}Ass.4)$
6) $\neg\neg A$	da 4), 5) per MP
7) $\neg\neg A\rightarrow A$	$Ass.12$
8) A	da 6), 7) per MP
9) $(\neg A\wedge\neg\neg A)\rightarrow\neg A$	$\mathfrak{S}^{B}_{\neg\neg A}(\mathfrak{S}^{A}_{\neg A}Ass.3)$
10) $\neg A$	da 4), 9) per MP
11) $(\neg A\wedge\neg\neg A)\rightarrow A$	da 4)-8)
12) $A^{\circ}\rightarrow[((\neg A\wedge\neg\neg A)\rightarrow A)\rightarrow$ $\rightarrow(((\neg A\wedge\neg\neg A)\rightarrow\neg A)\rightarrow\neg(\neg A\wedge\neg\neg A))]$	$\mathfrak{S}^{B}_{A}\left(\mathfrak{S}^{A}_{\neg A\wedge\neg\neg A}\left(\mathfrak{S}^{B^{\circ}}_{A^{\circ}}Ass.9\right)\right)$
13) $((\neg A\wedge\neg\neg A)\rightarrow A)\rightarrow$ $\rightarrow(((\neg A\wedge\neg\neg A)\rightarrow\neg A)\rightarrow\neg(\neg A\wedge\neg\neg A))$	da 1), 12) per MP
14) $((\neg A\wedge\neg\neg A)\rightarrow\neg A)\rightarrow\neg(\neg A\wedge\neg\neg A)$	da 11), 13) per MP
15) $\neg(\neg A\wedge\neg\neg A)$	da 9), 14) per MP
16) $(\neg A)^{\circ}$	da 15) per def. ‘∘’
17) $A^{\circ}\vdash(\neg A)^{\circ}$	da 1)-16)
18) $A^{\circ}\rightarrow(\neg A)^{\circ}$	da 17) per MD

5. *Negazione forte e logica classica: C_1 vs C_0*

Esporremo ora la definizione di *negazione forte* che è possibile utilizzare in C_1. Nei calcoli paraconsistenti nel senso di da Da Costa è possibile introdurre un secondo funtore utile alla determinazione del concetto di negazione. Esso avrà caratteristiche del tutto divergenti rispetto alla negazione primitiva, quella debole. Infatti, sebbene la prima sia derivata mediante apposita definizione per mezzo della seconda e dell'operatore di stabilità, il comportamento della negazione forte non ricalcherà che parzialmente quello della negazione primitiva. Mentre quest'ultima consente almeno a livello atomico di ospitare delle contraddizioni nella teoria cui dovesse essere applicata, l'altra segue pedissequamente il comportamento di tipo classico.

Stabilendo di identificare la logica classica col calcolo C_0, derivante da C_1 con la sostituzione degli assiomi 9)-12) con la proposizione "$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$", andremo ora ad introdurre questo nuovo connettivo e a valutarne le conseguenze anche in sede metateorica.

Definizione 4.7 $\neg^* A \overset{\text{def}}{=} \neg A \wedge A^\circ$

Come vedremo, '$\neg^*$' avrà tutte le proprietà della negazione classica. Potremo quindi utilizzare le formule prefisse da tale funtore per simulare all'interno di C_1 il comportamento classico della negazione e stabilire successivamente un utile raffronto fra C_0 e C_1.

Per il momento ci limiteremo ad esporre alcuni importanti teoremi derivanti dall'uso di tale operatore logico.

Teorema 4.33 $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg^* B) \rightarrow \neg^* A)$

Dimostrazione

1)	$A \rightarrow B$	Ip. 1
2)	$A \rightarrow \neg^* B$	Ip. 2
3)	$\neg(A^\circ) \vee A^\circ$	$\mathfrak{S}^{A}_{A^\circ} Ass. 11$

a)

4) A°	Ip. 3.0
5) A	Ip. 3.1.1
6) $A\to(B^\circ\wedge\neg B)$	da 2) per def. '$\neg^*$'
7) $B^\circ\wedge\neg B$	da 5), 6) per MP
8) $(B^\circ\wedge\neg B)\to B^\circ$	$\mathfrak{S}^B_{\neg B}\left(\mathfrak{S}^A_{B^\circ}Ass.3\right)$
9) B°	da 7), 8) per MP
10) $(B^\circ\wedge\neg B)\to\neg B$	$\mathfrak{S}^B_{\neg B}\left(\mathfrak{S}^A_{B^\circ}Ass.4\right)$
11) $\neg B$	da 7), 10) per MP
12) $B^\circ\to[(A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A)]$	$Ass.9$
13) $[(A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A)]$	da 9), 12) per MP
14) $((A\to\neg B)\to\neg A)$	da 1), 13) per MP
15) $\neg B\to(A\to\neg B)$	$\mathfrak{S}^B_A(\mathfrak{S}^A_{\neg B}Ass.1)$
16) $A\to\neg B$	da 11), 14) per MP
17) $\neg A$	da 14), 16) per MP
18) $A\to B, A\to\neg^*B, A^\circ, A\vdash\neg A$	da 1)-17)
19) $A\to B, A\to\neg^*B, A^\circ\vdash A\to\neg A$	da 18) per MD
20) $(A\to\neg A)\to\neg A$	$teor.4.25$
21) $A\to B, A\to\neg^*B, A^\circ\vdash\neg A$	da 19), 20) per MP
22) $A\to B, A\to\neg^*B\vdash A^\circ\to\neg^*A$	da 4) e 21) per def. '$\circ$' e MD

b)

23) $\neg(A^\circ)$	Ip. 3.1
24) $\neg\neg(A\wedge\neg A)$	da 23) per def. '$\circ$'
25) $\neg\neg(A\wedge\neg A)\to(A\wedge\neg A)$	$\mathfrak{S}^A_{A\wedge\neg A}Ass.12$
26) $A\wedge\neg A$	da 24), 25) per MP
27) $(A\wedge\neg A)\to A$	$\mathfrak{S}^B_{\neg A}Ass.3$
28) A	da 26), 27) per MP
29) $(A\wedge\neg A)\to\neg A$	$\mathfrak{S}^B_{\neg A}Ass.4$
30) $\neg A$	da 26), 29) per MP
31) $A\to(B^\circ\wedge\neg B)$	da 2) per def. '$\neg^*$'
32) $B^\circ\wedge\neg B$	da 30), 32) per MP
33) $(B^\circ\wedge\neg B)\to B^\circ$	$\mathfrak{S}^B_{\neg B}\left(\mathfrak{S}^A_{B^\circ}Ass.3\right)$
34) B°	da 33), 34) per MP
35) $(B^\circ\wedge\neg B)\to\neg B$	$\mathfrak{S}^B_{\neg B}\left(\mathfrak{S}^A_{B^\circ}Ass.4\right)$
36) $\neg B$	da 33), 36) per MP

37) $\neg B \to (A \to \neg B)$	$\mathfrak{S}^{B}_{A}\left(\mathfrak{S}^{A}_{\neg B^{\circ}} Ass.1\right)$
38) $A \to \neg B$	da 37), 38) per MP
39) $B^{\circ} \to [(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)]$	$Ass.9$
40) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$	da 35), 40) per MP
41) $((A \to \neg B) \to \neg A)$	da 1), 41) per MP
42) $\neg A$	da 39), 42) per MP
43) B	da 1), 28) per MP
44) $B \to (\neg A^{\circ} \to B)$	$\mathfrak{S}^{B}_{\neg A^{\circ}}(\mathfrak{S}^{A}_{B} Ass.1)$
45) $\neg A^{\circ} \to B$	da 43), 44) per MP
46) $\neg B \to (\neg(A^{\circ}) \to \neg B)$	$\mathfrak{S}^{B}_{\neg(A^{\circ})}(\mathfrak{S}^{A}_{\neg B} Ass.1)$
47) $\neg(A^{\circ}) \to \neg B$	da 36), 46) per MP
48) $B^{\circ} \to \Big[(\neg(A^{\circ}) \to B) \to \Big((\neg(A^{\circ}) \to \neg B) \to \neg\neg(A^{\circ})\Big)\Big]$	$\mathfrak{S}^{A}_{\neg(A^{\circ})} Ass.9$
49) $(\neg(A^{\circ}) \to B) \to \Big((\neg(A^{\circ}) \to \neg B) \to \neg\neg(A^{\circ})\Big)$	da 34), 48) per MP
50) $\Big((\neg(A^{\circ}) \to \neg B) \to \neg\neg(A^{\circ})\Big)$	da 45), 49) per MP
51) $\neg\neg(A^{\circ})$	da 47), 50), per MP
52) $\neg\neg(A^{\circ}) \to (A^{\circ})$	$\mathfrak{S}^{A}_{A^{\circ}} Ass.12$
53) A°	da 51), 52) per MP
54) $A \to B,\ A \to \neg^{*} B,\ \neg(A^{\circ}) \vdash A^{\circ}$	da 1)-5), 23)-53)
55) $A \to B,\ A \to \neg^{*} B \vdash \neg(A^{\circ}) \to A^{\circ}$	da 54) per MD
56) $A \to B,\ A \to \neg^{*} B \vdash (\vdash \neg(A^{\circ}) \to A^{\circ}) \to A^{\circ}$	$teor.4.26$
57) $A \to B,\ A \to \neg^{*} B \vdash A^{\circ}$	da 55), 56) per MP
58) $A^{\circ} \to \big(\neg A \to (A^{\circ} \wedge \neg A)\big)$	$\mathfrak{S}^{B}_{\neg A}\left(\mathfrak{S}^{A}_{A^{\circ}} Ass.5\right)$
59) $\neg A \to (A^{\circ} \wedge \neg A)$	da 53), 58) per MP
60) $A^{\circ} \wedge \neg A$	da 30), 59) per MP
61) $\neg^{*} A$	da 60) per def. '$\neg^{*}$'
62) $A \to B,\ A \to \neg^{*} B,\ \neg(A^{\circ}) \vdash \neg^{*} A$	da 1)-5), 23)-61)
63) $A \to B,\ A \to \neg^{*} B \vdash \neg(A^{\circ}) \to \neg^{*} A$	da 62) per MD

c)

64) $(\neg(A^{\circ}) \to \neg^{*} A) \to \Big((A^{\circ} \to \neg^{*} A) \to [(\neg(A^{\circ}) \vee A^{\circ}) \to \neg^{*} A]\Big)$	$\mathfrak{S}^{C}_{\neg^{*} A}\left(\mathfrak{S}^{B}_{A^{\circ}}\left(\mathfrak{S}^{A}_{\neg(A^{\circ})} Ass.5\right)\right)$
65) $(A^{\circ} \to \neg^{*} A) \to [(\neg(A^{\circ}) \vee A^{\circ}) \to \neg^{*} A]$	da 63), 64) per MP
66) $(\neg(A^{\circ}) \vee A^{\circ}) \to \neg^{*} A$	da 22), 65) per MP
67) $\neg^{*} A$	da 3), 66) per MP
68) $A \to B,\ A \to \neg^{*} B \vdash \neg^{*} A$	da 1)-67)

69) $A \to B \vdash (A \to \neg^* B) \to \neg^* A$	da 68) per MD
70) $(A \to B) \to \big((A \to \neg^* B) \to \neg^* A\big)$	da 69) per MD

Teorema 4.34 $\vdash A \to (\neg^* A \to B)$

Dimostrazione

1) A	Ip. 1
2) $\neg^* A$	Ip. 2
3) $\neg B$	Ip. 3
4) $\neg A \wedge A^{\circ}$	da 2) per def. '$\neg^*$'
5) $(\neg A \wedge A^{\circ}) \to A^{\circ}$	$\mathfrak{S}^{B}_{A^{\circ}}(\mathfrak{S}^{A}_{\neg A} Ass. 4)$
6) A°	da 4), 5) per MP
7) $(\neg A \wedge A^{\circ}) \to \neg A$	$\mathfrak{S}^{B}_{A^{\circ}}(\mathfrak{S}^{A}_{\neg A} Ass. 4)$
8) $\neg A$	da 4), 7) per MP
9) $A^{\circ} \to ((\neg B \to A) \to ((\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B)$	$\mathfrak{S}^{B}_{A}(\mathfrak{S}^{A}_{\neg B} Ass. 9)$
10) $((\neg B \to A) \to ((\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B)$	da 6), 9) per MP
11) $A \to (\neg B \to A)$	$\mathfrak{S}^{B}_{\neg B} Ass. 1$
12) $\neg B \to A$	da 1), 11) per MP
13) $(\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$	da 10), 12) per MP
14) $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$	$\mathfrak{S}^{B}_{\neg B}(\mathfrak{S}^{A}_{\neg A} Ass. 1)$
15) $\neg B \to \neg A$	da 8), 14) per MP
16) $\neg\neg B$	da 13), 15) per MP
17) $\neg\neg B \to B$	$\mathfrak{S}^{A}_{B} Ass. 12$
18) B	da 16), 17) per MP
19) $A, \neg^* A \vdash B$	da 1)-18)
20) $A \vdash \neg^* A \to B$	da 19) per MD
21) $A \to (\neg^* A \to B)$	da 20) per MD

Teorema 4.35 $\vdash A \vee \neg^* A$

Dimostrazione

Per dimostrare questo teorema, che sancisce la deducibilità del terzo escluso in forma forte, occorre tener presenti le seguenti equivalenze:

i. $(A\vee\neg^{*}A)\leftrightarrow(A\vee(A^{\circ}\wedge\neg A))$

ii. $(A\vee(A^{\circ}\wedge\neg A))\leftrightarrow((A\vee A^{\circ})\wedge(A\vee\neg A))$

e dunque:

iii. $(A\vee\neg^{*}A)\leftrightarrow((A\vee A^{\circ})\wedge(A\vee\neg A))$

Dal momento che "A∨¬A" è un assioma del calcolo C_1 sarà sufficiente concentrare l'attenzione sul fatto che:

iv. $(A\vee\neg^{*}A)\leftrightarrow(A\vee A^{\circ})$

Procediamo pertanto a dimostrare quanto segue:

1) $A^{\circ}\vee\neg(A^{\circ})$	$\mathfrak{S}^{A}_{A^{\circ}}Ass.11$

a)

2) A°	Ip. 1
3) $A^{\circ}\rightarrow(A\vee A^{\circ})$	$\mathfrak{S}^{B}_{A^{\circ}}Ass.7$
4) $A\vee A^{\circ}$	da 2), 3) per MP
5) $A^{\circ}\vdash A\vee A^{\circ}$	da 2)-5)
6) $A^{\circ}\rightarrow(A\vee A^{\circ})$	da 5) per MD

b)

5) $\neg(A^{\circ})$	Ip. 2
6) $\neg\neg(A\wedge\neg A)$	da 5) per def. '°'
7) $\neg\neg(A\wedge\neg A)\rightarrow(A\wedge\neg A)$	$\mathfrak{S}^{A}_{A\wedge\neg A}Ass.12$
8) $A\wedge\neg A$	da 6), 7) per MP
9) $(A\wedge\neg A)\rightarrow A$	$\mathfrak{S}^{B}_{\neg A}Ass.3$
10) A	da 8), 9) per MP
11) $A\rightarrow(A\vee A^{\circ})$	$\mathfrak{S}^{B}_{A^{\circ}}Ass.6$
12) $A\vee A^{\circ}$	da 10), 11) per MP
13) $\neg(A^{\circ})\vdash A\vee A^{\circ}$	da 5)-12)
14) $\neg(A^{\circ})\rightarrow(A\vee A^{\circ})$	da 5) per MD

c)

15) $\left(A^{\circ}\rightarrow(A\vee A^{\circ})\right)\rightarrow\left[\left(\neg(A^{\circ})\rightarrow(A\vee A^{\circ})\right)\rightarrow\left(\left(A^{\circ}\vee\neg(A^{\circ})\right)\rightarrow(A\vee A^{\circ})\right)\right]$	$\mathfrak{S}^{B}_{A\vee A^{\circ}}\left(\mathfrak{S}^{B}_{\neg(A^{\circ})}\left(\mathfrak{S}^{A}_{A^{\circ}} Ass.8\right)\right)$
16) $\left(\neg(A^{\circ})\rightarrow(A\vee A^{\circ})\right)\rightarrow\left(\left(A^{\circ}\vee\neg(A^{\circ})\right)\rightarrow(A\vee A^{\circ})\right)$	da 6), 15) per MP
17) $\left(A^{\circ}\vee\neg(A^{\circ})\right)\rightarrow(A\vee A^{\circ})$	da 14), 16) per MP
18) $A\vee A^{\circ}$	da 1), 18) per MP
19) $A\vee\neg A$	$Ass.11$
20) $(A\vee A^{\circ})\rightarrow\left[(A\vee\neg A)\rightarrow[(A\vee A^{\circ})\wedge(A\vee\neg A)]\right]$	$\mathfrak{S}^{B}_{A\vee\neg A}\left(\mathfrak{S}^{A}_{A\vee A^{\circ}} Ass.8\right)$
21) $(A\vee\neg A)\rightarrow[(A\vee A^{\circ})\wedge(A\vee\neg A)]$	da 18), 20) per MP
22) $(A\vee A^{\circ})\wedge(A\vee\neg A)$	da 19), 21) per MP
23) $(A\vee\neg^{*}A)$	da *iii.*

Teorema 4.36 $(A\wedge\neg^{*}A)\vdash B$

Dimostrazione

1) $A\wedge\neg^{*}A$	Ip. 1
2) $(A\wedge\neg^{*}A)\rightarrow A$	$\mathfrak{S}^{B}_{\neg^{*}A} Ass.3$
3) A	da 1), 2) per MP
4) $(A\wedge\neg^{*}A)\rightarrow\neg^{*}A$	$\mathfrak{S}^{B}_{\neg^{*}A} Ass.4$
5) $\neg^{*}A$	da 1), 4) per MP
6) $A\rightarrow(\neg^{*}A\rightarrow B)$	$teor.$ 4.30
7) $\neg^{*}A\rightarrow B$	da 3), 6) per MP
8) B	da 5), 7) per MP
9) $(A\wedge\neg^{*}A)\vdash B$	da 1)-8)

Il teorema 4.30 sancisce la trivializzazione finita del calcolo C_1. Se infatti all'insieme dei teoremi di C_1 venissero aggiunte due formule del tipo α e $\neg^{*}\alpha$, seguirebbe in virtù dello pseudo-Scoto dimostrato col teorema 4.30 una qualunque altra formula β. Lo stesso tipo di conseguenza si avrebbe anche in virtù del teorema 4.32.

Metateorema 4.4 L'insieme dei teoremi derivanti da C_1^+ unito all'insieme di teoremi derivanti dall'impiego del connettivo '$\neg^*$' è uguale all'insieme di teoremi derivanti da un calcolo logico di tipo classico.

Dimostrazione

Sia K il sistema proposizionale delineato da Kleene[61]. I suoi schemi di assiomi sono:

(*Schemi di*) *assiomi*

1) A→(B→A)
2) (A→B)→((A→(B→C))→(A→C))
3) (A∧B)→A
4) (A∧B)→B
5) A→(B→(A∧B))
6) A→(A∨B)
7) B→(A∨B)
8) (A→C)→((B→C)→((A∨B)→C))
9) (A→B)→((A→¬B)→¬A)
10) ¬¬A→A

Regola di inferenza

$$\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta} \qquad \text{(MP)}$$

Il calcolo K è corretto e completo rispetto alle leggi della logica classica. Aggiungendo a C_1^+ come assiomi i teoremi 4.29, 4.30, 4.31 è possibile verificare che:

$$Ass(K) \subseteq Teor(C_1^+ + 4.29 + 4.30 + 4.31)$$

[61] Facciamo qui riferimento ancora alla lista di assiomi e regole di inferenza presentata da Kleene. Cfr. Kleene, S., *Introduction to Metamathematics*, *op. cit.*, p. 82, limitatamente al gruppo A1. Di particolare rilievo i teoremi 10, 15, 49, 50, 51.

Possiamo pertanto concludere che i teoremi della logica classica sono apparentemente contenuti nel calcolo C_1, limitatamente all'applicazione e all'impiego del funtore di negazione forte.

Da ciò ne consegue che il calcolo logico di tipo classico è apparentemente ocntenuto nel calcolo paraconsistente in questione, sebbene l'intero calcolo C_1 sia in realtà un sottocalcolo di C_0, dal momento che la validità di talune leggi classiche non ha validità universale in C_1.

Questo tipo di accorgimento consente dunque uno spazio di manovra sia teorica che concettuale di grande pregio. Infatti da una parte esso consentirà al nostro, così come ad altri sistemi formali, di disporre di strumenti concettualmente meno gravati da restrizioni e rispetto a ciò più ampiezza e dotati di maggior flessibilità; dall'altro invece ciò conentirà di adoperare la negazione di tipo classico accanto a quella primitiva di tipo debole, laddove ciò costituirà condizione imprescindibile per la formulazione o la definizione di taluni concetti.

Infine è da notare come esso consenta il soddisfacimento della terza condizione enunciata da Da Costa per un calcolo paraconsistente:

> 3°) un calcolo paraconsistente dovrebbe sempre consentire il recupero del patrimonio di leggi costituito dall'insieme di leggi della logica classica.

V. Elementi di semantica I

1. Semantica di C_1

La semantica di un calcolo come C_1 possiede caratteristiche del tutto proprie. Contrariamente a quanto normalmente accade per un gran numero di logiche, C_1 è una logica essenzialmente non caratterizzabile in maniera vero-funzionale e ciò a causa della negazione debole che in esso si assume come primitiva. È stato dimostrato infatti che l'operatore di negazione non può essere caratterizzato da una matrice caratteristica con un numero finito di valori di verità[62] e dunque non è possibile nel complesso esprimere delle matrici caratteristiche che seguano criteri standard.

Per ovviare a tali difficoltà, è stato elaborato nella seconda metà degli anni Settanta una semantica a due valori di verità di nuova concezione[63], che ha saputo dimostrare grande flessibilità e versatilità, riuscendo a fornire strumenti semantici adeguati anche per logiche di tipo del tutto differente, come alcuni sistemi modali, fra cui T, $S\,4$, B, $S\,5$, o come la logica intuizionista[64]. Tale semantica prende il nome di "teoria delle valutazioni" ed introduce il nuovo concetto di quasi-matrice, alternativo a quello di matrice in senso classico.

Mediante questa interpretazione è possibile fornire una semantica adeguata al calcolo logico utilizzato per lo sviluppo del nostro sistema formale e provarne successivamente la correttezza, la completezza nonché la decidibilità, risultato impossibile da ottenere semplicemente attraverso l'impiego di matrici finite seppur costituite da più valori di verità.

Cominceremo col definire formalmente un insieme $\boldsymbol{K}$ come un insieme di oggetti, detti valori di verità. Generalmente si utilizzano simboli numerici ed anche qui seguiremo questa prassi consolidata, stabilendo di utilizzare i simboli '1' e '0' rispettivamente per indicare il valore vero ed il valore falso.

---

[62] Cfr. Arruda, A. I., *Remarques sur les systèmes C_n, op. cit.*

[63] Da Costa, N. C. A., Alves, E. H., *Une sémantique pour le calcul C_1*, «Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris», Série A, t. 283, 1976, pp. 729-31. Da Costa, N. C. A., Alves, E. H., *A Semantical Analysis of the Calculi C_n*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», vol. 18, n. 4, 1977, pp. 621-30. Loparić, A., Alves, H., *The Semantics of the Systems C_n of Da Costa*, in Arruda, A., Da Costa, N. C. A., Sette, A., (eds.), *Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic*, Sociedade Brasileira de Lógica, 1980, pp. 161-72

[64] Cfr. Grana, N., *Sulla teoria delle valutazioni di N. C. A. Da Costa*, Liguori, Napoli, 1990, pp. 35-49

Definizione 5.1 Diciamo insieme dei valori di verità un insieme $\boldsymbol{K}$ contenente almeno due oggetti, i cui elementi sono il vero ed il falso, corrispondenti rispettivamente ai simboli '1' e '0'.

Non potendo esibire direttamente delle matrici per caratterizzare ciascun connettivo, dovendo prendere in considerazione differenti casi ipotetici, come avviene inevece per molte altre logiche, occorrerà stabilire alcuni criteri semantici fondamentali, a partire dai quali costruire la semantica di C_1 e preparare la realizzazione delle quasi-matrici. A tale scopo fisseremo alcune definizioni preliminari, introducendo innanzitutto il concetto di interpretazione o di valutazione per C_1.

Sia Ψ l'insieme di formule ben formate (fbff) di C_1. Stabiliamo allora che:

Definizione 5.2 Un'interpretazione o una valutazione di C_1 è una funzione $\Im$ da Ψ in $\{1, 0\}$ (cioè: $\Im$: $\Psi \longrightarrow \{1, 0\}$), tale che:

1) $(om\ i)\ (\Im(\alpha_i) \in \boldsymbol{K})$
2) $(om\ i)\ \big(\overline{\Im}(\alpha_i)$[65] $\stackrel{\text{def}}{=} \Im(\alpha_i)\big)$
3) $\Im(\alpha \rightarrow \beta) = 1\ aeq\ \Im(\alpha) = 0\ vel\ \Im(\beta) = 1$
4) $\Im(\alpha \wedge \beta) = 1\ aeq\ \Im(\alpha) = \Im(\beta) = 1$
5) $\Im(\alpha \vee \beta) = 1\ aeq\ \Im(\alpha) = 1\ vel\ \Im(\beta) = 1$
6) $\Im(\alpha_j) = 0\ seq\ \Im(\alpha_j) = 1$
7) $\Im(\neg\neg\alpha_j) = 1\ seq\ \Im(\alpha_j) = 1$
8) $\Im(\beta^{\circ})\ \Im(\alpha \rightarrow \beta) = \Im(\alpha \rightarrow \neg\beta) = 1\ seq\ \Im(\alpha) = 0$
9) $\Im(\alpha^{\circ}) = \Im(\beta^{\circ}) = 1\ seq\ \Im((\alpha \rightarrow \beta)^{\circ}) = \Im((\alpha \wedge \beta)^{\circ}) = \Im((\alpha \vee \beta)^{\circ}) = 1$

[65] La dicitura '$\overline{\Im}(\alpha_i)$' indicherà il valore di verità assunto dalla fbf α_i sotto l'interpretazione $\Im$.

Diciamo inoltre che l'interpretazione $\Im$ costituisce un modello di C_1 se e solo se la definizione seguente è soddisfatta:

Definizione 5.3 Diciamo che una valutazione $\Im$ è un modello (*Mod*) di C_1 se il valore di verità assegnato da $\Im$ ad ogni elemento presente in Ψ è 1. Nel caso $\overline{\Im}(\alpha) = 0$, si dice che $\Im$ non è modello di C_1. Formalmente:

1) $(om\ i)\ \big(\alpha_i \in \Psi seq\ \big(Mod\ \Im\ \alpha_i\ aeq\ \overline{\Im}(\alpha_i) = 1\big)\big)$

Tenendo presente questa fondamentale ipotesi, possiamo riprendere alcune delle condizioni precedenti e riscriverle come segue:

2) $Mod\ \Im\ \alpha \to \beta\ aeq\ (non\ Mod\ \Im\ \alpha\ vel\ Mod\ \Im\ \beta)$

3) $Mod\ \Im\ \alpha \wedge \beta\ aeq\ (Mod\ \Im\ \alpha\ et\ Mod\ \Im\ \beta)$

4) $Mod\ \Im\ \alpha \vee \beta\ aeq\ (Mod\ \Im\ \alpha\ vel\ Mod\ \Im\ \beta)$

5) $non\ Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ (non\ Mod\ \Im\ \alpha\ et\ Mod\ \Im\ \neg\alpha)$

6) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ (Mod\ \Im\ \alpha\ vel\ non\ Mod\ \Im\ \neg\alpha)$

7) $non\ Mod\ \Im\ \alpha\ seq\ Mod\ \Im\ \neg\alpha$

8) $Mod\ \Im\ \neg\neg\alpha\ seq\ Mod\ \Im\ \alpha$

9) $(Mod\ \Im\ \alpha)\ aeq\ (non\ Mod\ \Im\ \neg^*\alpha)$

10) $(non\ Mod\ \Im\ \alpha)\ aeq\ (Mod\ \Im\ \neg^*\alpha)$

11) $\big[Mod\ \Im\ (\beta^{\circ})\ aeq\ Mod\ \Im(\alpha \to \beta)\ aeq\ Mod\ \Im(\alpha \to \neg\beta)\big]\ seq\ (non\ Mod\ \Im\ \alpha)$

La nozione di modello, che abbiamo delineato per C_1, ci consente un'ulteriore distinzione, che si instaura fra due tipi differenti di valutazione:

I) valutazione "normale";

II) valutazione "singolare".

La distinzione fondamentale riposa sulla possibilità di ottenere una valutazione all'interno della quale si dia il caso di poter assegnare il valore '1' ad almeno due formule contraddittorie, tali cioè che $\overline{\mathfrak{I}}(\alpha) = 1$ e $\overline{\mathfrak{I}}(\neg\alpha) = 1$. Nel caso ciò si verifichi, diremo che si è in presenza di una valutazione singolare.

Fissiamo dunque un'ulteriore definizione:

Definizione 5.4 Un'interpretazione è detta "singolare" se e solo se $\overline{\mathfrak{I}}(\alpha) = \overline{\mathfrak{I}}(\neg\alpha) = 1$. Si dice invece "normale" se e solo se almeno una delle due proposizioni assume valore '0', ossia: *aut* $\overline{\mathfrak{I}}(\alpha) \neq 1$ *aut* $\overline{\mathfrak{I}}(\neg\alpha) \neq 1$.

Aggiungiamo ancora qualche definizione utile per lo sviluppo del calcolo logico sotteso al sistema formale ZFU_1.

Definizione 5.5 Una certa espressione α si dice essere soddisfatta se e solo se $(ex\,\mathfrak{I})\ (Mod\,\mathfrak{I}\,\alpha)$.

Definizione 5.6 Una certa espressione α si dice essere valida se e solo se $(om\,\mathfrak{I})\ (Mod\,\mathfrak{I}\,\alpha)$.

Introduciamo di seguito la procedura di costruzione per una quasi-matrice.

Definizione 5.7 Per ciascuna formula α di C_1 possiamo costruire delle tavole, dette *quasi-matrici*, in base ai quattro criteri sotto delineati[66]:

1) si predisponga una lista di tutte le variabili proposizionali occorrenti in α, disponendole linearmente;

2) di dispongano linearmente sotto ciascuna variabile proposizionale tutte le possibili combinazioni dei valori di verità '1' e '0';

3) si predisponga una lista di tutte le negazioni di variabili proposizionali e se ne calcoli il valore in ciascuna linea come segue:

   3.1) se una variabile ha valore 0, allora la sua negazione assumerà valore 1;

   3.2) se una variabile ha valore 1, si biforchi la linea in cui la variabile occorreva e si scriva verticalmente per la sua negazione 0 nella parte superiore, 1 in quella inferiore. Ogni qualvolta si dia una biforcazione, i valori saranno gli stessi per le due linee nella parte a sinistra;

4) si disponga una lista e si calcoli per ciascuna linea il valore di ogni sottoformula di α e, se essa è una sottoformula propria, si calcoli il valore della sua negazione, le cui sottoformule proprie e le rispettive negazioni siano già state disposte in una lista precedentemente approntata e i cui valori siano stati calcolati in base alle seguenti disposizioni:

   4.1) se non vi sono negazioni, si proceda come in una tavola di verità per il calcolo proposizionale classico;

   4.2) se ve ne sono, si scriva il valore 1 sotto di essa, sulla linea in cui essa ha valore 0. Sulle linee in cui si trova il valore 1, si proceda invece in questo modo:

[66] Da costa, N. C. A., Alves, E. I., *A Semantical Analysis of the Calculi C_n*, *op. cit.* Loparić, A., Alves, H., *The Semantics of the Systems C_n of Da Costa*, *op. cit.*

4.2.1) se α' è della forma $\neg\beta$, si controlli se il valore di β è uguale a quello di $\neg\beta$. Se è così, si biforchi la linea, scrivendo il valore 0 nella prima parte e il valore 1 nella seconda. Se il valore di β è differente da quello di $\neg\beta$, si scriva il valore 0;

4.2.2) se α' è della forma $\beta * \gamma$, dove $* \in \{\rightarrow, \vee, \wedge\}$, occorrerà considerare i seguenti due casi:

4.2.2.1) α' è della forma $\delta\wedge\neg\delta$ oppure della forma $\neg\delta\wedge\delta$. In tal caso si scriva il valore 0 per la formula $\neg\alpha'$;

4.2.2.2) α' non è della forma $\delta\wedge\neg\delta$ o $\neg\delta\wedge\delta$. In tal caso si controlli se il valore di β è uguale a quello di $\neg\beta$ o se il valore di γ è uguale a quello di $\neg\gamma$. Se è questo il caso, si biforchi la linea scrivendo il valore 0 nella parte superiore e il valore 1 in quella inferiore. Se invece il valore di β è diverso da quello di $\neg\beta$ e il valore di γ è differente da quello di $\neg\gamma$, si scriva il valore 0.

Disponendo di tali strumenti, è dunque possibile procedere alle dimostrazioni di correttezza, di completezza e di decidibilità per il calcolo proposizionale paraconsistente C_1.

2. *Metateorema di correttezza per* C_1

Passeremo ora alla dimostrazione del metateorema di correttezza (detto anche "*soundness*") per C_1. Tale metaproprietà sancisce il buon funzionamento del calcolo, ossia garantisce che quanto è stato dimostrato risulta anche essere vero. Sarà pertanto possibile stabilire che l'apparato deduttivo sinora illustrato è in grado di operare meccanicamente senza margini di errore e tutto quanto esso dimostra risulta essere anche una sua conseguenza logica[67].

Normalmente è possibile considerare la metaproprietà di correttezza sotto due aspetti, che esprimono una differente forza.

Diciamo che un certo calcolo $C_i^{(*)},\ i \geq 1$, è debolmente corretto se e solo se la seguente condizione è soddisfatta:

I. $\vdash \alpha\ seq \vDash \alpha$

Diciamo invece che un dato calcolo $C_i^{(*)},\ i \geq 1$, è fortemente corretto se e solo se, preso un certo insieme Γ di formule del calcolo considerato, vale quanto segue:

II. $\Gamma \vdash \alpha\ seq\ \Gamma \vDash \alpha$

Nei sottoparagrafi che seguiranno dimostreremo innanzitutto la correttezza debole di C_1 e poi ci serviremo di quest'ultima per provare anche la sua correttezza forte.

Il procedimento che seguiremo sarà del tutto analogo a quello utilizzato per la logica classica.

Dato che le formule ricavate mediante derivazioni sono o assiomi di C_1 o sono formule ottenute dagli assiomi stessi o da formule precedentemente dimostrate con l'ausilio di MP o della regola di sostituzione $\mathfrak{S}$, sarà sufficiente provare che tutti gli assiomi considerati per C_1 sono tautologie rispetto al tipo di valutazioni sopra considerate e che la regola MP e la regola di sostituzione $\mathfrak{S}$ hanno la

---

[67] Per "conseguenza logica" di un insieme di enunciati Γ occorrerà intendere la verifica di un enunciato da parte di tutti i modelli che verificano Γ. Possiamo dire che il metateorema di correttezza stabilisce che ogni teorema di C_1 è anche una sua conseguenza. Introdurremo il simbolo '$\vDash$' per dire ad esempio che α è conseguenza logica di Γ, cioè $\Gamma \vDash \alpha$ (in caso contrario utilizzeremo il simbolo '$\nvDash$' per dire che α non è una conseguenza logica di Γ, ossia che: $\Gamma \nvDash \alpha$).

proprietà di conservare la verità degli enunciati cui esse si applicano. In quest'ultimo caso dovremo cioè provare che se le premesse del *modus ponens* sono tautologie nel senso sopra descritto, allora anche la conclusione sarà una tautologia e che la regola di sostituzione non altera il valore di verità dell'enunciato al quale viene eventualmente applicata.

Ricavata in tal modo la correttezza debole, si passerà alla dimostrazione di correttezza forte osservando che:

1. un dato insieme Γ di formule proposizionali di C_1 contiene solo un numero finito di elementi, giacché ogni derivazione risulta essere una sequenza limitata (o cardinalmente finita) di proposizioni[68];

2. è sempre possibile scaricare le ipotesi occorrenti in Γ grazie al metateorema di deduzione dimostrato al § 4.2, riducendo la dimostrazione della correttezza forte alla validità di quella debole.

---

[68] Diciamo allora che Γ è un insieme di fbff del seguente tipo: $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.

2.1 Metateorema di correttezza debole per C_1

Metateorema 5.2.1 $\vdash \alpha \; seq \; \Gamma \vDash \alpha$

Dimostrazione

1° passo.

La dimostrazione procederà verificando la validità degli assiomi in base alle quasi-matrici, la cui costruzione è stata precedentemente descritta.

Successivamente al passo 2 mostreremo come la regola del MP e la regola di sostituzione $\mathfrak{S}$ non conducano al di fuori dell'insieme delle formule valide.

In tal caso si dice anche che l'insieme delle fbff valide è chiuso sotto l'applicazione di queste due regole.

1) Correttezza dell'assioma 1) "A→(B→A)":

A	B	¬A	¬B	B→A	A→(B→A)
1	1	0	0	1	**1**
			1	1	**1**
		1	0	1	**1**
			1	1	**1**
1	0	0	1	1	**1**
		1	1	1	**1**
0	1	1	0	0	**1**
			1	0	**1**
0	0	1	1	1	**1**

2) Correttezza dell'assioma 2) "(A→(B→C))→((A→B)→(A→C))":

A	B	C	¬A	¬B	¬C	A→ →B	A→ →C	B→C	A→ →(B→ →C)	(A→B)→ →(A→C)	(A→(B→C))→ →((A→B)→ →(A→C))
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	**1**
					1	1	1	1	1	1	**1**
			1	1	0	1	1	1	1	1	**1**
					1	1	1	1	1	1	**1**
				0	0	1	1	1	1	1	**1**

					1	1	1	1	1	1	**1**
				1	0	1	1	1	1	1	**1**
					1	1	1	1	1	1	**1**
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	**1**
				1	1	1	0	0	0	0	**1**
			1	0	1	1	0	0	0	0	**1**
				1	1	1	0	0	0	0	**1**
1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	**1**
					1	0	1	1	1	1	**1**
			1	1	0	0	1	1	1	1	**1**
					1	0	1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	**1**
			1	1	0	0	0	1	1	1	**1**
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	**1**
					1	1	1	1	1	1	**1**
				1	0	1	1	1	1	1	**1**
					1	1	1	1	1	1	**1**
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	**1**
				1	1	1	1	0	1	1	**1**
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	**1**
					1	1	1	1	1	1	**1**
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**

3) Correttezza dell’assioma 3) “$(A \wedge B) \rightarrow A$”:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \rightarrow A$
1	1	0	0	1	**1**
			1	1	**1**
		1	0	1	**1**
			1	1	**1**
1	0	0	1	0	**1**
		1	1	0	**1**
0	1	1	0	0	**1**
			1	0	**1**
0	0	1	1	0	**1**

4) Correttezza dell’assioma 4) “$(A \wedge B) \rightarrow B$”:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \rightarrow B$
1	1	0	0	1	**1**
			1	1	**1**
		1	0	1	**1**
			1	1	**1**

1	0	0 1	1 1	0 0	**1** **1**
0	1	1	0 1	0 0	**1** **1**
0	0	1	1	0	**1**

5) Correttezza dell’assioma 5) “$A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$”:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$B \rightarrow (A \wedge B)$	$A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
1	1	0 1 	0 1 0 1	1 1 1 1	1 1 1 1	**1** **1** **1** **1**
1	0	0 1	1 1	0 0	1 1	**1** **1**
0	1	1	0 1	0 0	0 0	**1** **1**
0	0	1	1	0	1	**1**

6) Correttezza dell’assioma 6) “$A \rightarrow (A \vee B)$”:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$A \rightarrow (A \vee B)$
1	1	0 1 	0 1 0 1	1 1 1 1	**1** **1** **1** **1**
1	0	0 1	1 1	1 1	**1** **1**
0	1	1	0 1	1 1	**1** **1**
0	0	1	1	0	**1**

7) Correttezza dell’assioma 7) “$B \rightarrow (A \vee B)$”:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$B \rightarrow (A \vee B)$
1	1	0 1 	0 1 0 1	1 1 1 1	**1** **1** **1** **1**

1	0	0	1	1	**1**
		1	1	1	**1**
0	1	1	0	1	**1**
			1	1	**1**
0	0	1	1	0	**1**

8) Correttezza dell’assioma 8) “(A→C)→((B→C)→((A∨B)→C))”:

A	B	C	¬A	¬B	¬C	A∨B	(A∨B)→ →C	B→ →C	A→ →C	(B→C)→ →((A∨B)→ →C)	(A→C)→ ((B→C)→ →((A∨B)→C))
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	**1**
					1	1	1	1	1	1	**1**
			1	1	0	1	1	1	1	1	**1**
					1	1	1	1	1	1	**1**
				0	0	1	1	1	1	1	**1**
					1	1	1	1	1	1	**1**
				1	0	1	1	1	1	1	**1**
					1	1	1	1	1	1	**1**
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	**1**
				1	1	1	0	0	0	1	**1**
			1	0	1	1	0	0	0	1	**1**
				1	1	1	0	0	0	1	**1**
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	**1**
					1	1	1	1	1	1	**1**
			1	1	0	1	1	1	1	1	**1**
					1	1	1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	**1**
			1	1	0	1	0	1	0	0	**1**
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	**1**
					1	1	1	1	1	1	**1**
				1	0	1	1	1	1	1	**1**
					1	1	1	1	1	1	**1**
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	**1**
				1	1	1	0	0	1	1	**1**
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	**1**
					1	0	1	1	1	1	**1**
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	**1**

9) Correttezza dell’assioma 9) “A∨¬A”:

A	¬A	A∨¬A
1	0	**1**

	1	**1**
0	1	**1**

10) Correttezza dell'assioma 10) "$\neg\neg A \rightarrow A$":

A	¬A	¬¬A	¬¬A→A
1	0	0	**1**
	1	0	**1**
		1	**1**
0	1	0	**1**

11) Correttezza dell'assioma 11) "$B^{\circ} \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)]$"[69]:

A	B	¬A	¬B	B∧¬B	B°	A→B	A→¬B	(A→¬B)→¬A
1	1	0	0	0	1	1	0	1
			1	1	0	1	1	0
		1	0	0	1	1	0	1
			1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0
		1	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
			1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1

(A→B)→((A→¬B)→¬A)	B°→[(A→B)→((A→¬B)→¬A)]
1	**1**
0	**1**
1	**1**
1	**1**
1	**1**
1	**1**
1	**1**
1	**1**
1	**1**

12) Correttezza dell'assioma 12) "$(A^{\circ} \wedge B^{\circ}) \rightarrow [\,(A \wedge B)^{\circ} \wedge (A \vee B)^{\circ} \wedge (A \rightarrow B)^{\circ}]$":

a)

[69] $B^{\circ} \overset{\text{def}}{\equiv} \neg(B \wedge \neg B)$

A	B	¬A	¬B	A∧¬A	B∧¬B	A°	B°	A°∧B°
1	1	0	0	0	0	1	1	1
			1	0	1	1	0	0
		1	0	1	0	0	1	0
			1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1
		1	1	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1
			1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1

A∧B	¬(A∧B)	(A∧B)∧¬(A∧B)	(A∧B)°
1	0	0	1
1	0	0	1
	1	1	0
1	0	0	1
	1	1	0
1	0	0	1
	1	1	0
0	0	0	1
0	0	0	1
	1	0	1
0	0	0	1
0	0	0	1
	1	0	1
0	0	0	1

A∨B	¬(A∨B)	(A∨B)∧¬(A∨B)	(A∨B)°
1	0	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1
1	0	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1
1	0	0	1
1	0	0	1
1	0	0	1
1	0	0	1

A→B	¬(A→B)	(A→B)∧¬(A→B)	(A→B)°

1	0	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1
1	0	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1
1	0	0	1
1	0	0	1
1	0	0	1
1	0	0	1

(A∧B)°∧(A∨B)°∧(A→B)°
1
1
0
1
0
1
0
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1

(A°∧B°)→[(A∧B)°∧(A∨B)°∧(A→B)°]
1
1
1
1
1
1
1
1
1

2° passo.

Dimostreremo ora la correttezza della regola del *modus ponens* rispetto al calcolo paraconsistente C_1. Mostreremo che MP preserva i valori di verità delle premesse e in particolare quella degli assiomi logici, già verificati come corretti.

Proviamo dunque il seguente risultato:

Metateorema 5.2.2 La regola MP è corretta. In particolare varrà che:

$$(\vDash \alpha \, et \vDash \alpha \rightarrow \beta) \, seq \ \vDash \beta$$

Dimostrazione

Non sia così e sia dunque per ipotesi ⊨A, ⊨(A→B) ma ⊭B. Per l'*interpretazione* del connettivo '→' data al punto 2) della definizione 4.9, ne seguirebbe ⊭A→B, giacché la funzione *Seq* assegna valore '1' se e solo se non si dà il caso che l'antecedente sia vero mentre il conseguente sia falso, ossia $\overline{\mathfrak{I}}$(A) = 1 e $\overline{\mathfrak{I}}$(B) = 0. Ma poiché si è ipotizzato proprio che $\overline{\mathfrak{I}}$(A) = 1 e $\overline{\mathfrak{I}}$(B) = 0, allora anche $\overline{\mathfrak{I}}$(A→B) = 0 e ciò contraddice l'ipotesi, secondo cui $\overline{\mathfrak{I}}$(A→B) = 1, cioè contraddice che ⊨(A→B).

Non resta a questo punto che procedere con la dimostrazione di correttezza dell'altra regola utilizzata, quella della sostituzione:

Metateorema 5.2.3 La regola di sostituzione $\mathfrak{S}$ è corretta. In particolare varrà che:

$$\vDash \alpha \, seq \ \vDash \mathfrak{S}^{A}_{\gamma}\alpha$$

Dimostrazione

Sia per ipotesi α valida. Allora α sarà un'enunciato soddisfatto sia che la nostra valutazione gli assegni come valore di verità 1 sia che essa gli assegni come valore di verità 0. Pertanto α risulterà vera sia che $\mathfrak{I}(\alpha) = 1$ sia che $\mathfrak{I}(\alpha) = 0$. Ora, dal momento che $\overline{\mathfrak{I}}(\gamma) = 1$ oppure $\overline{\mathfrak{I}}(\gamma) = 0$, non esisterà aluna valutazione $\mathfrak{I}$ tale che $non\ Mod\ \mathfrak{I}\ \mathfrak{S}^{A}_{\gamma}\alpha$.

3° passo.

Dopo aver dimostrato la validità degli assiomi di C_1, nonché la correttezza delle due regole di inferenza adottate per esso, sarà sufficiente esaminare il caso generale di un teorema di C_1, dato ad esempio da $\vdash \beta$, per completare la dimostrazione[70].

Sia allora $\vdash \alpha$. Ragionando per induzione sul numero n delle espressioni occorrenti nella dimostrazione di β, si mostrerà che se β è un teorema allora β è anche valido. Ossia:

$$\vdash \beta seq \ \vDash \beta$$

1) Base: $n = 1$. In tal caso β risulta essere un assioma del calcolo e, come mostrato al passo 1 del metateorema 5.2.1, tutti gli assiomi del calcolo sono validi. Pertanto ne seguirebbe $\vDash \beta$.

2) Passo: $n = m + 1$. In tal caso o β è un assioma o β è il risultato di un'applicazione del *modus ponens* o β è il risultato di una sostituzione $\mathfrak{S}$ in espressioni precedenti. Il primo dei tre casi è stato già affrontato e risolto nel punto prcedente. Restano pertanto le due possibilità derivanti dall'applicazione di una delle due regole a disposizione:

   a. sia dunque β il risultato di una separazione di un α e di un $\alpha \rightarrow \beta$ precedenti. Allora per ipotesi induttiva $\vDash \alpha et \vDash \alpha \rightarrow \beta$. Considerando il risultato provato col metateorema 5.2.2, ne consegue $\vDash \alpha$;

   b. sia invece β il risultato di una sostituzione di "A" con γ in un δ precedente. Per ipotesi induttiva δ è valido. Così per il metateorema 5.2.3 anche β è valido, ossia $\vDash \beta$.

[70] Cfr. Casari, E., *Lineamenti di logica matematica*, *op. cit.*, pp. 115-6

2.2 Metateorema di correttezza forte per C_1

In questo paragrafo dimostreremo il risultato di correttezza forte per il calcolo logico paraconsistente C_1.

Metateorema 5.3 C_1 è corretto in senso forte. In particolare varrà che:

$$\Gamma \vdash \alpha \, seq \, \Gamma \vDash \alpha$$

Dimostrazione[71]

Si ponga $\Gamma \vdash \alpha$, ossia si assuma che esista una derivazione di α da Γ. In base a quanto già osservato alla clausola 1) del paragrafo precedente, $|\Gamma|$[72] $< \aleph_0$. Sia $\beta_1, \dots, \beta_n$ la successione degli elementi di Γ, che compaiono nella derivazione: $\beta_1, \dots, \beta_n \vdash \alpha$. Applicando il metateorema di deduzione n volte alla derivazione $\beta_1, \dots, \beta_n \vdash \alpha$ si ricava: $\vdash \beta_1 \to \left(\beta_2 \to \left(\dots \to (\beta_n \to \alpha)\right) \dots\right)$. A questo punto, utilizzando il risultato di correttezza debole per C_1, ottenuto col metateorema 5.2, si ottiene che:

$$\vdash \beta_1 \to \left(\beta_2 \to \left(\dots \to (\beta_n \to \alpha)\right) \dots\right) \; seq \; \vDash \beta_1 \to \left(\beta_2 \to \left(\dots \to (\beta_n \to \alpha)\right) \dots\right)$$

e dunque che:

$$\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \vDash \alpha$$

La dimostrazione a questo punto è completa: del resto se si ammettesse l'esistenza di un'interpretazione $\mathfrak{M}$, tale che $\mathfrak{M} \vDash \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ ma tale che $\mathfrak{M} \nvDash \alpha$, allora la successione dei condizionali ottenuta mediante il metateorema di deduzione risulterebbe falsa, ossia: $\overline{\mathfrak{I}}(\beta_i) = 0$, per ogni i tale che $1 \leq i \leq n$, e

---

[71] Cfr. Palladino, D., *Logica matematica e teorie formalizzate*, Carocci, Roma, 2004, pp. 76-7

[72] La scrittura '$|\Gamma|$' indicherà il numero cardinale assegnato all'insieme Γ. In tal caso un numero finito di elementi di Γ.

così $\mathfrak{M} \nvDash \beta_1 \rightarrow \left(\beta_2 \rightarrow \left(\ldots \rightarrow (\beta_n \rightarrow \alpha)\right) \ldots\right)$, contro l'ipotesi precedentemente dimostrata.

Sarà sufficiente a questo punto osservare che per la metaproprietà di monotonia:

$$\left[\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \vDash \alpha \, et \, \{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \subseteq \Gamma\right] \, seq \, \Gamma \vDash \alpha$$

Si può così concludere affermando che C_1 è corretto in senso forte e che, dato un insieme Γ di formule, varrà:

$$\Gamma \vdash \alpha \, seq \, \Gamma \vDash \alpha$$

3. *Completezza del calcolo proposizionale* C_1

In questo paragrafo e nei sottoparagrafi che seguiranno, proveremo la completezza del calcolo proposizionale paraconsistente C_1, sfruttando il teorema di Henkin[73]. Quest'ultimo non sancisce direttamente la completezza del calcolo, così come nota in letteratura da Gödel[74] in poi; tuttavia ne consente la derivazione immediata, risultando ad essa equivalente.

Analogamente al caso della proprietà di correttezza, anche per la metaproprietà di completezza varrà la duplice distinzione in completezza debole e completezza forte. Inversamente però al caso della correttezza, procederemo qui direttamente alla dimostrazione della completezza forte, derivando poi da quest'ultima, come caso particolare, quella debole.

Diciamo che il calcolo C_1 è fortemente completo se e solo se, preso un certo insieme X di formule del calcolo considerato, vale quanto segue:

$$\text{I.} \quad X \vDash \alpha \, seq \, X \vdash \alpha$$

Diciamo invece che un dato calcolo C_1 è debolmente completo se e solo se la seguente condizione è soddisfatta:

$$\text{II.} \quad \vDash \alpha \, seq \, \vdash \alpha$$

Per raggiungere il risultato in questione occorrerà procedere allo sviluppo di due punti fondamentali:

[73] Henkin, L., *The Completeness of the First-Order Functional Calculus*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 14, n. 3, 1949, pp. 159-66. Henkin, L., *Completeness in the Theory of Types*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 15, n. 2, 1950, pp. 81-91. Henkin, L., *The Discovery of my Completeness Proofs*, «Bulletin of Symbolic Logic», vol. 2, n. 2, 1996, pp. 127-58

[74] La dimostrazione di completezza del calcolo proposizionale classico fu esibita per la prima volta dal logico americano Leon. Cfr. Post, E., *Introduction to a General Theory of Elementary Propositions*, «American Journal of Mathematics», vol.43, 1921, pp. 163-85. Gödel estese in un certo senso questo risultato, inglobando porzioni della logica per le quali tale risultato non era ancora stato provato, come il calcolo logico classico al primo ordine con identità. Cfr. Gödel, K., *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, «Monatshefte für Mathematik und Physik», vol. 37, 1930, pp. 349-60

1) definizione e costruzione di un insieme massimale non-triviale di fbff di C_1 e dimostrazione di alcune sue proprietà fondamentali;

2) dimostrazione di esistenza di un modello per l'insieme massimale non-triviale ottenuto al punto 1).

3.1 Completezza forte del calcolo proposizionale C_1

Introduciamo il concetto di insieme non-triviale massimale per C_1, secondo la costruzione descritta dal lemma di Lindenbaum[75].

Sia '$\mathcal{F}$' l'insieme delle fbff di C_1. Sia $\hat{T}$ l'insieme di tutti i teoremi di C_1. Sia X un insieme di proposizioni in C_1: X si dice assolutamente inconsistente o banale o triviale se e solo se $\mathcal{F} = X$[76], se cioè esso dimostra tutte le proposizioni del calcolo. Diversamente esso è detto non-banale. Inoltre se $X \vdash \alpha$ e $X \vdash \neg\alpha$, per qualche α, allora X si dirà un insieme inconsistente di proposizioni.

Il concetto di insieme massimale non-triviale può essere rigorosamente definito così:

Definizione 5.8 $non\ Triv\ Mass(Y) \stackrel{\text{def}}{=}$

$$\stackrel{\text{def}}{=} [non\ Triv\ (Y)\ et\ (om\ A)\ (non\ (A \in Y)\ seq\ Triv(Y \cup \{A\}))]$$

L'insieme massimale così definito consentirà di assemblare in un unico aggregato tutte quelle formule fra loro non-incompatibili, tali cioè da non determinare la trivialità di Y o il collasso di Y su $\mathcal{F}$. Tale procedura ha un carattere fortemente non-costruttivo e dunque essa attribuirà una sorta di completezza sintattica solo apparente al calcolo, che non potrà di fatto costituirsi tale in mancanza di un metodo esplicito di costruzione. Per le formule di volta in volta ammesse nella costruzione di Y non viene esibita infatti la dimostrazione effettiva e pertanto l'insieme assume una connotazione perlopiù teorica nel suo grado di completezza.

---

[75] L'attribuzione di questo lemma ad Adolf Lindenbaum (Varsavia, 1904- Vilnius, 1941) è dovuta probabilmente a Tarski. Cfr. Tarski, A., *Über einige fundamentalen Begriffe der Metamathematik*, «Comptes rendus de séances de la Société des Sciences et Lettres de Varsovie (Classe III)», vol. 23, 1930, pp. 22-9. L proposizione in questione consente la dimostrazione di un enunciato differente, in quanto prova la possibilità per ogni insieme di formule consistente M, di poter essere esteso ad un insieme K a sua volta consistente ma in più massimale. Nel nostro caso occorre riadattare il lemma alle esigenze del calcolo paraconsistente, parlando di "non-trivialità" in luogo della semplice "non-contraddittorietà".

[76] Tale definizione di inconsistenza, valida anche in assenza di un operatore di negazione, la si deve – come già accennato – al logico americano John Kemeny. Cfr. Kemeny, J., *Models of Logical Systems*, *op. cit.* e Kemeny, J., *A New Approach to Semantic*, *I & II*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 21, n. 1, 1956, pp. 1-27; *Ibidem*, vol. 21, n. 2, 1956, pp. 149-61

Fissiamo innanzitutto un criterio di enumerazione effettiva delle espressioni sin qui considerate[77]. Possiamo a tal fine considerare o un ordinamento di tipo lessicografico sulla lunghezza delle espressioni del calcolo oppure disporre una loro aritmetizzazione. Procederemo qui optando per quest'ultima strategia.

Sia data dunque un'assegnazione numerica univoca a tutti i segni del nostro alfabeto:

$$g(() = 3$$ [78]

$$g()) = 5$$

$$g(\neg) = 7$$

$$g(\wedge) = 9$$

$$g(\vee) = 11$$

$$g(\rightarrow) = 13$$

$$g(\mathrm{A}_i) = 13+8(2^i)$$ [79]

Tale codifica detta $\#_1$ consente l'associazione univoca di numeri dispari a singoli elementi dell'alfabeto. Una seconda assegnazione potrà essere utilizzata per codificare invece le espressioni. Essa sarà chiamata $\#_2$ ed avrà la seguente struttura: il numero di Gödel di ciascun segno del linguaggio adoperato costituirà l'indice dell'elevamento a potenza di una successione crescente di numeri primi, di cui 2 sarà il primo. Così ad esempio $g(\neg(\mathrm{A}_k \wedge (\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{C})))$ = $2^{g(\neg)} . 3^{g(()} . 5^{g(A_k)} . 7^{g(\wedge)} \cdot \ldots \cdot p_8^{g())} \cdot p_9^{g())} \cdot p_{10}^{g())}$. Tale numero sarà sempre un numero pari, mentre quello dei semplici simboli sarà sempre dispari; non ci sarà dunque pericolo di confusione. Per codificare infine sequenze di espressioni, ripeteremo ancora tale procedimento, che indicheremo questa volta con con $\#_3$, ottenendo: $g(e_1, \ldots, e_n))$ = $2^{g(e_1)} . 3^{g(e_2)} . 5^{g(e_3)} \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^{g(e_{n-1})} \cdot p_n^{g(e_n)}$, dove $e_1, \ldots, e_n$ sono enumerazioni del tipo $\#_2$. Anche in quest'ultimo caso i numeri di Gödel non si

[77] Occorrerà mostrare cioè che esiste la possibilità di una enumerazione effettiva delle variabili proposizionali a nostra disposizione per provare alcune delle premesse fondamentali.

[78] Utilizzeremo la lettera funzionale 'g' poiché tale procedura è generalmente detta "gödelizzazione" e i numeri così assegnati "gödeliani". Non specificheremo qui un numero di Gödel differente per i segni '[' e ']', giacché essi possono essere sempre rimpiazzati in ogni loro occorrenza mediante i segni '(' e ')'. L'utilizzo di due sorte differenti di parentesi è solo una questione di comodità tipografica.

[79] Come si osserverà mancano assegnazioni numeriche per i segni '↔' e '∘'; essi non fanno parte del linguaggio di base e sono stati introdotti per mezzo di un'apposita definizione. Dunque il relativo gödeliano può essere considerato il numero naturale associato al rispettivo *definiens*.

confonderanno fra loro, tenendo ben distinti i tre livelli. Infatti il numero di una sequenza sarà sempre pari e, siccome l'esponente di due è anch'esso pari nella relativa scomposizione in fattori primi, esso avrà una cifra associata differente da quelle precedentemente predisposte mediante $\#_1$ e $\#_2$[80].

Prima di passare alla costruzione effettiva dell'insieme massimale Y, sarà utile stabilire un lemma, che, data la sua generalità, sarà valido anche per il caso del calcolo C_1^*. Esso afferma quanto segue:

Lemma 5.1 L'unione di una catena[81] di insiemi non-triviali di proposizioni, ordinati rispetto all'inclusione, è anch'essa non-triviale.

Dimostrazione

Sia per ipotesi $\Theta = \{\Gamma_k \mid k \in \omega\}$ una catena di insiemi non-triviali, linearmente ordinati da '$\subseteq$'[82], i cui elementi abbiano indice in $\boldsymbol{N}$ e si ammetta per assurdo che $\bigcup \Theta$ sia triviale. Se ciò fosse vero, allora $\bigcup \Theta \vdash \perp$[83] ossia Θ risulterebbe banale. Dalla prima ipotesi possiamo considerare il più grande insieme Γ_j all'interno della catena in grado di dedurre $\perp$ ed eventualmente verificare che $\Gamma_j \vdash \perp$. Se questo fosse il caso, allora saremmo in contraddizione con la prima ipotesi, per la quale ogni Γ_i è di fatto non-triviale. Inoltre in virtù

[80] Tale enumerazione è quella di Mendelson. Cfr. Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, Van Nostrand, New York, 1964; Chapman & Hall, London 1997[4], pp. 190-2. Cfr. anche Toffalori, C., Corradini, F., Leonesi, S., Mancini, S., *Teoria della computabilità e della complessità*, McGraw-Hill, Milano, 2005, pp. 28-30

[81] Dato un insieme M e considerata la sua potenza $\wp(M)$, chiamiamo "catena" un sottoinsieme N di $\wp(M)$, anche detto famiglia su M, se e solo la condizione $[x, y \in \mathfrak{F} \rightarrow (x \subseteq y) \vee (y \subseteq x)]$ è soddisfatta. In particolare la definizione di una catena comporta un ordinamento lineare o totale, giacché la relazione di inclusione soddisfa i seguenti tre criteri: 1) $\forall x(x \subseteq x)$; 2) $\forall x \forall y\big[\big((x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x)\big) \rightarrow (x = y)\big]$; 3) $\forall x \forall y \forall z\big[\big((x \subseteq y) \wedge (y \subseteq z)\big) \rightarrow (x \subseteq z)\big]$. La relazione di inclusione soddisfa dunque i requisiti di riflessività (1), di antisimmetria (2), di transitività (3), nonché la condizione di confrontabilità. L'insieme così ottenuto si dice anche insieme parzialmente ordinato (*poset*), con in aggiunta la proprietà di confrontabilità, per ogni x e y.

[82] Cioè a dire che i vari Y costituiranno una catena del seguente tipo: $Y = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup$ ..., dove Γ_j è l'elemento massimale della catena. Come è facile notare, in questo caso la massimalità di Γ_j può essere dimostrata ricorrendo ad un noto postulato, equivalente logicamente all'assioma di scelta zermeliano. Si tratta del cosiddetto lemma di Zorn. Cfr. Zorn, M., *A Remark on Method in Transfinite Algebra*, «Bulletin of American Mathematical Society», vol. 41, 1935, pp. 667-70. Sull'equivalenza dei due postulati si veda: Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, *op. cit.*, pp. 275-7. Sui principi massimali, di cui il lemma di Zorn è parte, si veda Rubin H., Rubin. J., *Equivalents of the Axiom of Choice*, North Holland, Amsterdam, 1963; 1970[2], pp. 10-37. Rubin, H., Rubin, J., *Equivalents of the Axiom of Choice, II*, North Holland, Amsterdam, 1985, pp. 31-72

[83] Mediante il simbolo '$\perp$' indicheremo in questo particolare caso il "falso", laddove per "falso" occorre intendere una costante proposizionale in grado di trivializzare il calcolo. Nel caso in questione potremmo assumere: $\perp \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha \wedge \neg^* \alpha)$, giacché tale falso renderebbe C_1 triviale.

dell'ordinamento indotto da '$\subseteq$', siamo certi che nessun Γ_h, dove $h < j$, deduca $\perp$, giacché se ciò fosse vero dovrebbe essere vero anche per Γ_j. Dunque possiamo concludere che se $\Theta = \{Y_k |\ k\in\omega\}$ è una catena di insiemi non-triviali linearmente ordinati da '$\subseteq$', allora anche $\bigcup \Theta$ è non-triviale.

Avendo ora a disposizione un metodo effettivo di enumerazione per le espressioni di C_1 ed avendo dimostrato la non-trivialità dell'unione di una catena di insiemi massimali non-triviali di proposizioni, diamo la procedura ricorsiva di costruzione dell'insieme non-triviale massimale per C_1 nel modo seguente:

Base:

$$\Gamma_0 = X$$

Passo:

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\alpha_n\},\ se\ \Gamma_n \cup \{\alpha_n\} \text{ è } non\text{–}triviale \\ \Gamma_n,\ se\ \Gamma_n \cup \{\alpha_n\} \text{ è } triviale \end{cases}$$

Y sarà allora non-triviale massimale e corrisponderà al seguente insieme:

$$Y = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup\ \dots\ \cup \Gamma_n \cup \dots, (om\ n)(n \in \boldsymbol{N})$$

Facendo un uso ancor più marcato del linguaggio insiemistico, potremo indicare Y come:

$$Y = \bigcup_{i=0}^{n} \Gamma_k \text{, dove } k, n\in\omega$$

ossia come la riunione dei vari Γ_k, ottenuti nei vari passi del procedimento.

Tale Y è anch'esso non-triviale per il lemma 5.1 ed è massimale in quanto ogni sua ulteriore estensione lo renderebbe banale.

Sviluppando il puno 1), dimostreremo di seguito alcune importanti proprietà degli insiemi non-triviali massimali, tra le quali certe condizioni rilevanti dette anche di chiusura.

I) $\alpha \in Y \ aeq \ Y \vdash \alpha$

Dimostrazione

a.

Immediata per la riflessività del calcolo.

b. $Y \vdash \alpha \ seq \ \alpha \in Y$

1) $Y \vdash \alpha$	Ip. 1
2) $non\ (\alpha \in Y)$	Ip. 2
3) $non\ Triv\ [Y \cup \{\neg^* \alpha\}]$	per massimalità di Y
4) $Y \cup \{\neg^* \alpha\} \vdash \neg^* \alpha$	per *a.*
5) $Y, \alpha \vdash non\ non\ (\alpha \in Y)$	da 1), 2), 4) per RAA[84]
6) $Y, \alpha \vdash \alpha \in Y$	da 5) per DN[85]
7) $Y \vdash \alpha \ seq \ \alpha \in Y$	da 6) per MMD

c. $\alpha \in Y \ aeq \ Y \vdash \alpha$

1) $\alpha \in Y \ seq \ Y \vdash \alpha$	da *a.*
2) $Y \vdash \alpha \ seq \ \alpha \in Y$	da *b.*
3) $\alpha \in Y \ aeq \ Y \vdash \alpha$	da 1), 2) per def. '*aeq*'

Dimostriamo un corollario della proprietà di chiusura:

II) $\vdash \alpha \ seq \ \alpha \in Y$

Dimostrazione

1) $\vdash \alpha$	Ip. 1
2) $non\ (\alpha \in Y)$	Ip. 2

[84] 'RAA' sta qui per regola di reductio ad absurdum.
[85] 'DN' sta qui per regola di doppia negazione.

3) $non\ Triv\ [Y \cup \{\neg^* \alpha\}]$	per mass. di Y
4) $Y \cup \{\neg^* \alpha\} \vdash \neg^* \alpha$	per I)
5) $\alpha \vdash non\ non\ (\alpha \in \Gamma^*)$	da 1)-5) per RAA
6) $\alpha \vdash \alpha \in Y$	da 6) per DN
7) $\vdash \alpha\ seq\ \alpha \in Y$	da 7) per MMD

Passeremo ora alla completezza di Y rispetto alle costanti logiche del calcolo C_1. Se Y è un insieme massimale non-triviale, allora Y rispetta le seguenti condizioni:

completezza rispetto a '$\neg^*$':

III) $(\neg^* \alpha) \in Y\ seq\ non\ (\alpha \in Y)$

Dimostrazione

1) $(\neg^* \alpha) \in Y$	Ip. 1
2) $non\ non\ (\alpha \in Y)$	Ip. 2
3) $\alpha \in Y$	da 2) per DN
4) $(\neg^* \alpha) \in Y\ seq\ Y \vdash \neg^* \alpha$	da 1) per I *a.*
5) $Y \vdash \neg^* \alpha$	da 1), 4) per MMP
6) $(\neg^* \alpha) \in Y, on\ non\ (\alpha \in Y) \vdash \neg^* \alpha$	da 1)-5)
7) $\alpha \in Y\ seq\ Y \vdash \alpha$	da 3) per I *a.*
8) $Y \vdash \alpha$	da 3), 7) per MP
9) $(\neg^* \alpha) \in Y, non\ non\ (\alpha \in Y) \vdash \alpha$	da 1), 2), 3), 8)
10) $(\neg^* \alpha) \in Y \vdash non\ non\ non\ (\alpha \in Y)$	da 1)-9) per RAA
11) $(\neg^* \alpha) \in Y \vdash non\ (\alpha \in Y)$	da 10) per DN
12) $(\neg^* \alpha) \in Y\ seq\ non\ (\alpha \in Y)$	da 11) per MMD

IV) $\alpha \in Y\ seq\ non\ \left((\neg^* \alpha) \in Y\right)$

Dimostrazione

1) $\alpha \in Y$	Ip. 1
2) $non\ non\ \left((\neg^* \alpha) \in Y\right)$	Ip. 2
3) $(\neg^* \alpha) \in Y$	da 2) per DN
4) $\alpha \in Y\ seq\ Y \vdash \alpha$	da 1) per I *a.*
5) $Y \vdash \alpha$	da 1), 4) per MP
6) $(\neg^* \alpha) \in Y\ seq\ Y \vdash \neg^* \alpha$	da 3) per I *a.*
7) $Y \vdash \neg^* \alpha$	da 3), 6) per MP
8) $\alpha \in Y \vdash non\ non\ \left((\neg^* \alpha) \in Y\right)$	da 1), 2), 5), 7) per RAA

9) $\alpha \in Y \vdash (\neg^* \alpha) \in Y$	da 8) per DN
10) $\alpha \in Y\ seq\ non\ \big((\neg^* \alpha) \in Y\big)$	da 9) per MMD

Una proprietà evidente che consegue dalla proprietà di completezza rispetto a '$\neg^*$' è quella del terzo escluso:

V) $\alpha \in Y\ vel\ (\neg^* \alpha) \in Y$

Dimostrazione

1) $non\ (\alpha \in Y\ vel\ (\neg^* \alpha) \in Y)$	Ip. 1
2) $non\ (\alpha \in Y)\ et\ non\ \big((\neg^* \alpha) \in Y\big)$	da 1) per leggi di De Morgan
3) $non\ Triv\ Y \cup \{\alpha\}$	da 2) per mass. di Y
4) $non\ Triv\ Y \cup \{\neg^* \alpha\}$	da 2) per mass. di Y
5) $Mass\ non\ Triv\ Y$	Ip. base
6) $non\ Mass\ Y$	da 3), 4) per mass. di Y
7) $non\ non\ (\alpha \in Y\ vel\ (\neg^* \alpha) \in Y)$	da 1)-6) per RAA
8) $(\alpha \in Y)\ vel\ \big((\neg^* \alpha) \in Y\big)$	da 7) per DN

Passiamo ora alla dimostrazione della proprietà di completezza rispetto all'operatore di stabilità:

VI) $\alpha, \alpha^{\circ} \in \mathrm{Y}\ seq\ non\ \big((\neg \alpha) \in Y\big)$

Dimostrazione

1) $\alpha \in Y$	Ip. 1[86]
2) $\alpha^{\circ} \in Y$	Ip. 2
3) $non\ non\ \big((\neg \alpha) \in Y\big)$	Ip. 3
4) $(\neg \alpha) \in Y$	da 3) per DN
5) $\alpha \in Y\ seq\ Y \vdash \alpha$	da 1) per I *a.*
6) $Y \vdash \alpha$	da 1), 5) per MP
7) $(\neg \alpha) \in Y\ seq\ Y \vdash \neg \alpha$	da 4) per I *a.*
8) $Y \vdash \neg \alpha$	da 4), 7) per MP

[86] Scomponiamo qui l'ipotesi $\alpha, \alpha^{\circ} \in \Gamma^*$ in due parti per ragioni di praticità nello sviluppo della dimostrazione.

9) $\alpha^{\circ} \in Y$ *seq* $Y \vdash \alpha^{\circ}$ da 2) per I *a.*
10) $Y \vdash \alpha^{\circ}$ da 2), 4) per MP
11) $Y \vdash \neg\alpha\wedge\alpha^{\circ}$ da 8), 10) per I-∧[87]
12) $Y \vdash \neg^{*}\alpha$ da 11) per def. di '¬*'
13) $\alpha, \alpha^{\circ} \in Y \vdash$ *non non non* $(\neg\alpha \in Y)$ da 1)-12), per RAA
14) $\alpha, \alpha^{\circ} \in Y \vdash$ *non* $(\neg\alpha \in Y)$ da 13) per DN
15) $\alpha, \alpha^{\circ} \in \Gamma^{*}$ *seq non* $(\neg\alpha \in Y)$ da 14) per MMD

VII) $\neg\alpha, \alpha^{\circ} \in Y$ *seq non* $(\alpha \in Y)$

Dimostrazione

1) $(\neg\alpha) \in Y$ Ip. 1
2) $\alpha^{\circ} \in Y$ Ip. 2
3) *non non* $(\alpha \in Y)$ Ip. 3
4) $\alpha \in Y$ da 3) per DN
5) $(\neg\alpha) \in Y$ *seq* $Y \vdash \neg\alpha$ da 1) per I *a.*
6) $Y \vdash \neg\alpha$ da 1), 5) per MP
7) $\alpha \in Y$ *seq* $Y \vdash \alpha$ da 4) per I *a.*
8) $\Gamma^{*} \vdash \alpha$ da 4), 7) per MP
9) $\alpha^{\circ} \in Y$ *seq* $Y \vdash \alpha^{\circ}$ da 2) per I *a.*
10) $Y \vdash \alpha^{\circ}$ da 2), 9) per MP
11) $Y \vdash \neg\alpha\wedge\alpha^{\circ}$ da 6), 10) per I-∧
12) $Y \vdash \neg^{*}\alpha$ da 11) per def. di '¬*'
13) $\neg\alpha, \alpha^{\circ} \in Y \vdash$ *non non non* $(\alpha \in Y)$ da 1)-12) per RAA
14) $\neg\alpha, \alpha^{\circ} \in Y \vdash$ *non* $(\alpha \in Y)$ da 13) per DN
15) $(\neg\alpha, \alpha^{\circ} \in Y)$ *seq non* $(\alpha \in Y)$ da 14) per MMD

Due proprietà che è possibile a questo punto derivare grazie al punto VII) sono:

VIII) $\alpha^{\circ} \in Y$ *seq* $\big[$*non* $(\alpha \in Y)$ *vel non* $\big((\neg\alpha) \in Y\big)\big]$

Dimostrazione

1) $\alpha^{\circ} \in Y$ Ip. 1
2) *non* $\big[$*non* $(\alpha \in Y)$ *vel non* $\big((\neg\alpha) \in Y\big)\big]$ Ip. 2
3) *non non* $(\alpha \in Y)$ *et non non* $((\neg\alpha) \in Y)$ da 2) per leggi di De Morgan
4) *non non* $(\alpha \in Y)$ da 3) per E-∧[88]

[87] 'I-∧' sta qui per regola di introduzione della congiunzione.
[88] 'E-∧' sta qui per regola di eliminazione della congiunzione.

5) $non\ non\ ((\neg\alpha) \in Y)$ da 3) per E-$\wedge$
6) $\alpha \in Y$ da 4) per DN
7) $(\neg\alpha) \in Y$ da 5) per DN
8) $\alpha \in Y\ seq\ Y \vdash \alpha$ da 6) per I *a.*
9) $Y \vdash \alpha$ da 6), 8) per MP
10) $(\neg\alpha) \in Y\ seq\ Y \vdash \neg\alpha$ da 7) per I *a.*
11) $Y \vdash \neg\alpha$ da 7), 10) per MP
12) $\alpha^{\circ} \in Y\ seq\ Y \vdash \alpha^{\circ}$ da 1) per I *a.*
13) $Y \vdash \alpha^{\circ}$ da 1), 12) per MP
14) $Y \vdash \neg\alpha\wedge\alpha^{\circ}$ da 11), 12) per I-$\wedge$
15) $Y \vdash \neg^{*}\alpha$ da 9) per def. '$\neg^{*}$'
16) $\alpha^{\circ} \in Y \vdash non\ non\ [non\ (\alpha \in Y)\ vel\ non\ ((\neg\alpha) \in Y)]$
da 1)-15) per RAA
17) $\alpha^{\circ} \in Y \vdash [non\ (\alpha \in Y)\ vel\ non\ ((\neg\alpha) \in Y)])$
da 16) per DN
18) $\alpha^{\circ} \in Y\ seq\ [non\ (\alpha \in Y)\ vel\ non\ ((\neg\alpha) \in Y)]$
da 17) per MMD

IX) $\alpha^{\circ} \in Y\ seq\ ((\neg\alpha)^{\circ} \in Y)$

Dimostrazione

1) $\alpha^{\circ} \in Y$ Ip. 1
2) $\alpha^{\circ} \in Y\ seq\ Y \vdash \alpha^{\circ}$ da 1) per I *a.*
3) $Y \vdash \alpha^{\circ}$ da 1), 2) per MP
4) $Y \vdash \alpha^{\circ}\rightarrow(\neg\alpha)^{\circ}$ $teor.$ 4.28
5) $Y \vdash (\neg\alpha)^{\circ}$ da 3), 4) per MP
6) $Y \vdash (\neg\alpha)^{\circ}\ seq\ (\neg\alpha)^{\circ} \in Y$ da 5) per I *b.*
7) $(\neg\alpha)^{\circ} \in Y$ da 5), 6) per MP
8) $\alpha^{\circ} \in Y \vdash (\neg\alpha)^{\circ} \in Y$ da 1)-7)
9) $\alpha^{\circ} \in Y\ seq\ ((\neg\alpha)^{\circ} \in Y)$ da 8) per MMD

Dimostreremo ora la proprietà di completezza di Y rispetto a '$\rightarrow$':

X) $\alpha\rightarrow\beta \in Y\ aeq\ [non\ (\alpha \in Y)\ vel\ (\beta \in Y)]$

a)

Dimostrazione

1) $\alpha\rightarrow\beta \in Y$ Ip. 1
2) $\alpha \in Y$ Ip. 2

3) $\alpha \to \beta \in Y$ *seq* $Y \vdash \alpha \to \beta$	da 1) per I *a.*
4) $Y \vdash \alpha \to \beta$	da 1), 3) per MP
5) $\alpha \in Y$ *seq* $Y \vdash \alpha$	da 2) per I *a.*
6) $Y \vdash \alpha$	da 2), 4) per MP
7) $Y \vdash \beta$	da 4), 6) per MP
8) $Y \vdash \beta$ *seq* $\beta \in Y$	da 7) per I *b.*
9) $\beta \in Y$	da 7), 8), per MP
10) $\alpha \to \beta \in Y, \alpha \in Y \vdash \beta \in Y$	da 1)-9)
11) $\alpha \to \beta \in Y \vdash \alpha \in Y$ *seq* $\beta \in Y$	da 10) per MMD
12) $\alpha \to \beta \in Y$ *seq* $[\alpha \in Y$ *seq* $\beta \in Y]$	da 11) per MMD
13) $\alpha \to \beta \in Y$ *seq* $[$*non* $(\alpha \in Y)$ *vel* $(\beta \in Y)]$	da 12) per interdef.

b)

b.1)

1) *non* $(\alpha \in Y)$	Ip. 1
2) *Triv* $Y \cup \{\alpha\}$	per mass. di Γ^*
3) $Y \cup \{\alpha\} \vdash \beta$	per PSC[89]
4) $Y \vdash \alpha \to \beta$	da 3) per MMD
5) $Y \vdash \alpha \to \beta$ *seq* $\alpha \to \beta \in Y$	da 4) per I *b.*
6) $\alpha \to \beta \in Y$	da 4), 5) per MP
7) *non* $(\alpha \in Y) \vdash \alpha \to \beta \in Y$	da 1)-6)
8) *non* $(\alpha \in Y)$ *seq* $\alpha \to \beta \in Y$	da 7) per MMD

b.2)

1) $\beta \in Y$	Ip. 1
2) $\beta \in Y$ *seq* $Y \vdash \beta$	da 1) per I *a.*
3) $Y \vdash \beta$	da 1), 2) per MP
4) $Y \vdash \beta \to (\alpha \to \beta)$	$Ass. 1$
5) $Y \vdash \alpha \to \beta$	da 3), 4) per MP
6) $Y \vdash \alpha \to \beta$ *seq* $\alpha \to \beta \in Y$	da 6) per I *b.*
7) $\alpha \to \beta \in Y$	da 6), 7) per MP
8) $\beta \in Y \vdash \alpha \to \beta \in Y$	da 1)-8)
9) $\beta \in Y$ *seq* $\alpha \to \beta \in Y$	da 9) per MMD

b.3)

1) *non* $(\alpha \in Y)$ *seq* $\alpha \to \beta \in Y$	da *b.1*
2) $\beta \in Y$ *seq* $\alpha \to \beta \in Y$	da *b.2*
3) $[$*non* $(\alpha \in Y)$ *seq* $\alpha \to \beta \in Y]$ *seq* *seq* $[[\beta \in Y$ *seq* $\alpha \to \beta \in Y]$ *seq* *seq* $[[$*non* $(\alpha \in Y)$ *vel* $\beta \in Y]$ *seq*	

[89] 'PSC' sta qui per regola dello pseudo-Scoto.

$seq\ \alpha \rightarrow \beta \in Y]]]$ da 1), 2) per I-∨[90]

4) $[[\beta \in Y\ seq\ \alpha \rightarrow \beta \in Y]\ seq$ da 1), 3) per MP
$seq\ [[non\ (\alpha \in Y)\ vel\ \beta \in Y]\ seq$
$seq\ \alpha \rightarrow \beta \in Y]]$

5) $[non\ (\alpha \in Y)\ vel\ \beta \in Y]\ seq$ da 2), 4) per MP
$seq\ \alpha \rightarrow \beta \in Y]]$

c)

1) $\alpha \rightarrow \beta \in Y\ seq\ [non\ (\alpha \in Y)\ vel\ (\beta \in Y)]$ da *a)*
2) $[non\ (\alpha \in Y)\ vel\ \beta \in Y]\ seq\ \alpha \rightarrow \beta \in Y$ da *b)*
3) $\alpha \rightarrow \beta \in Y\ aeq\ [non\ (\alpha \in Y)\ vel\ (\beta \in Y)]$ da 1), 2) per def. '∘'

Dimostriamo la proprietà di completezza di Y per '∧':

XI) $\alpha \wedge \beta \in Y\ aeq\ [\alpha \in Y\ et\ \beta \in Y]$

Dimostrazione

a)

1) $\alpha \wedge \beta \in Y$	Ip. 1
2) $\alpha \wedge \beta \in \Gamma^*\ seq\ Y \vdash \alpha \wedge \beta$	da 1) per I *a.*
3) $Y \vdash \alpha \wedge \beta$	da 1), 2) per MMP
4) $Y \vdash (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$	$Ass.3$
5) $Y \vdash \alpha$	da 3), 4) per MP
6) $Y \vdash (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$	$Ass.4$
7) $Y \vdash \beta$	da 3), 6) per MP
8) $Y \vdash \alpha\ seq\ \alpha \in Y$	da 5) per I *b.*
9) $\alpha \in Y$	da 5), 8) per MMP
10) $Y \vdash \beta\ seq\ \beta \in Y$	da 7) per I *b.*
11) $\beta \in Y$	da 7), 10) per MMP
12) $\alpha \in Y\ et\ \beta \in Y$	da 9), 11) per I-∧
13) $\alpha \wedge \beta \in Y \vdash \alpha \in Y\ et\ \beta \in Y$	da 1)-12)
14) $\alpha \wedge \beta \in Y\ seq\ [\alpha \in Y\ et\ \beta \in Y]$	da 12) per MMD

b)

1) $\alpha \in Y\ et\ \beta \in Y$ Ip. 1

[90] 'I-∨' sta qui per regola di introduzione della disgiunzione.

2) $\alpha \in Y$	da 1) per E-$\wedge$
3) $\beta \in Y$	da 1) per E-$\wedge$
4) $\alpha \in Y\ seq\ Y \vdash \alpha$	da 2) per I *a.*
5) $Y \vdash \alpha$	da 2), 4) per MMP
6) $\beta \in Y\ seq\ Y \vdash \beta$	da 3) per I *a.*
7) $Y \vdash \beta$	da 3), 6) per MMP
8) $Y \vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$	$Ass. 5$
9) $Y \vdash \beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$	da 5), 8) per MP
10) $Y \vdash \alpha \wedge \beta$	da 7), 8) per MP
11) $Y \vdash \alpha \wedge \beta\ seq\ \alpha \wedge \beta \in Y$	da 10) per I *b.*
12) $\alpha \wedge \beta \in Y$	da 10), 11) per MMP
13) $\alpha \in Y\ et\ \beta \in Y \vdash \alpha \wedge \beta \in Y$	da 1)-12)
14) $[\alpha \in Y\ et\ \beta \in Y\ ]\ seq\ \alpha \wedge \beta \in Y$	da 13) per MMD

c)

1) $\alpha \wedge \beta \in Y\ seq\ [\alpha \in Y\ et\ \beta \in Y]$	da *a.*
2) $[\alpha \in Y\ et\ \beta \in Y\ ]\ seq\ \alpha \wedge \beta \in Y$	da *b.*
3) $\alpha \wedge \beta \in \Gamma^*\ aeq\ [\alpha \in \Gamma^*\ et\ \beta \in \Gamma^*]$	da 1), 2) per def. '°'

Dimostriamo ora la completezza di Y rispetto a '$\vee$':

XII) $\alpha \vee \beta \in Y\ aeq\ [\alpha \in Y\ vel\ \beta \in Y]$

a)

1) $\alpha \vee \beta \in Y$	Ip. 1
2) $non\ [\alpha \in Y\ vel\ \beta \in Y]$	Ip. 2
3) $non\ (\alpha \in Y)\ et\ non\ (\beta \in Y)$	da 2) per leggi De Morgan
4) $non\ (\alpha \in Y)$	da 3) per E-$\wedge$
5) $non\ (\beta \in Y)$	da 3) per E-$\wedge$
6) $\alpha \vee \beta \in Y\ seq\ Y \vdash \alpha \vee \beta$	da 1) per I *a.*
7) $Y \vdash \alpha \vee \beta$	da 1), 6) per MMP
8) $non\ Triv\ Y \cup \{\neg^* \alpha\}$	per mass. di Y
9) $non\ Triv\ Y \cup \{\neg^* \beta\}$	per mass. di Y
10) $(\neg^* \alpha) \in Y$	da 8) per V
11) $(\neg^* \beta) \in Y$	da 9) per V
12) $(\neg^* \alpha) \in Y\ seq\ Y \vdash \neg^* \alpha$	da 10) per I *a.*
13) $Y \vdash \neg^* \alpha$	da 10), 12) per MMP
14) $(\neg^* \beta) \in Y\ seq\ Y \vdash \neg^* \beta$	da 11) per I *a.*
15) $Y \vdash \neg^* \beta$	da 11), 14) per MMP
16) $Y \vdash \neg^* \alpha \rightarrow (\neg^* \beta \rightarrow (\neg^* \alpha \wedge \neg^* \beta))$	$\mathfrak{S}^{B}_{\neg^* B}(\mathfrak{S}^{A}_{\neg^* A} Ass. 5)$

17) $Y \vdash \neg^{*}\beta \rightarrow (\neg^{*}\alpha \wedge \neg^{*}\beta)$	da 13), 16) per MMP
18) $Y \vdash \neg^{*}\alpha \wedge \neg^{*}\beta$	da 15), 17) per MMP
19) $Y \vdash \neg^{*}(\alpha \vee \beta)$	da 18) per leggi di De Morgan[91]
20) $\alpha \vee \beta \in Y \vdash non\ non\ [\alpha \in Y\ vel\ \beta \in Y]$	da 1)-19) per RAA
21) $\alpha \vee \beta \in Y \vdash [\alpha \in Y\ vel\ \beta \in Y]$	da 20) per DN
22) $\alpha \vee \beta \in Y\ seq\ [\alpha \in Y\ vel\ \beta \in Y]$	da 21) per MMD

b)

b.1)

1) $\alpha \in Y$	Ip. 1
2) $\alpha \in Y\ seq\ Y \vdash \alpha$	da 1) per I *a.*
3) $Y \vdash \alpha$	da 1), 2) per MMP
4) $Y \vdash \alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$	$Ass.6$
5) $Y \vdash \alpha \vee \beta$	da 3), 4) per MP
6) $Y \vdash \alpha \vee \beta\ seq\ \alpha \vee \beta \in Y$	da 5) per I *b.*
7) $\alpha \vee \beta \in Y$	da 5), 6) per MMP
8) $\alpha \in Y \vdash \alpha \vee \beta \in Y$	da 1)-7)
9) $\alpha \in Y\ seq\ \alpha \vee \beta \in Y$	da 8) per MMD

b.2)

1) $\beta \in Y$	Ip. 1
2) $\beta \in Y\ seq\ Y \vdash \beta$	da 1) per I *a.*
3) $Y \vdash \beta$	da 1), 2) per MMP
4) $Y \vdash \beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$	$Ass.7$
5) $Y \vdash \alpha \vee \beta$	da 3), 4) per MP
6) $Y \vdash \alpha \vee \beta\ seq\ \alpha \vee \beta \in Y$	da 5) per I *b.*
7) $\alpha \vee \beta \in Y$	da 5), 6) per MMP
8) $\beta \in Y \vdash \alpha \vee \beta \in Y$	da 1), 7)
9) $\beta \in Y\ seq\ \alpha \vee \beta \in Y$	da 8) per MMD

b.3)

1) $\alpha \in Y\ seq\ \alpha \vee \beta \in Y$	da b.1
2) $\beta \in Y\ seq\ \alpha \vee \beta \in Y$	da b.2
3) $[\alpha \in Y\ seq\ \alpha \vee \beta \in Y]\ seq$ $seq\ [[\beta \in Y\ seq\ \alpha \vee \beta \in Y]\ seq$ $[\alpha \in Y\ vel\ \beta \in Y]\ seq\ \alpha \vee \beta \in Y]$	E-$\vee$
4) $[[[[\beta \in Y\ seq\ \alpha \vee \beta \in Y]\ seq$ $[\alpha \in Y\ vel\ \beta \in Y]\ seq\ \alpha \vee \beta \in Y]$	da 1), 3) per MMP
5) $[\alpha \in Y\ vel\ \beta \in Y]\ seq\ \alpha \vee \beta \in Y$	da 2), 4) per MMP

[91] '$\neg^{*}$' gode di tutte le proprietà della negazione classica.

c)

1) $\alpha \vee \beta \in Y\ seq\ [\alpha \in Y\ vel\ \beta \in Y]$ da *a)*
2) $[\alpha \in Y\ vel\ \beta \in Y]\ seq\ \alpha \vee \beta \in Y$ da *b.3)*
3) $\alpha \vee \beta \in Y\ aeq\ [\alpha \in Y\ vel\ \beta \in Y]$ da 1), 2) per def. 'aeq'

Dimostriamo ancora una proprietà dell'insieme Y, relativa alla completezza di Y rispetto a '$\rightarrow$', '$\wedge$' e '$\vee$', assumendo la stabilità di α e β:

XIII) $(\alpha^{\circ}, \beta^{\circ} \in Y)\ seq\ [(\alpha \rightarrow \beta)^{\circ} \in Y\ et\ (\alpha \wedge \beta)^{\circ} \in Y\ et\ (\alpha \vee \beta)^{\circ} \in Y]$

Dimostrazione

1) $\alpha^{\circ} \in Y$ Ip. 1
2) $\beta^{\circ} \in Y$ Ip. 2
3) $\alpha^{\circ} \in Y\ seq\ Y \vdash \alpha^{\circ}$ da 1) per I *a.*
4) $Y \vdash \alpha^{\circ}$ da 1), 3) per MMP
5) $\beta^{\circ} \in Y\ seq\ Y \vdash \beta^{\circ}$ da 2) per I *a.*
6) $Y \vdash \beta^{\circ}$ da 2), 5) per MMP
7) $Y \vdash \alpha^{\circ} \rightarrow \left(\beta^{\circ} \rightarrow (\alpha^{\circ} \wedge \beta^{\circ})\right)$ $\mathfrak{S}^{B}_{B^{\circ}}\left(\mathfrak{S}^{A}_{A^{\circ}} Ass. 5\right)$
8) $Y \vdash \beta^{\circ} \rightarrow (\alpha^{\circ} \wedge \beta^{\circ})$ da 4), 7) per MP
9) $Y \vdash \alpha^{\circ} \wedge \beta^{\circ}$ da 6), 9) per MP
10) $Y \vdash (\alpha^{\circ} \wedge \beta^{\circ}) \rightarrow [(\alpha \rightarrow \beta)^{\circ} \wedge (\alpha \wedge \beta)^{\circ} \wedge (\alpha \vee \beta)^{\circ}]$ $Ass. 10$

11) $Y \vdash (\alpha \rightarrow \beta)^{\circ} \wedge ((\alpha \wedge \beta)^{\circ} \wedge (\alpha \vee \beta)^{\circ})$ da 9), 10) per MP
12) $Y \vdash [(\alpha \rightarrow \beta)^{\circ} \wedge ((\alpha \wedge \beta)^{\circ} \wedge (\alpha \vee \beta)^{\circ})] \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)^{\circ}$
13) $Y \vdash (\alpha \rightarrow \beta)^{\circ}$
14) $Y \vdash [(\alpha \rightarrow \beta)^{\circ} \wedge ((\alpha \wedge \beta)^{\circ} \wedge (\alpha \vee \beta)^{\circ})] \rightarrow ((\alpha \wedge \beta)^{\circ} \wedge (\alpha \vee \beta)^{\circ})$
15) $Y \vdash ((\alpha \wedge \beta)^{\circ} \wedge (\alpha \vee \beta)^{\circ})$
16) $Y \vdash ((\alpha \wedge \beta)^{\circ} \wedge (\alpha \vee \beta)^{\circ}) \rightarrow (\alpha \wedge \beta)^{\circ}$
17) $Y \vdash (\alpha \wedge \beta)^{\circ}$
18) $Y \vdash ((\alpha \wedge \beta)^{\circ} \wedge (\alpha \vee \beta)^{\circ}) \rightarrow (\alpha \vee \beta)^{\circ}$
19) $Y \vdash (\alpha \vee \beta)^{\circ}$
20) $[(\alpha \rightarrow \beta)^{\circ}]\ seq\ (\alpha \rightarrow \beta)^{\circ} \in Y$
21) $[(\alpha \wedge \beta)^{\circ}]\ seq\ (\alpha \wedge \beta)^{\circ} \in Y$ da 11) per I *b.*
22) $[(\alpha \vee \beta)^{\circ}]\ seq\ (\alpha \vee \beta)^{\circ} \in Y$
23) $(\alpha \rightarrow \beta)^{\circ} \in Y$
24) $(\alpha \wedge \beta)^{\circ} \in Y$
25) $(\alpha \vee \beta)^{\circ} \in Y$
26) $(\alpha \rightarrow \beta)^{\circ} \in Y\ et\ (\alpha \wedge \beta)^{\circ} \in Y\ et\ (\alpha \vee \beta)^{\circ} \in Y]$

da 20) per I-$\wedge$

27) $\overset{\circ}{\alpha}, \overset{\circ}{\beta} \in Y \vdash [(\alpha \rightarrow \beta)^{\circ} \in Y\ et\ (\alpha \wedge \beta)^{\circ} \in Y\ et\ (\alpha \vee \beta)^{\circ} \in Y]$

28) $\overset{\circ}{\alpha}, \overset{\circ}{\beta} \in Y\ seq\ [(\alpha \rightarrow \beta)^{\circ} \in Y\ et\ (\alpha \wedge \beta)^{\circ} \in Y\ et\ (\alpha \vee \beta)^{\circ} \in Y]$

2) Definiamo un'interpretazione $\mathfrak{I}$, tale che $Mod\ \mathfrak{I}\ Y$ nel modo che segue:

$$\mathfrak{I}(\alpha_i) = \begin{cases} 1, se\ \alpha_i \in Y \\ 0, altrimenti \end{cases}$$

$$\mathfrak{I}(\neg\alpha_i) = \begin{cases} 1, se\ \neg\alpha_i \in Y \\ 0, altrimenti \end{cases}$$

$$\mathfrak{I}(\overset{\circ}{\alpha}) = \begin{cases} 1, se\ o\ \alpha_i \in Y\ o\ \neg\alpha_i \in Y \\ 0, se\ \alpha = \neg\alpha\ = 1 \end{cases}$$

L'obiettivo è quello di giungere alla prova del fatto seguente:

Lemma 5.2 $(om\ \alpha)(Mod\ \mathfrak{I}\ \alpha\ aeq\ \alpha\ \in Y)$

Dimostrazione

La dimostrazione della metaproposizione sopra enunciata avverrà per induzione sulla complessità delle formule in questo modo:

Base:

a) Sia α_i una proposizione atomica. Allora per ogni *i*:

1) $Mod\ \mathfrak{I}\ \alpha_i\ aeq\ Mod\ \mathfrak{I}\ \alpha_i$
2) $Mod\ \mathfrak{I}\ \alpha_i\ aeq\ \overline{\mathfrak{I}}(\alpha_i) = 1$
3) $\overline{\mathfrak{I}}(\alpha_i) = 1\ aeq\ \alpha_i \in Y$
4) $Mod\ \mathfrak{I}\ \alpha_i\ aeq\ \alpha_i \in Y$

Passo:

b) Sia $\alpha\, aeq\, \neg^* \beta$. Allora:

1) $Mod\, \mathfrak{I}\, \alpha\, aeq\, Mod\, \mathfrak{I} \neg^* \beta$
2) $Mod\, \mathfrak{I}\, \alpha\, aeq\, non\, Mod\, \mathfrak{I}\, \beta$
3) $Mod\, \mathfrak{I}\, \alpha\, aeq\, \overline{\mathfrak{I}}(\beta) = 0$
4) $Mod\, \mathfrak{I}\, \alpha\, aeq\, non\, (\beta \in Y)$
5) $Mod\, \mathfrak{I}\, \alpha\, aeq\, (\neg^* \beta) \in Y$
6) $Mod\, \mathfrak{I}\, \alpha\, aeq\, \alpha \in Y$

c) Sia $\left[(\alpha\, aeq\, \beta)\ et\ \beta \in Y\ et\ \overset{\circ}{\beta} \in Y\right]$. Allora $non\ (\neg\beta \in Y)$. Così:

1) $\left[\beta \in Y\ et\ \overset{\circ}{\beta} \in Y\right] aeq \left[\beta \in Y\ et\ \overset{\circ}{\beta} \in Y\right]$
2) $\left[\beta \in Y\ et\ \overset{\circ}{\beta} \in Y\right] aeq \left[\overline{\mathfrak{I}}(\beta) = 1\ et\ \overline{\mathfrak{I}}\left(\overset{\circ}{\beta}\right) = 1\right]$
3) $\left[\overline{\mathfrak{I}}(\beta) = 1\ et\ \overline{\mathfrak{I}}\left(\overset{\circ}{\beta}\right) = 1\right] seq\ [\overline{\mathfrak{I}}(\neg\beta) = 0]$
4) $[\overline{\mathfrak{I}}(\neg\beta) = 0]\ aeq\ non\ (Mod\, \mathfrak{I} \neg\beta)$
5) $non\ (Mod\, \mathfrak{I} \neg\beta)\ seq\ non\ (\neg\beta \in Y)$
6) $\left[\beta \in Y\ et\ \overset{\circ}{\beta} \in Y\right] seq\ non\ (\neg\beta \in Y)$

d) Sia $\left[(\alpha\, aeq\, \neg\beta)\ et\ \beta \in Y\ et\ \overset{\circ}{\beta} \in Y\right]$. Allora $non\ (\beta \in Y)$. Così:

1) $\left[\neg\beta \in Y\ et\ \overset{\circ}{\beta} \in Y\right] aeq \left[\neg\beta \in Y\ et\ \overset{\circ}{\beta} \in Y\right]$
2) $\left[\neg\beta \in Y\ et\ \overset{\circ}{\beta} \in Y\right] aeq \left[\overline{\mathfrak{I}}(\neg\beta) = 1\ et\ \overline{\mathfrak{I}}\left(\overset{\circ}{\beta}\right) = 1\right]$
3) $\left[\overline{\mathfrak{I}}(\neg\beta) = 1\ et\ \overline{\mathfrak{I}}\left(\overset{\circ}{\beta}\right) = 1\right] seq\ [\overline{\mathfrak{I}}(\beta) = 0]$
4) $[\overline{\mathfrak{I}}(\beta) = 0]\ aeq\ non\ (Mod\, \mathfrak{I}\, \beta)$
5) $non\ (Mod\, \mathfrak{I}\, \beta)\ seq\ non\ (\beta \in Y)$
6) $\left[\neg\beta \in Y\ et\ \overset{\circ}{\beta} \in Y\right] seq\ non\ (\beta \in Y)$

e) Sia $\alpha\, aeq\, \neg(\overset{\circ}{\alpha})$. Allora $[\alpha \in Y\ et\ \neg\alpha \in Y]$. Così:

1) $Mod\, \mathfrak{I}\, \alpha\, aeq\, Mod\, \mathfrak{I} \neg(\overset{\circ}{\alpha})$
2) $Mod\, \mathfrak{I}\, \alpha\, aeq\, Mod\, \mathfrak{I} \neg\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

3) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ Mod\ \Im\ \alpha\wedge\neg\alpha$
4) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ [Mod\ \Im\ \alpha\ et\ Mod\ \Im\ \neg\alpha]$
5) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ [\overline{\Im}(\alpha) = 1\ et\ \overline{\Im}(\neg\alpha) = 1]$
6) $Mod\ \Im\ \alpha\ seq\ [\alpha \in Y\ et\ \neg\alpha \in Y]$

f) Sia $\alpha\ aeq\ \alpha\vee\neg^*\alpha$. Allora:

1) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ Mod\ \Im\ \alpha\vee\neg^*\alpha$
2) $Mod\ \Im\ \alpha\vee\neg^*\alpha\ aeq\ [Mod\ \Im\ \alpha\ vel\ Mod\ \Im\ \neg^*\alpha]$
3) $[Mod\ \Im\ \alpha\ vel\ Mod\ \Im\ \neg^*\alpha]\ aeq\ [\overline{\Im}(\alpha) = 1\ vel\ \overline{\Im}(\neg^*\alpha) = 1]$
4) $[\overline{\Im}(\alpha) = 1\ vel\ \overline{\Im}(\neg^*\alpha) = 1]\ aeq\ [\alpha \in Y\ et\ \neg^*\alpha \in Y]$
5) $[\alpha \in Y\ et\ \neg^*\alpha \in Y]\ aeq\ \alpha \in Y$
6) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ \alpha \in Y$

g) Sia $\alpha\ aeq\ \beta\wedge\gamma$. Allora:

1) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ Mod\ \Im\ \beta\wedge\gamma$
2) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ [Mod\ \Im\ \beta\ et\ Mod\ \Im\ \gamma]$
3) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ [\overline{\Im}(\beta) = 1\ et\ \overline{\Im}(\gamma) = 1]$
4) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ [\beta \in Y\ et\ \gamma \in Y]$
5) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ \beta\wedge\gamma \in Y$
6) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ \alpha \in Y$

h) Sia $\alpha\ aeq\ (\beta\vee\gamma)$. Allora:

1) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ Mod\ \Im\ \beta\vee\gamma$
2) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ [Mod\ \Im\ \beta\ vel\ Mod\ \Im\ \gamma]$
3) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ [\overline{\Im}(\beta) = 1\ vel\ \Im(\gamma) = 1]$
4) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ [\beta \in Y\ vel\ \gamma \in Y]$
5) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ \beta\vee\gamma \in Y$
6) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ \alpha \in Y$

i) Sia $\alpha\ aeq\ \beta\to\gamma$. Allora :

1) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ Mod\ \Im\ \beta\to\gamma$
2) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ [non\ (Mod\ \Im\ \beta)\ vel\ Mod\ \Im\ \gamma]$

3) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ [\bar{\Im}(\beta) = 0\ vel\ \bar{\Im}(\gamma) = 1]$
4) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ [non\ (\beta \in Y)\ vel\ \gamma \in Y]$
5) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ [\beta \to \gamma \in Y]$
6) $Mod\ \Im\ \alpha\ aeq\ \alpha \in Y$

j) $a)\ et\ b)\ et\ c)\ et\ d)\ et\ e)\ et\ f)\ et\ g)\ et\ h)\ et\ i)$

Possiamo a questo punto concludere il teorema di esistenza del modello, affermando che:

Metateorema 5.1 $non\ Triv(X)\ seq\ Sod(X)$

Dimostrazione

Per il lemma 5.2 si è visto che se l'insieme Y è non-triviale massimale, allora Y è anche soddisfacibile cioè ammette almeno un modello, un'interpretazione $\Im$ che renda vere tutte le fbff in Y. Essendo poi Y un'estensione massimale dell'insieme di partenza X, l'interpretazione $\Im$ renderà per ciò vere anche tutte le fbff presenti in X, ossia X risulterà soddisfacibile.

A questo punto la dimostrazione di completezza forte può definitivamente essere ristabilita nella sua veste canonica mediante il metateorema seguente:

Metateorema 5.2 $(non\ Triv\ X\ seq\ Sod\ X)\ seq\ (X \vDash \alpha\ seq\ X \vdash \alpha)$

Dimostrazione

1)	$(non\ Triv\ X\ seq\ Sod\ X)$	Ip. 1
2)	$X \vDash \alpha$	Ip. 2
3)	$non\ (X \vdash \alpha)$	Ip. 3
4)	$non\ Triv(X \cup \{\neg^* \alpha\})$	estens. di X
5)	$X \vdash \neg^* \alpha$	per I *a)*
6)	$X \vdash \neg^* \alpha\ seq\ X \vDash \neg^* \alpha$	per corrett. forte di C_1
7)	$X \vDash \neg^* \alpha$	da 5), 6) per MMP

8) $X \vDash \alpha \, et \, X \vDash \neg^* \alpha$ da 2), 7) per I-∧

9) $non \, non \, (X \vdash \alpha)$ da 1)-8) per RAA

10) $X \vdash \alpha$ da 9) per DN

11) $(non \, Triv \, X \, seq \, Sod \, X), (X \vDash \alpha) \vdash X \vdash \alpha$ da 1)-10)

12) $(non \, Triv \, X \, seq \, Sod \, X) \vdash (X \vDash \alpha) \, seq \, (X \vdash \alpha)$ da 11) per MMD

13) $(non \, Triv \, X \, seq \, Sod \, X) \, seq \, (X \vDash \alpha \, seq \, X \vdash \alpha)$ da 12) per MMD

3.2 Completezza debole e compattezza del calcolo C_1

In questo paragrafo dimostreremo la metaproprietà di completezza debole per C_1. A tal fine ci serviremo del metateorema di completezza forte precedentemente dimostrato, sfruttando un'ovvia considerazione.

Il teorema stabilito nel paragrafo precedente sancisce che:

$$X \vDash \alpha \, seq \, X \vdash \alpha$$

dove X è un certo insieme di formule. Non sono state fatte però ipotesi sulla grandezza dell'insieme in questione. Non sono cioè state date indicazioni sul contenuto di X. Pertanto X potrebbe avere una quantità arbitraria di proposizioni o potrebbe eventualmente essere vuoto, cioè essere completamente privo di enunciati.

Quest'ultimo sarà proprio il caso utile a raggiungere il risultato di completezza debole. Innanzitutto congiungiamo metateoricamente il risultato di correttezza forte e quello di completezza forte, stabilendo dunque che:

$$X \vdash \alpha \, aeq \, X \vDash \alpha$$

Per il meteorema di deduzione sappiamo allora che α è un enunciato implicato da tutti gli elementi in X, cioè che:

$$\vdash [\beta_1 \to (\beta_2 \to (\beta_3 \to \ldots) \ldots)] \to \alpha$$

o equivalentemente che:

$$\vDash [\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots] \to \alpha$$

dove $\beta_1 \in X, \beta_2 \in X, \beta_3 \in X, \ldots$. Per la metaproprietà di correttezza debole possiamo allora affermare anche che:

$$(*) \vDash [\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow (\beta_3 \rightarrow \dots) \dots)] \rightarrow \alpha$$

Se così non fosse infatti avremmo, analogamente al caso della dimostrazione di correttezza debole, che $\vDash [\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow (\beta_3 \rightarrow \dots) \dots)]$ e che $\nvDash \alpha$. Tuttavia ciò contraddirebbe la condizione $(*)$, per la quale $\vDash [\beta_1 \rightarrow (\beta_2 \rightarrow (\beta_3 \rightarrow \dots) \dots)] \rightarrow \alpha$ è una tautologia. Possiamo così scaricare tutte le eventuali assunzioni presenti in X ottenendo una prima forma di completezza debole, analogamente al caso della correttezza debole.

Tuttavia si possono più precisamente osservare due casi particolari:

1) l'insieme X non contiene enunciati;

2) l'insieme X contiene una quantità finita di enunciati.

Nel primo caso allora non vi sono assunzioni da scaricare né a livello sintattico né a livello semantico. Ciò significa che possiamo ricavare il metateorema di completezza debole osservando direttamente quanto segue.

Sia $X = \emptyset$. Allora varrà:

$$\emptyset \vDash \alpha \, seq \, \emptyset \vdash \alpha$$

Le due espressioni '$\emptyset \vDash \alpha$' e '$\emptyset \vdash \alpha$' sono rispettivamente equivalenti a '$\vDash \alpha$' e '$\vdash \alpha$' e ne costituiscono una forma alternativa e più pratica di scrittura. Si può dunque osservare come il metateorema di completezza debole sia un caso particolare di quello forte, dal quale è possibile stabilire il seguente metateorema:

Metateorema 5.4 $\vDash \alpha \, seq \vdash \alpha$

Dimostrazione

Immediata per $X = \emptyset$.

Infine in virtù del metateorema di correttezza debole varrà anche che:

$$\vdash \alpha \, aeq \, \vDash \alpha$$

Nel secondo caso invece è possibile fissare un ulteriore metateorema, detto di compattezza (semantica). In particolare avremo che per un:

$$F(X) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$$

dove '$F(X)$' indica un sottoinsieme finito di X, varrà che:

Metateorema 5.5 $X \vDash \alpha \, seq \, F(X) \vDash \alpha$

Dimostrazione (idea)

Ammettiamo che non sia così e sia per ipotesi $X \vDash \alpha$. Allora esisterà un sottoinsieme finito di X da cui α non è conseguenza logica. Così dovrà esserci una valutazione $\Im$ che soddisfa un certo $F(X) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ e che falsifica α. Se ciò fosse vero avremmo allora che:

$$\Im \vDash \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$$

e che:

$$\Im \nvDash \alpha$$

Tuttavia ciò sarebbe in contraddizione con l'ipotesi secondo cui $X \vDash \alpha$. Tale ipotesi asserisce infatti che ogni valutazione positiva di X è modello anche di α. Così se $Mod \, \Im \, \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots\}$, allora $Mod \, \Im \, \alpha$. Ma ciò significa che $Mod \, \Im \, \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$, dal momento che $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \subseteq \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots\}$; inoltre $Mod \, \Im \, \alpha$ e dunque per *reductio ad absurdum*, è possibilie stabilire che $\Im \vDash \alpha$.

Quest'ulteriore metateorema dimostra in sostanza che se un certo enunciato α è conseguenza logica di un insieme di fbff X, allora esso è anche conseguenza logica di una sua parte finita. Questo metateorema è di grande rilevanza dal momento che, esattamente come il meteteorema di esistenza del modello, è equivalente al metateorema di completezza forte.

Possiamo infine riformulare quest'ultimo concetto anche in termini di soddisfacibilità. Così in modo equivalente se ogni sottoinsieme finito di X è soddisfacibile, allora anche X è soddisfacibile, ossia:

Metateorema 5.6 $(om\,\Omega)(ex\,\Im)\big[Mod\,\Im\,\big(\Omega = F(X)\big)\;seq\;Mod\,\Im\,X\big]$

Dimostrazione

Immediata.

VI. Decidibilità e risultati di indipendenza

1. La decidibilità del calcolo C_1

Stabiliremo in questo capitolo alcuni importanti risultati metateorici riguardanti la logica che intendiamo adoperare per lo sviluppo del sistema formale in esame. Cominceremo dalla discussione circa il problema della decisione per il calcolo proposizionale paraconsistente C_1, che – come vedremo – ammette una risposta positiva.

Differentemente da quanto accadrà nell'estensione al calcolo predicativo paraconsistente, che non ammette alcuna procedura effettiva per decidere della validità delle sue formule, è possibile qui esibire un metodo meccanico sufficientemente generale per assolvere a tale importante compito.

Tenendo presenti le definizioni di interpretazione o valutazione precedentemente discusse a proposito delle questioni semantiche che tale calcolo pone e tenendo presente la definizione di quasi-matrice esibita nella dimostrazione di correttezza per C_1, possiamo provare la decidibilità del calcolo partendo direttamente dalle seguenti definizioni:

Definizione 6.1 Sia $\Im$ un'interpretazione ed α una fbf. Indicheremo con '$\Im_{\restriction s(\alpha)}$' la restrizione della valutazione $\Im$ all'insieme di sottoformule di α e di negazioni di sottoformule proprie di α. Allora $\overline{\Im}(\alpha) = \Im_{\restriction s(\alpha)}(\alpha)$.

Definizione 6.2 Sia $\Im$ un'interpretazione e X un certo insieme di formule. Allora '$\Im_{\restriction s(\alpha)}$' è la restrizione di $\Im$ all'insieme X.

Definizione 6.3 Si dice linea di una quasi-matrice 'Q_M' ogni segmento corrispondente a $\Im_{\restriction s(X)}$ se $\Im_{\restriction s(X)}(\alpha)$ è il valore corrispondente ad α in quella linea $(om\ \alpha)(\alpha \in X)$, dove X è l'insieme di tutte le formule della matrice.

Da queste definizioni iniziali si può ricavare che:

Lemma 6.1 Data una quasi-matrice Q_M, allora per ogni interpretazione $\Im$ esiste una linea di Q_M corrispondente a $\Im_{\restriction s(X)}$, dove X è l'insieme di tutte le formule di Q_M.

Dimostrazione

La prova di questo lemma può procedere per costruzione induttiva sul numero di colonne, dipendente dal numero di sottoformule da esaminare, secondo i criteri di quasi-matrice precedentemente indicati.

Diamo ancora un'altra definizione:

Definizione 6.4 Sia Q_M una quasi-matrice per una formula α e sia X l'insieme di tutte le sottoformule e di tutte le negazioni di sottoformule proprie di α. Sia inoltre k una linea di Q_M e sia $\overline{\Im_k}(\alpha)$ il valore attribuito ad α nella linea k. Indicheremo allora con '$Y(X,k)$' l'insieme di formule, tale che per ogni fbf α:

1) $\Big((\alpha \in X)\ seq\ \big(\alpha \in Y(X,k)\big)\Big)\ aeq\ (\overline{\Im_k}(\alpha) = 0)$;

2) $\Big(non\ (\alpha \in X)\ seq\ \big(\alpha \in Y(X,k)\big)\Big)\ aeq$:

2.1) $atom(\alpha)$ $\quad vel$

2.2) $\Big(\big(\alpha\ aeq\ \neg\beta_1\big)\ et\ \Big(non\ \big(\beta_1 \in Y(X,k)\big)\Big)\Big)$ $\quad vel$

2.3) $\Big(\big(\alpha\ aeq\ (\beta_1 \wedge \beta_2)\big)\ et\ \Big(\big(\beta_1 \in Y(X,k)\big)\ et\ \big(\beta_2 \in Y(X,k)\big)\Big)\Big) vel$

2.4) $\Big(\big(\alpha\ aeq\ (\beta_1 \vee \beta_2)\big)\ et\ \Big(\big(\beta_1 \in Y(X,k)\big)\ et\ \big(\beta_2 \in Y(X,k)\big)\Big)\Big) vel$

2.5) $\left(\left(\alpha\ aeq\ (\beta_1 \rightarrow \beta_2)\right)\ et\ \left(non\ \left(\beta_1 \in Y(X,k)\right)\ et\ \left(\beta_2 \in\right.\right.\right.$

YX,k

Seguiranno alcune delle proprietà dell'insieme $Y(X,k)$, che possono immediatamente constatarsi in base ai criteri di definizioni fin qui osservati:

1) $(\neg\alpha \in Y(X,k))\ seq\ \left(non\ (\alpha \in Y(X,k))\right)$;

2) $(\alpha \in Y(X,k))\ seq\ (\neg\neg\alpha \in Y(X,k))$;

3) $(\neg^{*}\alpha \in Y(X,k))\ aeq\ \left(non\ (\alpha \in Y(X,k))\right)$;

4) $\left(non\ (\alpha \rightarrow \beta \in Y(X,k))\right)\ aeq\ \left(\alpha \in Y(X,k)\ vel\ non\ (\beta \in Y(X,k))\right)$

5) $(\alpha \wedge \beta \in Y(X,k))\ aeq\ \left((\alpha \in Y(X,k))\ vel\ (\beta \in Y(X,k))\right)$

6) $\left(non\ (\alpha \vee \beta \in Y(X,k))\right)\ aeq\ \left(non\ (\alpha \in Y(X,k))\ vel\ non\ (\beta \in Y(X,k))\right)$

7) $\left((\alpha * \beta)^{\circ} \in Y(X,k)\right)\ seq$

$$seq\ \left\{\left[\left(non\ (\alpha \in Y(X,k))\ et\ non\ (\neg\alpha \in Y(X,k))\right)\right]\ vel\right.$$

$$\left.vel\ \left[\left(non\ (\beta \in Y(X,k))\ et\ non\ (\neg\beta \in Y(X,k))\right)\right]\right\}$$, dove: $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Lemma 6.2 Per ogni linea k di una matrice Q_M esiste un'interpretazione $\Im$ tale che $\Im_{\upharpoonright s(X)}$ corrisponde a k e X è l'insieme di formule di Q_M.

Dimostrazione

Sia $\Im$ un'interpretazione che rispetti i criteri di interpretazione sinora visti e sia $\mathcal{F}$ l'insieme di tutte le formule di C_1. Allora si potranno constatare due casi possibili:

1) $(om\ \alpha)\left(\alpha \in Y(X,k)\ seq\ \left(\alpha \in \mathcal{F}\ seq\ \overline{\Im_{\restriction s(X)}}(\alpha) = 0\right)\right)$;

2) $(om\ \alpha)\left(non\ \left(\alpha \in Y(X,k)\right)\ seq\ \left(\alpha \in \mathcal{F}\ seq\ \overline{\Im_{\restriction s(X)}}(\alpha) = 1\right)\right)$.

Così in virtù delle sette proprietà dell'insieme $Y(X,k)$ precedentemente esaminate, $\Im$ è un'interpretazione. Inoltre poiché la valutazione $\Im_{\restriction s(X)}$ e la linea k sono equivalenti, è possibile affermare che esiste un'interpretazione $\Im$ tale che $\Im_{\restriction s(X)}$ corrisponde a k.

Veniamo così direttamente al metateorema fondamentale di questo capitolo, costituito dal risultato di decidibilità per C_1.

Metateorema 6.1 Il calcolo C_1 è decidibile.

Dimostrazione

Similmente a quanto accade per il caso della logica classica, ib base ai lemmi precedentemente mostrati è possibile affermare che per una certa formula α, $\vdash_{C_1} \alpha$ se e solo se in una qualsiasi quasi-matrice per α, l'ultima colonna della tabella costruita secondo le regole indicate nella dimostrazione di correttezza di C_1 il valore riscontrato sarà sempre 1. Varrà allora la seguente eguaglianza:

$$\Im(\alpha) = \Im_{\restriction s(\alpha)} = 1$$

2. *Proposizioni indimostrabili in C_1*

In questo paragrafo faremo uso di alcuni risultati precedentemente dimostrati e verificheremo che il calcolo così costruito rispetta effettivamente le proprietà di paraconsistenza richieste dai calcoli di Da Costa.

Come si vedrà, molte proposizioni normalmente valide nei calcoli classici risulteranno qui falsificate per almeno un'attribuzione di valori di verità mentre gli assiomi, di cui si è precedentemente discusso, saranno identicamente veri per la medesima interpretazione. Il metodo consisterà dunque nella dimostrazione di indipendenza di alcuni enunciati da C_1, così come delineato da Jan Łukasiewicz[92] e da Paul Bernays[93] nel corso degli anni Venti.

Per adempiere a tale compito, è possibile seguire due strade:

1) utilizzare il metodo delle quasi-matrici, che, come abbiamo visto, consente di stabilire con esattezza quali siano i teoremi di C_1. Sarebbe così sufficiente verificare come alcuni enunciati non siano tautologie nel senso delle quasi-matrici;

2) sfruttare delle matrici a più valori di verità, che soddisfino gli assiomi mentre falsifichino, almeno in un caso, gli enunciati di volta in volta considerati. Ciò sarà per noi una prova sufficiente di indipendenza di alcune proposizioni, la cui generale validità è qui indesiderata.

Avvalendoci della seconda alternativa e utilizzando delle matrici a tre valori di verità, passeremo alla verifica di come alcune proposizioni, cui è possibile imputare le conseguenze dell'«esplosione», siano qui disinnescate proprio grazie all'azione della scelta assiomatica operata per C_1. Vengono infatti meno lo pseudo-Scoto e quegli enunciati che lo implicavano ed è possibile perciò far spazio a insiemi di proposizioni inconsistenti, sebbene non triviali. La presenza di enunciati antinomici all'interno di un dato insieme di formule non inficerà infatti la coerenza complessiva del calcolo.

---

[92] Łukasiewicz, J., *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenklküls*, «Comptes Rendus Séances Société des Sciences et Lettres Varsovie. Cl. III», vol. 23, 1930, pp. 51-77. Łukasiewicz, J., Tarski, A., *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*, «Comptes Rendus Séances Société des Sciences et Lettres Varsovie. Cl. III», vol. 23, 1930, pp. 30-50

[93] Bernays, P., *Beiträge zur axiomatischen Behandlung des Logik-Kalküls*, Habilitationsschrift, Universität Göttingen, 1918. Unpublished Typescript. Bernays, P., *Axiomatische Untersuchungen des Aussagen-Kalküls der "Principia Mathematica"*, «Mathematische Zeitschrift», vol. 25, 1926, pp. 305-20

Le proposizioni indimostrabili in C_1 sono di vario tipo: innanzitutto incontreremo alcune forme dello pseudo-Scoto e del sillogismo disgiuntivo. In seguito vedremo che il principio di non contraddizione è anch'esso indipendente; ciò non vuol dire che siano esclusi *a priori* casi in cui tale principio sia applicabile: abbiamo infatti osservato che in C_1 possono esservi proposizioni stabili, per le quali il principio di non contraddizione vale, così come proposizioni per le quali esso invece non ha validità. Tale ricchezza deduttiva, oltre ad essere parte integrante delle richieste della scuola brasiliana – come visto al punto 3°, costituirà un punto molto importante per il presente caso di studio e sarà nostro obiettivo preservarla al fine di dotare ZFU_1 della maggiore capacità espressiva e deduttiva possibile.

Infine seguiranno altre dimostrazioni di indipendenza relative al l'uso della negazione e all'impossibilità di interdefinire i connettivi logici a nostra disposizione.

Cominciamo col definire una matrice a 3 valori di verità nel così come segue:

Definizione 6.4 Sia $\boldsymbol{K'}$ l'insieme di elementi $\{1,2,3\}$. Sia D il sottoinsieme di $\boldsymbol{K}'$, contenente gli elementi '1' e '2'. Chiameremo $D = \{1,2\}$ l'insieme dei valori designati della matrice, mentre il suo complemento $\overline{D} = \{3\}$ costituirà l'insieme dei valori non-designati o antidesignati della stessa matrice.

Caratterizzeremo sull'insieme $\boldsymbol{K'}$ le cinque funzioni logiche fondamentali di C_1 nel modo seguente:

A	B	A→B	A∧B	A∨B	A↔B
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	1	1	3	1	3
1	2	1	1	1	1
2	2	1	1	1	1
3	2	1	3	1	3
1	3	3	3	1	3
2	3	3	3	1	3
3	3	1	3	3	1

A	¬A

1	3
2	1
3	1

Verificheremo poi che le tavole di verità così costruite rendono sempre veri gli assiomi del nostro calcolo proposizionale:

1) Correttezza dell'assioma 1) "A→(B→A)":

A	→	(B	→	A)
1	**1**	1	1	1
1	**1**	2	1	1
1	**1**	3	1	1
2	**1**	1	1	2
2	**1**	2	1	2
2	**1**	3	1	2
3	**1**	1	3	3
3	**1**	2	3	3
3	**1**	3	1	3

2) Correttezza dell'assioma 2) "(A→(B→C))→((A→B)→(A→C))":

((A	→	(B	→	C))	→	((A	→	B)	→	(A	→	C))
1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	2	**1**	1	1	1	1	1	1	2
1	3	1	3	3	**1**	1	1	1	3	1	3	3
1	1	2	1	1	**1**	1	1	2	1	1	1	1
1	1	2	1	2	**1**	1	1	2	1	1	1	2
1	3	2	3	3	**1**	1	1	2	3	1	3	3
1	1	3	1	1	**1**	1	3	3	1	1	1	1
1	1	3	1	2	**1**	1	3	3	1	1	1	2
1	1	3	1	3	**1**	1	3	3	1	1	3	3
2	1	1	1	1	**1**	2	1	1	1	2	1	1
2	1	1	1	2	**1**	2	1	1	1	2	1	2
2	3	1	3	3	**1**	2	1	1	3	2	3	3
2	1	2	1	1	**1**	2	1	2	1	2	1	1
2	1	2	1	2	**1**	2	1	2	1	2	1	2
2	3	2	3	3	**1**	2	1	2	3	2	3	3
2	1	3	1	1	**1**	2	3	3	1	2	1	1
2	1	3	1	2	**1**	2	3	3	1	2	1	2

2	1	3	1	3	**1**	2	3	3	1	2	3	3
3	1	1	1	1	**1**	3	1	1	1	3	1	1
3	1	1	1	2	**1**	3	1	1	1	3	1	2
3	1	1	3	3	**1**	3	1	1	1	3	1	3
3	1	2	1	1	**1**	3	1	2	1	3	1	1
3	1	2	1	2	**1**	3	1	2	1	3	1	2
3	1	2	3	3	**1**	3	1	2	1	3	1	3
3	1	3	1	1	**1**	3	1	3	1	3	1	1
3	1	3	1	2	**1**	3	1	3	1	3	1	2
3	1	3	1	3	**1**	3	1	3	1	3	1	3

3) Correttezza dell’assioma 3) “(A∧B)→A”:

(A	∧	B)	→	A
1	1	1	**1**	1
1	1	2	**1**	1
1	3	3	**1**	1
2	1	1	**1**	2
2	1	2	**1**	2
2	3	3	**1**	2
3	3	1	**1**	3
3	3	2	**1**	3
3	3	3	**1**	3

4) Correttezza dell’assioma 4) “(A∧B)→B”:

(A	∧	B)	→	B
1	1	1	**1**	1
1	1	2	**1**	2
1	3	3	**1**	3
2	1	1	**1**	1
2	1	2	**1**	2
2	3	3	**1**	3
3	3	1	**1**	1
3	3	2	**1**	2
3	3	3	**1**	3

5) Correttezza dell'assioma 5) "A→(B→(A∧B))":

A	→	(B	→	(A	∧	B)
1	**1**	1	1	1	1	1
1	**1**	2	1	1	1	2
1	**1**	3	1	1	3	3
2	**1**	1	1	2	1	1
2	**1**	2	1	2	1	2
2	**1**	3	1	2	3	3
3	**1**	1	3	3	3	1
3	**1**	2	3	3	3	2
3	**1**	3	1	3	3	3

6) Correttezza dell'assioma 6) "A→(A∨B)":

A	→	(A	∨	B)
1	**1**	1	1	1
1	**1**	1	1	2
1	**1**	1	1	3
2	**1**	2	1	1
2	**1**	2	1	2
2	**1**	2	1	3
3	**1**	3	1	1
3	**1**	3	1	2
3	**1**	3	3	3

7) Correttezza dell'assioma 7) "B→(A∨B)":

B	→	(A	∨	B)
1	**1**	1	1	1
2	**1**	1	1	2
3	**1**	1	1	3
1	**1**	2	1	1
2	**1**	2	1	2
3	**1**	2	1	3
1	**1**	3	1	1
2	**1**	3	1	2
3	**1**	3	3	3

8) Correttezza dell’assioma 8) “(A→C)→((B→C)→((A∨B)→C))”:

(A	→	C)	→	((B	→	C)	→	((A	∨	B)	→	C))
1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	**1**	1	1	2	1	1	1	1	1	2
1	3	3	**1**	1	3	3	1	1	1	1	3	3
1	1	1	**1**	2	1	1	1	1	1	2	1	1
1	1	2	**1**	2	1	2	1	1	1	2	1	2
1	3	3	**1**	2	3	3	1	1	1	2	3	3
1	1	1	**1**	3	1	1	1	1	1	3	1	1
1	1	2	**1**	3	1	2	1	1	1	3	1	2
1	3	3	**1**	3	1	3	3	1	1	3	3	3
2	1	1	**1**	1	1	1	1	2	1	1	1	1
2	1	2	**1**	1	1	2	1	2	1	1	1	2
2	3	3	**1**	1	3	3	1	2	1	1	3	3
2	1	1	**1**	2	1	1	1	2	1	2	1	1
2	1	2	**1**	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	3	3	**1**	2	3	3	1	2	1	2	3	3
2	1	1	**1**	3	1	1	1	2	1	3	1	1
2	1	2	**1**	3	1	2	1	2	1	3	1	2
2	3	3	**1**	3	1	3	3	2	1	3	3	3
3	1	1	**1**	1	1	1	1	3	1	1	1	1
3	1	2	**1**	1	1	2	1	3	1	1	1	2
3	1	3	**1**	1	3	3	1	3	1	1	3	3
3	1	1	**1**	2	1	1	1	3	1	2	1	1
3	1	2	**1**	2	1	2	1	3	1	2	1	2
3	1	3	**1**	2	3	3	1	3	1	2	3	3
3	1	1	**1**	3	1	1	1	3	3	3	1	1
3	1	2	**1**	3	1	2	1	3	3	3	1	2
3	1	3	**1**	3	1	3	1	3	3	3	1	3

9) Correttezza dell’assioma 9) “A∨¬A”:

(A	∨	¬	A)
1	**1**	3	1
2	**1**	1	2
3	**1**	1	3

10) Correttezza dell’assioma 10) “$\neg\neg A\rightarrow A$”:

(¬	¬	A)	→	A
1	3	1	**1**	1
3	1	2	**1**	2
3	1	3	**1**	3

11) Correttezza dell’assioma 11) “$B^{\circ}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A)]$”. Qui scioglieremo “$B^{\circ}$” secondo la definizione 4.3:

¬	(B	∧	¬	B)	→	[(A	→	B)	→	((A	→	¬	B)	→	¬	A)]
1	1	3	3	1	**1**	1	1	1	1	1	3	3	1	1	3	1
3	2	1	1	2	**1**	1	1	2	3	1	1	1	2	3	3	1
1	3	3	1	3	**1**	1	3	3	1	1	1	1	3	3	3	1
1	1	3	3	1	**1**	2	1	1	1	2	3	3	1	1	1	2
3	2	1	1	2	**1**	2	1	2	1	2	1	1	2	1	1	2
1	3	3	1	3	**1**	2	3	3	1	2	1	1	3	1	1	2
1	1	3	3	1	**1**	3	1	1	1	3	1	3	1	1	1	3
3	2	1	1	2	**1**	3	1	2	1	3	1	1	2	1	1	3
1	3	3	1	3	**1**	3	1	3	1	3	1	1	3	1	1	3

12) Correttezza dell’assioma 12) “$(A^{\circ}\wedge B^{\circ})\rightarrow[(A\wedge B)^{\circ}\wedge(A\vee B)^{\circ}\wedge(A\rightarrow B)^{\circ}]$”. Qui scioglieremo la stabilità delle formule secondo la definizione 4.3:

b)

¬	(A	∧	¬	A)	∧	¬	(B	∧	¬	B)
1	1	3	3	1	**1**	1	1	3	3	1
1	1	3	3	1	**3**	3	2	1	1	2
1	1	3	3	1	**1**	1	3	3	1	3
3	2	1	1	2	**3**	1	1	3	3	1
3	2	1	1	2	**3**	3	2	1	1	2
3	2	1	1	2	**3**	1	3	3	1	3
1	3	3	1	3	**1**	1	1	3	3	1
1	3	3	1	3	**3**	3	2	1	1	2

1	3	3	1	3	**1**	1	3	3	1	3

c)

¬	((A	∧	B)	∧	¬	(A	∧	B))
1	1	3	1	3	3	1	1	1
1	1	3	2	3	3	1	1	2
1	1	3	3	3	1	1	3	3
1	2	1	1	3	3	2	1	1
1	2	1	2	3	3	2	1	2
1	2	3	3	3	1	2	3	3
1	3	3	1	3	1	3	3	1
1	3	3	2	3	1	3	3	2
1	3	3	3	3	1	3	3	3

d)

¬	((A	∨	B)	∧	¬	(A	∨	B))
1	1	1	1	3	3	1	1	1
1	1	1	2	3	3	1	1	2
1	1	1	3	3	3	1	1	3
1	2	1	1	3	3	2	1	1
1	2	1	2	3	3	2	1	2
1	2	1	3	3	3	2	1	3
1	3	1	1	3	3	3	1	1
1	3	1	2	3	3	3	1	2
1	3	3	3	3	1	3	3	3

e)

¬	((A	→	B)	∧	¬	(A	→	B))
1	1	1	1	3	3	1	1	1
1	1	1	2	3	3	1	1	2
1	1	3	3	3	1	1	3	3
1	2	1	1	3	3	2	1	1
1	2	1	2	3	3	2	1	2
1	2	3	3	3	1	2	3	3
1	3	1	1	3	3	3	1	1
1	3	1	2	3	3	3	1	2
1	3	1	3	3	3	3	1	3

f)

$(A^{\circ}\wedge B^{\circ})$	$\rightarrow$	$[(A\wedge B)^{\circ}$	$\wedge$	$(A\vee B)^{\circ}$	$\wedge$	$(A\rightarrow B)^{\circ}]$
1	**1**	1	1	1	1	1
1	**1**	1	1	1	1	1
1	**1**	1	1	1	1	1
3	**1**	1	1	1	1	1
3	**1**	1	1	1	1	1
3	**1**	1	3	1	3	1
1	**1**	1	1	1	1	1

Metateorema 6.2 In base alle matrici di cui alla definizione 6.4, i seguenti schemi proposizionali non sono validi:

a) forme implicative dello pseudo-Scoto:

a.1) $\not\models \neg\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$

Dimostrazione[94]

$\neg$	α	$\rightarrow$	$(\alpha$	$\rightarrow$	$\beta)$
3	1	**1**	1	1	1
1	2	**1**	2	1	1
1	3	**1**	3	1	1
3	1	**1**	1	1	2
1	2	**1**	2	1	2
1	3	**1**	3	1	2
3	1	**1**	1	3	3
1	2	**3**	2	3	3
1	3	**1**	3	1	3

a.2) $\not\models \neg\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\neg\beta)$

Dimostrazione

$(\neg$	$\alpha)$	$\rightarrow$	$(\alpha$	$\rightarrow$	$(\neg$	$\beta))$
3	1	**1**	1	3	3	1

[94] Il valore cerchiato ('3') indica la circostanza nella quale la proposizione può essere falsificata.

1	2	3	2	3	3	1
1	3	**1**	3	1	3	1
3	1	**1**	1	1	1	2
1	2	**1**	2	1	1	2
1	3	**1**	3	1	1	2
3	1	**1**	1	1	1	3
1	2	**1**	2	1	1	3
1	3	**1**	3	1	1	3

a.3) $\not\models \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$

Dimostrazione

α	→	((¬	α)	→	β)
1	**1**	3	1	1	1
2	**1**	1	2	1	1
3	**1**	1	3	1	1
1	**1**	3	1	1	2
2	**1**	1	2	1	2
3	**1**	1	3	1	2
1	**1**	3	1	1	3
2	3	1	2	3	3
3	**1**	1	3	3	3

a.4) $\not\models \alpha \to (\neg\alpha \to \neg\beta)$

Dimostrazione

α	→	((¬	α)	→	(¬	β))
1	**1**	3	1	1	3	1
2	3	1	2	3	3	1
3	**1**	1	3	3	3	1
1	**1**	3	1	1	1	2
2	**1**	1	2	1	1	2
3	**1**	1	3	1	1	2
1	**1**	3	1	1	1	3
2	**1**	1	2	1	1	3
3	**1**	1	3	1	1	3

b) forme coimplicative[95] dello pseudo-Scoto:

[95] Usiamo qui il termine “coimplicative” per indicare quelle fbff in cui occorre il connettivo ‘ ↔’.

b.1) $\not\models (\alpha \leftrightarrow \neg\alpha) \rightarrow \beta$

Dimostrazione

(α	↔	(¬	α))	→	β
1	3	3	1	**1**	1
2	1	1	2	**1**	1
3	3	1	3	**1**	1
1	3	3	1	**1**	2
2	1	1	2	**1**	2
3	3	1	3	**1**	2
1	3	3	1	**1**	3
2	1	1	2	**3**	3
3	3	1	3	**1**	3

b.2) $\not\models (\neg\alpha \leftrightarrow \alpha) \rightarrow \beta$

Dimostrazione

((¬	α	↔	α)	→	β
3	1	3	1	**1**	1
1	2	1	2	**1**	1
1	3	3	3	**1**	1
3	1	3	1	**1**	2
1	2	1	2	**1**	2
1	3	3	3	**1**	2
3	1	3	1	**1**	3
1	2	1	2	**3**	3
1	3	3	3	**1**	3

b.3) $\not\models (\alpha \leftrightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\beta$

Dimostrazione

(α	↔	(¬	α))	→	(¬	β)
1	3	3	1	**1**	3	1
2	1	1	2	**3**	3	1
3	3	1	3	**1**	3	1
1	3	3	1	**1**	1	2
2	1	1	2	**1**	1	2
3	3	1	3	**1**	1	2

1	3	3	1	**1**	1	3
2	1	1	2	**1**	1	3
3	3	1	3	**1**	1	3

b.4) $\nvDash (\neg\alpha\leftrightarrow\alpha)\rightarrow\neg\beta$

Dimostrazione

$((\neg$	α	$\leftrightarrow$	$\alpha)$	$\rightarrow$	$(\neg$	$\beta)$
3	1	3	1	**1**	3	1
1	2	1	2	**3**	3	1
1	3	3	3	**1**	3	1
3	1	3	1	**1**	1	2
1	2	1	2	**1**	1	2
1	3	3	3	**1**	1	2
3	1	3	1	**1**	1	3
1	2	1	2	**1**	1	3
1	3	3	3	**1**	1	3

c) forme congiuntive dello pseudo-Scoto:

c.1) $\nvDash (\alpha\wedge\neg\alpha)\rightarrow\beta$

Dimostrazione

$(\alpha$	$\wedge$	$(\neg$	$\alpha))$	$\rightarrow$	β
1	3	3	1	**1**	1
2	1	1	2	**1**	1
3	3	1	3	**1**	1
1	3	3	1	**1**	2
2	1	1	2	**1**	2
3	3	1	3	**1**	2
1	3	3	1	**1**	3
2	1	1	2	**3**	3
3	3	1	3	**1**	3

c.2) $\nvDash (\neg\alpha\wedge\alpha)\rightarrow\beta$

Dimostrazione

$((\neg$	$\alpha)$	$\wedge$	$\alpha)$	$\rightarrow$	β

3	1	3	1	**1**	1
1	2	1	2	**1**	1
1	3	3	3	**1**	1
3	1	3	1	**1**	2
1	2	1	2	**1**	2
1	3	3	3	**1**	2
3	1	3	1	**1**	3
1	2	1	2	**3**	3
1	3	3	3	**1**	3

c.3) $\nvDash (\alpha\wedge\neg\alpha)\rightarrow\neg\beta$

Dimostrazione

(α	∧	((¬	α)	→	(¬	β)
1	3	3	1	**1**	3	1
2	1	1	2	**3**	3	1
3	3	1	3	**1**	3	1
1	3	3	1	**1**	1	2
2	1	1	2	**1**	1	2
3	3	1	3	**1**	1	2
1	3	3	1	**1**	1	3
2	1	1	2	**1**	1	3
3	3	1	3	**1**	1	3

c.4) $\nvDash (\neg\alpha\wedge\alpha)\rightarrow\neg\beta$

Dimostrazione

((¬	α)	∧	α)	→	(¬	β)
3	1	3	1	**1**	3	1
1	2	1	2	**3**	3	1
1	3	3	3	**1**	3	1
3	1	3	1	**1**	1	2
1	2	1	2	**1**	1	2
1	3	3	3	**1**	1	2
3	1	3	1	**1**	1	3
1	2	1	2	**1**	1	3
1	3	3	3	**1**	1	3

d) forme implicative di *reductio ad absurdum*, debole e forte:

$d.1)\ \nvDash (\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\neg\alpha)$

Dimostrazione

(α	→	β)	→	((α	→	(¬	β))	→	(¬	α))
1	1	1	**1**	1	3	3	1	1	3	1
2	1	1	**1**	2	3	3	1	1	1	2
3	1	1	**1**	3	1	3	1	1	1	3
1	1	2	**3**	1	1	1	2	3	3	1
2	1	2	**1**	2	1	1	2	1	1	2
3	1	2	**1**	3	1	1	2	1	1	3
1	3	3	**1**	1	1	1	3	3	3	1
2	3	3	**1**	2	1	1	3	1	1	2
3	1	3	**1**	3	1	1	3	1	1	3

$d.2)\ \nvDash (\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow((\neg\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\alpha)$

Dimostrazione

((¬	α)	→	(¬	β))	→	(((¬	α)	→	β)	→	α)
3	1	1	3	1	**1**	3	1	1	1	1	1
1	2	3	3	1	**1**	1	2	1	1	1	2
1	3	3	3	1	**1**	1	3	1	1	3	3
3	1	1	1	2	**1**	3	1	1	2	1	1
1	2	1	1	2	**1**	1	2	1	2	1	2
1	3	1	1	2	**3**	1	3	1	2	3	3
3	1	1	1	3	**1**	3	1	1	3	1	1
1	2	1	1	3	**1**	1	2	3	3	1	2
1	3	1	1	3	**1**	1	3	3	3	1	3

$d.3)\ \nvDash (\alpha\wedge\neg\alpha)\rightarrow\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)$

Dimostrazione

(α	∧	(¬	α))	→	(¬	(α	∧	(¬	α)))
1	3	3	1	**1**	1	1	3	3	1
2	1	1	2	**3**	3	2	1	1	2
3	3	1	3	**1**	1	3	3	1	3

e) forme congiuntive di *reductio ad absurdum*, debole e forte:

e.1) $\nvDash (\alpha\rightarrow(\beta\wedge\neg\beta)))\rightarrow\neg\alpha$

Dimostrazione

(α	→	(β	∧	(¬	β)))	→	(¬	α)
1	3	1	3	3	1	**1**	3	1
2	3	1	3	3	1	**1**	1	2
3	1	1	3	3	1	**1**	1	3
1	1	2	1	1	2	**3**	3	1
2	1	2	1	1	2	**1**	1	2
3	1	2	1	1	2	**1**	1	3
1	3	3	3	1	3	**1**	3	1
2	3	3	3	1	3	**1**	1	2
3	1	3	3	1	3	**1**	1	3

e.2) $\nvDash (\neg\alpha\rightarrow(\beta\wedge\neg\beta)))\rightarrow\alpha$

Dimostrazione

((¬	α)	→	(β	∧	(¬	β)))	→	α
3	1	1	1	3	3	1	**1**	1
1	2	3	1	3	3	1	**1**	2
1	3	3	1	3	3	1	**1**	3
3	1	1	2	1	1	2	**1**	1
1	2	1	2	1	1	2	**1**	2
1	3	1	2	1	1	2	**3**	3
3	1	1	3	3	1	3	**1**	1
1	2	1	3	3	1	3	**1**	2
1	3	1	3	3	1	3	**3**	3

f) forme di contrapposizione, debole e forte:

f.1) $\nvDash (\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha)$

Dimostrazione

(α	→	β)	→	((¬	β)	→	(¬	α))
1	1	1	**1**	3	1	1	3	1
2	1	1	**1**	3	1	1	1	2
3	1	1	**1**	3	1	1	1	3
1	1	2	**3**	1	2	3	3	1
2	1	2	**1**	1	2	1	1	2

3	1	2	**1**	1	2	1	1	3
1	3	3	**1**	1	3	3	3	1
2	3	3	**1**	1	3	1	1	2
3	1	3	**1**	1	3	1	1	3

f.2) $\nvDash (\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)$

Dimostrazione

((¬	α)	→	(¬	β))	→	(β	→	α)
3	1	1	3	1	**1**	1	1	1
1	2	3	3	1	**1**	1	1	2
1	3	3	3	1	**1**	1	3	3
3	1	1	1	2	**1**	2	1	1
1	2	1	1	2	**1**	2	1	2
1	3	1	1	2	**3**	2	3	3
3	1	1	1	3	**1**	3	1	1
1	2	1	1	3	**1**	3	1	2
1	3	1	1	3	**1**	3	1	3

f.3) $\nvDash (\alpha\leftrightarrow\beta)\leftrightarrow(\neg\beta\leftrightarrow\neg\alpha)$[96]

Dimostrazione

(α	↔	β)	↔	((¬	β)	↔	(¬	α))
1	1	1	**1**	3	1	1	3	1
2	1	1	**3**	3	1	3	1	2

[96] Questa proposizione è comunemente accetta in logica classica. Essa stabilisce che se due proposizioni sono dimostrabilmente equivalenti, allora lo saranno anche le rispettive forme negate; e viceversa. Sintetizzando: $(\alpha\leftrightarrow\beta)\leftrightarrow(\neg\alpha\leftrightarrow\neg\beta)$.In C_1 la relativa regola non è ammissibile: infatti se quest'ultima venisse aggiunta alla lista di assiomi e regole già presentate, modificherebbe sensibilmente l'insieme dei teoremi di C_1. Il fallimento di questa proposizione altrimenti vera e della relativa regola costituisce un problema caratteristico di C_1. Come ha dimostrato Urbas nel 1989, C_1 presenta in tal senso un'anomalia molto più diffusa e generale, che coinvolge il metateorema di rimpiazzamento stesso. Egli ha potuto provare infatti che non può essere applicato in C_1 il principio generale, per cui se due proposizioni sono equivalenti ed occorrono in un certa forma proposizionale α, allora l'una può essere rimpiazzata dall'altra in α *salva veritate*. Come visto, anche se due forme proposizionali α e β risultassero equivalenti, non lo sarebbero per ciò stesso anche le rispettive negazioni. Dunque manca una parte importante del metateorema di rimpiazzamento. Secondo quanto dimostrato da Urbas, non c'è modo in C_1 di recuperare la generalità di questo metateorema, in luogo del quale egli ha proposto una sua versione limitata, denominata 'SE^{+}' ("Sostituzione degli Equivalenti positivi"). Cfr. Urbas, I., *Paraconsistency and the C-Systems of Da Costa*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», vol. 30, n. 4, 1989, pp. 583-97

3	3	1	**1**	3	1	3	1	3
1	1	2	3	1	2	3	3	1
2	1	2	**1**	1	2	1	1	2
3	3	2	3	1	2	1	1	3
1	3	3	**1**	1	3	3	3	1
2	3	3	3	1	3	1	1	2
3	1	3	**1**	1	3	1	1	3

g) forme di non contraddizione:

$g.1)\ \nvDash \neg(\alpha\wedge\neg\alpha)$

Dimostrazione

¬	(α	∧	(¬	α))
1	1	3	3	1
3	2	1	1	2
1	3	3	1	3

$g.2)\ \nvDash \neg(\neg\alpha\wedge\alpha)$

Dimostrazione

¬	((¬	α)	∧	α)
1	3	1	3	1
3	1	2	1	2
1	1	3	3	3

Metateorema 6.3 $\mathcal{F}' \subsetneq \mathcal{F} \cup \{\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)\}\ aeq\ C_0$

Dimostrazione

Sia C_0 il calcolo proposizionale classico. Aggiungendo come assioma il principio di non contraddizione ¬(A∧¬A) al calcolo proposizionale paraconsistente C_1, si ricava come teorema (A→B)→((A→¬B)→¬A). A questo punto si ottiene la *reductio ad absurdum* debole generalmente valida, dal momento che la condizione di stabilità per B può essere eliminata.

1) $\mathcal{F}' \subsetneq \mathcal{F}\cup\{\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)\}, per\ ogni\ fbf\ \alpha$ Ip.

2) $\neg(B\wedge\neg B)$ da 1)
3) $\neg(B\wedge\neg B)\rightarrow B^{\circ}$ da 2) per def. ‘∘’
4) B° da 2), 3) per MP
5) $B^{\circ}\rightarrow[(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A)]$ $Ass.9$
6) $[(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A)]$ da 6), 7) per MP

Avendo a disposizione la *reductio ad absurdum* debole per ogni fromula α, è possibile esibire una lista di assiomi ancora equivalente al calcolo K. In tal modo si potranno dedurre tutti i teoremi della logica classica.

Metateorema 6.4 $\mathcal{F}' \subsetneq \mathcal{F} \cup \{\alpha\wedge\neg^{*}\alpha\}\ seq\ Triv(C_1)$[97]

Dimostrazione

1) $C_1\cup\{\alpha\wedge\neg^{*}\alpha\}$ Ip.
2) $\vdash A\wedge\neg^{*}A$ da 1)
3) $(A\wedge\neg^{*}A)\rightarrow B$ $teor.4.32$
4) B da 2), 3) per MP

h) forma di doppia negazione, forte e intuizionista:

$h.1) \nvDash \alpha\leftrightarrow\neg\neg\alpha$

Dimostrazione

α	↔	(¬	(¬	α))
1	**1**	1	3	1
2	3	3	1	2
3	**1**	3	1	3

$h.2) \nvDash \alpha\rightarrow\neg\neg\alpha$

[97] Questo importante metateorema dimostra come il calcolo proposizionale C_1 è “finitamente trivializzabile”. Cfr. Da Costa, N. C. A., Krause, D., Bueno, O., *Paraconsistent Logics and Paraconsistency*, in Jacquette, D., (ed.), *Philosophy of Logic*, North Holland, Amsterdam, 2006, pp. 670-1

Dimostrazione

α	→	(¬	(¬	α))
1	**1**	1	3	1
2	3	3	1	2
3	**1**	3	1	3

i) forme del sillogismo disgiuntivo:

i.1) $\nvDash ((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta$

Dimostrazione

((α	∨	β)	∧	(¬	α))	→	β
1	1	1	3	3	1	**1**	1
2	1	1	1	1	2	**1**	1
3	1	1	1	1	3	**1**	1
1	1	2	3	3	1	**1**	2
2	1	2	1	1	2	**1**	2
3	1	2	1	1	3	**1**	2
1	1	3	3	3	1	**1**	3
2	1	3	1	1	2	3	3
3	3	3	3	1	3	**1**	3

i.2) $\nvDash ((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta) \rightarrow \alpha$

Dimostrazione

((α	∨	β)	∧	(¬	β))	→	α
1	1	1	3	3	1	**1**	1
2	1	1	3	3	1	**1**	2
3	1	1	3	3	1	**1**	3
1	1	2	1	1	2	**1**	1
2	1	2	1	1	2	**1**	2
3	1	2	1	1	2	3	3
1	1	3	1	1	3	**1**	1
2	1	3	1	1	3	**1**	2
3	3	3	3	1	3	**1**	3

i.3) $C_1 \nvDash ((\neg\alpha \vee \beta) \wedge \alpha) \rightarrow \beta$

Dimostrazione

((¬	α)	∨	β)	∧	α)	→	β
3	1	1	1	1	1	**1**	1
1	2	1	1	1	2	**1**	1
1	3	1	1	3	3	**1**	1
3	1	1	2	1	1	**1**	2
1	2	1	2	1	2	**1**	2
1	3	1	2	3	3	**1**	2
3	1	3	3	3	1	**1**	3
1	2	1	3	1	2	**3**	3
1	3	1	3	3	3	**1**	3

j) forme implicative:

j.1) forma di Crisippo:

Dimostrazione

((¬	α)	∨	β)	→	(α	→	β)
3	1	1	1	**1**	1	1	1
1	2	1	1	**1**	2	1	1
1	3	1	1	**1**	3	1	1
3	1	1	2	**1**	1	1	2
1	2	1	2	**1**	2	1	2
1	3	1	2	**1**	3	1	2
3	1	3	3	**1**	1	3	3
1	2	1	3	**3**	2	3	3
1	3	1	3	**1**	3	1	3

j.2) forma di Filone Megarico:

Dimostrazione

(α	→	β)	→	(¬	(α	∧	(¬	β))
1	1	1	**1**	1	1	3	3	1
2	1	1	**1**	1	2	3	3	1
3	1	1	**1**	1	3	3	3	1
1	1	2	**3**	3	1	1	1	2
2	1	2	**3**	3	2	1	1	2
3	1	2	**1**	1	3	3	1	2
1	3	3	**1**	3	1	1	1	3
2	3	3	**1**	3	2	1	1	3

3	1	3	**1**	1	3	3	1	3

VII. Estensione del calcolo alla logica di primo ordine

1. Il calcolo paraconsistente C_1^*

Utilizzando l'estensione del linguaggio proposizionale illustrata nel paragrafo 3.2, svilupperemo in questo capitolo un calcolo logico al primo ordine.

Una logica al primo ordine viene anche detta calcolo funzionale ristretto o calcolo dei predicati di primo ordine. In tale contesto logico si esaminano in genere quei linguaggi logici formalizzati in grado di esprimere connotazioni di riguardo circa gli individui di riferimento ed i predicati o le relazioni, che è possibile fissare fra questi ultimi. Sarà pertanto indispensabile nel presente lavoro procedere con una disamina fondamentale di questo tipo di logica al fine di strutturare adeguatamente ZFU_1.

Osserviamo innanzitutto che un punto-chiave della differenziazione fra logica proposizionale e logica al primo ordine è la possibilità di poter trattare adeguatamente fatti concernenti gli individui dell'universo di discorso inteso. È possibile in particolare quantificare in vari modi gli individui cui si rivolge la propria attenzione, decidendo di volta in volta il tipo di rapporto che sussiste fra gli individui considerati e le relazioni prese in esame.

Si può così fissare un criterio soddisfacente, attraverso cui stabilire se una certa proprietà o una certa relazione possa valere per tutti i termini considerati o solo per alcuni di essi. Disponendo inoltre di un predicato a due posti per l'identità, è possibile aumentare sensibilmente il grado di precisione dei quantificatori e stabilire se una certa proprietà possa valere per un singolo oggetto soltanto o addirittura per un certo numero stabilito[98].

Tenendo ferme le metaproprietà discusse nel capitolo quattro, vale a dire le proprietà di riflessività, monotonia e taglio, che continueranno a valere anche per C_1^*, considereremo ora l'estensione del calcolo proposizionale paraconsistente mediante l'ausilio di alcuni assiomi e alcune regole utili a descrivere il comportamento logico-paraconsistente al primo ordine.

Diamo di seguito gli assiomi di C_1^*:

Assiomi logici

[98] Cfr. Casari, E., *Lineamenti di logica matematica*, *op. cit.*, pp. 32-8

1) $\forall x\mathrm{A}(x)\to\mathrm{A}(y)$

2) $\mathrm{A}(y)\to\exists x\mathrm{A}(x)$

3) $\forall x(\mathrm{A}(x))^\circ\to(\forall x\mathrm{A}(x))^\circ$

4) $\forall x(\mathrm{A}(x))^\circ\to(\exists x\mathrm{A}(x))^\circ$

2. Regole di inferenza in C_1^*

Per poter trattare adeguatamente la questione della sostituzione al primo ordine, occorre introdurre alcune definizioni preliminari e procedere per induzione, come fatto in certi passaggi a proposito della logica proposizionale paraconsistente C_1.

I casi da esaminare a questo livello di analisi logica sono più numerosi e pongono difficoltà di differente tipo: occorrerà infatti confrontarsi non più semplicemente con la sostituzione di una variabile proposizionale con un'altra ma anche con la sostituzione di una o più variabili soggettive o predicative, verificando che le sostituzioni così operate soddisfino certi fondamentali requisiti di legittimità. Tale problema è stato risolto per la logica classica da Paul Bernays e le regole di sostituzione che sotto riportiamo sono dovute alle sue ricerche.

È necessario qui affrontare il problema di tali regole dal momento che non abbiamo accettato l'assunzione iniziale di schemi di assioma.

Nelle definizioni che seguono, ci discosteremo da alcune generalità concernenti la regola di Bernays poiché la logica sottesa al nostro sistema formale è un sottocalcolo di quella classica e certe applicazioni valide per il contesto fomale, cui il logico tedesco rivolse la propria attenzione, non sono qui accettabili.

Per tali ragioni procediamo alla determinazione di tali regole in un capitolo autonomo differentemente da quanto fatto per il caso proposizionale e rinviando ad una presentazione sistematica degli assiomi e delle regole adottate, mediante una tavola sinottica, ad un capitolo successivo.

Cominciamo da alcune definizioni preliminari[99]:

Definizione 7.1 Sostituzione di variabili ($\mathfrak{S}_y^x\ \alpha$).

Procediamo per induzione sulla complessità delle formule:

i. Definizione di sostituzione per variabili:

[99] Cfr. Casari, E., *Lineamenti di logica matematica*, *op. cit.*, pp. 158-63

1) $\mathfrak{S}_y^x P^i x_1, \dots, x_i \overset{\text{def}}{=} P^i y_1, \dots, y_i$, dove ($om$ $1 \le k \le i$)

$$y_k = \begin{cases} x_k, se\ [non\ (x_k = x)] \\ y, altrimenti \end{cases}$$

2) $\mathfrak{S}_y^x \neg\alpha \overset{\text{def}}{=} \neg\mathfrak{S}_y^x\ \alpha$

3) $\mathfrak{S}_y^x\ (\beta * \gamma) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{S}_y^x\ \beta * \mathfrak{S}_y^x\ \gamma, dove * \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

4) $\mathfrak{S}_y^x \boldsymbol{Qz}\alpha$[100] $\overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \boldsymbol{Q}z\ \mathfrak{S}_y^x\ \alpha, se\ [non\ (z = x)] \\ \boldsymbol{Q}z\ \alpha, altrimenti \end{cases}$

ii. Definizione di sostituzione legittima per variabili (‘$\mathfrak{S}_y^x\ \alpha!$’):

$\mathfrak{S}_y^x\ \alpha! \overset{\text{def}}{=} non\ (ex\ \delta)\ (\boldsymbol{Q}y\ \delta \subseteq \alpha\ et\ Lib\ x\ \boldsymbol{Q}y\ \delta)$

iii. Definizione di sostituzione simultanea per variabili:

$$\mathfrak{S}_{y_1,\dots,y_i}^{x_1,\dots,x_i}\ \alpha \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathfrak{S}_{y_1}^{z_1}\mathfrak{S}_{y_2}^{z_2} \dots \mathfrak{S}_{y_i}^{z_i}\mathfrak{S}_{z_1}^{x_1}\mathfrak{S}_{z_2}^{x_2} \dots \mathfrak{S}_{z_i}^{x_i}\alpha, \text{se } (om\ j,k)(1 \le j \ne k \le i\ seq \\ seq\ \left[non\ \left(z_j = z_k\right)\right])\ et\ (om\ j)(1 \le j \le i\ seq\ non\ Occ(z_j, \alpha) \\ \alpha, altrimenti \end{cases}$$

iv. Definizione di sostituzione di un predicato di arietà *i*:

*d.*1) Definizione di una forma nominale ‘$P^i x_1, \dots, x_i$’ di P^i rispetto a α:

$$P^i x_1, \dots, x_i/\alpha \overset{\text{def}}{=} (om\ j)\left(1 \le j \le i\ seq\ non\ Occ\left(x_j, \alpha\right)\right) et\ (om\ j,k)(1 \le [non\ (j = k)] \le i\ seq\ \left[non\ \left(x_j = x_k\right)\right])$$

*d.*2) Definizione di sostituzione di un predicato P^i:

*d.*2.1) $\mathfrak{S}_\alpha^{P^i x_1,\dots,x_i}\ Q^j y_1, \dots, y_j \overset{\text{def}}{=}$

[100] ‘$\boldsymbol{Q}$’ varia sull’insieme dei quantificatori $\{\forall, \exists\}$.

$$\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathfrak{S}^{x_1,\dots,x_i}_{y_1,\dots,y_j}, se\ P^i = \mathrm{Q}^j\ et\ P^i x_1, \dots, \dfrac{x_i}{\mathrm{Q}^j y_1}, \dots, y_j\ et \\ et\ (om\ k)(1 \leq k \leq i\ seq\ Lib\ x_k\ \alpha \\ \mathrm{Q}^j y_1, \dots, y_j, altrimenti \end{cases}$$

*d.*2.2) $\mathfrak{S}^{P^i x_1,\dots,x_i}_{\alpha} \neg\beta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \neg\mathfrak{S}^{P^i x_1,\dots,x_i}_{\alpha}\ \alpha, se\ P^i x_1, \dots, x_i/\neg\beta \\ \neg\beta, altrimenti \end{cases}$

*d.*2.3) $\mathfrak{S}^{P^i x_1,\dots,x_i}_{\alpha}\ (\beta * \gamma) \stackrel{\text{def}}{=}$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathfrak{S}^{P^i x_1,\dots,x_i}_{\alpha}\ \beta * \mathfrak{S}^{P^i x_1,\dots,x_i}_{\alpha}\ \gamma, dove * \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}, se \\ se\ P^i x_1, \dots, x_i/\beta * \gamma \\ \beta * \gamma, dove * \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}, altrimenti \end{cases}$$

*d.*2.4) $\mathfrak{S}^{P^i x_1,\dots,x_i}_{\alpha}\ \boldsymbol{Q}y\ \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \boldsymbol{Q}y\ \mathfrak{S}^{P^i x_1,\dots,x_i}_{\alpha}, se\ P^i x_1, \dots, x_i/\boldsymbol{Q}y\ \alpha \\ \boldsymbol{Q}y\ \alpha, altrimenti \end{cases}$

v. Definizione di sostituzione legittima per predicati:

$\mathfrak{S}^{P^i x_1,\dots,x_i}_{\delta}\ \alpha! \stackrel{\text{def}}{=}$ *non* (*ex* β) ($\boldsymbol{Q}y\ \beta \subseteq \alpha$ *et* (*om* j) $(1 \leq j \leq i\ seq\ x_j \neq y)$ *et* $Lib(y, \delta)$) *et non* (*ex* j) $(1 \leq j \leq i$ *et* (*ex* β) ($\beta = P^i y_1, \dots, y_j, \dots, y_i\ et\ \beta \subseteq \alpha$) *et* *et* (*ex* γ) ($\boldsymbol{Q}y_j\ \gamma$ *et* $Lib(x_j, \boldsymbol{Q}y_j\ \gamma)$)

vi. Definizione del cambio alfabetico di *x* con *y* nella sottoespressione $\boldsymbol{Q}x\ \alpha$ di β:

$$\mathfrak{C}^x_y\ \beta(\boldsymbol{Q}x\ \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(\boldsymbol{Q}y\ \mathfrak{C}^x_y \alpha)$$

vii. Definizione del cambio alfabetico legittimo di *x* con *y* nella sottoespressione $\boldsymbol{Q}x\ \alpha$ di β:

$$\mathfrak{C}^x_y\ \beta(\boldsymbol{Q}x\ \alpha)! \stackrel{\text{def}}{=} non\ Lib(y, \boldsymbol{Q}x\ \alpha)$$

Passiamo a questo punto alla determinazione delle regole del nostro calcolo predicativo paraconsistente.

Regole di inferenza

1) Regola del *modus ponendo ponens* (MP): $\dfrac{\alpha,\ \alpha\to\beta}{\beta}$

2) Regola di sostituzione per le variabili individuali: $\dfrac{\alpha}{\mathfrak{S}_y^x\,\alpha}\,!$

3) Regola di sostituzione per le variabili predicative: $\dfrac{\alpha}{\mathfrak{S}_\beta^{P^i x_1,\dots,x_i}\alpha}\,!$

4) Regola di cambio alfabetico per le variabili individuali: $\dfrac{\alpha\ (\mathbf{Q}x\beta)}{\mathfrak{C}_y^x\ \alpha\ (\mathbf{Q}x\beta)}\,!$

5) Regola di generalizzazione: $\dfrac{\alpha\to\beta(x)}{\alpha\to\forall x\beta}\,!$

6) Regola di particolarizzazione: $\dfrac{\alpha(x)\to\beta}{\exists x\alpha(x)\to\beta}\,!$

Disponendo della regola 3), riteniamo di poter fare a meno della regola di congruenza tra due formule, generalmente assunta[101] per C_1^*, tenendo valido l'accorgimento con cui evitare quantificazioni vuote[102], evitare di incorrere in confusioni[103] nel cambio delle variabili e tener ferme le condizioni di "buona equivalenza" tra formule[104].

[101] Da Costa, N. C. A., Krause, D., Bueno, O., *Paraconsistent Logics and Paraconsistenccy*, *op. cit.*, p. 675

[102] Si dicono vuote quelle quantificazioni applicate ad espressioni, la cui matrice non contiene la variabile quantificata.

[103] Due variabili si confondono quando, sostituendole l'una all'altra, si ottiene una sostituzione illegittima, non conforme cioè alle regole di sostituzione sopra presentate. Il pericolo di confusione di variabili con sostituzioni illegittime comporta la trasformazione di variabili che erano libere ed occorrenti nell'espressione in variabili apparenti, soggette cioè a quantificazione.

[104] Cfr. Da Costa, N. C. A., Béziau, J.-Y., Bueno, O., *Aspects of Paraconsistent Logic*, «Bulletin of the IGPL», vol. 3, n. 4, 1995, pp. 597-614. Béziau, J.-Y., *Idempotent Full Paraconsistent Negations are Not Algebraizable*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», vol. 39, n. 1, 1998, pp. 135-9

3. Lista degli assiomi e delle regole logici al primo ordine

Assiomi logici

1) $\forall x A(x) \rightarrow A(y)$

2) $A(y) \rightarrow \exists x A(x)$

3) $\forall x(A(x))^{\circ} \rightarrow (\forall x A(x))^{\circ}$

4) $\forall x(A(x))^{\circ} \rightarrow (\exists x A(x))^{\circ}$

Regole di inferenza

1) Regola del *ponendo modus ponens* (MP(*)): $\dfrac{\alpha,\ \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$

2) Regola di sostituzione per le variabili individuali: $\dfrac{\alpha}{\mathfrak{S}_{y}^{x}\,\alpha}\,!$

3) Regola di sostituzione per le variabili predicative: $\dfrac{\alpha}{\mathfrak{S}_{\beta}^{P^{i}x_1,\ldots,x_i}\,\alpha}\,!$

4) Regola di cambio alfabetico per le variabili soggettive: $\dfrac{\alpha\,(\mathbf{Q}x\beta)}{\mathfrak{C}_{y}^{x}\,\alpha\,(\mathbf{Q}x\beta)}\,!$

5) Regola di generalizzazione: $\dfrac{\alpha \rightarrow \beta(x)}{\alpha \rightarrow \forall x \beta}\,!$

6) Regola di particolarizzazione: $\dfrac{\alpha(x) \rightarrow \beta}{\exists x \alpha(x) \rightarrow \beta}\,!$

4. Sinossi del calcolo predicativo $\boldsymbol{C_1^*}$

Gruppo I) Assiomi logici del calcolo proposizionale paraconsistente C_1:

1) $A \to (B \to A)$
2) $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$
3) $(A \wedge B) \to A$
4) $(A \wedge B) \to B$
5) $A \to (B \to (A \wedge B))$
6) $A \to (A \vee B)$
7) $B \to (A \vee B)$
8) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
9) $B^{\circ} \to [(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)]$
10) $(A^{\circ} \wedge B^{\circ}) \to [\, (A \wedge B)^{\circ} \wedge (A \vee B)^{\circ} \wedge (A \to B)^{\circ}]$
11) $A \vee \neg A$
12) $\neg\neg A \to A$

*) $A \leftrightarrow B \overset{\text{def}}{=} (A \to B) \wedge (B \to A)$

**) $A^{\circ} \wedge B^{\circ} \to (A \leftrightarrow B)^{\circ}$

Gruppo II) Assiomi logici del calcolo predicativo paraconsistente C_1^*:

13) $\forall x A(x) \to A(y)$
14) $A(y) \to \exists x A(x)$

15) $\forall x(\mathrm{A}(x))^\circ \rightarrow (\forall x \mathrm{A}(x))^\circ$

16) $\forall x(\mathrm{A}(x))^\circ \rightarrow (\exists x \mathrm{A}(x))^\circ$

Gruppo III) Regole di inferenza del calcolo proposizionale (e predicativo) paraconsistente C_1:

1) $\dfrac{\alpha,\ \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$

Gruppo IV) Regole di inferenza del calcolo predicativo paraconsistente C_1^*:

2) $\dfrac{\alpha}{\mathfrak{S}_y^x\ \alpha}!$

3) $\dfrac{\alpha}{\mathfrak{S}_{\beta}^{P^i x_{1,\dots,} x_i}\ \alpha}!$

4) $\dfrac{\alpha\,(\boldsymbol{Q}x\beta)}{\mathfrak{C}_y^x\ \alpha\,(\boldsymbol{Q}x\beta)}!$

5) $\dfrac{\alpha \rightarrow \beta(x)}{\alpha \rightarrow \forall x \beta}!$

6) $\dfrac{\alpha(x) \rightarrow \beta}{\exists x \alpha(x) \rightarrow \beta}!$

5. Dimostrazione e tesi in C_1^*

Estenderemo ora i concetti di dimostrazione e di tesi dati per C_1, coerentemente con quanto assiomaticamente assunto per C_1^*. Dovremo pertanto estendere le due nozioni già definite in sede proposizionale, considerando l'ampliamento dell'insieme degli assiomi logici e quello dell'insieme delle regole di inferenza ammesse.

Definizione 7.2 C_1^*-$Dim\{\theta_i\}_{i\le s}$ $\alpha \overset{\text{def}}{=} s < \omega$ *et* (*om i*) ($i \le s$ *seq* ($\theta_i \in Ax^*$ *vel* (*ex j*, *k*) ($j \neq k < i$ *et* θ_i = *Reg*-1(θ_j, θ_k)) *vel* (*ex j*) ($j < i$ *et* θ_i = *Reg*-2(θ_j) *vel* θ_i = *Reg*-3(θ_j) *vel* θ_i = *Reg*-4(θ_j) *vel* θ_i = *Reg*-5(θ_j) *vel* θ_i = *Reg*-6(θ_j)))))) *et* $\theta_s = \alpha$

Definizione 7.3 $\vdash_{C_1^*} \alpha \overset{\text{def}}{=}$ (*ex* $\{\theta_i\}_{i\le s}$) (C_1-$Dim\{\theta_i\}_{i\le s}$ α)

6. *Metateorema di deduzione per C_1^* (MD*)*

In questo capitolo dimostreremo che anche per C_1^* vale il metateorema di deduzione. Ciò farà sì che se ne possa fare uso quando ciò sarà più comodo ai fini di una dimostrazione anche al primo ordine, sfruttando la disponibilità di deduzioni sotto ipotesi.

La dimostrazione di questo importante metateorema non può però risultare come banale estensione dei casi già esaminati per la logica proposizionale C_1; infatti la presenza di variabili all'interno delle formule ben formate richiede alcune cautele.

In particolare occorrerà tener presenti due condizioni al fine di rendere disponibile questo metateorema:

1) nessuna variabile libera occorrente nelle assunzioni o ipotesi di partenza di una certa deduzione può essere sostituita nel corso della derivazione;

2) nessuna applicazione delle regole 6 e 7 può interessare variabili libere che occorrano nelle assunzioni o ipotesi di una certa deduzione.

Veniamo ora al metateorema:

Metateorema 7.1[105] Se $\Gamma \cup \alpha \vdash \beta$ e se sono rispettate le condizioni 1) e 2) sopra viste, allora $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

Dimostrazione

Per provare questo metateorema abbiamo bisogno di considerare quattro casi e di procedere per induzione sulla complessità delle formule. Innanzitutto ipotizziamo una dimostrazione $\beta_1, \dots, \beta_n$ di β a partire da $\Gamma \cup \{\alpha\}$, dove $\beta = \beta_n$. Per induzione su m proveremo allora che $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta_m$, dove $1 \leqslant m \leqslant n$.

Base. β_m, dove $m = 1$

[105] Cfr. Mendelson, E., *Intrduction to Mathematical Logic*, *op. cit.*, pp. 37-8. Casari, E., *Lineamenti di logica matematica*, *op. cit.*, pp. 214-7

1° caso: sia β_1 un assioma del calcolo. In questo caso, in virtù dell'assioma 1, otteniamo $\beta_1 \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta_1)$ e per MP $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta_1$.

2° caso: sia β_1 in Γ. Se β_1 è in Γ, allora $\beta_1 \in \Gamma$ implica $\Gamma \vdash \beta_1$ e dunque $\Gamma \vdash \beta_1$. Inoltre sempre per l'assioma 1 possiamo provare che $\Gamma \vdash \beta_1 \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta_1)$ e così, ancora per MP, $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta_1$.

3° caso: sia β_1 α. In questo caso, in virtù del teorema 4.1, abbiamo $\vdash \alpha \rightarrow \beta_1$, ossia $\alpha \rightarrow \beta_1$ è deducibile da qualsiasi insieme di formule e dunque anche da Γ. Così $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta_1$.

Passo induttivo. β_m, dove $m > 1$

4° caso: si supponga che $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta_l$, per ogni $l < m$. Ora β_m può essere un assioma, può essere α, può essere in Γ oppure ancora potrebbe essere derivata per MP da due proposizioni β_h e β_i, dove $h < m,\ i < m$ e β_i, risulta della forma $\beta_h \rightarrow \beta_m$. Nelle prime tre circostanze si può ragionare come nei casi 1-3 esaminati in precedenza. Per quanto riguarda invece l'ultima ipotesi, ragioneremo come segue: per ipotesi di induzione, assumiamo che $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta_h$ e $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow (\beta_h \rightarrow \beta_m)$. Applicando l'assioma 2, possiamo ricavare $\Gamma \vdash (\alpha \rightarrow \beta_h) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta_h \rightarrow \beta_m)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta_m))$. Considerando la prima delle due ipotesi fatte e applicando la regola del *modus ponens*, otteniamo dapprima $\Gamma \vdash (\alpha \rightarrow (\beta_h \rightarrow \beta_m)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta_m)$ e poi $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta_m$. La dimostrazione per induzione è così completa e si può osservare che se $m = n$, allora il risultato da dimostrare è proprio quello ottenuto.

Aggiungiamo a questi casi già esaminati per la logica proposizionale, da noi precedentemente discussa, il caso concernente la logica al primo ordine:

5° caso: si supponga β della forma $\beta_j \rightarrow \forall x \gamma$. La nostra ipotesi di partenza sarà di nuovo che $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$. Sia $\beta_1, \dots, \beta_n$ una derivazione in $\alpha \cup \Gamma$, dove $\beta_n = \beta$. Allora:

1) $\alpha \to \left(\beta_j \to \gamma\right)$ Ip. ind.

2) $\left(\alpha \to \left(\beta_j \to \gamma\right)\right) \to \left(\left(\alpha \wedge \beta_j\right) \to \gamma\right)$ $\mathfrak{S}_{\gamma}^{C}\left(\mathfrak{S}_{\beta_j}^{B}(\mathfrak{S}_{\alpha}^{A} teor. 4.5)\right)$

3) $\left(\left(\alpha \wedge \beta_j\right) \to \gamma\right)$ da 1), 2) per MP

4) $\left(\left(\alpha \wedge \beta_j\right) \to \forall x \gamma\right)$ da 3) per $Reg. 5$

5) $\left(\left(\alpha \wedge \beta_j\right) \to \forall x \gamma\right) \to \left(\alpha \to \left(\beta_j \to \forall x \gamma\right)\right)$ $\mathfrak{S}_{\forall x \gamma}^{C}\left(\mathfrak{S}_{\beta_j}^{B}(\mathfrak{S}_{\alpha}^{A} teor. 4.6)\right)$

6) $\left(\alpha \to \left(\beta_j \to \forall x \gamma\right)\right)$ da 4), 5) per MP

7) $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

6° caso: si supponga β della forma $\exists x \beta_j \to \gamma$. La nostra ipotesi di partenza sarà di nuovo che $\Gamma \vdash \alpha \to \left(\beta_j \to \gamma\right)$. Sia $\beta_1, \dots, \beta_n$ una derivazione in $\alpha \cup \Gamma$, dove $\beta_n = \beta$. Allora:

1) $\alpha \to \left(\beta_j \to \gamma\right)$ Ip. ind.

2) $\left(\alpha \to \left(\beta_j \to \gamma\right)\right) \to \left(\beta_j \to (\alpha \to \gamma)\right)$ $\mathfrak{S}_{\gamma}^{C}\left(\mathfrak{S}_{\beta_j}^{B}(\mathfrak{S}_{\alpha}^{A} teor. 4.4)\right)$

3) $\left(\beta_j \to (\alpha \to \gamma)\right)$ da 1), 2) per MP

4) $\left(\exists x \beta_j \to (\alpha \to \gamma)\right)$ da 3) per $Reg. 6$

5) $\left(\exists x \beta_j \to (\alpha \to \gamma)\right) \to \left(\alpha \to \left(\exists x \beta_j \to \gamma\right)\right)$ $\mathfrak{S}_{\gamma}^{C}\left(\mathfrak{S}_{\alpha}^{B}\left(\mathfrak{S}_{\exists x \beta_j}^{A} teor. 4.4\right)\right)$

6) $\left(\alpha \to \left(\exists x \beta_j \to \gamma\right)\right)$ da 4), 5) per MP

7) $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

7. *Alcuni teoremi ed esempi di dimostrazione in C_1^**

In questo paragrafo dimostreremo alcuni dei teoremi positivi più importanti del calcolo predicativo C_1^*, mentre ci limiteremo a riportarne l'enunciato di altri.

Cominceremo effettuando una premessa generale, che sarà valida per tutti i teoremi dimostrati in questa sezione e che può essere utilizzata anche nella dimostrazione delle tesi 7.12-19.

Ipotesi generale[106]. Se x e y sono due variabili distinte, α, β, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ e $\alpha(x, y)$ sono formule, α e β non contengono x come variabile libera e nei teoremi 7.5 e teorema 7.6 la variabile x è libera per y in $\alpha(x, y)$, allora varranno i seguenti teoremi:

Teorema 7.1 $\forall xA \leftrightarrow A$

Dimostrazione

a)

1)	$\forall x$A	Ip.
2)	$\forall x$A→A	$Ass.13$
3)	A	da 1), 2) per MP
4)	$\forall x$A⊢A	da 1)-3)
5)	$\forall x$A→A	da 1)-4) per MD*

b)

1)	A	Ip.
2)	A→A	$teor.4.1$
3)	A→$\forall x$A(x)	da 2) per $Reg.5$
4)	$\forall x$A(x)	da 1), 3) per MP
5)	A⊢$\forall x$A(x)	da 1)-4)
6)	A→$\forall x$A(x)	da 5) per MD*

c)

[106] Cfr. Kleene, S., *Introduction to Metamathematics*, *op. cit.*, p. 162

1) $\forall x$A→A — da *a)*
2) A→$\forall x$A — da *b)*
3) $\forall x$A↔A — da 1), 2) per def. '↔'

Teorema 7.2 $\exists xA \leftrightarrow A$

Dimostrazione

a)

1) A→A — $teor. 4.1$
2) $\exists x$A→A — da 1) per $Reg. 6$

b)

1) A — Ip.
2) A→$\exists x$A(x) — $Ass. 14$
3) $\exists x$A(x) — da 1), 2) per MP
4) A⊢$\exists x$A(x) — da 1)-3)
5) A→$\exists x$A(x) — da 4) per MD*

c)

1) $\exists x$A→A — da *a)*
2) A→$\exists x$A(x) — da *b)*
3) $\exists x$A↔A — da 1), 2) per def. '↔'

Teorema 7.3 $\forall x \forall y[A(x, y)] \leftrightarrow \forall y \forall x[A(x, y)]$

Dimostrazione

a)

1) $\forall x \forall y$[A(x, y)] — Ip.
2) $\forall x \forall y$[A(x, y)]→$\forall y$A(x, y) — $Ass. 13$
3) $\forall y$[A(x, y)] — da 1), 2) per MP

4) $\forall y[A(x,y)] \to A(x,y)$	$Ass.13$
5) $A(x,y)$	da 3), 4) per MP
6) $A(x,y) \to A(x,y)$	$teor.4.1$
7) $A(x,y) \to \forall x[A(x,y)]$	da 6) per $Reg.5$
8) $\forall x[A(x,y)]$	da 5), 7) per MP
9) $\forall x[A(x,y)] \to \forall x[A(x,y)]$	$teor.4.1$
10) $\forall x[A(x,y)] \to \forall y \forall x[A(x,y)]$	da 9) per $Reg.5$
11) $\forall y \forall x[A(x,y)]$	da 8), 10) per MP
12) $\forall x \forall y[A(x,y)] \vdash \forall y \forall x[A(x,y)]$	da 1)-11)
13) $\forall x \forall y[A(x,y)] \to \forall y \forall x[A(x,y)]$	da 12) per MD*

b)

1) $\forall y \forall x[A(x,y)]$	Ip.
2) $\forall y \forall x[A(x,y)] \to \forall x A(x,y)$	$Ass.13$
3) $\forall x[A(x,y)]$	da 1), 2) per MP
4) $\forall x[A(x,y)] \to A(x,y)$	$Ass.13$
5) $A(x,y)$	da 3), 4) per MP
6) $A(x,y) \to A(x,y)$	$teor.4.1$
7) $A(x,y) \to \forall y[A(x,y)]$	da 6) per $Reg.5$
8) $\forall y[A(x,y)]$	da 5), 7) per MP
9) $\forall y[A(x,y)] \to \forall y[A(x,y)]$	$teor.4.1$
10) $\forall y[A(x,y)] \to \forall x \forall y[A(x,y)]$	da 9) per $Reg.5$
11) $\forall x \forall y[A(x,y)]$	da 8), 10) per MP
12) $\forall y \forall x[A(x,y)] \vdash \forall x \forall y[A(x,y)]$	da 1)-11)
13) $\forall y \forall x[A(x,y)] \to \forall x \forall y[A(x,y)]$	da 12) per MD*

c)

1) $\forall x \forall y[A(x,y)] \to \forall y \forall x[A(x,y)]$	da *a)*
2) $\forall y \forall x[A(x,y)] \to \forall x \forall y[A(x,y)]$	da *b)*
3) $\forall x \forall y[A(x,y)] \leftrightarrow \forall y \forall x[A(x,y)]$	da 1), 2) per def. '$\leftrightarrow$'

Teorema 7.4 $\exists x \exists y[A(x,y)] \leftrightarrow \exists y \exists x[A(x,y)]$

Dimostrazione

a)

1) $[A(x, y)] \rightarrow \exists x[A(x, y)]$ $\mathfrak{S}^{A(x)}_{A(x,y)} Ass. 14$

2) $[\exists x A(x, y)] \rightarrow \exists y \exists x[A(x, y)]$ $\mathfrak{S}^{A(x)}_{\exists x A(x,y)} Ass. 14$

3) $[A(x, y)] \rightarrow \exists x[A(x, y)], [\exists x A(x, y)] \rightarrow$
$\rightarrow \exists y \exists x[A(x, y)] \vdash [A(x, y)] \rightarrow \exists y \exists x[A(x, y)]$
$\mathfrak{S}^{C}_{\exists y \exists x A(x,y)} \left(\mathfrak{S}^{B}_{\exists x A(x,y)} \left(\mathfrak{S}^{A}_{A(x,y)} teor. 4.3 \right) \right)$

4) $[A(x, y)] \rightarrow \exists y \exists x[A(x, y)]$ da 1)-3)

5) $\exists y[A(x, y)] \rightarrow \exists y \exists x[A(x, y)]$ da 4) per $Reg. 6$

6) $\exists x \exists y[A(x, y)] \rightarrow \exists y \exists x[A(x, y)]$ da 5) per $Reg. 6$

b)

1) $[A(x, y)] \rightarrow \exists y[A(x, y)]$ $\mathfrak{S}^{A(x)}_{A(x,y)} Ass. 14$

2) $[\exists y A(x, y)] \rightarrow \exists x \exists y[A(x, y)]$ $\mathfrak{S}^{A(x)}_{\exists x A(x,y)} Ass. 14$

3) $[A(x, y)] \rightarrow \exists y[A(x, y)], [\exists y A(x, y)] \rightarrow$
$\rightarrow \exists x \exists y[A(x, y)] \vdash [A(x, y)] \rightarrow \exists x \exists y[A(x, y)]$
$\mathfrak{S}^{C}_{\exists x \exists y A(x,y)} \left(\mathfrak{S}^{B}_{\exists y A(x,y)} \left(\mathfrak{S}^{A}_{A(x,y)} teor. 4.3 \right) \right)$

4) $[A(x, y)] \rightarrow \exists y \exists x[A(x, y)]$ da 1)-3)

5) $\exists y[A(x, y)] \rightarrow \exists y \exists x[A(x, y)]$ da 4) per $Reg. 6$

6) $\exists x \exists y[A(x, y)] \rightarrow \exists y \exists x[A(x, y)]$ da 5) per $Reg. 6$

c)

1) $\exists x \exists y[A(x, y)] \rightarrow \exists y \exists x[A(x, y)]$ da *a)*

2) $\exists y \exists x[A(x, y)] \rightarrow \exists x \exists y[A(x, y)]$ da *b)*

3) $\exists x \exists y[A(x, y)] \leftrightarrow \exists y \exists x[A(x, y)]$ da 1), 2) per def. '$\leftrightarrow$'

Teorema 7.5 $\forall x \forall y[A(x, y)] \rightarrow \forall x A(x, x)$

Dimostrazione

1) $\forall x \forall y[A(x, y)]$ Ip.

2) $\forall x \forall y[A(x, y)] \rightarrow \forall y A(x, y)$ $\mathfrak{S}^{A(x)}_{\forall y[A(x,y)]} Ass. 13$

3) $\forall y A(x, y)$ da 1), 2) per MP

4) $\forall y A(x, y) \rightarrow A(x, x)$ $\mathfrak{S}^{A(x)}_{A(x,y)} Ass. 13$

5) $A(x, x)$	da 3), 4) per MP
6) $A \to A$	$teor.$ 4.1
7) $(A(x, x)) \to ((A \to A) \to (A(x, x)))$	$\mathfrak{S}^{B}_{A \to A}(\mathfrak{S}^{A}_{A(x,x)} Ass. 1)$
8) $(A \to A) \to (A(x, x))$	da 5), 7) per MP
9) $(A \to A) \to \forall x A(x, x)$	da 5) per $Reg.$ 5
10) $\forall x A(x, x)$	da 6), 9) per MP
11) $\forall x \forall y[A(x, y)] \vdash \forall x A(x, x)$	da 1)-10)
12) $\forall x \forall y[A(x, y)] \to \forall x A(x, x)$	da 11) per MD*

Teorema 7.6 $\exists x A(x, x) \to \exists x \exists y(x, y)$

Dimostrazione

1) $\exists x A(x, x)$	Ip.
2) $\exists x A(x, x) \to \exists y \exists x A(x, x)$	$\mathfrak{S}^{A(y)}_{\exists x A(x,x)} Ass. 14$
3) $\exists y \exists x A(x, x)$	da 1), 2) per MP
4) $\exists y \exists x A(x, x) \to \exists x \exists y[A(x, y)]$	$teor.$ 7.4
5) $\exists x \exists y[A(x, y)]$	da 3), 4) per MP
6) $\exists x A(x, x) \vdash \exists x \exists y[A(x, y)]$	da 1)-5)
7) $\exists x A(x, x) \to \exists x \exists y[A(x, y)]$	da 6) per MD*

Teorema 7.7 $\forall x A(x) \to \exists x A(x)$

Dimostrazione

1) $\forall x A(x)$	Ip.
2) $\forall x A(x) \to A(x)$	$\mathfrak{S}^{y}_{x} Ass. 13$
3) $A(x)$	da 1), 2) per MP
4) $A(x) \to \exists x A(x)$	$\mathfrak{S}^{y}_{x} Ass. 14$
5) $\exists x A(x)$	da 3), 4) per MP
6) $\forall x A(x) \vdash \exists x A(x)$	da 1)-5)
7) $\forall x A(x) \to \exists x A(x)$	da 6) per MD*

Teorema 7.8 $\exists x \forall y A(x, y) \to \forall y \exists x A(x, y)$

Dimostrazione

1)	$A(x, y)$	Ip. generale
2)	$A(x, y) \rightarrow \exists x A(x, y)$	$\mathfrak{S}^{A(x)}_{A(x,y)} Ass. 14$
3)	$\exists x A(x, y)$	da 1), 2) per MP
4)	$A(x, y) \vdash \exists x A(x, y)$	da 1)-3)
5)	$A(x, y) \rightarrow \exists x A(x, y)$	da 4) per MD*
6)	$A(x, y) \rightarrow \forall y \exists x A(x, y)$	da 5) per $Reg. 5$
7)	$\forall y A(x, y) \rightarrow A(x, y)$	$\mathfrak{S}^{A(x)}_{A(x,y)} Ass. 13$
8)	$\forall y A(x, y) \rightarrow \forall y \exists x A(x, y)$	da 6), 7) per $\mathfrak{S}^{C}_{\forall y \exists x A(x,y)} \left(\mathfrak{S}^{B}_{A(x,y)} \left(\mathfrak{S}^{A}_{\forall y A(x,y)} teor. 4.3 \right) \right)$
9)	$\exists x \forall y A(x, y) \rightarrow \forall y \exists x A(x, y)$	da 8) per $Reg. 6$

Teorema 7.9 $\forall x[A(x) \wedge B(x)] \leftrightarrow [\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)]$

Dimostrazione

a)

1)	$\forall x[A(x) \wedge B(x)]$	Ip.
2)	$\forall x[A(x) \wedge B(x)] \rightarrow [A(x) \wedge B(x)]$	$\mathfrak{S}^{y}_{x} \left(\mathfrak{S}^{A(x)}_{A(x) \wedge B(x)} Ass. 13 \right)$
3)	$A(x) \wedge B(x)$	da 1), 2) per MP
4)	$[A(x) \wedge B(x)] \rightarrow A(x)$	$\mathfrak{S}^{B}_{B(x)} \left(\mathfrak{S}^{A}_{A(x)} Ass. 3 \right)$
5)	$[A(x) \wedge B(x)] \rightarrow \forall x A(x)$	da 4) per $Reg. 5$
6)	$[A(x) \wedge B(x)] \rightarrow B(x)$	$\mathfrak{S}^{B}_{B(x)} \left(\mathfrak{S}^{A}_{A(x)} Ass. 4 \right)$
7)	$[A(x) \wedge B(x)] \rightarrow \forall x B(x)$	da 6) per $Reg. 5$
8)	$\forall x A(x)$	da 3), 5) per MP
9)	$\forall x B(x)$	da 3), 7) per MP
10)	$\forall x A(x) \rightarrow (\forall x B(x) \rightarrow [\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)])$	$\mathfrak{S}^{B}_{\forall x B(x)} \left(\mathfrak{S}^{A}_{\forall x A(x)} Ass. 5 \right)$
11)	$(\forall x B(x) \rightarrow [\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)])$	da 8), 10) per MP
12)	$[\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)]$	da 9), 11) per MP
13)	$\forall x[A(x) \wedge B(x)] \vdash [\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)]$	da 1)-12)
14)	$\forall x[A(x) \wedge B(x)] \rightarrow [\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)]$	da 13) per MD*

b)

1)	$\forall x\mathrm{A}(x)\wedge\forall x\mathrm{B}(x)$	Ip.
2)	$[\forall x\mathrm{A}(x)\wedge\forall x\mathrm{B}(x)]\rightarrow\forall x\mathrm{A}(x)$	$\mathfrak{S}^{\mathrm{B}}_{\forall x\mathrm{B}(x)}\left(\mathfrak{S}^{\mathrm{A}}_{\forall x\mathrm{A}(x)}Ass.3\right)$
3)	$\forall x\mathrm{A}(x)$	da 1), 2) per MP
4)	$[\forall x\mathrm{A}(x)\wedge\forall x\mathrm{B}(x)]\rightarrow\forall x\mathrm{B}(x)$	$\mathfrak{S}^{\mathrm{B}}_{\forall x\mathrm{B}(x)}\left(\mathfrak{S}^{\mathrm{A}}_{\forall x\mathrm{A}(x)}Ass.4\right)$
5)	$\forall x\mathrm{B}(x)$	da 1), 4) per MP
6)	$\forall x\mathrm{A}(x)\rightarrow\mathrm{A}(x)$	$\mathfrak{S}^{y}_{x}Ass.13$
7)	$\mathrm{A}(x)$	da 3), 6) per MP
8)	$\forall x\mathrm{B}(x)\rightarrow\mathrm{B}(x)$	$\mathfrak{S}^{y}_{x}\left(\mathfrak{S}^{\mathrm{A}(x)}_{\mathrm{B}(x)}Ass.13\right)$
9)	$\mathrm{B}(x)$	da 5), 8) per MP
10)	$\mathrm{A}(x)\rightarrow(\mathrm{B}(x)\rightarrow[\mathrm{A}(x)\wedge\mathrm{B}(x)])$	$\mathfrak{S}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{B}(x)}\left(\mathfrak{S}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{A}(x)}Ass.5\right)$
11)	$\mathrm{B}(x)\rightarrow[\mathrm{A}(x)\wedge\mathrm{B}(x)]$	da 7), 10) per MP
12)	$\mathrm{B}(x)\rightarrow\forall x[\mathrm{A}(x)\wedge\mathrm{B}(x)]$	da 11) per $Reg.5$
13)	$\forall x[\mathrm{A}(x)\wedge\mathrm{B}(x)]$	da 9), 12) per MP
14)	$[\forall x\mathrm{A}(x)\wedge\forall x\mathrm{B}(x)]\vdash\forall x[\mathrm{A}(x)\wedge\mathrm{B}(x)]$	da 1)-13)
15)	$[\forall x\mathrm{A}(x)\wedge\forall x\mathrm{B}(x)]\rightarrow\forall x[\mathrm{A}(x)\wedge\mathrm{B}(x)]$	da 14) per MD*

c)

1)	$\forall x[\mathrm{A}(x)\wedge\mathrm{B}(x)]\rightarrow[\forall x\mathrm{A}(x)\wedge\forall x\mathrm{B}(x)]$	da *a)*
2)	$\forall x[\mathrm{A}(x)\wedge\mathrm{B}(x)]\leftarrow[\forall x\mathrm{A}(x)\wedge\forall x\mathrm{B}(x)]$	da *b)*
3)	$\forall x[\mathrm{A}(x)\wedge\mathrm{B}(x)]\leftrightarrow[\forall x\mathrm{A}(x)\wedge\forall x\mathrm{B}(x)]$	da 1), 2) per def. '$\leftrightarrow$'

Teorema 7.10 $\exists x[A(x)\vee B(x)]\leftrightarrow[\exists xA(x)\vee\exists xB(x)]$

Dimostrazione

a)

1)	$\mathrm{A}(x)\rightarrow\exists x\mathrm{A}(x)$	$\mathfrak{S}^{y}_{x}Ass.14$
2)	$\exists x(\mathrm{A}(x))\rightarrow(\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x))$	$\mathfrak{S}^{\mathrm{B}}_{\exists x(\mathrm{B}(x))}\left(\mathfrak{S}^{\mathrm{A}}_{\exists x(\mathrm{A}(x))}Ass.6\right)$
3)	$\mathrm{A}(x)\rightarrow\exists x\mathrm{A}(x),\ \exists x(\mathrm{A}(x))\rightarrow(\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x))\vdash\mathrm{A}(x)\rightarrow(\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x))$	$\mathfrak{S}^{\mathrm{C}}_{\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)}\left(\mathfrak{S}^{\mathrm{B}}_{\exists x\mathrm{A}(x)}\left(\mathfrak{S}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{A}(x)}teor.4.3\right)\right)$
4)	$\mathrm{A}(x)\rightarrow(\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x))$	da 1)-3)
5)	$\mathrm{B}(x)\rightarrow\exists x(\mathrm{B}(x))$	$\mathfrak{S}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}(x)}Ass.14$
6)	$\exists x(\mathrm{B}(x))\rightarrow(\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x))$	$\mathfrak{S}^{\mathrm{B}}_{\exists x(\mathrm{B}(x))}\left(\mathfrak{S}^{\mathrm{A}}_{\exists x(\mathrm{A}(x))}Ass.7\right)$
7)	$\mathrm{B}(x)\rightarrow\exists x\mathrm{B}(x),\ \exists x((x))\rightarrow(\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x))\vdash\mathrm{B}(x)\rightarrow(\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x))$	

$\mathfrak{S}^{\mathrm{C}}_{\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)}\left(\mathfrak{S}^{\mathrm{B}}_{\exists x\mathrm{B}(x)}\left(\mathfrak{S}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}(x)} teor.\,4.3\right)\right)$

8) $\mathrm{B}(x)\rightarrow(\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x))$ da 5)-7)

9) $(\mathrm{A}(x)\rightarrow(\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)))\rightarrow[\mathrm{B}(x)\rightarrow(\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x))\rightarrow$
$\rightarrow((\mathrm{A}(x)\vee\mathrm{B}(x))\rightarrow(\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x))]$

$\mathfrak{S}^{\mathrm{C}}_{\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)}\left(\mathfrak{S}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{B}(x)}\left(\mathfrak{S}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{A}(x)} Ass.\,8\right)\right)$

10) $[(\mathrm{B}(x)\rightarrow(\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)))\rightarrow((\mathrm{A}(x)\vee\mathrm{B}(x))\rightarrow(\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x))]$
da 4), 9) per MP

11) $((\mathrm{A}(x)\vee\mathrm{B}(x))\rightarrow(\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x))$ da 8), 10) per MP

12) $\exists x((\mathrm{A}(x)\vee\mathrm{B}(x))\rightarrow(\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x))$ da 11) per
$\mathfrak{S}^{\beta}_{\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)}\left(\mathfrak{S}^{\alpha(x)}_{\mathrm{A}(x)\vee\mathrm{B}(x)} Reg.\,6\right)$

b)

1) $\mathrm{A}(x)\rightarrow\exists x\mathrm{A}(x)$ $\mathfrak{S}^{y}_{x} Ass.\,14$

2) $\exists x\mathrm{A}(x)\rightarrow[\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)]$ $\mathfrak{S}^{\mathrm{B}}_{\exists x\mathrm{B}(x)}\left(\mathfrak{S}^{\mathrm{A}}_{\exists x\mathrm{A}(x)} Ass.\,6\right)$

3) $\mathrm{A}(x)\rightarrow\exists x\mathrm{A}(x),\ \exists x\mathrm{A}(x)\rightarrow[\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)]\vdash\mathrm{A}(x)\rightarrow[\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)]$
$\mathfrak{S}^{\mathrm{C}}_{\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)}\left(\mathfrak{S}^{\mathrm{B}}_{\exists x\mathrm{A}(x)}\left(\mathfrak{S}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{A}(x)}(teor.\,4.3)\right)\right)$

4) $\mathrm{A}(x)\rightarrow[\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)]$ da 1)-3)

5) $\mathrm{B}(x)\rightarrow\exists x\mathrm{B}(x)$ $\mathfrak{S}^{y}_{x}\left(\mathfrak{S}^{\mathrm{A}(x)}_{\mathrm{B}(x)} Ass.\,14\right)$

6) $\exists x\mathrm{B}(x)\rightarrow[\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)]$ $\mathfrak{S}^{\mathrm{B}}_{\exists x\mathrm{B}(x)}\left(\mathfrak{S}^{\mathrm{A}}_{\exists x\mathrm{A}(x)} Ass.\,7\right)$

7) $\mathrm{B}(x)\rightarrow\exists x\mathrm{B}(x),\ \exists x\mathrm{B}(x)\rightarrow[\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)]\vdash\mathrm{B}(x)\rightarrow[\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)]$
$\mathfrak{S}^{\mathrm{C}}_{\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)}\left(\mathfrak{S}^{\mathrm{B}}_{\exists x\mathrm{B}(x)}\left(\mathfrak{S}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}(x)}(teor.\,4.3)\right)\right)$

8) $\mathrm{B}(x)\rightarrow[\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)]$ da 5)-7)

9) $(\mathrm{A}(x)\rightarrow[\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)])\rightarrow[(\mathrm{B}(x)\rightarrow[\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)])\rightarrow$
$\rightarrow((\mathrm{A}(x)\vee\mathrm{B}(x))\rightarrow[\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)])]$

a$\mathfrak{S}^{\mathrm{B}}_{\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)}\left(\mathfrak{S}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{B}(x)}\left(\mathfrak{S}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{A}(x)} Ass.\,8\right)\right)$

10) $[(\mathrm{B}(x)\rightarrow[\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)])\rightarrow((\mathrm{A}(x)\vee\mathrm{B}(x))\rightarrow$
$\rightarrow[\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)])]$ da 4), 9) per MP

11) $((\mathrm{A}(x)\vee\mathrm{B}(x))\rightarrow[\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)])$ da 8), 10) per MP

12) $\exists x((\mathrm{A}(x)\vee\mathrm{B}(x))\rightarrow[\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)])$ da 11) per
$\mathfrak{S}^{\beta}_{\exists x\mathrm{A}(x)\vee\exists x\mathrm{B}(x)}\left(\mathfrak{S}^{\alpha(x)}_{\mathrm{A}(x)\vee\mathrm{B}(x)} Reg.\,6\right)$

c)

1)	$\exists x[A(x)\vee B(x)]\rightarrow[\exists xA(x)\vee\exists xB(x)]$	da *a)*
2)	$[\exists xA(x)\vee\exists xB(x)]\rightarrow\exists x[A(x)\vee B(x)]$	da *b)*
3)	$\exists x[A(x)\vee B(x)]\leftrightarrow [\exists xA(x)\vee\exists xB(x)]$	da 1), 2) per def. '$\leftrightarrow$'

Teorema 7.11 $[A\wedge\forall xB(x)] \leftrightarrow \forall x[A\wedge B(x)]$

Dimostrazione

a)

1)	$A\wedge\forall xB(x)$	Ip.
2)	$[A\wedge\forall xB(x)]\rightarrow\forall xB(x)$	$\mathfrak{S}^{B}_{\forall xB(x)}Ass.4$
3)	$\forall xB(x)$	da 1), 2) per MP
4)	$\forall xB(x)\rightarrow B(x)$	$\mathfrak{S}^{A(x)}_{B(x)}Ass.13$
5)	$B(x)$	da 3), 4) per MP
6)	$[A\wedge\forall xB(x)]\rightarrow A$	$\mathfrak{S}^{B}_{\forall xB(x)}Ass.3$
7)	A	da 1), 6) per MP
8)	$A\rightarrow(B(x)\rightarrow[A\wedge B(x)])$	$\mathfrak{S}^{B}_{B(x)}Ass.5$
9)	$B(x)\rightarrow[A\wedge B(x)]$	da 7), 8) per MP
10)	$B(x)\rightarrow\forall x[A\wedge B(x)]$	da 9) per $\mathfrak{S}^{\beta(x)}_{A\wedge B(x)}\left(\mathfrak{S}^{\alpha}_{B(x)}Reg.5\right)$
11)	$\forall x[A\wedge B(x)]$	da 5), 10) per MP
12)	$A\wedge\forall xB(x)\vdash\forall x[A\wedge B(x)]$	da 1)-11)
13)	$[A\wedge\forall xB(x)]\rightarrow\forall x[A\wedge B(x)]$	da 12) per MD*

b)

1)	$\forall x[A\wedge B(x)]$	Ip.
2)	$\forall x[A\wedge B(x)]\rightarrow[\forall xA\wedge\forall xB(x)]$	$\mathfrak{S}^{A(x)}_{A}teor.7.9$ *a)*
3)	$\forall xA\wedge\forall xB(x)$	da 1), 2) per MP
4)	$[\forall xA\wedge\forall xB(x)]\rightarrow\forall xA$	$\mathfrak{S}^{B}_{\forall xB}\left(\mathfrak{S}^{A}_{\forall xA}Ass.3\right)$
5)	$\forall xA$	da 3), 4) per MP
6)	$\forall xA\rightarrow A$	$teor.7.1$ *a)*
7)	A	da 5), 6), per MP
8)	$[\forall xA\wedge\forall xB(x)]\rightarrow\forall xB(x)$	$\mathfrak{S}^{B}_{\forall xB}\left(\mathfrak{S}^{A}_{\forall xA}Ass.4\right)$
9)	$\forall xB(x)$	da 3), 8) per MP

10) $A \to (\forall x B(x) \to [A \land \forall x B(x)])$	$\mathfrak{S}^{B}_{\forall x B} Ass.5$
11) $\forall x B(x) \to [A \land \forall x B(x)]$	da 7), 10) per MP
12) $[A \land \forall x B(x)]$	da 9), 11) per MP
13) $\forall x[A \land B(x)] \vdash [A \land \forall x B(x)]$	da 1)-12)
14) $\forall x[A \land B(x)] \to [A \land \forall x B(x)]$	da 13) per MD*

c)

1) $[A \land \forall x B(x)] \to \forall x[A \land B(x)]$	da *a)*
2) $\forall x[A \land B(x)] \to [A \land \forall x B(x)]$	da *b)*
4) $[A \land \forall x B(x)] \leftrightarrow \forall x[A \land B(x)]$	da 1), 2) per def. '$\leftrightarrow$'

Altri teoremi del calcolo positivo al primo ordine sono i seguenti:

Teorema 7.12 $[A \lor \exists x B(x)] \leftrightarrow \exists x[A \lor B(x)]$

Teorema 7.13 $[A \land \exists x B(x)] \leftrightarrow [\exists x(A \land B(x))]$

Teorema 7.14 $[\forall x A(x) \lor \forall x B(x)] \to [\forall x(A(x) \lor B(x))]$

Teorema 7.15 $[A \lor \forall x B(x)] \to [\forall x(A \lor B(x))]$

Teorema 7.16 $[A(x) \to B(x)] \to [\exists x A(x) \to \exists x B(x)]$

Teorema 7.17 $\exists x[A(x) \land B(x)] \to [\exists x A(x) \land \exists x B(x)]$

Teorema 7.18 $\forall x[A(x) \to B(x)] \to [\forall x(A(x) \to \forall x B(x)]$

Teorema 7.19 $\forall x[A(x) \to B(x)] \to [\exists x(A(x) \to \exists x B(x)]$

8. *Regole derivabili in C_1^**

In questo paragrafo mostreremo come alcune delle regole maggiormente utilizzate al fine di semplificare le dimostrazioni in molti calcoli logici al primo ordine siano derivabili anche in C_1^*. Ciò consentirà la semplificazione del lavoro dimostrativo dal punto di vista della costruzione delle catene deduttive, che potranno essere notevolmente abbreviate rispetto a quanto ad esempio mostrato nei capitoli precedenti; inoltre ciò conferirà al calcolo C_1^* una maggiore duttilità, soprattutto per quel che conerne l'uso della sua parte positiva.

Dimostreremo di seguito la derivabilità di alcune regole, che sono strettamente connesse a quanto già stabilito in sede assiomatica.

Metateorema 7.2 Se t è un termine libero per x, allora $\forall x A(x) \vdash A(t)$

Dimostrazione

1)	$\forall x$A(x)	Ip.
2)	$\forall x$A(x)→A(t)	$Ass. 13$
3)	A(t)	da 1), 2) per MP
4)	$\forall x$A(x)⊢A(t)	da 1)-3)

Un caso particolare, dovuto all'applicazione del metateorema 7.2, è la possibilità di considerare valida anche la seguente regola di deduzione:

Metateorema 7.2.1 $\forall x A(x) \vdash A$

Dimostrazione

1)	$\forall x$A(x)	Ip.
2)	A(x)	da 1) per $Reg. 7.2$
3)	$\forall x$A(x)⊢A	da 1)-2)

Metateorema 7.3 Se t è un termine libero per x, allora $A(t) \vdash \exists x A(t)$

Dimostrazione

1) $A(t)$ — Ip.
2) $A(t)\rightarrow\exists xA(t)$ — $Ass. 14$
3) $\exists xA(t)$ — da 1), 2) per MP
4) $A(t)\vdash\exists xA(t)$ — da 1)-3)

Metateorema 7.4 Se x non è libera in $A(x)$, allora $A(x) \vdash \forall xA(x)$

Dimostrazione

1) $A(x)$ — Ip.
2) $A(x)\rightarrow\forall xA(x)$ — per $teor. 7.1\ b)$
3) $\forall xA(x)$ — da 1), 2) per MP
4) $A(x)\vdash\forall xA(x)$ — da 1)-3)

Segue un'ovvia estensione anche della regola derivata nel metateorema 7.4, dovuta a considerazioni analoghe a quelle esposte a proposito del metateorema 7.2.1. La variabile x potrebbe infatti non occorre in A in base all'ipotesi; allora non vi sarebbero difficoltà di sorta a conseguire una generalizzazione di x su A. Possiamo quindi asserire che:

Metateorema 7.4.1 Se x non è libero in $A(x)$, allora $A \vdash \forall xA(x)$

Dimostrazione

1) A — Ip.
2) $A\rightarrow\forall xA(x)$ — per $teor. 7.1\ b)$
3) $\forall xA(x)$ — da 1), 2) per MP
4) $A\vdash\forall xA(x)$ — da 1)-3)

Metateorema 7.5[107] Se B° allora, se $A \vdash B$, $A \vdash \neg B$, allora $\vdash \neg A$

Dimostrazione

[107] In luogo dell'insieme $\{A\}$ si potrebbe considerare un insieme generico Γ.

1) B° Ip. 1
2) $A \vdash B$ Ip. 2
3) $A \vdash \neg B$ Ip. 3
4) $A \to B$ da 2) per MD
5) $A \to \neg B$ da 3) per MD
6) $B^{\circ} \to [(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A)]$ $Ass. 9$
7) $[(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A)]$ da 1), 6) per MP
8) $(A \to \neg B) \to \neg A)$ da 4), 7) per MP
9) $\neg A$ da 2), 8) per MP
10) $[B^{\circ}, A \vdash B, A \vdash \neg B] \vdash \neg A$ da 1)-9)

Metateorema 7.5.1 $A \vdash B, A \vdash \neg^{*} B$, allora $\vdash \neg A$

Dimostrazione

1) $A \vdash B$ Ip. 1
2) $A \vdash \neg^{*} B$ Ip. 2
3) $(A \to B) \to ((A \to \neg^{*} B) \to \neg^{*} B)$ $teor. 4.29$
4) $A \to B$ da 1) per MD
5) $A \to \neg^{*} B$ da 2) per MD
6) $(A \to \neg^{*} B) \to \neg^{*} B$ da 3), 4) per MP
7) $\neg^{*} B$ da 5), 6) per MP
8) $[A \vdash B, A \vdash \neg^{*} B] \vdash \neg^{*} B$ da 1)-7)

9. Alcune osservazioni sulle proprietà dei quantificatori in C_1^*

Nei due paragrafi che seguiranno osserveremo alcune delle proprietà riguardanti il comportamento dei due quantificatori presi in considerazione, quello universale e quello esistenziale.

Nei più comuni calcoli di logica classica è possibile dimostrare delle proposizioni molto importanti per le due funzioni in questione. Tra queste sono di particolare rilievo quelle che ne consentono l'interdefinibilità e dunque la conseguente possibilità di utilizzare come primitivo solo uno dei due quantificatori, limitando così l'ampiezza del linguaggio e degli assiomi di partenza.

Tutto ciò avviene normalmente attraverso una definizione che sfrutti uno dei due quantificatori assunti come primitivo in combinazione con l'operatore di negazione classico. I vantaggi che ne conseguono sono dunque di due tipi:

1) l'alleggerimento complessivo del calcolo logico dal punto di vista del linguaggio;

2) la scelta di un insieme di assiomi e di regole inferiore per numero rispetto a quanto altrimenti si sarebbe costretti a fare.

Si può facilmente intuire che le due prerogative sopra menzionate sono strettamente intrecciate tra loro e ciò è dovuto alla dimostrazione di speciali simmetrie di tipo logico. Questi due vantaggi possono costituire un punto di forza per quelle logiche in grado di esprimere entrambe le funzioni mediante la combinazione di una sola fra esse e la negazione, dato che ciò trova applicazioni immediate nello svolgimento di diverse dimostrazioni.

Il calcolo dei predicati al primo ordine paraconsistente C_1^* non gode per quanto noto sinora dell'interdefinibilità dei due quantificatori primitivi, giacché dispone di un operatore di negazione molto più debole di quello classico e dunque è costretto ad assumere per forza di cose le due funzioni come primitive. Ciò comporta ovviamente la perdita sia del vantaggio 1) che del vantaggio 2) ed è questa la ragione per la quale si è reso necessario assumere degli assiomi e delle regole per disciplinare queste due nuove funzioni logiche.

Per chiarire meglio questo fatto, esamineremo quali leggi esprimano normalmente la simmetria esistente fra i due quantificatori in logica classica e quali fra di esse vengano meno nel calcolo paraconsistente considerato.

Nei calcoli classici al primo ordine valgono ad esempio le due principali equivalenze logiche, che riportiamo di seguito:

1) $\forall x\mathrm{A}(x)\leftrightarrow[\neg\exists x\neg\mathrm{A}(x)]$

2) $[\neg\exists x\neg\mathrm{A}(x)]\leftrightarrow\forall x\mathrm{A}(x)$

Inoltre, sfruttando le relazioni logiche di tipo 1) e 2) e disponendo della *reductio ad absurdum*, è possibile stabilire anche la validità delle seguenti forme di scambio tra i due quantificatori indicati, molto utili ai fini dimostrativi:

3) $\forall x\neg\mathrm{A}(x)\leftrightarrow\neg\exists x\mathrm{A}(x)$

4) $\neg\forall x\mathrm{A}(x)\leftrightarrow\exists x\neg\mathrm{A}(x)$

5) $\exists x\neg\mathrm{A}(x)\leftrightarrow\neg\forall x\mathrm{A}(x)$

6) $\neg\exists x\mathrm{A}(x)\leftrightarrow\forall x\neg\mathrm{A}(x)$

La logica dei predicati al primo paraconsistente C_1^* non gode di nessuna fra le equivalenze di cui ai punti 1)-6); per ottenere tali relazioni logiche occorre avere a disposizione di un operatore di negazione abbastanza forte da esprimere il significato classico della sua funzione. Facendo tuttavia a meno di potenti assiomi quali le forme forti di contrapposizione o di riduzione all'assurdo, che abbiamo dimostrato essere non-derivabili dal calcolo in questione, è ragionevole attendersi una diminuzione del potere deduttivo anche in ambito predicativo. Le uniche forme di *reductio* che è possibile sfruttare sono quelle viste nei casi delle leggi di autofondazione o della *consequentia mirabilis*; mentre l'applicazione della *reductio ad absurdum* debole è utilizzabile solo in presenza della stabilità della formula, che viene implicata in maniera contraddittoria.

Al primo ordine tali equivalenze non sono dunque valide ed è possibile esprimere solo alcune di esse attraverso una relazione logica molto più debole, data dall'implicazione materiale. Per poter invece fissare le equivalenze sopra esaminate sarà necessario considerare ipotesi più forti rispetto a quanto comunemente accade. Le equivalenze 1)-6) sono infatti deducibili in C_1^*, se la formula considerata è una formula stabile e soggiace dunque allo schema di non-contraddizione che, come si è visto, non è universalmente valido nel calcolo in questione. Alternativamente esse sono valide se e solo se vengono espresse dalla negazione forte.

Di conseguenza analizzeremo nei due paragrafi successivi alcune delle leggi più importanti, che disciplinano in C_1^* il comportamento dei due quantificatori; mentre dimostreremo in seguito la non-derivabilità *tout court* delle equivalenze 1), 2), 5), 6).

10. Alcune leggi concernenti i quantificatori in C_1^*

Riporteremo alcune forme delle equivalenze esaminate nel paragrafo precedente, che è possibile ristabilire in C_1^* in presenza di specifiche condizioni di stabilità.

Dimostreremo come esempio il seguente:

Teorema 7.20 $\forall x(\mathrm{A}(x))° \vdash \exists x\mathrm{A}(x) \leftrightarrow \neg\forall x\neg\mathrm{A}(x)$

Dimostrazione[108]

a)

1) $\forall x(\mathrm{A}(x))°, \forall x\neg\mathrm{A}(x), \neg\exists x\mathrm{A}(x) \vdash (\exists x\mathrm{A}(x))°$ — $Ass. 16$
2) $\forall x(\mathrm{A}(x))°, \forall x\neg\mathrm{A}(x) \vdash \neg\exists x\mathrm{A}(x)$
3) $\forall x(\mathrm{A}(x))° \vdash \forall x\neg\mathrm{A}(x) \rightarrow \neg\exists x\mathrm{A}(x)$ — da 2) per MD*
4) $\forall x(\mathrm{A}(x))° \vdash (\exists x\mathrm{A}(x))°, \forall x\neg\mathrm{A}(x) \rightarrow \neg\exists x\mathrm{A}(x)$ — da 1)-3)
5) $\forall x(\mathrm{A}(x))° \vdash \exists x\mathrm{A}(x) \rightarrow \neg\forall x\neg\mathrm{A}(x)$ — $\mathfrak{S}^{\mathrm{B}}_{\neg\exists x\mathrm{A}(x)}\big(\mathfrak{S}^{\mathrm{A}}_{\forall x\neg\mathrm{A}(x)} teor. 4.26\big)$

b)

1) $\forall x(\mathrm{A}(x))°, \neg\exists x\mathrm{A}(x), \mathrm{A}(x) \vdash (\mathrm{A}(x))°$ — $\mathfrak{S}^{\mathrm{A}(x)}_{(\mathrm{A}(x))°} Ass. 13$
2) $\forall x(\mathrm{A}(x))°, \neg\exists x\mathrm{A}(x), \mathrm{A}(x) \vdash (\neg\mathrm{A}(x))°$ — $teor. 4.32$
3) $\forall x(\mathrm{A}(x))°, \neg\exists x\mathrm{A}(x), \mathrm{A}(x) \vdash \forall x(\neg\mathrm{A}(x))°$ — da 3) per $Reg. 7.4$
4) $\forall x(\mathrm{A}(x))°, \neg\exists x\mathrm{A}(x), \mathrm{A}(x) \vdash (\forall x\neg\mathrm{A}(x))°$ — da 4) per $Ass. 15$
5) $\forall x(\mathrm{A}(x))°, \neg\exists x\mathrm{A}(x), \mathrm{A}(x) \vdash (\exists x\mathrm{A}(x))°$ — per $Ass. 16$
6) $\forall x(\mathrm{A}(x))°, \neg\exists x\mathrm{A}(x), \mathrm{A}(x) \vdash \mathrm{A}(x)$
7) $\forall x(\mathrm{A}(x))°, \neg\exists x\mathrm{A}(x), \mathrm{A}(x) \vdash \exists x\mathrm{A}(x)$ — da 7) per $Ass. 14$
8) $\forall x(\mathrm{A}(x))°, \neg\exists x\mathrm{A}(x), \mathrm{A}(x) \vdash \neg\exists x\mathrm{A}(x)$
9) $\forall x(\mathrm{A}(x))°, \neg\exists x\mathrm{A}(x) \vdash \neg\mathrm{A}(x)$ — da 2) per MD*
10) $\forall x(\mathrm{A}(x))°, \neg\exists x\mathrm{A}(x) \vdash \forall x\neg\mathrm{A}(x)$ — da 1)-3)
11) $\forall x(\mathrm{A}(x))° \vdash \neg\exists x\mathrm{A}(x) \rightarrow \forall x\neg\mathrm{A}(x)$ — da 10) per MD*
12) $\forall x(\mathrm{A}(x))° \vdash \neg\forall x\neg\mathrm{A}(x) \rightarrow \exists x\mathrm{A}(x)$ — $\mathfrak{S}^{\mathrm{B}}_{\forall x\neg\mathrm{A}(x)}\big(\mathfrak{S}^{\mathrm{A}}_{\neg\exists x\mathrm{A}(x)} teor. 4.26\big)$

[108] Procederemo nella dimostrazione ponendo le ipotesi in orizzontale, omettendo i passaggi a questo punto evidenti.

c)

1) $\forall x(\mathrm{A}(x))^{\circ} \vdash \exists x \mathrm{A}(x) \rightarrow \neg \forall x \neg \mathrm{A}(x)$ da *a)*
2) $\forall x(\mathrm{A}(x))^{\circ} \vdash \neg \forall x \neg \mathrm{A}(x) \rightarrow \exists x \mathrm{A}(x)$ da *b)*
3) $\forall x(\mathrm{A}(x))^{\circ} \vdash \exists x \mathrm{A}(x) \leftrightarrow \neg \forall x \neg \mathrm{A}(x)$ da 1), 2) per def. '$\leftrightarrow$'

Di seguito riportiamo invece le altre forme che è possibile recuperare, tenendo ferma l'ipotesi di stabilità già considerata nel caso del teorema 4.20:

Teorema 7.21 $\forall x(\mathrm{A}(x))^{\circ} \vdash \forall x \mathrm{A}(x) \leftrightarrow \neg \exists x \neg \mathrm{A}(x)$

Teorema 7.22 $\forall x(\mathrm{A}(x))^{\circ} \vdash \neg \forall x \mathrm{A}(x) \leftrightarrow \exists x \neg \mathrm{A}(x)$

Teorema 7.23 $\forall x(\mathrm{A}(x))^{\circ} \vdash \neg \exists x \mathrm{A}(x) \leftrightarrow \forall x \neg \mathrm{A}(x)$

VIII. Elementi di semantica II

1. La semantica del calcolo C_1^*

In questo capitolo discuteremo delle caratteristiche semantiche del calcolo al primo ordine C_1^*. A tal fine ci avvarremo di alcune definizioni precedentemente illustrate e procederemo alla trattazione semantica di quelle caratteristiche proprie dell'estensione predicativa.

Ci si indirizzerà dunque direttamente al problema di quale sia il significato da assegnare alle nuove espressioni ottenute, a quelle contenenti cioè variabili o costati individuali e costanti predicative, passando in rassegna alcune nozioni-chiave della semantica per la logica dei predicati paraconsistente al primo ordine.

Chiameremo "ω-universo" o semplicemente "universo" una struttura costituita da un insieme non-vuoto d individui Δ e un insieme di valori di verità $\{1,0\}$.

I predicati e le relazioni occorrenti nell'universo così delineato saranno tutti di dimensionalità n, dove $n \in \omega$, e dunque finita. Gli attributi saranno inoltre contenuti nell'insieme di tutte le n-ple ordinate ottente combinando n a n con ripetizioni[109] tutti gli elementi dell'insieme Δ[110], ossia:

$$P_i^1 \subseteq \{c\}, se\ \Delta = \{c\}$$

$$P_i^n \subseteq \{\langle\langle c_1, \dots, c_{n-1}\rangle, c_n\rangle\}, se\ \Delta = \{c_1, \dots, c_n\}$$

Un ω-universo generato a partire da un insieme non-vuoto Δ può allora essere definito come la successione Δ, Δ^0, Δ^1, Δ^2, Δ^3, …, Δ^i,…, Δ^n che rispetta le seguenti tre clausole:

1) Δ è un dominio non-vuoto di oggetti qualunque ($\Delta = \{c, d, e, \dots\}$, con eventuali indici);

[109] Questa tipologia di combinazione è detta anche n-esima potenza combinatoria di Δ o n-esima potenza cartesiana di Δ. Cfr. Casari, E., *Lineamenti di logica matematica*, *op. cit.*, p. 175

[110] Cfr. Casari, E., *Lineamenti di logica matematica*, *op. cit.*, pp. 175 e ss.

2) $\Delta^0 = \{1,0\}$;

3) per ogni i, P^i apparterrà o meno all'i-esima potenza cartesiana di Δ.

L'universo generato a partire da Δ sarà indicato anche come '$U(\Delta)$' ("universo Δ") ed esso sarà interamente determinato dall'insieme di individui Δ, se in astratto esso rispetterà le due condizioni seguenti:

1) estensionalità: due relazioni (di arietà n, con $1 \leq n < \omega$) che possiedono le medesime n-ple di individui sono eguali;

2) massimalità: nell'universo occorrono tutte le relazioni di arietà n (con $1 \leq n < \omega$).

La condizione 2) sarà debitamente sottoposta a specifici vincoli, allorquando verranno indicati gli assiomi propri del nostro sistema formale. Per il momento comunque lasceremo inalterata questa condizione.

Possiamo a questo punto ampliare la nozione di "interpretazione" fornita per il caso proposizionale, estendendo quelle clausole per il caso predicativo:

Definizione 8.1 Diciamo $\mathfrak{I}_\Delta$ una "Δ-interpretazione" tale che:

1) $(om\, i)(\ \mathfrak{I}_\Delta(x_i) \in \Delta)$;

2) $(om\, n, k)\ (\ \mathfrak{I}_\Delta(P_k^n) \in \Delta^n)$;

3) sono conservate le interpretazioni già viste per i funtori logici proposizionali dell'insieme $\{\neg, \rightarrow, \wedge, \vee\}$;

4) $\mathfrak{I}(\forall) = Om_{(C_1^*)}$ e $Om_{(C_1^*)}$ è una funzione definita su $\wp(\{1,0\}) - \{\emptyset\}$, in maniera tale che $Om_{(C_1^*)}(\{1\}) = 1$, mentre $\big(Om_{(C_1^*)}(\{1,0\}) = Om_{(C_1^*)}(\{0\}) = 0)$;

5) $\mathfrak{J}(\exists) = Ex_{(C_1^*)}$ e $Ex_{(C_1^*)}$ è una funzione definita su $\wp(\{1,0\}) - \{\emptyset\}$, in maniera tale che $\left(Ex_{(C_1^*)}(\{1\}) = Ex_{(C_1^*)}(\{1,0\}) = 1\right)$, mentre $Ex_{(C_1^*)}(\{0\}) = 0$.

Estenderemo ora la nozione di valore associato dall'interpretazione $\mathfrak{J}_\Delta$ ad una data espressione α del calcolo predicativo al primo ordine, in modo da comprendere i nuovi concetti qui presentati.

Definizione 8.2 Diciamo "valore" associato da $\mathfrak{J}_\Delta$ all'espressione α ('$\overline{\mathfrak{J}_\Delta}(\alpha)$'), se:

1) $(om\ n, k)\ \left(\overline{\mathfrak{J}_\Delta}\left(P_k^n(x_1, \dots, x_n)\right)\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\ \mathfrak{J}_\Delta(P_k^n)\right)\left(\ \mathfrak{J}_\Delta(x_1), \dots,\ \mathfrak{J}_\Delta(x_n)\right)$;

2) valgono tutte le definizioni stabilite per il caso proposizionale;

3) $\overline{\mathfrak{J}_\Delta}(\forall x\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} Om_{(C_1^*)}\left(\bigcup_{c\in\Delta}\left\{\overline{\mathfrak{J}_{\Delta_c}^{x}}\alpha\right\}\right)$;

4) $\overline{\mathfrak{J}_\Delta}(\exists x\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} Ex_{(C_1^*)}\left(\bigcup_{c\in\Delta}\left\{\overline{\mathfrak{J}_{\Delta_c}^{x}}\alpha\right\}\right)$;

Definizione 8.3 Chiamiamo l'interpretazione $\mathfrak{J}_\Delta$ "modello" di C_1^* ('$Mod\ \mathfrak{J}_\Delta\ \alpha$') se:

$$Mod\ \mathfrak{J}_\Delta\ \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \left[\overline{\mathfrak{J}_\Delta}(\alpha) = 1\right]$$

Dalla definizione appena fornita conseguono le seguenti proposizioni:

1) $[Mod\ \mathfrak{J}_\Delta\ P_k^n(t_1, \dots, t_n)]\ aeq\ [\langle\mathfrak{J}_\Delta(x_1), \dots, \mathfrak{J}_\Delta(x_n)\rangle \in \mathfrak{J}_\Delta(P_k^n)]$;

2) valgono tutti i criteri modellistici forniti per il caso proposizionale;

3) $\left[Mod\ \Im_{\Delta}\left(\forall x A(x)\right)\right] aeq \left[(om\ c \in \Delta)\left(Mod\ \Im_{\Delta_c^x}(\alpha)\right)\right]$;

4) $\left[Mod\ \Im_{\Delta}\left(\exists x A(x)\right)\right] aeq \left[(ex\ c \in \Delta)\left(Mod\ \Im_{\Delta_c^x}(\alpha)\right)\right]$;

5) $\left[Mod\ \Im_{\Delta}\left(\forall x\left(A(x)\right)^{\circ}\right)\right] seq \left[Mod\ \Im_{\Delta}\left(\forall x A(x)\right)^{\circ} et\ Mod\ \Im_{\Delta}\left(\exists x A(x)\right)^{\circ}\right]$

Avendo a questo punto definito i criteri generali mediante i quali verificare se una data interpretazione sia anche un modello, è possibile ampliare la nozione di "conseguenza logica", affermando che, dato un insieme qualunque di enunciati al primo ordine Γ, '$\Gamma \vDash \alpha$' se e solo se ogni interpretazione $\Im_{\Delta}$, che soddisfa le espressioni contenute in Γ, soddisfa anche α.

2. *Metateorema di correttezza per C_1^**

2.1 Metateorema di correttezza forte per C_1^*

Dimostreremo ora che il calcolo dei predicati al primo ordine C_1^* risulta corretto o coerente in senso debole.

Per ragioni di semplicità trascureremo qui la questione della correttezza degli assiomi e delle regole riguardanti il puro calcolo proposizionale, in quanto tale risultato è stato già ottenuto in precedenza. Assumeremo così come parzialmente eseguito il compito che ci apprestiamo a svolgere, passando direttamente alla seconda parte della dimostrazione, attraverso una prova di coerenza per gli assiomi e le regole specifici di C_1^*.

L'obiettivo sarà quello di provare che le fbff derivabili da un insieme vuoto di formule sono anche conseguenza logica di esso. A tal fine occorrerà al solito provare che gli assiomi siano validi e che le regole di inferenza utilizzate abbiano la metaproprietà di preservare la validità delle fbff, cioè a dire se applicate ad espressioni valide restituiscono ancora espressioni valide.

Definiamo innanzitutto la nozione di "chiusura universale" per una data formula α.

Definizione 8.4 Sia $\alpha_i^n(x_1, \dots, x_n)$ una fbf di C_1^*, avente come variabili libere "$x_1, \dots, x_n$"; denoteremo allora con α' la sua chiusura universale, ossia denoteremo con α' la formula $\alpha_i^n(x_1, \dots, x_n)$, cui sarà aggiunto un prefisso costituito da tanti quantificatori universali quante sono le variabili libere in essa occorrenti. Allora: $\alpha' \; aeq \; \forall x_1 \dots \forall x_n \mathrm{A}_i^n(x_1, \dots, x_n)$.

Metateorema 8.1 Sia X un certo insieme di formule. Allora diciamo che se α segue da X mediante deduzione logica da C_1^*, allora α è anche conseguenza logica di X, ossia: $X \vdash \alpha$ implica $X \vDash \alpha$ [111].

Dimostrazione

Per ragioni di chiarezza scomporremo la dimostrazione in quattro punti fondamentali:

[111] Detto altrimenti: $(\Im \vDash X \; et \; X \vdash \alpha) \; seq \; \Im \vDash \alpha$. Cfr. Robbin, J., *Mathematical Logic. A First Course*, Benjamin, New York, 1969; Dover, New York, 2006, p. 50

1° Validità degli assiomi del gruppo I:

a) Gli assiomi del gruppo I sono corretti.

Dimostrazione

Si veda quanto già provato al § 5.2.

Prima di cominciare la dimostrazione di correttezza per quel che riguarda gli assiomi e le regole al primo ordine sarà utile fissare due utili lemmi.

Indichiamo con '$\mathfrak{M}_\Delta \underbrace{=}_{\pi \subseteq \Delta} \mathfrak{I}_\Delta$' la coincidenza delle due interpretazioni $\mathfrak{M}_\Delta$ e $\mathfrak{I}_\Delta$ rispetto al sottoinsieme π del dominio di interpretazione Δ, ossia:

$$(om\ c)\left((c \in \pi)\ seq\ (\mathfrak{M}_\Delta(c) = \mathfrak{I}_\Delta(c))\right)$$

Allora varrà qunto segue:

Metalemma 8.1

$$\mathfrak{M}_\Delta \underbrace{=}_{\pi \subseteq \Delta} \mathfrak{I}_\Delta\ et\ (om\ c)\left(\left(\left(Lib(c,\alpha)\right)\ seq\ (c \in \pi)\right)\ seq\ (Mod\ \mathfrak{M}_\Delta\ \alpha\ aeq\ Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\ \alpha)\right)$$

Dimostrazione[112]

Per induzione sulla costruzione delle formule:

1) Sia: $\alpha\ aeq\ P^n x_1, \dots, x_n$

1.1 $Mod\ \mathfrak{M}_\Delta\ \alpha\ aeq\ Mod\ \mathfrak{M}_\Delta\ P^n x_1, \dots, x_n$
1.2 $Mod\ \mathfrak{M}_\Delta\ \alpha\ aeq\ \left(\mathfrak{M}_\Delta(P^n)\right)\left(\mathfrak{M}_\Delta(x_1), \dots, \mathfrak{M}_\Delta(x_n)\right) = 1$
1.3 $Mod\ \mathfrak{M}_\Delta\ \alpha\ aeq\ \left(\mathfrak{I}_\Delta(P^n)\right)\left(\mathfrak{I}_\Delta(x_1), \dots, \mathfrak{I}_\Delta(x_n)\right) = 1$
1.4 $Mod\ \mathfrak{M}_\Delta\ \alpha\ aeq\ Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\ P^n x_1, \dots, x_n$
1.5 $Mod\ \mathfrak{M}_\Delta\ \alpha\ aeq\ Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\ \alpha$

[112] Cfr. Casari, E., *Lineamenti di logica matematica*, *op. cit.*, pp. 180-2

2) Si poceda ora per i casi enunciativi nel rispetto delle caratteristiche interpretative fornite a proposito del metateorema di completezza del calcolo proposizionale.

3) Sia: $\alpha\, aeq\, \forall x\alpha$

a)

Supponiamo che $Mod\ \mathfrak{M}_\Delta\ \forall x\alpha$. Dalle definizioni di interpretazione date in precedenza sappiamo che $(om\ c \in \Delta)\left(Mod\ \mathfrak{M}_{\Delta_c}^{\ x}\ \alpha\right)$. Sia ora c un individuo qualunque e sia valido $\mathfrak{M}_{\Delta_{c(x)}}^{\ x}\ \alpha$. Consideriamo ora la nostra seconda interpretazione $\mathfrak{I}_\Delta$ e sia per ipotesi $\mathfrak{M}_\Delta \underbrace{=}_{\pi \subseteq \Delta} \mathfrak{I}_\Delta$; allora varrà anche la seguente eguaglianza:

$$\mathfrak{M}_\Delta \underbrace{=}_{\{x\}} \mathfrak{M}_{\Delta_{c(x)}}^{\ x}\ et\ \mathfrak{I}_\Delta \underbrace{=}_{\{x\}} \mathfrak{I}_{\Delta_{c(x)}}^{\ x}\ et\ \mathfrak{M}_{\Delta_{c(x)}}^{\ x} = c = \mathfrak{I}_{\Delta_{c(x)}}^{\ x}$$

Ora si osservi che in α occorrono libere tutte le variabili di $\forall x\alpha$, tracui anche x e che $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{I}$ coincidono rispetto ald dominio di interpretazione $\pi \cup \{x\}$. Per ipotesi induttiva vale allora che $\mathfrak{M}_{\Delta_c}^{\ x}\ \alpha\, seq\ \mathfrak{I}_{\Delta_c}^{\ x}\ \alpha$. Dal momento che ciò vale per ogni "x" in Δ, è possibile dunque affermare che $Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\ \forall x\alpha$.

b)

In maniera analoga partendo dall'ipotesi che $Mod\ \mathfrak{M}_\Delta\ \forall x\alpha$.

Metalemma 8.2 $\left(\mathfrak{S}_y^x\ \alpha\,!\right)\ seq\ \left[\left(Mod\ \mathfrak{M}_{\Delta_{\mathfrak{M}_\Delta(y)}}^{\ x}\alpha\right) aeq \left(Mod\ \mathfrak{M}_\Delta\ \mathfrak{S}_y^x\ \alpha\right)\right]$

Dimostrazione[113]

Ancora per induzione sulla costruzione delle formule:

1) Sia: $\alpha\, aeq\, P^n x_1, \ldots, x_n$

[113] Cfr. Casari, E., *Lineamenti di logica matematica*, *op. cit.*, pp. 182-4

1.1 $\left(Mod\ \mathfrak{M}_{\Delta}{}^{x}_{\mathfrak{M}_\Delta(y)}\alpha\right)\ aeq\ \left(Mod\ \mathfrak{M}_{\Delta}{}^{x}_{\mathfrak{M}_\Delta(y)}\ P^n x_1, \dots, x_n\right)$

1.2 $\left(Mod\ \mathfrak{M}_{\Delta}{}^{x}_{\mathfrak{M}_\Delta(y)}\alpha\right)\ aeq\ \left(\mathfrak{M}_{\Delta}{}^{x}_{\mathfrak{M}_\Delta(y)}(P^n)\right)\left(\mathfrak{M}_{\Delta}{}^{x}_{\mathfrak{M}_\Delta(y)}(x_1), \dots, \mathfrak{M}_{\Delta}{}^{x}_{\mathfrak{M}_\Delta(y)}(x_n)\right) =$
$= 1$

1.3 $\left(Mod\ \mathfrak{M}_{\Delta}{}^{x}_{\mathfrak{M}_\Delta(y)}\alpha\right)\ aeq\ (\mathfrak{M}_\Delta(P^n))(\mathfrak{M}_\Delta(x_1'), \dots, \mathfrak{M}_\Delta(x_n')) = 1$[114]

1.4 $\left(Mod\ \mathfrak{M}_{\Delta}{}^{x}_{\mathfrak{M}_\Delta(y)}\alpha\right)\ aeq\ \mathfrak{M}_\Delta(P^n(x_1', \dots, x_n'))$

1.5 $\left(Mod\ \mathfrak{M}_{\Delta}{}^{x}_{\mathfrak{M}_\Delta(y)}\alpha\right)\ aeq\ \left(\mathfrak{M}_\Delta \mathfrak{S}^x_y(P^n(x_1', \dots, x_n'))\right)$

1.6 $\left(Mod\ \mathfrak{M}_{\Delta}{}^{x}_{\mathfrak{M}_\Delta(y)}\alpha\right)\ aeq\ (\mathfrak{M}_\Delta \mathfrak{S}^x_y\ \alpha)$

2) Analogamente alla dimostrazione del lemma di coincidenza, si procederà a proposito dei casi enunciativi;

3) Sia: $\alpha\, aeq\ \forall z\alpha$

3.1 Partiamo dall'ipotesi che $Mod\ \mathfrak{M}_{\Delta}{}^{x}_{\mathfrak{M}_\Delta(y)}\mathfrak{S}^x_y\ \forall z\alpha$. Allora $non\ ((x = z\ aeq\ non\ x{=}z$.

1° caso: $\forall z\alpha\ aeq\ \mathfrak{S}^x_y\forall z\alpha$ ed essendo che l'interpretazione $\mathfrak{M}_{\Delta}{}^{x}_{\mathfrak{M}_\Delta(y)}$ differisce da $\mathfrak{M}_\Delta$ al più per x, non occorrente libera in $\forall z\alpha$, ne consegue per il lemma di coincidenza che $Mod\ \mathfrak{M}_\Delta\ \mathfrak{S}^x_y\ \forall z\alpha$;

2° caso: sia $\mathfrak{M}_\Delta$ un'interpretazione tale che $\mathfrak{M}_{\Delta}{}^{x}_{\mathfrak{M}_\Delta(y)}{}^{z}_{c(z)}$, ossia $\mathfrak{M}_{\Delta}{}^{z}_{c(z)}{}^{x}_{\mathfrak{M}_\Delta(y)}$ è $\mathfrak{M}_{\Delta}{}^{x}_{\mathfrak{M}_\Delta(y)}{}^{z}_{c(z)}$. In base all'ipotesi formulata allora:

$$(om\ c \in \Delta)\left(\left(Mod\ \mathfrak{M}_{\Delta}{}^{x}_{\mathfrak{M}_\Delta(y)}{}^{z}_{c(z)}\ \alpha\right)\ aeq\ \left(\mathfrak{M}_{\Delta}{}^{x}_{\mathfrak{M}_\Delta(y)}{}^{z}_{c(z)}\ \alpha\right)\right)$$

e per ipotesi induttiva varrà anche che:

$$\left(Mod\ \mathfrak{M}_{\Delta}\ {}^{z}_{c(z)}{}^{x}_{\mathfrak{M}_\Delta(y)}\right)\ seq\ \left(Mod\ \mathfrak{M}_{\Delta}\ {}^{z}_{c(z)}\mathfrak{S}^x_y\ \alpha\right)$$

---

[114] Si osservi che:

$$x_k' = \begin{cases} x_k, se\ non\ (x_k = x) \\ y, altrimenti \end{cases}$$

in virtù del fatto che $\mathfrak{M}_{\Delta}{}^{x}_{\mathfrak{M}_\Delta(y)}(x_k)$ è per definizione $\mathfrak{M}_\Delta(x_k)$, per tutti gli x_k diversi da x; in caso contrario, essa è $\mathfrak{M}_\Delta(y)$. Cfr. Casari, E., *Lineamenti di logica matematica*, *op. cit.*, p. 183

e dunque varrò anche $Mod\,\mathfrak{M}_{\Delta}\,{}^{z}_{c(z)}\mathfrak{S}^{x}_{y}\,\alpha$, donde la validità di $Mod\,\mathfrak{M}_{\Delta}\,{}^{z}_{c(z)}\mathfrak{S}^{x}_{y}\,\forall z\alpha$.

b)

Ci sono anche qui due casi da esaminare: $non\,\left[\left(\mathfrak{S}^{x}_{y}\forall z\alpha\,aeq\,\forall z\alpha\right)\,aeq\,\left(\mathfrak{S}^{x}_{y}\forall z\alpha\,aeq\,\forall z\mathfrak{S}^{x}_{y}\alpha\right)\right]$:

1° caso: esso si dimostra sfruttando il ragionamento poco già fatto e il metalemma di coincidenza;

2° caso: si inverte tale ragionamento e per ipotesi induttiva si ha che:

$$\left(Mod\,\mathfrak{M}_{\Delta}\,{}^{z}_{c(z)}\mathfrak{S}^{x}_{y}\,\alpha\right)\,seq\,\left(Mod\,\mathfrak{M}_{\Delta}\,{}^{z}_{c(z)}\mathfrak{S}^{x}_{\mathfrak{M}_{\Delta}(y)}\,\alpha\right)$$

e quindi per l'ipotesi:

$$Mod\,\mathfrak{M}_{\Delta}\,{}^{z}_{c(z)}\mathfrak{S}^{x}_{\mathfrak{M}_{\Delta}(y)}\,\alpha.$$

A questo punto anche la seguente implicazione metateorica sarà giuficata, ottenendo:

$$(om\ c \in \Delta)\left(Mod\,\mathfrak{M}_{\Delta}\,{}^{x}_{\mathfrak{I}_{\Delta}(y)}\,{}^{z}_{c(z)}\,\alpha\right)$$

ossia:

$$Mod\,\mathfrak{M}_{\Delta}\,{}^{x}_{\mathfrak{I}_{\Delta}(y)}\,\forall z\alpha$$

2° Validità degli assiomi del gruppo II:

a) L'assioma 13 del gruppo II "$\forall x$A(x)→A(y)" è corretto: $Val\,\forall x\mathrm{A}(x)\rightarrow\mathrm{A}(y)$.

Dimostrazione

Sia $\mathfrak{I}_{\Delta}$ una qualunque interpretazione. Vogliamo mostrare che se $\mathfrak{I}_{\alpha} \vDash \forall x\mathrm{A}(x)$, allora $\mathfrak{I}_{\Delta} \vDash \mathrm{A}(y)$. Poniamo per assurdo che $Mod\,\mathfrak{I}_{\alpha}\,\forall x\mathrm{A}(x)$ ma che $non\ Mod\,\mathfrak{I}_{\Delta}\,\mathrm{A}(y)$. Allora varrà $non\ Mod\,\mathfrak{I}_{\Delta}\,\mathfrak{S}^{x}_{y}\mathrm{A}(x)$. Tuttavia per il metateorema di conversione varrà allora che $non\ Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{I}_\Delta(y)}^{x}\mathrm{A}(x)$ e dunque anche che $non\ Mod\ \mathfrak{I}_\alpha\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{I}_\alpha(y)}^{x}\forall x\mathrm{A}(x)$. Ma ciò contradice l'ipotesi formulata.

b) L'assioma 14 del gruppo II "A(*y*)→∃*x*A(*x*)" è corretto: $Val\ \mathrm{A}(y)\rightarrow\exists x\mathrm{A}(x)$

Dimostrazione

Sia $\mathfrak{I}_\Delta$ una qualunque interpretazione tale che $Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\ \mathrm{A}(y)$. Sfruttando ancora il metateorema di conversione varrà allora anche che $Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{I}_\Delta(y)}^{x}\mathrm{A}(x)$, cioè varà che $Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\ \exists x\mathrm{A}(x)$.

c) L'assioma 15 del gruppo II "∀*x*(A(*x*))°→(∀*x*A(*x*))°" è corretto: $Val\ \forall x(\mathrm{A}(x))^\circ\rightarrow(\forall x\mathrm{A}(x))^\circ$

Dimostrazione

Sia $\mathfrak{I}_\Delta$ una qualunque interpretazione. Ipotizziamo che $Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\ \forall x\big(\mathrm{A}(x)\big)^\circ$. Allora $Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\ \forall x\mathrm{A}(x)$ e $Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\ \neg\forall x\mathrm{A}(x)$. Così $Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\ \forall x\big(\mathrm{A}(x)\big)^\circ\ seq\ (om\ a_i \in \Delta)(Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\ \mathrm{A}(x)^\circ)$ e per il metateorema di conversione:

$$\big(om\ \mathfrak{I}_\Delta(y)\big)\Big(Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{I}_\Delta(y)}^{x}\big(\mathrm{A}(x)\wedge\neg\mathrm{A}(x)\big)\Big)$$

Ma ciò significa dunque che:

$$Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\big(\forall x\mathrm{A}(x)\big)^\circ$$

d) L'assioma 16 del gruppo II "∀*x*(A(*x*))°→(∃*x*A(*x*))°" è corretto: $Val\ \forall x(\mathrm{A}(x))^\circ\rightarrow(\exists x\mathrm{A}(x))^\circ$

Dimostrazione

Sia $\mathfrak{I}_\Delta$ una qualunque interpretazione e si ipotizzi che $Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\ \forall x(\mathrm{A}(x))^\circ$ ma che $non\ Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\ (\exists x\mathrm{A}(x))^\circ$. Allora $Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\ \exists x\mathrm{A}(x)\wedge\neg\exists x\mathrm{A}(x)$ e dunque

$\big(ex\ \mathfrak{I}_\Delta(x)\big)\big(Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{I}_\Delta(x)}^{x}\mathrm{A}(x)\ \big)\ et\ \Big(\big(ex\ \mathfrak{I}_\Delta(x)\big)\big(Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{I}_\Delta(x)}^{x}\neg\mathrm{A}(x)\big)\Big)$

. Ma ciò contraddice l'ipotesi secondo cui $Mod\ \Im_\Delta\ \forall x(\mathrm{A}(x))°$. Dunque $Mod\ \Im_\Delta\ \exists y\mathrm{A}(y)°$.

3° Validità delle regole del gruppo III:

a) La regola 1 de gruppo III "$\frac{\alpha,\ \alpha\rightarrow\beta,}{\beta}$" è corretta: $[Val\ \alpha\, et\ Val\ \alpha\rightarrow\beta\, seq\ Val\,\beta$

Dimostrazione

Per quanto concerne il *modus ponens*, sarà sufficiente estendere il caso proposizionale, verificando la validità della chiusura delle formule cui esso si applica. Sia infatti $(\alpha\rightarrow\beta)'$ la chiusura universale di $\alpha\rightarrow\beta$; si assuma inoltre che $\Im\vDash(\alpha\rightarrow\beta)'$ e che $\Im\vDash\alpha'$ ma che $\Im\nvDash\beta'$. Ora, affinché $\Im$ possa rendere vero $(\alpha\rightarrow\beta)'$, occorre che $\Im\nvDash\alpha'\ vel\ \Im\vDash\beta'$. Ma per ipotesi $\Im\vDash\alpha'$ e $\Im\nvDash\beta'$ e dunque $\Im\nvDash(\alpha\rightarrow\beta)'$ contro l'ipotesi. Così $\Im\vDash\beta'$.

4° validità delle regole del gruppo IV:

a) La regola 2 del gruppo IV "$\frac{\alpha}{\mathfrak{S}_y^x\alpha}$!" è corretta: $Val\ \alpha\, seq\ Val\ \mathfrak{S}_y^x\alpha$

Dimostrazione

Ragionando per assurdo, si dia un'interpretazione $\Im_\Delta$ tale che $Mod\ \Im_\Delta\ \alpha$ ma che $non\ Mod\ \Im_\Delta\ \mathfrak{S}_y^x\alpha$. Ancora per il metateorema di conversione allora $non\ Mod\ \Im_{\Delta{}^{\ x}_{\Im_\Delta(y)}}\ \alpha$, contrariamente all'ipotesi di validità di α.

b) La regola 3 del gruppo IV "$\frac{\alpha}{\mathfrak{S}_\beta^{P^i(x_1,\ldots,x_n)}}$" è corretta: $Val\ \alpha\, seq\ Val\ \mathfrak{S}_\beta^{P^i(x_1,\ldots,x_n)}\alpha$.

Dimostrazione

Ragionamento ancora per assurdo, si ammetta un'interpretazione $\Im_\Delta$ tale che $Mod\,\Im_\Delta\,\alpha$ ma che $non\,Mod\,\Im_\Delta\,\mathfrak{S}_{\beta}^{P^i(x_1,\ldots,x_n)}$. Allora esisterà un'interpretazione $\mathfrak{M}_\Delta$ così caratterizzata:

1) $\mathfrak{M}_\Delta \underbrace{=}_{\{P\}} \Im_\Delta$

2) $\left[\left(\mathfrak{M}_\Delta(P)\right)(x_1,\ldots,x_n)=1\right] \stackrel{\text{def}}{\equiv} \left[Mod\,\Im\left(\begin{smallmatrix} x_1, & \ldots, & x_n \\ \Im(x_1), & \ldots, & \Im(x_n)\end{smallmatrix}\right)\beta(x_1,\ldots,x_n)\right]$

Le due interpretazioni $\mathfrak{M}_\Delta$ e $\Im_\Delta$ coincidono tra loro per quel che riguarda l'interpretazione delle variabili, data dal medesimo dominio di interpretazione Δ; differiscono invece per il fatto che $\mathfrak{M}$ fa corrispondere al predicato P il predicato β. Per induzione si può allora dimostrare che $Mod\,\mathfrak{M}_\Delta\,\alpha\,aeq\,Mod\,\Im_\Delta\,\mathfrak{S}_{\beta}^{P^i(x_1,\ldots,x_n)}$. Tuttavia l'ipotesi di partenza era che $non\,Mod\,\Im_\Delta\,\mathfrak{S}_{\beta}^{P^i(x_1,\ldots,x_n)}$; dunque varrà che $non\,Mod\,\mathfrak{M}_\Delta\,\alpha$, contro la validità di α.

c) La regola 4 del gruppo IV "$\frac{\alpha}{\mathfrak{E}_y^x\alpha}$" è corretta: $Val\,\alpha\,seq\,Val\,\mathfrak{E}_y^x\alpha$.

Dimostrazione

La correttezza di tale regola è dimostrabile attraverso un'applicazione semantica della sostituzione degli equivalenti positivi o dei "buoni-equivalenti".

d) La regola 5 del gruppo IV "$\frac{\alpha\to\beta(x)}{\alpha\to\forall x\beta}$!" è corretta: $non\,Lib(x,\alpha)\,seq\,\left((Val\,\alpha\to\beta)\,seq\,(Val\,\alpha\to\forall x\beta)\right)$.

Dimostrazione

Sia $non\,Lib(x,\alpha)$ e sia $Val\,\Im_\Delta\,\alpha\to\beta$. Per assurdo sia $\Im_\Delta$ un'interpretazione tale che $Mod\,\Im_\Delta\,\alpha\,et\,non\,Mod\,\Im_\Delta\,\forall x\beta$; così $non\left(Mod\,\Im_{\Delta}{}_{c(x_1)}^{x_1}\,\beta\right)$, per qualche individuo "$c(x_1)$". Dato che la variabile "x" non occorre in α, allora per il metateorema di coincidenza varrà anche che $Mod\,\Im_{\Delta}{}_{c(x_1)}^{x_1}\,\alpha$. Così $Mod\,\Im_\Delta\,\alpha\,et\,Mod\,\Im_\Delta\,\beta$, il che contraddice l'ipotesi secondo cui $Val\,\Im_\Delta\,\alpha\to\beta$.

e) La regola 6 del gruppo IV "$\frac{\alpha(x)\to\beta}{\exists x\alpha(x)\to\beta}$!" è corretta: $non\ Lib(x,\beta)\ seq\ \big((Val\ \alpha\to\beta)\ seq\ (Val\ \exists x\alpha(x)\to\beta)\big)$.

Dimostrazione

Sia $non\ Lib(x,\beta)$ e sia $Val\ \mathfrak{I}_\Delta\ \alpha\to\beta$. Sia per assurdo $\mathfrak{I}_\Delta$ un'interpretazione tale che $Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\ \exists x\alpha(x)\ et\ non\ Mod\ \mathfrak{I}_\Delta\ \beta$; così $Mod\ \mathfrak{I}_{\Delta}{}^{x_1}_{c(x_1)}\ \alpha$, per qualche individuo "a_1". Dato che la variabile "*x*" non occorre in β, allora per il metateorema di coincidenza varrà anche che $Mod\ \mathfrak{I}_{\Delta}{}^{x_1}_{c(x_1)}\ \alpha\ et\ non\ \Big(Mod\ \mathfrak{I}_{\Delta}{}^{x_1}_{c(x_1)}\ \beta\Big)$, in contraddizione con l'ipotesi secondo cui $Val\ \mathfrak{I}_\Delta\ \alpha\to\beta$.

2.2 Metateorema di correttezza debole per C_1^*

Dopo aver provato il metateorema di correttezza forte è possibile passare alla dimostrazione della sua versione debole, esaminando dei casi già osservati per il calcolo proposizionale C_1.

Allo scopo sarà sufficiente procedere, osservando che, se è stata stabilita la validità di

$$[\![1]\!]\ X \vdash \alpha\, seq\, X \vDash \alpha$$

allora ci saranno due casi da esaminare per dimostrare il seguente:

Metateorema 8.2 $\vdash \alpha\, seq\ \vDash \alpha$

Dimostrazione

1) $X = \emptyset$

2) $non\ (X = \emptyset)$

Nel caso 1) potremo allora considerare $[\![1]\!]$ come equivalente a:

$$\emptyset \vdash \alpha\, seq\, \emptyset \vDash \alpha$$

X è allora un insieme vuoto di proposizioni e nella deduzione di α non intervengono assunzioni o ipotesi. Così si è autorizzati a passare direttamente al concetto di dimostrabilità e da questo a quello di conseguenza. In tal modo:

$$\vdash \alpha\, seq\ \vDash \alpha$$

Con ciò la dimostrazione del metateorema di correttezza debole, relativamente al caso 1), è provato.

Passiamo ad esaminare il caso 2). Avendo dimostrato una certa versione del metateorema di deduzione per C_1^*, è possibile reiterare in maniera sufficientemente analoga il ragionamento applicato al calcolo proposizionale e ricondurre il caso 2) al caso 1), scaricando tutte le assunzioni. Le cautele da adottare saranno quelle di evitare applicazioni di MD^* a quei casi in cui sussistano elementi di dipendenza tra le formule occorrenti in una certa deduzione.

Sia X un insieme i cui elementi siano $\beta_1, \dots, \beta_n$. Allora:

$$\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \vdash \alpha \, seq \, \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \vDash \alpha$$

Applicando ora *n*-volte il metateorema MD^* si ottiene:

$$\vdash \left(\beta_1 \rightarrow \left(\beta_2 \rightarrow \left(\dots \rightarrow (\beta_n \rightarrow \alpha)\right)\right)\right) \; seq \; \vDash \left(\beta_1 \rightarrow \left(\beta_2 \rightarrow \left(\dots \rightarrow (\beta_n \rightarrow \alpha)\right)\right)\right)$$

Nel caso 2) è dunque possibile operare in maniera tale da ricondurre la dimostrazione al caso 1), per il quale è stato già provata la correttezza.

3. *Completezza del calcolo predicativo al primo ordine C_1^**

Procederemo ora alla dimostrazione di completezza del calcolo predicativo paraconsistente al primo ordine C_1^*, seguendo, come già fatto per il caso proposizionale, le linee generali della dimostrazione nel senso di Henkin opportunamente riadattate.

Dimostreremo quindi la completezza secondo quanto già asserito col metateorema 5.6, provando direttamente il risultato di completezza forte, dal quale è possibile – come visto – ricavare quello di completezza debole.

Avendo già dimostrato il risultato in questione per buona parte degli assiomi logici utilizzati, ovvero gli assiomi del calcolo proposizionale C_1, ci limiteremo a considerare il problema in relazione agli assiomi 13)-16) del gruppo II più le nuove regole di inferenza assunte nel gruppo IV.

A tale scopo sarà utile tener presenti quattro punti fondamentali, attraverso i quali si articolerà la dimostrazione del metateorema che qui daremo:

1) estenderemo il nostro calcolo C_1^* ad una soprateoria ${C_1^*}^G$ mediante l'introduzione di una quantità numerabile di nuove costanti individuali[115] e dimostreremo la sicurezza di tale estensione, garantendone cioè la non-trivialità;

2) estenderemo la nozione di aritmetizzazione per espressioni, già utilizzata per il caso proposizionale, tenendo conto del liguaggio più ampio caratterizzante C_1^*;

3) amplieremo la nozione di insieme massimale non-triviale, prendendo in considerazione la nuova serie di assiomi e di formule introdotti al punto 2) (quali nuovi assiomi di C_1^*) e stabiliremo alcune proprietà fondamentali in aggiunta a quelle già viste al § 5.1;

4) dimostreremo infine che esiste un modello per l'insieme massimale non-triviale così ottenuto.

Infine sarà possibile procedere alla dimostrazione dell'enunciato di completezza semantica forte, nel senso in cui Gödel l'aveva delineato, ricavando

[115] Questa procedura è detta anche "arricchimento" della teoria.

la dimostrazione di completezza semantica debole come caso speciale di quella forte.

3.1 Completezza semantica forte di C_1^*

Metateorema 8.3 $[(non\ (Triv\ Y))\ seq\ (Sod\ Y)]$

Dimostrazione

La prova di questo metateorema sarà articolata secondo i quattro punti essenziali precedentemente illustrati. Cominceremo la nostra dimostrazione partendo dal punto 1):

1) è possibile estendere C_1^* ad una soprateoria ${C_1^*}^G$;

Definizione 8.4 Diciamo che una teoria T è ricca ($Ric\ T$) se e solo se per ogni proposizione di T che comincia con un quantificatore esistenziale, cioè del tipo $\exists x\alpha(x)$, esiste un termine chiuso t di T tale che $\vdash_T \exists x\alpha(x) \rightarrow \mathfrak{S}_t^x\alpha(x)$[116].

Si osservi innanzitutto che la ricchezza di una teoria siffatta soddisfa un'importante condizione: data una qualunque espressione $\forall x\alpha(x)$, se $\vdash_T \alpha(t)$, allora $\vdash_T \forall x\alpha(x)$, per ogni termine chiuso di T.
Sia infatti $\vdash_T \mathfrak{S}_t^x\alpha(x)$, per ogni termine chiuso "t". Allora possiamo dedurre $\vdash_T (P \rightarrow P) \rightarrow \mathfrak{S}_t^x\alpha(x)$ e siccome "x" non occorre libera in "$P \rightarrow P$", varrà anche $\vdash_T (P \rightarrow P) \rightarrow \forall x\alpha(x)$. Poiché "$P \rightarrow P$" è un teorema, per MP seguirà che $\forall x\alpha(x)$. Dall'ipotesi iniziale $\vdash_T \mathfrak{S}_t^x\alpha(x)$, per ogni termine chiuso "t", seguirà infine $\vdash_T \forall x\alpha(x)$, e dunque $\vdash_T \mathfrak{S}_t^x\alpha(x) \rightarrow \forall x\alpha(x)$.

Veniamo così al seguente metalemma:

Metalemma 8.3 C_1^* ammette un'estensione ricca inessenziale[117].

[116] Cfr. Dalla Chiara Scabia, M. L., *Modelli sintattici e semantici delle teorie elementari*, *op. cit.*, pp. 52-4

[117] Un'estensione T' di una teoria T si dice "inessenziale" se e solo se ogni espressione di T è deducibile in T' se e solo se lo è anche in T. Cfr. Dalla Chiara Scabia, M. L., *Modelli sintattici e semantici delle teorie elementari*, *op. cit.*, p. 47. Questo lemma costituisce un caso particolare del teorema più generale, dimostrato da Henkin e semplificato da Hasenjaeger (cfr. Henkin, L., *The Completeness of the First-Order Functional Calculus*, *op. cit.* Hasenjaeger, G., *Eine Bemerkung zu*

Dimostrazione

Allo scopo sarà sufficiente provare tre condizioni:

1) ${C_1^*}^G$ è una soprateoria di C_1^*;

2) $Ric\ {C_1^*}^G$;

3) $(om\ \beta)\left(\vdash_{{C_1^*}^G} \beta\, aeq\ \vdash_{C_1^*} \beta\right)$

Relativamente alla condizione 1), si può considerare $\mathcal{L}(C_1^*)$ ampliato nel numero delle costanti individuali o funzioni 0-arie mediante un certo insieme G infinito numerabile, così definito:

$$G = \{c_1^G, c_2^G, c_3^G, \dots\}$$

Sia allora H l'insieme costituito induttivamente dai numeri di Gödel delle seguenti formule ben formate:

$$H = \left\{ g(\gamma_i) \left| \begin{array}{c} \gamma_1 \leftrightarrow \exists x_1 \mathfrak{S}^{x_1}_{c_1^G} \alpha_1(x_1),\ dove\ c_1^G non\ occorre\ in\ \gamma_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_{i+1} \leftrightarrow \exists x_1 \mathfrak{S}^{x_1}_{c_{i+1}^G} \alpha_{i+1}(x_1),\ dove\ c_i^G non\ occorre\ né\ in\ \gamma_i\ né\ in\ \gamma_{i-1},\ per\ ogni\ i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right. \right\}$$

Henkin's Beweis für die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls der Ersten Stufe, «Journal of Symbolic Logic», vol. 18, n. 1, 1953, pp. 42-8). In particolare questo teorema poggia sul fatto che ${C_1^*}^G$ risulta essere un'estensione teoretica inessenziale di C_1^*: il suo linguaggio non è invariante, in quanto si aggiunge un nuovo insieme (di cardinalità numerabile) di costanti individuali, differenti da quelle già utilizzate e dunque $\mathcal{L}(C_1^*) \subset \mathcal{L}({C_1^*}^G)$; tuttavia l'estensione è comunque inessenziale, giacché $Teo = \{\alpha | \vdash_{C_1^*} \alpha\}$ se e solo se $Teo^G = \left\{\alpha | \vdash_{{C_1^*}^G} \alpha\right\}$. L'aver definito ${C_1^*}^G$ un'estensione inessenziale di C_1^* risulta essere di grande importanza, dato che in generale è possibile provare come ogni estensione inessenziale di una teoria non-contraddittoria sia a sua volta non-contraddittoria. La dimostrazione qui ricostruita costituisce un caso del tutto particolare proprio di quest'ultimo fatto: avendo dimostrato che C_1^* è coerente in virtù del metateorema di correttezza, proviamo che l'arricchimento linguistico non costituisce in sé un'estensione dell'insieme dei teoremi di C_1^* e non altera dunque la coerenza del calcolo.

2) Aritmetizzazione del linguaggio;

H può effettivamente essere costituito cominciando dall'enumerazione delle formule di ${C_1^*}^G$ con una sola variabile libera: $\exists x_1 \alpha_1^1(x_1), \exists x_1 \alpha_2^1(x_1), \dots, \exists x_1 \alpha_n^1(x_1)$, ..., da eseguirsi mediante la seguente assegnazione di numeri naturali, per ogni elemento di $\mathcal{L}({C_1^*}^G)$[118]:

$$\mathrm{g}(`(\text{'}) = 3$$

$$\mathrm{g}(`)\text{'}) = 5$$

$$g(`,\text{'}) = 7$$

$$\mathrm{g}(\neg) = 9$$

$$g(\wedge) = 11$$

$$g(\vee) = 13$$

$$g(\rightarrow) = 17$$

$$g(\forall) = 19$$

$$g(\exists) = 23$$

$$g(x_k) = 13 + 8k$$

$$g(a_k) = 7 + 8k$$

$$g(f_k^n) = 1 + 8(2^n 3^k)$$

$$g(\mathrm{A}_k^n) = 3 + 8(2^n 3^k)$$

[118] Cfr. Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, *op. cit.*, pp. 85-6

Varranno per tale assegnazione le medesime proprietà di codifica, già viste per il caso proposizionale.

L'estensione linguistica di $\mathcal{L}(C_1^*)$ è sicura in quanto la teoria che viene costruita su di essa $\left(C_1^{*G}\right)$ è ancora non-triviale.

In particolare se X è un insieme non-triviale di formule, allora $(X)\cup\{\gamma_1,\dots,\gamma_n\}$ è non-triviale. Se così non fosse, allora si avrebbe $non\,Triv\,X$ mentre $(X)\cup\{\gamma_1,\dots,\gamma_n\}\vdash\beta\wedge\neg^*\beta$.

Così:

1) $(X)\cup\{\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1},\gamma_n\}\vdash\neg^*\gamma_n$[119]
2) $(X)\cup\{\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1}\}\vdash\gamma_n\rightarrow\neg^*\gamma_n$
3) $(X)\cup\{\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1}\}\vdash(\gamma_n\rightarrow\neg^*\gamma_n)\rightarrow\neg^*\gamma_n$
4) $(X)\cup\{\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1}\}\vdash\neg^*\gamma_n$
5) $(X)\cup\{\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1}\}\vdash\neg^*[\exists x_1\,\alpha_n^1(x_1)\rightarrow\alpha_n^1(c_1^G)]$
6) $(X)\cup\{\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1}\}\vdash\exists x_1\,\alpha_n^1(x_1)\wedge\neg^*\alpha_n^1(c_1^G)$
7) $(X)\cup\{\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1}\}\vdash\exists x_1\,\alpha_n^1(x_1)$
8) $(X)\cup\{\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1}\}\vdash\neg^*\alpha_n^1(c_1^G)$
9) $(X)\cup\{\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1}\}\vdash\forall x_1\neg^*\alpha_n^1(c_1^G)$
10) $(X)\cup\{\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1}\}\vdash\forall x_1\neg^*\alpha_n^1(c_1^G)\wedge\exists x_1\,\alpha_n^1(x_1)$
11) $(X)\cup\{\gamma_1,\dots,\gamma_{n-2}\}\vdash\gamma_{n-1}\rightarrow\neg^*\alpha_n^1(c_1^G)$
12) $(X)\cup\{\gamma_1,\dots,\gamma_{n-2}\}\vdash\gamma_{n-1}\rightarrow\left[\forall x_1\neg^*\alpha_n^1(c_1^G)\wedge\exists x_1\,\alpha_n^1(x_1)\right]$
13) $(X)\cup\{\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1}\}\vdash\gamma_{n-1}$
14) $(X)\cup\{\gamma_1,\dots,\gamma_{n-2}\}\vdash\forall x_1\neg^*\alpha_n^1(c_1^G)\wedge\exists x_1\,\alpha_n^1(x_1)$

....

viii. $\left[X\cup\left\{\gamma_1,\dots,\gamma_{i,i<n}\right\}\right]\vdash\forall x_1\neg^*\alpha_n^1(c_1^G)\wedge\exists x_1\,\alpha_n^1(x_1)$

....

n) $X\vdash\forall x_1\neg^*\alpha_n^1(c_1^G)\wedge\exists x_1\,\alpha_n^1(x_1)$

m) $Triv\,X$

A questo punto sarà definita univocamente la nuova teoria C_1^{*G}, considerando quale base assiomatica l'insieme degli assiomi e delle regole di C_1^* più i nuovi assiomi facenti parte dell'insieme ricorsivo H.

[119] Nelle derivazioni possono comparire solo quantità finite di funzionali 0-arii.

Si avrà dunque che:

$$C_1^{*G} = \langle \mathcal{L}\left(C_1^{*G}\right), Ass(C_1^*) \cup H \rangle, dove\ H = \{\gamma_i\}_{1 \leq i \leq \omega}$$

Con ciò è possibile riconoscere che C_1^{*G} è di fatto una soprateoria o un'estensione teorica di C_1^*, dal momento che la seguente condizione è immediatamente vera:

$$Teor\left(C_1^{*G}\right) \supseteq Ass(C_1^*)$$

Con ciò è dimostrata pertanto la condizione 1).
Veniamo ora alla condizione 2). Essa è altrettanto evidente, dal momento che in C_1^{*G} ogni espressione della forma $\exists x_1 \alpha_j(x_1)$ deve apparire in H, dove sarà vero per qualche termine chiuso t_j che:

$$\exists x_1 \alpha_j(x_1) \rightarrow \mathfrak{S}_{c_j^G}^{x_1} \alpha_j\left(c_j^G\right)$$

Così ne concludiamo che $Ric\ C_1^{*G}$, secondo quanto richiesto al punto 2).
Infine proveremo mediante la condizione 3) che C_1^{*G} è un'estensione inessenziale. Sia β un certo teorema della nuova teoria C_1^{*G} $\left(\vdash_{C_1^{*G}} \beta\right)$. Sia $Ded(\beta)$ la deduzione di β, costituita da un numero finito di assiomi ed elementi di H e sia $\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ l'insieme degli assiomi intervenienti in $Ded(\beta)$.
Così si avrà che:

1) $\{\delta_1, \dots, \delta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_n\} \vdash \beta$
2) $\{\delta_1, \dots, \delta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}\} \vdash \gamma_n \rightarrow \beta$
3) $\{\delta_1, \dots, \delta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}\} \vdash \left[\exists x_1 \alpha_n(x_1) \rightarrow \mathfrak{S}_{c_n^G}^{x_1} \alpha_n(x_1)\right] \rightarrow \beta$
4) $\{\delta_1, \dots, \delta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}\} \vdash \left[\exists x_1 \alpha_n(x_1) \rightarrow \mathfrak{S}_{c_n^G}^{x_1} \alpha_n(x_1)\right] \rightarrow \beta$

5) $\{\delta_1, \dots, \delta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}\} \vdash \mathfrak{C}_{x_j}^{x_1}\left[\exists x_1 \alpha_n(x_1) \rightarrow \mathfrak{S}_{c_n^G}^{x_1} \alpha_n(x_1)\right] \rightarrow \beta$[120]

6) $\{\delta_1, \dots, \delta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}\} \vdash [\exists x_1 \alpha_n(x_1) \rightarrow \alpha_n(x_j)] \rightarrow \beta$

7) $\{\delta_1, \dots, \delta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_n\} \vdash [\exists x_1 \alpha_n(x_1) \rightarrow \alpha_n(x_j)]$

8) $\{\delta_1, \dots, \delta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}\} \vdash \beta$

9) ....

h) $\{\delta_1, \dots, \delta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_i\} \vdash \beta$

....

n) $\{\delta_1, \dots, \delta_m\} \vdash \beta$

Al passo n) si osserva come la deduzione di β dipenda ancora una volta esclusivamente dagli assiomi di ${C_1^*}^G$ intervenienti in $Ded(\beta)$. Dato che $Ass\left({C_1^*}^G\right) = Ass(C_1^*) \cup \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ e dato che la deduzione di β non dipende da ulteriori formule a parte gli assiomi stessi della teoria, allora $Ass(C_1^*) \vdash \beta$. Così $Ded(\beta) \vdash_{{C_1^*}^G} \beta \, seq \, Ded(\beta) \vdash_{C_1^*} \beta$, per ogni β. Ora, dal momento che al punto 1) si è provato che ${C_1^*}^G$ è una soprateoria di C_1^*, sarà immediato verificare $Teor(C_1^*) \subseteq Teor\left({C_1^*}^G\right)$, cioè a dire che ogni teorema di C_1^* è anche un teorema di ${C_1^*}^G$.

Così resta dimostrato che per ogni β, $\vdash_{{C_1^*}^G} \beta \, aeq \vdash_{C_1^*} \beta$ e che ${C_1^*}^G$ è un'estensione inessenziale di C_1^*.

3) Costruzione dell'insieme massimale non-triviale Y^*;

Tenendo presenti i risultati già ottenuti per il calcolo proposizionale C_1 e le osservazioni preliminari fatte in quella sede, procediamo alla costruzione di Y^* in questo modo:

Base:

$\Gamma_0 = X$

[120] La sostituzione della variabile x_1 con x_j, dove x_J è una variabile qualunque, è legittima in quanto c_n^G non compare in β né in alcuna delle assunzioni. Cfr. Dalla Chiara Scabia, M. L., *Modelli sintattici e semantici delle teorie elementari*, *op. cit.*, pp. 53-4

Passo:

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\alpha_n\}, \ se \ \Gamma_n \cup \{\alpha_n\} \text{ è } non\text{–}triviale \\ \Gamma_n, \ se \ \Gamma_n \cup \{\alpha_n\} \text{ è } triviale \end{cases}$$

Y^* sarà allora non-triviale massimale e corrisponderà al seguente insieme:

$$Y^* = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ \dots \ \cup \Gamma_n \cup \dots, (om\ n)(n \in \boldsymbol{N})$$

Ossia:

$$Y^* = \bigcup_{i=0}^{n} \Gamma_k \text{, dove } k, n \in \omega$$

Tale Y^* è anch'esso non-triviale per il medesimo lemma considerato nel caso proposizionale.
Passiamo ora alle proprietà caratterizzanti l'insieme massimale Y^*. Tralasceremo le proprietà concernenti gli operatori proposizionali, assumendo quanto già dimostrato per C_1 e passeremo direttamente alla dimostrazione delle proprietà di completezza di Y^* rispetto ai quantificatori.

Cominciamo col dimostrare che Y^* è completo rispetto a '∀':

XIV) $\forall x \alpha(x) \in Y^* \ aeq \ \alpha\left(c_j^G\right) \in Y^*, per \ ogni \ costante \ c$

Dimostrazione

a)

1) $\forall x \alpha(x) \in Y^*$ — Ip. 1
2) $\forall x \alpha(x) \in Y^* \ seq \ Y^* \vdash \forall x \alpha(x)$ — da 1) per I *a.*
3) $Y \vdash \forall x \alpha(x)$ — da 1), 2), per MMP

4) $Y \vdash \forall x\alpha(x) \rightarrow \alpha\,(c_j^G)$ $\quad$ $Ass. 13$

5) $Y \vdash \alpha\,(c_j^G)$ $\quad$ da 3), 4) per MP

6) $Y \vdash \alpha(c_j^G c)$ seq $\alpha(c_j^G) \in Y^*$ $\quad$ da 5) per I *b.*

7) $\alpha(c_j^G) \in Y^*$ $\quad$ da 5), 6) per MMP

8) $\forall x\alpha(x) \in Y^* \vdash \alpha(c_j^G) \in Y^*$ $\quad$ da 1)-7)

9) $\forall x\alpha(x) \in Y^*$ seq $\alpha(c_j^G) \in Y^*$ $\quad$ da 8) per MMD

b)

1) $\alpha(c_j^G) \in Y^*$ $\quad$ Ip. 1 per ogni "c_j^G"

2) $non\ \forall x\alpha(x) \in Y^*$ $\quad$ Ip. 2

3) $non\ Triv\ Y^* \cup \{\neg^* \forall x\alpha(x) \in Y^*\}$ $\quad$ per massimalità Y^*

4) $\neg^* \forall x\alpha(x) \in Y^*$ $\quad$ da 3) per V

5) $\neg^* \forall x\alpha(x) \in Y^*$ seq $Y^* \vdash \neg^* \forall x\alpha(x)$ $\quad$ da 4) per I *a.*

6) $Y \vdash \neg^* \forall x\alpha(x)$ $\quad$ da 4), 5) per MMP

7) $Y \vdash \neg^* \forall x\alpha(x) \rightarrow \exists x \neg^* \alpha(x)$ $\quad$ da 6) per …………

8) $Y \vdash \exists x \neg^* \alpha(x)$ $\quad$ da 6), 7) per MP

9) $Y \vdash \exists x \neg^* \alpha(x) \rightarrow \neg^* \alpha(c_j^G)$ $\quad$ per arricchimento

10) $Y \vdash \neg^* \alpha(c_j^G)$ $\quad$ da 9) per MP

11) $\alpha(c_j^G) \in Y^*$ seq $Y^* \vdash \alpha(c_j^G)$ $\quad$ da 1) per I *a.*

12) $Y \vdash \alpha(c_j^G)$ $\quad$ da 1), 11) per MMP

13) $\alpha(c_j^G) \in Y^* \vdash non\ non\ \forall x\alpha(x) \in Y^*$ $\quad$ da 1)-12) per RAA

14) $\alpha(c_j^G) \in Y^* \vdash \forall x\alpha(x) \in Y^*$ $\quad$ da 13) per DN

15) $\alpha(c_j^G) \in Y^*$ seq $\forall x\alpha(x) \in Y^*$ $\quad$ da 14) per MMD

c)

1) $\forall x\alpha(x) \in Y^*$ seq $\alpha(c_j^G) \in Y^*$ $\quad$ da *a)*

2) $\alpha(c_j^G) \in Y^*$ seq $\forall x\alpha(x) \in Y^*$ $\quad$ da *b)*

3) $\forall x\alpha(x) \in Y^*$ aeq $\alpha(c_j^G) \in Y^*$ $\quad$ da 1), 2) per def. '*aeq*'

Procediamo ora alla dimostrazione di completezza di Y^* rispetto a '$\exists$':

XV) $\exists x\alpha(x) \in Y^* \; aeq \; \alpha(c_j^G) \in Y^*, per\ qualche\ costante\ c$

Dimostrazione

a)

1) $\exists x\alpha(x) \in Y^*$	Ip. 1
2) $\exists x\alpha(x) \in Y^* \; seq \; Y^* \vdash \exists x\alpha(x)$	da 1) per I *a)*
3) $Y \vdash \exists x\alpha(x)$	da 1), 2), per MMP
4) $Y \vdash \exists x\alpha(x) \rightarrow \alpha(c_j^G)$	per arricchimento
5) $Y \vdash \alpha(c_j^G)$	da 3), 4) per MP
6) $\exists x\alpha(x) \in Y^* \vdash Y^* \vdash \alpha(c_j^G)$	da 1)-5)
7) $\exists x\alpha(x) \in Y^* \; seq \; Y^* \vdash \alpha(c_j^G)$	da 6) per MMD

b)

1) $\alpha(c_j^G) \in Y^*$	Ip. 1, $(ex\ c)$ "c_j^G"
2) $\alpha(c_j^G) \in Y^* \; seq \; Y^* \vdash \alpha(c_j^G)$	da 1) per I *a)*
3) $Y^* \vdash \alpha(c_j^G)$	da 1), 2), per MMP
4) $Y^* \vdash \alpha(c_j^G) \rightarrow \exists x\alpha(x)$	$Ass.$ 14
5) $Y^* \vdash \exists x\alpha(x)$	da 3), 4) per MP
6) $Y^* \vdash \exists x\alpha(x) \; seq \; \exists x\alpha(x) \in Y^*$	da 5) per I *b)*
7) $Y^* \vdash \exists x\alpha(x) \in Y^*$	da f), 6) per MMP
8) $\alpha(c_j^G) \in Y^* \vdash Y^* \vdash \exists x\alpha(x) \in Y^*$	da 1)-7)
9) $\alpha(c_j^G) \in Y^* \; seq \; Y^* \vdash \exists x\alpha(x) \in Y^*$	da 8) per MMD

c)

1) $\exists x\alpha(x) \in Y^* \; seq \; Y^* \vdash \alpha(c_j^G)$	da *a)*
2) $\alpha(c_j^G) \in Y^* \; seq \; Y^* \vdash \exists x\alpha(x) \in Y^*$	da *b)*
3) $\exists x\alpha(x) \in Y^* \; aeq \; \alpha(c_j^G) \in Y^*$	da 1), 2) per def. '*aeq*'

A questo punto possiamo dimostrare un'importante proprietà di Y^* rispetto all'uso dell'operatore di stabilità al primo ordine:

XVI) $\forall x\big(\alpha(x)\big)^{\circ} \in Y^{*}\ seq\ \Big[\big(\forall x\alpha(x)\big)^{\circ} \in Y\ et\ \big(\exists x\alpha(x)\big)^{\circ} \in Y^{*}\Big]$

Dimostrazione

1) $\forall x\big(\alpha(x)\big)^{\circ} \in Y^{*}$	Ip. 1
2) $\forall x\big(\alpha(x)\big)^{\circ} \in Y^{*}\ seq\ Y^{*} \vdash \forall x\big(\alpha(x)\big)^{\circ}$	da 1) per I *a)*
3) $Y^{*} \vdash \forall x\big(\alpha(x)\big)^{\circ}$	da 1), 2), per MMP
4) $Y^{*} \vdash \forall x\big(\alpha(x)\big)^{\circ} \to \big(\forall x\alpha(x)\big)^{\circ}$	$Ass. 15$
5) $Y^{*} \vdash \big(\forall x\alpha(x)\big)^{\circ}$	da 3), 4) per MP
6) $Y^{*} \vdash \big(\forall x\alpha(x)\big)^{\circ} \to \big(\exists x\alpha(x)\big)^{\circ}$	$Ass. 16$
7) $Y^{*} \vdash \big(\exists x\alpha(x)\big)^{\circ}$	da 5), 6) per MP
8) $Y^{*} \vdash \big(\forall x\alpha(x)\big)^{\circ}\ seq\ \big(\forall x\alpha(x)\big)^{\circ} \in Y^{*}$	da 5) per I *b)*
9) $\big(\forall x\alpha(x)\big)^{\circ} \in Y^{*}$	da 5), 8) per MMP
10) $Y^{*} \vdash \big(\exists x\alpha(x)\big)^{\circ}\ seq\ \big(\exists x\alpha(x)\big)^{\circ} \in Y^{*}$	da 7) per I *b)*
11) $\big(\exists x\alpha(x)\big)^{\circ} \in Y^{*}$	da 7), 10) per MMP
12) $\Big[\big(\forall x\alpha(x)\big)^{\circ} \in Y^{*}\ et\ \big(\exists x\alpha(x)\big)^{\circ} \in Y^{*}\Big]$	da 9), 11) per I-$\wedge$
13) $\forall x\big(\alpha(x)\big)^{\circ} \in Y^{*} \vdash \Big[\big(\forall x\alpha(x)\big)^{\circ} \in Y^{*}\ et\ \big(\exists x\alpha(x)\big)^{\circ} \in Y^{*}\Big]$	da 1)-12)
14) $\forall x\big(\alpha(x)\big)^{\circ} \in Y^{*}\ seq\ \Big[\big(\forall x\alpha(x)\big)^{\circ} \in Y^{*}\ et\ \big(\exists x\alpha(x)\big)^{\circ} \in Y^{*}\Big]$	da 13) per MMD

Mostrate le proprietà di completezza dell'insieme Y^{*} rispetto alle costanti logiche di cui dispone, possiamo passare al punto 4) e dimostrare l'esistenza del modello per Y^{*}.

4) Mostriamo ora l'esistenza del modello per X, realizzando una struttura che soddisfi l'insieme massimale Y^{*} sopra descritto. Estendendo le clausole già viste per il caso proposizionale, che qui trascureremo, diciamo $\mathfrak{I}$ modello di Y^{*}, se vengono soddisfatti i requisiti fondamentali sotto elencati:

a. consideriamo tutte le lettere proposizionali o costanti predicative occorrenti in Y^*;

b. consideriamo l'insieme Δ, contenente tutte le costanti di C_1^{*G}[121];

c. definiamo l'interpretazione $\Im$ soddisfacente l'insieme di tutte le fbff atomiche chiuse di Y^*, in modo tale che si verifichi intuitivamente quanto segue:

1. Δ sarà il nostro dominio di interpretazione;

2. $\Im(c_j) = c_j$;

3. $\Im(P_k^n) = \{\langle c_{i_1}, \dots, c_{i_n}\rangle \in \Delta^n | P_k^n\langle c_{i_1}, \dots, c_{i_n}\rangle \in Y^*\}$

4. $(Mod\ \Im\ \alpha)\ aeq\ (\alpha \in Y^*)$

I punti 1., 2. e 3. fungono da preliminari alla dimostrazione del punto 4., mediante il quale è possibile provare la completezza semantica forte di C_1^*. Commenteremo allora brevemente il loro ruolo e la loro importanza nel corso della successiva dimostrazione:

- al punto 1. si fa riferimento al dominio di interpretazione, costituito dalle vecchie e dalle nuove costanti individuali, all'interno del quale saranno interpretate le variabili delle formule atomiche;

- al punto 2. si indica il modo in cui saranno interpretate le costanti: ciascuna costante sarà interpretata su stessa;

- al punto 3. si indica come ciascuna costante predicativa sia valutata su di una sequenza di costanti di lunghezza pari all'arietà della costante predicativa stessa, cosicché la corrispondente relazione sia in Y^*;

[121] L'insieme Δ sarà allora così definibile: $\Delta = G \cup G_1^*$, dove G indica l'insieme delle nuove costanti aggiunte in base all'arricchimento operato al punto 1) della dimostrazione di completezza, mentre G_1^* indica l'insieme delle vecchie costanti in C_1^*.

- al punto 4. infine dimostriamo l'esistenza del modello per l'insieme di partenza X, ossia proviamo che: $non\, Triv\, X\, seq\, Sod\, X$. Sarà sufficiente per i nostri scopi ragionare su Y^*, dato che $X \subseteq Y^*$ e provare per induzione sulla complessità ad esempio di una data formula α, che se α è una fbf atomica della forma '$P_k^n(c_{i_1}, \dots, c_{i_n})$', allora: $Mod\, \Im\, \alpha\, aeq\, \alpha \in Y^*$.

Metalemma 8.4 $(om\, \alpha)\big((Mod\, \Im\, \alpha)\; aeq\; (\alpha \in Y^*)\big)$

Dimostrazione

i) Sia $\alpha\; aeq\; \forall x \beta(x)$. Allora :

1) $Mod\, \Im\, \alpha\; aeq\; Mod\, \Im\, \forall x \beta(x)$
2) $Mod\, \Im\, \alpha\, aeq\, \left(om\, c_j^G\right)\left(Mod\, \Im\, \beta\left(c_j^G\right)\right)$
3) $Mod\, \Im\, \alpha\, aeq\, \left(om\, c_j^G\right)\left(\overline{\Im}\left(\beta\left(c_j^G\right)\right) = 1\right)$
4) $Mod\, \Im\, \alpha\, aeq\, \left(om\, c_j^G\right)\left(\left(\beta\left(c_j^G\right) \in Y^*\right)\right.$
5) $Mod\, \Im\, \alpha\, aeq\, \forall x \beta(x) \in Y^*$
6) $Mod\, \Im\, \alpha\, aeq\, \alpha \in Y^*$

j) Sia $\alpha\, aeq\, \exists x \beta(x)$. Allora :

1) $Mod\, \Im\, \alpha\, aeq\, Mod\, \Im\, \exists x \beta(x)$
2) $Mod\, \Im\, \alpha\, aeq\, \left(ex\, c_j^G\right)\left(Mod\, \Im\, \beta\left(c_{i_j}\right)\right)$
3) $Mod\, \Im\, \alpha\, aeq\, \left(ex\, c_j^G\right)\left(\overline{\Im}\left(\beta\left(c_{i_j}\right)\right) = 1\right)$
4) $Mod\, \Im\, \alpha\, aeq\, \left(ex\, c_j^G\right)\left(\beta\left(c_{i_j}\right) \in Y^*\right)$
5) $Mod\, \Im\, \alpha\, aeq\, \exists x \beta(x) \in Y^*$
6) $Mod\, \Im\, \alpha\, aeq\, \alpha \in Y^*$

k) Sia $\alpha\, aeq\, \forall x\big(\alpha(x)\big)^{\circ}\, et\, \alpha \in Y^*$. Allora $\big(\forall x \alpha(x)\big)^{\circ} \in Y^*\, et\, \big(\exists x \alpha(x)\big)^{\circ} \in Y^*$. Così:

1) $Mod\ \mathfrak{I}\ \alpha\ aeq\ \forall x(\alpha(x))^{\circ}$

2) $Mod\ \mathfrak{I}\ \forall x(\alpha(x))^{\circ}\ seq\ (om\ c_j^G)\left(Mod\ \mathfrak{I}\ \beta(c_j^G)^{\circ}\right)$

3) $Mod\ \mathfrak{I}\ \forall x(\alpha(x))^{\circ}\ seq\ (om\ c_j^G)\left(\overline{\mathfrak{I}}\left(\beta(c_j^G)^{\circ}\right) = 1\right)$

4) $Mod\ \mathfrak{I}\ \forall x(\alpha(x))^{\circ}\ seq\ \left(\overline{\mathfrak{I}}\left(\forall c_j^G \beta(c_j^G)^{\circ}\right) = 1\right)$

5) $Mod\ \mathfrak{I}\ \forall x(\alpha(x))^{\circ}\ seq\ \left(\forall c_j^G \beta(c_j^G)\right)^{\circ} \in Y^*$

6) $Mod\ \mathfrak{I}\ \forall x(\alpha(x))^{\circ}\ seq\ \left(\exists c_j^G \beta(c_j^G)\right)^{\circ} \in Y^*$

7) $Mod\ \mathfrak{I}\ \forall x(\alpha(x))^{\circ}\ aeq\ \alpha \in Y^*$

8) $\alpha \in Y^*\ seq\ \left[\left(\forall c_j^G \beta(c_j^G)\right)^{\circ} \in Y^*\ et\ \left(\exists c_j^G \beta(c_j^G)\right)^{\circ} \in Y^*\right]$

l) $a)\ et\ b)\ et\ c)\ et\ d)\ et\ e)\ et\ f)\ et\ g)\ et\ h)\ et\ i)\ et\ j)\ et\ k)$

La dimostrazione di completezza è a questo punto conclusa nella sua sostanza. Per rendere tuttavia evidente il risultato, proveremo anche in questo caso, come già fatto per la dimostrazione di completezza del calcolo proposizionale, i seguenti due metateoremi, che sanciscono l'interdipendenza tra il teorema di esistenza del modello e quello di completezza nel senso Gödel.
Proviamo dunque il seguente metateorema per C_1^*:

Metateorema 8.4 $(non\ Triv\ X\ seq\ Sod\ X)\ seq\ (X \vDash \alpha\ seq\ X \vdash \alpha)$

Dimostrazione

1) $(non\ Triv\ X\ seq\ Sod\ X)$	Ip. 1
2) $X \vDash \alpha$	Ip. 2
3) $non\ X \vdash \alpha$	Ip. 3
4) $non\ Triv\ X \cup \{\neg^* \alpha\}$	estens. X
5) $X \vdash \neg^* \alpha$	per I *a)*
6) $X \vdash \neg^* \alpha\ seq\ X \vDash \neg^* \alpha$	per corrett. forte di C_1^*
7) $X \vDash \neg^* \alpha$	da 5), 6) per MMP
8) $X \vDash \alpha\ et\ X \vDash \neg^* \alpha$	da 2), 7) per I-$\wedge$
9) $non\ non\ X \vdash \alpha$	da 1)-8) per RAA
10) $X \vdash \alpha$	da 9) per DN

11) $(non\ Triv\ X\ seq\ Sod\ X), X \vDash \alpha \vdash X \vdash \alpha$ — da 1)-10)
12) $(non\ Triv\ X\ seq\ Sod\ X), X \vDash \alpha\, seq\ X \vdash \alpha$ — da 11) per MMD
13) $(non\ Triv\ X\ seq\ Sod\ X)\ seq\ (X \vDash \alpha\, seq\ X \vdash \alpha)$ — da 12) per MMD

Infine otteniamo la dimostrazione di completezza semantica forte in base al seguente metateorema:

Metateorema 8.5 $[(X \vDash \alpha)\ seq\ (X \vdash \alpha)]$

Dimostrazione

1) $(non\ Triv\ \mathrm{X}\ seq\ Sod\ \mathrm{X})\ seq\ (\mathrm{X} \vDash \alpha\ seq\ \mathrm{X} \vdash \alpha)$ — $metateor.$ 8.4
2) $non\ Triv\ \mathrm{X}\ seq\ Sod\ \mathrm{X}$ — $metateor.$ 8.3
3) $\mathrm{X} \vDash \alpha\ seq\ \mathrm{X} \vdash \alpha$ — da 1), 2) per MMP

IX. *L'indecidibilità di C_1^**

1. Introduzione

Concluderemo la trattazione della parte logica del nostro sistema formale e dunque del calcolo predicativo al primo ordine C_1^*, discutendo brevemente la questione della sua decidibilità e di alcune proposizioni in esso indimostrabili. I due problemi, benché indipendenti l'uno dall'altro nella sostanza, si richiamano per quel che riguarda taluni aspetti pratici. Cominceremo col discutere in questo capitolo l'indecidibilità della logica finora trattata.

Sin qui non abbiamo considerato gli assiomi propri del sistema formale nella sua interezza e dunque l'incognita relativa alla loro potenza teorica non incide ancora a questo livello di analisi.

Esaminando la parte logica del sistema formale che qui intendiamo trattare, ci troviamo di fronte ad un calcolo puro, linguisticamente invariante: ciò significa che quanto sinora esposto risulta essere una base estremamente generale, utilizzabile senza perdita di generalità anche per altre teorie, con altri assiomi propri. In tal senso si ha un'invarianza linguistica, dal momento che il linguaggio fin qui introdotto e assiomatizzato non risulta essere specifico di alcun sistema particolare e non preclude dunque nessuna ulteriore relativizzazione ad uno specifico contesto formale. Il materiale linguistico e assiomatico precedentemente trattato risulta essere parte integrante di quella quota minima mediante la quale si dispiega l'apparato puramente logico.

Il problema della decidibilità di una teoria consiste nel riuscire a stabilire se l'insieme dei numeri di Gödel dei suoi teoremi è un insieme "ricorsivo". Ciò significa dimostrare che l'insieme dei numeri di Gödel dei suoi teoremi, così come l'insieme dei numeri di Gödel dei "non-teoremi" sono entrambi "ricorsivamente enumerabili"[122]. La congiunzione di questi due risultati metateorici consente di stabilire la ricorsività dell'insieme dei gödeliani dei teoremi, ossia la sua "decidibilità". Ottenuta infatti una risposta positiva per i due

[122] Un insieme si dice "ricorsivamente enumerabile" se e solo se esso è vuoto oppure se esso è il *range* o "codominio" di una funzione parziale ricorsiva (intuitivamente ciò significa che esiste una procedura «effettiva» per listare i suoi membri). Si dice invece "ricorsivo" un insieme se e solo se esso l'insieme ed il suo complemento sono entrambi ricorsivamente enumerabili. Si indica talvolta il concetto di ricorsiva enumerabilità mediante la sigla 'r.e.'. Vale inoltre che un insieme è ricorsivo se la sua funzione caratteristica è ricorsiva. Cfr. Rosers, H., Jr., *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill, New Yrok, 1967, pp. 57-8

insiemi, tra loro complementari, è possibile sempre stilare due liste, alle quali ascrivere quelle proposizioni che sono dimostrabili o che non sono tali, ottenendo un controllo completo per ogni enunciato della teoria.

Tornando al calcolo C_1^*, abbiamo visto come esso sia semanticamente completo, fatto questo che garantisce una perfetta simmetria tra il concetto di dimostrabilità e quello di validità. L'importanza del metateorema di completezza semantica per C_1^* non si esaurisce tuttavia in ciò: infatti, in relazione al problema affrontato in questo capitolo, esso consente di stabilire che l'insieme dei numeri di Gödel dei teoremi (cioè delle formule valide del calolo) è ricorsivamente enumerabile. Così una porzione del problema sopra introdotto ammette una risposta positiva. In particolare sappiamo a questo punto che è possibile costruire una lista (un insieme), nella quale inserire il numero di Gödel di quegli enunciati, che sono anche teoremi nel calcolo C_1^* (per i quali cioè esiste il numero di Gödel di una sequenza dimostrativa, la cui ultima espressione è la formula considerata).

Resta tuttavia da decidere se esiste un qualche metodo, una procedura ricorsiva per poter stabilire se l'insieme dei non-teoremi (cioè delle formule non-valide) sia anch'esso ricorsivamente enumerabile.

In linea teorica il problema della decidibilità di C_1^* è riconducibile a quello che fu affrontato e risolto negativamente da Church per l'*engere Funktionenkalkül* classico, al quale qui ci riferiremo indicandolo con 'C_0^*'.

Come vedremo, il calcolo C_1^* risulterà indecidibile. Ciò significa che il passaggio alla logica dei predicati, operato mediante l'estensione linguistica ed assiomatica esaminata nei capitoli precedenti, è tutt'altro che banale e, così come accade per il caso della logica classica, anche qui si verificherà la perdita di alcune utili metaproprietà, tra cui appunto quella della decidibilità.

2. *L'insieme delle formule non-valide di $\boldsymbol{C_1^*}$ non è r.e.*

Nel procedere alla dimostrazione di indecidibilità per C_1^*, sarà opportuno richiamare alcuni elementi a proposito di quanto dimostrato da Gödel nel 1931[123] e da Church nel 1936[124] per quei sistemi formali "sufficientemente potenti"[125].

Richiamiamo innanzitutto alcuni fatti, concernenti i noti risultati del logico austriaco. Consideriamo le seguenti condizioni fondamentali[126], soddisfatte da un certo sistema formale, che denomineremo '$\boldsymbol{K}$'[127]:

1) $\mathcal{L}(\boldsymbol{K}) = \mathcal{L}(\boldsymbol{PA}^{128})$;

2) l'insieme degli assiomi di $\boldsymbol{K}$ è ricorsivo;

3) $\vdash_{\boldsymbol{K}} \neg \mathrm{A}_1^2(f_1^0, f_1^1(f_1^0))$;

4) ogni funzione ricorsiva è rappresentabile in $\boldsymbol{K}$.

A partire da queste quattro condizioni generali per sistemi formali del tipo $\boldsymbol{K}$, Gödel aveva dimostrato che non era possibile provare alcune metaproprietà

---

[123] Gödel, K., *Über formal unentscheidbare Sätze der „Principia Mathematica" und verwandter Systeme I*, «Monatshefte für Mathematik und Physik», vol. 38, 1931, pp. 173-98

[124] Church, A., *An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory*, «American Journal of Mathematics», vol. 58, n. 2, 1936, pp. 345-63

[125] Una teoria si dice "sufficientemente potente", se essa contiene «una formalizzazione almeno dell'aritmetica». Cfr. Dalla Chiara, M. L., *Modelli sintattici e semantici delle teorie elementari*, *op. cit.*, p. 18

[126] Cfr. Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, *op. cit.*, p. 206

[127] *Ibidem*, p. 170

[128] Con '$\boldsymbol{PA}$' intendiamo l'aritmetica di Peano al primo ordine. In tal caso il linguaggio conterrà un predicato a due posti per l'eguaglianza, con relativi assiomi, e tre funzioni. La sua base assiomatica è così descrivibile:

1) $(x_1 = x_2) \rightarrow \big((x_1 = x_3) \rightarrow (x_2 = x_3)\big)$
2) $(x_1 = x_2) \rightarrow (f_0^1(x_1) = f_0^1(x_2))$
3) $\neg \mathrm{A}_1^2(f_1^0, f_0^1(x_1))$
4) $(f_0^1(x_1) = f_0^1(x_2)) \rightarrow (x_1 = x_2)$
5) $\mathrm{A}_1^2(f_1^2(x_1, f_1^0), x_1)$
6) $\mathrm{A}_1^2\left(f_1^2\big(x_1, f_1^1(x_2)\big), f_1^1\big(f_1^2(x_1, x_2)\big)\right)$
7) $\mathrm{A}_1^2(f_2^2(x_1, f_1^0), f_1^0)$
8) $\mathrm{A}_1^2\left(f_2^2\big(x_1, f_1^1(x_2)\big), \big(f_1^2\big(f_2^2(x_1, x_2)\big), x_1\big)\right)$
9) $\mathrm{A}(f_1^0) \rightarrow \left(\forall x\big(\mathrm{A}(x) \rightarrow \mathrm{A}(f_1^0)\big) \rightarrow \big(\forall x \mathrm{A}(x)\big)\right)$, per ogni fbf $\alpha(x)$

fondamentali, quali la "completezza sintattica" o la coerenza[129] attraverso metodi, che rispondessero ai criteri indicati da Hilbert[130]. In aggiunta a questi risultati, Church aveva poi dimostrato che un sistema formale come ***K*** era anche indecidibile[131], cioè che l'insieme dei non-teoremi non era ricorsivamente enumerabile[132] e che dunque l'insieme dei teoremi di ***K*** non era nel suo complesso ricorsivo[133].

Quest'ultimo risultato costituì un rafforzamento del primo teorema di incompletezza dimostrato da Gödel per sistemi formali come ***K***, in quanto è noto che la completezza sintattica di un sistema implica la sua decidibilità. La contrapposta di tale implicazione afferma allora che l'indecidibilità di un sistema formale implica la sua incompletezza sintattica. Avendo Church dimostrato l'antecedente di questa seconda implicazione, ne poté dedurre implicitamente l'incompletezza sintattica, rafforzando così il risultato limitativo del logico austriaco ed esibendo un pieno accordo tra i due metateoremi.

Church estese poi il proprio risultato con una breve nota[134], strettamente legata al lavoro presentato a proposito dell'indecidibilità di sistemi formali come ***K***, in cui si dimostrava come il calcolo logico al primo ordine puro fosse esso stesso indecidibile. Fatto questo di non immediata evidenza, dato che la parte logica di un qualunque sistema formale è per definizione priva degli assiomi propri e

---

[129] In letteratura questi risultati sono noti rispettivamente come "primo" e "secondo teorema di Gödel". Essi furono dimostrati in: Gödel, K., *Über formal unentscheidbare Sätze der „Principia Mathematica" und verwandter Systeme I*, *op. cit.*

[130] Cfr. Bellotti, L., Moriconi, E., Tesconi, L., *Computabilità*, Carocci, Roma, 2001, pp. 175-6. Mariani, M., Moriconi, E., *Coerenza e completezza delle teorie elementari*, ETS, Pisa, 1984, pp. 3-19

[131] In effetti come è stato chiarito successivamente da Tarski, Robinson e Mostowski un sistema formale come ***K*** è indecidibile in maniera "essenziale", cioè a dire non esiste alcuna sopratteoria ottenuta come estensione propria di ***K*** mediante l'ampliamento dell'apparato assiomatico, che consenta di ottenere la decidibilità del sistema formale in questione. Cfr. Tarski, A., Mostowski, A., Robinson, R., *Undecidable Theories*, North Holland, Amsterdam, 1953

[132] Ciò è dovuto fondamentalmente al fatto che l'insieme dei teoremi coincide con l'insieme delle formule valide, cioè quell'insieme costituito dalle proposizioni sempre vere. Tuttavia nel caso delle proposizioni non-valide la questione è più complessa: infatti, come ha fatto notare Rosser, fra le proposizioni false vi sono quelle sempre false, su cui è possibile determinare un controllo in quanto risulteranno sempre vere e dunque dimostrabili le rispettive negazioni. Tuttavia vi sono proposizioni non sempre false e dunque vere per qualche realizzazione e false per altre, su cui non è possibile in alcun modo determinare un controllo di tipo meccanico. Fra questi enunciati si annidano le proposizioni indecidibili. Cfr. Rosser, J. B., *An Informal Exposition of Proofs of Gödel's Theorems and Church's Theorem*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 4, n. 2, 1939, pp. 53-60

[133] La ricorsività di un insieme equivale alla sua decidibilità.

[134] Church, A., *A Note on the Entscheidungsproblem*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 1, n. 1, 1936, pp. 40-1

pertanto non soggetta necessariamente alle restrizioni metateoriche verificate per un certo sistema formale, dotato di certi postulati[135].

Esistono inoltre porzioni della stessa logica al primo ordine che sono decidibili, come la logica al primo ordine con soli predicati[136] (cioè con relazioni di arietà 1). Tuttavia è stato dimostrato che è sufficiente passare dalla logica dei predicati monoargomentali al primo ordine a quella delle relazioni biargomentali (cioè con sole relazioni di arietà 2) per perdere questa rilevante metaproprietà[137].

La traccia intuitiva della dimostrazione di Church consiste nel fare un ragionamento di questo tipo: relativizzando il linguaggio della logica classica al primo ordine senza identità a quello di $\boldsymbol{PA}$, si introducono una costante individuale ('f_1^0'), un simbolo per l'identità (logica) '=' e una lista di tre funzioni ricorsive primitive '$f_1^1(x)$', '$f_1^2(x,y)$', '$f_2^2(x,y)$'. Si può estendere poi il numero di assiomi di C_0^* in modo tale che esso includa due assiomi logici per il simbolo di identità, ossia:

1) $(x = x)$[138]

2) $(x = y) \rightarrow [\alpha(x,x) \rightarrow \alpha(x,y)]$[139]

più le eventuali equazioni ricorsive, che regolano le tre funzioni principali. In tal caso si può notare come il calcolo classico al primo ordine con identità ottenuto grazie agli assiomi 1) e 2) sopra esaminati sia indecidibile, in quanto sarebbe possibile scaricare le assunzioni costituite dagli assiomi propri aggiunti e verificare che la decidibilità di una teoria siffatta, implicante tutti i limiti osservati per un sistema del tipo $\boldsymbol{K}$, risulterebbe a sua volta scaricata sulla decidibilità della

[135] Se si considera ad esempio un sistema formale avente gli stessi assiomi di $\boldsymbol{PA}$ meno gli assiomi per la ricorsione della funzione (intesa essere) di moltiplicazione, allora il sistema così ottenuto gode delle buone proprietà metateoriche di cui si è sopra discusso. Presburger ha infatti dimostrato che un sistema in grado di formalizzare l'aritmetica di $\boldsymbol{Z}$, limitatamente alla sola operazione somma, è sintatticamente completo, decidibile e in grado di provare la propria coerenza. Cfr. Presburger, M., *Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt*, Comptes Rendus du I congrès de Mathématiciens des Pays Slaves, Warszawa, 1929, pp. 92-101

[136] Behmann, H., *Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem*, «Mathematische Annalen», vol. 86, 1922, pp. 163-229

[137] Kalmár, L., *Zurückführung des Entscheidungsproblem auf den Fall von Formeln mit einer einzigen, binären, Funktionsvariablen*, «Compositio Mathematica», vol. 4, 1937, pp. 137-44

[138] L'assioma 1) è noto come legge di riflessività dell'identità.

[139] L'assioma 2) è noto come principio di sostitutività. L'azione congiunta degli assiomi 1) e 2) consente di provare che la teoria, cui essi sono aggiunti, è una teoria al primo ordine con identità, potendo dimostrare le leggi di simmetria e di transitività.

logica pura con identità. Così se la logica classica al primo ordine con identità fosse decidibile, allora anche la teoria in questione dovrebbe esserlo, in contraddizione con quanto provato da Church.

Se inoltre si eliminasse il simbolo per l'identità logica con i relativi due assiomi e si aggiungesse una nuova costante predicativa biargomentale '$A_1^2(x_1, x_2)$', regolamentata da opportuni assiomi teorici, tali cioè da dimostrare che la teoria al primo ordine così ottenuta sia ancora una teoria al primo ordine con identità, allora sarebbe possibile reiterare il medesimo ragionamento sopra esposto, ottenendo l'indecidibilità anche per la logica classica al primo ordine senza identità.

Per sfruttare tale risultato in relazione ai nostri scopi, sarà sufficiente ripercorrere le tappe fondamentali della dimostrazione[140] al fine di provare che C_0^* è indecidibile ed osservare le connessioni tra C_0^* e C_1^*.

A tale scopo prenderemo in considerazione una base di aritmetica formale con un numero finito di assiomi, dal momento che $\boldsymbol{PA}$ possiede una quantità infinita numerabile di assiomi, in conseguenza del fatto che tra essi è presente uno schema, costituito dal principio di induzione al primo ordine.

Un buon candidato è costituito dall'aritmetica formale $\boldsymbol{Q}$, schizzata da Raphael Robinson nel 1950[141], che si discosta da quella individuata da Peano al primo ordine fondamentalmente (ma non solo) per l'assenza proprio del principio di induzione e dunque per una base assiomatica finita.

Quest'ultima può essere così delineata[142]:

1) $x_1 = x_1$

2) $(x_1 = x_2) \rightarrow (x_2 = x_1)$

3) $(x_1 = x_2) \rightarrow \big((x_2 = x_3) \rightarrow (x_1 = x_3)\big)$

4) $(x_1 = x_2) \rightarrow (f_1^1(x_1) = f_1^1(x_2))$

5) $(x_1 = x_2) \rightarrow \big[\big((x_1 + x_3) = (x_2 + x_3)\big) \wedge \big((x_3 + x_1) = (x_3 + x_2)\big)\big]$

[140] Cfr. Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, *op. cit.*, pp. 219-22

[141] Robinson, R., *An Essentially Undecidable Axiom System*, in Graves, L. *et alii*, (eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, vol. 1, AMS, Providence, 1952, pp. 749-50

[142] Cfr. Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, *op. cit.*, pp. 200-1. Il sistema differisce in realtà da quello originario sostanzialmente per via dell'assioma 14), che semplifica alcune dimostrazioni. Indicheremo con '$\boldsymbol{Q}^*$' la teoria che Mendelson ha così ottenuto.

6) $(x_1 = x_2) \rightarrow \left[\left((x_1 \cdot x_3) = (x_2 \cdot x_3)\right) \wedge \left((x_3 \cdot x_1) = (x_3 \cdot x_2)\right)\right]$

7) $(f_1^1(x_1) = f_1^1(x_2)) \rightarrow (x_1 = x_2)$

8) $\neg \mathrm{A}_1^2\left(f_1^0, f_1^1(x_1)\right)$

9) $\neg \mathrm{A}_1^2(x_1, f_1^0) \rightarrow \exists x_2 \mathrm{A}_1^2(x_1, f_1^1(x_2))$

10) $\mathrm{A}_1^2(f_1^2(x_1, f_1^0), x_1)$

11) $\mathrm{A}_1^2\left(f_1^2\left(x_1, f_1^1(x_2)\right), f_1^1\left(f_1^2(x_1, x_2)\right)\right)$

12) $\mathrm{A}_1^2(f_2^2(x_1, f_1^0), f_1^0)$

13) $\mathrm{A}_1^2\left(f_2^2\left(x_1, f_1^1(x_2)\right), f_1^2(f_2^2(x_1, x_2), x_1)\right)$

14) $\left[\mathrm{A}_1^2\left(x_2, f_1^2(f_2^2(x_1, x_3), x_4)\right) \wedge (x_4 \dot{<} x_1) \wedge \left(\mathrm{A}_1^2\left(x_2, f_1^2(f_2^2(x_1, x_5), x_6)\right)\right)\right] \rightarrow$
$\rightarrow \left(\mathrm{A}_1^2(x_4, x_6)\right)$

Questi quattordici assiomi costituiscono una base teorica adeguata al nostro scopo: essa è infatti una teoria al primo ordine con identità quale relazione fondamentale di tipo non-logico, come è possibile constatare dai postulati 1)-6); soprattutto essa è finitamente assiomatizzata e scritta nello stesso linguaggio di $\boldsymbol{PA}$. In base ai postulati ammessi, vale poi che tutte le funzioni ricorsive sono rappresentabili in $\boldsymbol{Q}^*$[143] e per l'assioma 8) che $\vdash_{\boldsymbol{Q}^*} \neg \mathrm{A}_1^2(f_1^0, f_1^1(f_1^0))$.

$\boldsymbol{Q}^*$ è anche una sottoteoria propria di $\boldsymbol{K}$, in quanto i suoi assiomi sono tutti teoremi di $\boldsymbol{K}$, cioè:

$$Ass(\boldsymbol{Q}^*) \dot{\subseteq} Teor(\boldsymbol{K})$$

143 Cfr. Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, *op. cit.*, pp. 201-3. Monk, D., *Mathematical Logic*, pringer, New York, 1976, p. 248

In base a quanto detto allora, risultano evidentemente applicabili anche a $\boldsymbol{Q}^*$ i risultati limitativi dimostrati da Gödel e da Church, determinando l'incompletezza sintattica nonché l'indecidibilità (essenziale) di $\boldsymbol{Q}^*$.[144]

Ciò che a noi interessa a questo punto è collegare i fatti esposti in maniera intuitiva con le seguenti importanti definizioni, che spianeranno la strada all'indecidibilità di C_1^*[145]:

Definizione 9.1 Date due teorie T e T' scritte nello stesso alfabeto, si dice che T' è un'"estensione finita" di T se e solo se esiste un insieme X di fbff e un insieme finito X' di fbff, tali che i teoremi di T sono esattamente le fbff derivabili da X, mentre i teoremi di T' sono esattamente le fbff derivabili da $[X \cup X']$.

Definizione 9.2 Due teorie T e T' si dicono "compatibili" se e solo se l'unione degli insiemi dei loro assiomi è non-triviale.

Veniamo ora ad un fondamentale metateorema:

Metateorema 9.1 Siano T e T' due teorie del primo ordine con gli stessi simboli di $\boldsymbol{Q}$. Se T' è un'estensione finita di T e se T' è ricorsivamente indecidibile, allora anche T è ricorsivamente indecidibile.

Dimostrazione[146]

Assumiamo l'ipotesi sul linguaggio di T e T' ed assumiamo ancora che T' sia indecidibile. Ora se X è un insieme di assiomi per la teoria T e $X' = (X \cup \{ax_1^*, \ldots, ax_n^*\})$ è un insieme di assiomi per T' ottenuto con un'estensione finita di X, allora, in virtù del metateorema di deduzione, una certa fbf α è

[144] La teoria originaria presentava forti limiti, che impedivano il soddisfacimento di alcune delle condizioni fondamentali date in apertura. Ad esempio Boolos ha osservato come la condizione 4) non era soddisfacibile da $\boldsymbol{Q}$ e che per provare l'incompletezza di $\boldsymbol{Q}$ era sufficiente considerare alcuni limiti strutturali della teoria, come quella concernente l'impossibilità di provare ad esempio la proprietà di commutatività della somma. Cfr. Boolos, G., *The Logic of Provability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, pp. 49-50

[145] Cfr. Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, *op. cit.*, pp. 219-222

[146] Assumendo la tesi di Church, è possibile stabilire anche l'effettiva indecidibilità poiché i due concetti di "effettiva" e "ricorsiva indecidibilità" coinciderebbero. Cfr. Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, *op. cit.*, p. 222

dimostrabile in T' se e solo se $(ax_1^* \wedge \dots \wedge ax_n^*) \rightarrow \alpha$ è un teorema di T'. Assegniamo il numero n alla fbf α, cioè $n = g(\alpha)$, e m alla fbf $(ax_1^* \wedge \dots \wedge ax_n^*) \rightarrow \alpha$, cioè $m = g\big((ax_1^* \wedge \dots \wedge ax_n^*) \rightarrow \alpha\big)$, secondo i criteri di aritmetizzazione precedentemente delineati. Se ora indichiamo con Teo l'insieme dei numeri di Gödel dei teoremi di T e con Teo' l'insieme dei numeri di Gödel dei teoremi di T', possiamo osservare che $n \in Teo'$ se e solo se $m \in Teo$. Pertanto se l'insieme Teo fosse ricorsivo, allora anche l'insieme Teo' lo sarebbe, contro l'ipotesi di ricorsiva indecidibilità della teoria T'.

In virtù del metateorema appena dimostrato, possiamo allora asserire che:

Metateorema 9.2 Una qualunque teoria T al primo ordine scritta nel linguaggio di $\boldsymbol{Q}^*$ e che risulti essere compatibile con $\boldsymbol{Q}^*$ è ricorsivamente indecidibile.

Dimostrazione

Immediata per il metateorema 9.1.

Veniamo ora al caso della logica classica al primo ordine. Cominciamo con l'osservare che se si considera un sistema di tipo classico come C_0^* e si restringe il suo linguaggio primitivo ai simboli di $\boldsymbol{Q}^*$, allora C_0^*, soddisfacendo ai requisiti sopra esposti, sarà a sua volta indecidibile. Tale fatto è di fondamentale importanza ed è diretta conseguenza dei due metateoremi sopra dimostrati.

Il sistema di logica C_0^* contiene in partenza tutte le costanti individuali, tutte le lettere funzionali e tutte le lettere predicative. È possibile ad ogni modo operare una semplificazione, mostrando che un linguaggio così espressivo non è necessario: infatti è dimostrabile che una teoria al primo ordine con identità (come nel caso di C_0^* con i simboli di $\boldsymbol{Q}^*$) ha bisogno soltanto di costanti predicative e dunque è possibile «purificare»[147] la teoria così ottenuta senza alcuna perdita nel potere dimostrativo del calcolo. Sarà sufficiente associare a costanti individuali distinte lettere predicative monadiche distinte e a lettere funzionali di arietà n lettere predicative di arietà $n + 1$ distinte, badando di assumere come nuovi assiomi le formule che li definiscono.

[147] In tal caso il calcolo al primo ordine così ottenuto conterrà soltanto lettere predicative ed è chiamato anche "calcolo puro al primo ordine".

Possiamo ora provare il risultato della nota di Church, affermando che:

Metateorema 9.3 Sia $C^*_{0_{\boldsymbol{Q}^*}}$ il calcolo predicativo classico al primo ordine scritto nell'alfabeto di $\boldsymbol{Q}^*$. Allora $C^*_{0_{\boldsymbol{Q}^*}}$ è ricorsivamente indecidibile.

Dimostrazione

Si assuma dunque per ipotesi che esista un'estensione finita compatibile di C^*_0 data da $\left(C^*_{0_{\boldsymbol{Q}}} \cup \boldsymbol{Q}^*\right) = \boldsymbol{Q}^*$. Allora segue per il metateorema 9.2 che $C^*_{0_{\boldsymbol{Q}^*}}$ è effettivamente indecidibile.

Sfruttando il ragionamento esposto nel metateorema 9.3, possiamo ora avvicinarci più concretamente al risultato analogo a quello di Church per il caso costituito dal calcolo C^*_1, osservando il seguente:

Metateorema 9.4 C^*_0 è ricorsivamente indecidibile.

Dimostrazione[148]

Sia α una certa fbf di $C^*_{0_{\boldsymbol{Q}^*}}$. Allora, per il teorema di completezza di Gödel, α è dimostrabile in $C^*_{0_{\boldsymbol{Q}^*}}$ se e solo se α è valida e α è dimostrabile in C^*_0 se e solo se α è logicamente valida. Da ciò si deduce che $\vdash_{C^*_{0_{\boldsymbol{Q}^*}}} \alpha$ se e solo se $\vdash_{C^*_0} \alpha$. Ora l'insieme dei numeri di Gödel delle fbff di $C^*_{0_{\boldsymbol{Q}^*}}$ è ricorsivo ed è possibile definire l'insieme dei numeri di Gödel dei teoremi di $C^*_{0_{\boldsymbol{Q}^*}}$ come l'intersezione tra l'insieme dei numeri di Gödel dei teoremi di C^*_0 e quello dei gödeliani delle fbff di $C^*_{0_{\boldsymbol{Q}^*}}$, ossia $T_{C^*_{0_{\boldsymbol{Q}^*}}} = \left[T_{C^*_0} \cap Fml_{C^*_{0_{\boldsymbol{Q}^*}}}\right]$. A questo punto, poiché l'intersezione di due insiemi ricorsivi è essa stessa ricorsiva, se $T_{C^*_0}$ fosse ricorsivo, allora anche $T_{C^*_{0_{\boldsymbol{Q}^*}}}$ sarebbe ricorsivo e con ciò decidibile, in contraddizione col metateorema 9.3.

148 Cfr. Mendelson, E., *Intrduction to Mathematical Logic*, *op. cit.*, p. 222

La dimostrazione del metateorema 9.4 è fondamentale per poter sancire l'indecidibilità anche di C_1^*.

Sappiamo infatti che è possibile «simulare» all'interno dello stesso calcolo predicativo paraconsistente il comportamento delle formule classiche, lavorando sotto l'ipotesi di stabilità per le componenti quantificazionalmente prime di una certa formula ben formata α e per tutte quelle assunzioni da cui dipende la deduzione di α. Tenendo presente tale condizione preliminare, è possibile definire una funzione '$h: Fml_{C_0^*} \rightarrow Fml_{C_1^*}$', che consente una «traduzione» delle formule classiche all'interno di C_1^*:

$$h(\alpha) = \begin{cases} \alpha, se\ \alpha\, era\ una\ fbf\ atomica \\ \neg^* \alpha, se\ \alpha\, era\ una\ fbf\ negata \\ h(\beta) * h(\gamma), se\ \alpha\, era\ una\ fbf\ molecolare, dove\ * \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\} \\ h\big(\forall x \alpha(x)\big), se\ \alpha\, era\ una\ fbf\ universale\ al\ primo\ ordine \\ h\big(\exists x \alpha(x)\big), se\ \alpha\, era\ una\ fbf\ esistenziale\ al\ primo\ ordine \end{cases}$$

La dimostrazione di indecidibilità di C_1^* è allora derivabile in base al fatto che per C_1^* è possibile ripetere il medesimo ragionamento fatto per il caso classico:

Metateorema 9.5 C_1^* è ricorsivamente indecidibile.

Dimostrazione

Per il metateorema 9.4 sappiamo che l'insieme dei numeri di Gödel dei teoremi di C_0^* non è ricorsivo. Ammettiamo che l'insieme dei numeri di Gödel dei teoremi di C_1^* sia decidibile, contrariamente a quanto accade per il caso classico. Allora se ciò fosse vero, in base alle h-trasformate sopra definite, dovrebbe essere decidibile anche l'insieme $h\big(T_{C_0^*}\big)$ in $Fml_{C_1^*}$. Ma ciò sarebbe in contraddizione con quanto affermato nel metateorema 9.4.

X. Proposizioni inderivabili in C_1^*

1. Preliminari

Veniamo ora al secondo dei due problemi con cui intendiamo chiudere questa panoramica generale sul calcolo C_1^*. Nel capitolo IX abbiamo visto che C_1^* è ricorsivamente indecidibile e che dunque esistono proposizioni per le quali non è possibile stabilire meccanicamente se esse siano oppure no dei teoremi di C_1^*. Ciò significa in particolare che esisteranno proposizioni α per le quali, senza specificare assiomi propri di alcuna teoria, non sarà possibile dedurre né α né $\neg\alpha$.

Tra le proposizioni appartenenti a questo tipo di enunciati, vi saranno le relazioni di equivalenza logica di cui si è discusso nel paragrafo 7.9.

I quattro teoremi dimostrati nel paragrafo 7.10 palesano come certe connessioni logiche, comunemente accettate in un contesto di tipo classico, valgano in C_1^* solo sotto l'ipotesi di stabilità (o coerenza) di una certa formula $\alpha(x)$.

Dimostreremo ora che le quattro proposizioni considerate nel paragrafo 7.9, cioè a dire i teoremi 7.20-7.23, scaricate dalla rispettiva ipotesi di stabilità, non sono valide. A tal fine ci avvarremo del metodo illustrato da Hilbert, Ackermann e Bernays fra il 1928[149] e il 1934[150] e ripreso da Kleene nel 1952[151].

Il metodo che qui esporremo consiste nel mostrare che esiste un dominio finito di oggetti, all'interno del quale certe formule non risultano soddisfacibili. Ciò significa che, relativizzando le variabili presenti in alcune formule ad un certo dominio finito di oggetti, quelle formule risulteranno false per quell'interpretazione e ciò sarà sufficiente a mostrare che esse non sono dimostrabili in C_1^* a meno dell'ipotesi di coerenza.

Per procedere alle dimostrazioni di indipendenza, sarà allora opportuno discutere brevemente dei modelli e dei domini di interpretazione di cui questi saranno dotati. In particolare risulterà rilevante per il nostro caso riflettere intorno alla cardinalità di certe collezioni.

---

[149] Hilbert, D., Ackermann, W., *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, Berlin, 1928; trad. ingl., *Principles of Mathematical Logic*, Chelsea Publishing, New York, 1950, pp. 87-95

[150] Hilbert, D., Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik*, *op. cit.*, pp. 117-23

[151] Kleene, S., *Introduction to Metamathematics*, *op. cit.*, pp. 168-80

La logica paraconsistente C_1^* ci sembra condividere, in linea generale, il medesimo «difetto»[152] che caratterizza anche la logica classica. A differenza infatti del calcolo proposizionale, nel contesto predicativo gioca un ruolo importante il dominio di interpretazione, che non può essere vuoto. Tale fatto costituisce una peculiarità molto forte e determina uno scarto essenziale tra i due livelli di analisi logica, quello puramente proposizionale e quello predicativo.

Occorre osservare che di norma una logica non dovrebbe dipendere, diciamo così, né dalla natura degli oggetti considerati né dalla cardinalità del dominio scelto. Tuttavia è risaputo sin dagli inizi del Ventesimo secolo che domini di cardinalità nulla (cioè domini 'Δ', dove $|\Delta| = 0$) non soddisfano assiomi come quelli esaminati a proposito di C_1^*, giacché da essi è sempre deducibile l'esistenza di almeno un oggetto.

Dunque un primo elemento da valutare sarà la necessità di considerare universi di discorso, in cui il dominio di riferimento sia non-vuoto (ossia: $|\Delta| \geq 1$). Superato tale ostacolo, sarà possibile ristabilire la consueta prassi, giacché il vero discrimine esistente fra i comuni calcoli predicativi e quelli "inclusivi" risiede nella capacità o meno di accettare domini di riferimento non-vuoti. Una volta che saranno isolati tali contesti, il numero di oggetti presenti nel dominio di interpretazione delle variabili non giocherà più un ruolo importante nel soddisfacimento delle espressioni considerate: infatti queste ultime, se dimostrabili, saranno anche vere in qualsiasi dominio considerato, finito o infinito.

In tal senso è possibile considerare intuitivamente alcuni elementi essenziali al raggiungimento di questo obiettivo. Il calcolo logico al primo ordine è uno strumento deduttivo di grande efficacia, dotato di un potere espressivo già molto avanzato rispetto al calcolo proposizionale. Sarebbe pertanto ingenuo attendersi un accostamento del calcolo dei predicati al primo ordine a quello proposizionale in termini di proprietà metateoriche. Si è infatti dimostrato che il calcolo proposizionale gode di buone proprietà, cioè a dire esso è corretto (in senso debole e in senso forte), completo semanticamente (in senso debole e in senso

[152] Russell per primo osservò in una celebre nota che «The primitive propositions in *Principia Mathematica* are such as to allow the inference that at least one individual exists. But I now view this as a defect in logical purity». Infatti «We are left to the empirical observation to determinate whether there are as many as n individuals in the world. Among the possible worlds […] there will be worlds having one, two, three, … individuals. There does not even seem any logical necessity why there should be even one individual – why, in fact, there should be any world at all». Scrive ancora Russell: «Logical propositions are such as can be known *a priori*, without study of the actual world. […] This is a characteristic, not of logical propositions in themselves, but of the way in which we know them». Il problema che dunque ci si trova ad affrontare è che «[…] a proposition asserting existence […] would therefore always be false if no universe existed». Cfr. Russell, B., *Introduction to Mathematical Philosophy*, Allen&Unwin-MacMillan, London, 1919; 1920^2, pp. 203-4

forte), nonché decidibile. Tali metaproprietà non sono attribuibili *in toto* al calcolo predicativo, giacché l'estensione del calcolo proposizionale ottenuta mediante l'ampliamento linguistico-assiomatico precedentemente descritto non è affatto banale. Esso accresce il potere espressivo in modo sensibile e a tale potere corrisponde l'inevitabile fallimento concernente la decidibilità del calcolo, cioè a dire l'impossibilità di trovare un metodo generale, ricorsivo mediante cui sapere se una data formula sia un teorema oppure no. Tale circostanza stride evidentemente con il caso proposizionale dove, mediante la costruzione delle quasi-matrici, era invece possibile verificare sistematicamente se una data formula era oppure no un teorema di quel calcolo.

È tuttavia possibile isolare quei casi rispetto a cui il calcolo predicativo torna ad assumere, per così dire, lineamenti di tipo logico-proposizionale.

Se si esaminano infatti le due funzioni logiche caratteristiche del calcolo al primo ordine, ossia quella che esprime la quantificazione esistenziale e quella che esprime la quanificazione universale, e le si interpreta all'interno di domini cardinalmente finiti, allora esse tendono ad identificarsi con le funzioni logiche di cui rappresentano una naturale estensione a contesti transfiniti, cioè a dire '$\wedge$' e '$\vee$'.

Così:

1) se un'espressione del tipo '$\forall x\alpha(x)$' viene interpretata su di un dominio Δ, tale che $|\Delta| < \aleph_0$, allora la formula in questione è sinonimo di $\alpha(\mathbf{1})\wedge\alpha(\mathbf{2})\wedge \ldots \wedge\alpha(\boldsymbol{n})$, dove "$\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{n}$" sono gli oggetti in numero finito, presenti nel dominio di interpretazione Δ;

2) se un'espressione del tipo '$\exists x\alpha(x)$' viene interpretata su di un dominio Δ, tale che $|\Delta| < \aleph_0$, allora la formula in questione è sinonimo di $\alpha(\mathbf{1})\vee\alpha(\mathbf{2})\vee \ldots \vee\alpha(\boldsymbol{n})$, dove "$\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{n}$" sono gli oggetti in numero finito, presenti nel dominio di interpretazione Δ.

La differenza sostanziale, che intercorre fra i due tipi di funzione logica, risiede allora nella possibilità di considerare casi più complessi, in cui – come accennato – $|\Delta| \geq \aleph_0$. Questo caso costituisce uno scarto concettuale importante fra i due livelli di analisi logica, poiché esso non può essere trattato mediante l'impiego della semplice logica proposizionale.

Un primo punto da discutere allora è – come detto – quello riguardante la cardinalità dei domini di interpretazione per la logica dei predicati. Non è possibile infatti caratterizzare al primo ordine la grandezza di tali collezioni e ciò non consente l'esclusione di quei contesti non riconducibili al caso proposizionale. La prova di questo fatto è del resto abbastanza immediata.

Sia "$I(x)$" un predicato che congiunga le seguenti tre condizioni:

1) $\forall x \neg^{*} P_1^2(x,x)$;

2) $\forall x \forall y \forall z \left[\left(P_1^2(x,y) \wedge P_1^2(y,z) \right) \rightarrow P_1^2(x,z) \right]$

3) $\forall x \exists y P_1^2(x,y)$

Si otterrà allora un predicato del tipo:

$$I(x) \stackrel{\text{def}}{=} \forall x[\neg^{*} P_1^2(x,x)] \wedge \forall x \forall y \forall z \left[\left(P_1^2(x,y) \wedge P_1^2(y,z) \right) \rightarrow \right.$$
$$\left. \rightarrow P_1^2(x,z) \right] \wedge \forall x \exists y [P_1^2(x,y)]$$

La condizione espressa dalla relazione $P_1^2(x,y)$ è interpretabile come $x < y$ in N, dal momento che quest'ultima soddisfa 1) in quanto non-riflessiva, 2) in quanto transitiva e 3) in quanto il dominio N è infinito e per ogni x esisterà sempre un y maggiore di esso.

La condizione espressa dal predicato $I(x)$ è di grande interesse per il nostro caso, in quanto il soddisfacimento di tale condizione comporterebbe l'infinità del dominio Δ, su cui si andrebbe ad interpretare l'insieme di variabili di una certa teoria K, posto che K possa adeguatamente esprimere $I(x)$.

Tuttavia $I(x)$ non è un predicato universalmente soddisfacibile e non sempre vero né sempre falso, cioè a dire esso non è valido e non lo è nemmeno la sua negazione $\neg I(x)$. Quest'ultima condizione, che potremmo anche ridenominare per brevità $F(x)$, afferma per forza di cose la finitezza di $\Delta(K)$; ma nessuna delle due formule è deducibile dalla pura logica. Se infatti interpretassimo K in un Δ, tale che $|\Delta| < \aleph_0$, allora $F(x)$ risulterebbe vera in tale interpretazione e dunque soddisfacibile. Se tuttavia Δ fosse tale che $|\Delta| \geq \aleph_0$, allora $I(x)$ sarebbe vera cioè soddisfacibile per almeno un'interpretazione di tipo opposto.

Potendo esibire due modelli in grado di verificare e di falsificare rispettivamente la formula $I(x)$ al netto dei restanti assiomi, che resterebbero identicamente veri in entrambe le interpretazioni, si ottiene l'impossibilità di decidere $I(x)$.

Quest'ultima conclusione sembra particolarmente rilevante, dato che l'impossibilità di caratterizzare la cardinalità del dominio di interpretazione potrebbe propendere, nel caso fosse sempre soddisfacibile il predicato $F(x)$, per un accostamento della logica funzionale a quella proposizionale. Ma ciò risulta evidentemente impossibile, dato che i casi contemplati da questa logica vanno ben oltre quelli riguardanti domini con un numero finito di elementi.

Nonostante questo scarto esiste comunque un elemento di comunanza tra i due livelli di analisi logica, utile alla costruzione di dimostrazioni di indipendenza per alcuni enunciati.

In base a quanto sinora detto, un enunciato valido della logica predicativa al primo ordine è tale indipendentemente dalla cardinalità del dominio di interpretazione. Pertanto, in virtù del metateorema di completezza, se una formula ben formata è conseguenza logica di un determinato insieme finito di altre formule, allora essa è anche derivabile da esso, indipendentemente dal dominio di interpretazione considerato. Così se si considerano le interpretazioni di tali formule su domini con un numero k di oggetti, allora tali trasformazioni saranno tutte egualmente teoremi del sistema considerato.

Definendo "k-trasformazioni"[153] la sostituzione delle variabili occorrenti nelle varie formule ben formate del sistema con gli oggetti di un dato dominio di interpretazione finito, possiamo affermare che:

Metateorema 10.1. Se una fbf α è dimostrabile mediante la logica C_1^* da un certo insieme di formule X, allora anche tutte le k-trasformazioni di α saranno dimostrabili da X mediante C_1^*.

Dimostrazione

Essendo C_1^* una logica semanticamente completa anche in senso forte, se α è conseguenza logica di X, allora α è anche dimostrabile a partire da X. Se α è dunque una conseguenza di X, essa lo è a prescindere dal dominio di interpretazione, purché tale dominio sia non-vuoto e così per il metateorema di completezza essa sarà anche dimostrabile da X. In tal modo se $\Im_\Delta$ è un modello tale che $|\Delta| = k$ e $0 \neq k$ e $0 < \aleph_0$, allora se $[(Mod\ \Im_\Delta\ X)\ seq\ (Mod\ \Im_\Delta\ \alpha)]$ e, per la metaproprietà di completezza, dalla k-trasformazione delle formule in X segue la k-trasformata di α.

[153] Kleene, S., *Introduction to Metamathematics*, *op. cit.*, pp. 174-80

2. *Alcune proposizioni indecidibili*

Veniamo ora ad alcuni risultati di indipendenza:

Metateorema 10.2 $\nvdash \neg\exists x\neg \mathrm{A}(x) \leftrightarrow \forall x \mathrm{A}(x)$

Dimostrazione

Sia Δ un dominio di cardinalità 2, contenente gli oggetti '**1**' e '**2**' (cioè Δ = $\{\mathbf{1},\mathbf{2}\}$). Le trasformate possibili saranno allora $2^1 = 2$. In particolare avremo che $k\big(\nvdash \neg\exists x\neg \mathrm{A}(x)\leftrightarrow\forall x \mathrm{A}(x)\big) = \neg[\neg\mathrm{A}(\mathbf{1})\vee\neg\mathrm{A}(\mathbf{2})]\leftrightarrow[\mathrm{A}(\mathbf{1})\wedge\mathrm{A}(\mathbf{2})]$. Per provare che la proposizione in questione non è dimostrabile sarà sufficiente verificare mediante le metrici già utilizzate per il calcolo proposizionale che $\neg[\neg\mathrm{A}(\mathbf{1})\vee\neg\mathrm{A}(\mathbf{2})]\leftrightarrow[\mathrm{A}(\mathbf{1})\wedge\mathrm{A}(\mathbf{2})]$ non è una fbf valida.

¬[	¬	(A(**1**))	∨	¬	(A(**2**))]	↔	[A(**1**)	∧	A(**2**)]
1	3	1	3	3	1	**1**	1	1	1
3	1	2	1	3	1	**3**	2	1	1
3	1	3	1	3	1	**1**	3	3	1
3	3	1	1	1	2	**3**	1	1	2
3	1	2	1	1	2	**3**	2	1	2
3	1	3	1	1	2	**1**	3	3	2
3	3	1	1	1	3	**1**	1	3	3
3	1	2	1	1	3	**1**	2	3	3
3	1	3	1	1	3	**1**	3	3	3

Metateorema 10.3 $\nvdash \neg\forall x\neg \mathrm{A}(x) \leftrightarrow \exists x \mathrm{A}(x)$

Dimostrazione

Sia Δ un dominio di cardinalità 2, contenente gli oggetti '**1**' e '**2**' (Δ = $\{\mathbf{1},\mathbf{2}\}$). Le trasformate possibili saranno allora $2^1 = 2$. In particolare avremo $k\big(\neg\forall x\neg \mathrm{A}(x)\leftrightarrow\exists x \mathrm{A}(x)\big) = \neg[\neg\mathrm{A}(\mathbf{1})\wedge\neg\mathrm{A}(\mathbf{2})]\leftrightarrow[\mathrm{A}(\mathbf{1})\vee\mathrm{A}(\mathbf{2})]$. Per provare che la proposizione in questione non è dimostrabile sarà sufficiente verificare mediante le metrici già utilizzate per il calcolo proposizionale che $\neg[\neg\mathrm{A}(\mathbf{1})\wedge\neg\mathrm{A}(\mathbf{2})]\leftrightarrow[\mathrm{A}(\mathbf{1})\vee\mathrm{A}(\mathbf{2})]$ non è una fbf valida.

¬	[¬	(A(**1**))	∧	¬	(A(**2**))]	↔	[A(**1**)	∨	A(**2**)]
1	3	1	3	3	1	**1**	1	1	1
1	1	2	3	3	1	**1**	2	1	1
1	1	3	3	3	1	**1**	3	1	1
1	3	1	3	1	2	**1**	1	1	2
3	1	2	1	1	2	**3**	2	1	2
3	1	3	1	1	2	**3**	3	1	2
1	3	1	3	1	3	**1**	1	1	3
3	1	2	1	1	3	**3**	2	1	3
3	1	3	1	1	3	**1**	3	3	3

Metateorema 10.4 $\nvdash \neg\exists x\mathrm{A}(x) \leftrightarrow \forall x\neg\mathrm{A}(x)$

Dimostrazione

Sia Δ un dominio di cardinalità 2, contenente gli oggetti '**1**' e '**2**' (Δ = $\{\mathbf{1},\mathbf{2}\}$). Le trasformate possibili saranno allora $2^1 = 2$. In particolare avremo $k\big(\neg\exists x\mathrm{A}(x)\leftrightarrow\forall x\neg\mathrm{A}(x)\big) = [\neg[\mathrm{A}(\mathbf{1})\vee\mathrm{A}(\mathbf{2})]\leftrightarrow[\neg\mathrm{A}(\mathbf{1})\wedge\neg\mathrm{A}(\mathbf{2})]]$. Per provare che la proposizione in questione non è dimostrabile sarà sufficiente dunque verificare mediante le metrici già utilizzate per il calcolo proposizionale che ¬[A(**1**)∨A(**2**)]↔[¬A(**1**)∧¬A(**2**)] non è una fbf valida.

¬	[A(**1**)	∨	A(**2**)]	↔	[¬	(A(**1**))	∨	¬	(A(**2**))]
3	1	1	1	**1**	3	1	3	3	1
3	2	1	1	**1**	1	2	1	3	1
3	3	1	1	**1**	1	3	1	3	1
3	1	1	2	**3**	3	1	1	1	2
3	2	1	2	**3**	1	2	1	1	2
3	3	1	2	**3**	1	3	1	1	2
3	1	1	3	**3**	3	1	1	1	3
3	2	1	3	**3**	1	2	1	1	3
1	3	3	3	**1**	1	3	1	1	3

Metateorema 10.5 $\nvdash \exists x\neg\mathrm{A}(x) \leftrightarrow \neg\forall xA(x)$

Dimostrazione

Sia Δ un dominio di cardinalità 2, contenente gli oggetti '**1**' e '**2**' (Δ = $\{\mathbf{1},\mathbf{2}\}$). Le trasformate possibili saranno allora $2^1 = 2$. In particolare avremo $k\big(\exists x\neg\mathrm{A}(x)\leftrightarrow\neg\forall x\mathrm{A}(x)\big) = [[\neg\mathrm{A}(\mathbf{1})\vee\neg\mathrm{A}(\mathbf{2})]\leftrightarrow\neg[\mathrm{A}(\mathbf{1})\wedge\mathrm{A}(\mathbf{2})]]$. Per verificare che la proposizione in questione non è dimostrabile sarà sufficiente dunque verificare mediante le metrici già utilizzate per il calcolo proposizionale che [¬A(**1**)∨¬A(**2**)]↔¬[A(**1**)∧A(**2**)] non è una fbf valida.

[¬	(A(**1**))	∨	¬	(A(**2**))]	↔	¬[	A(**1**)	∧	A(**2**)]
3	1	3	3	1	**1**	3	1	1	1
1	2	1	3	1	**3**	3	2	1	1
1	3	1	3	1	**1**	1	3	3	1
3	1	1	1	2	**3**	3	1	1	2
1	2	1	1	2	**3**	3	2	1	2
1	3	1	1	2	**1**	1	3	3	2
3	1	1	1	3	**1**	1	1	3	3
1	2	1	1	3	**1**	1	2	3	3
1	3	1	1	3	**1**	1	3	3	3

PARTE SECONDA

Teoria degli insiemi

XI. Introduzione

1. Una teoria degli insiemi con Urelemente

In questa seconda parte svilupperemo più in dettaglio l'idea di una teoria degli insiemi paraconsistente con *Urelemente*[154].

Oggigiorno i sistemi formali impiegati nello studio rigoroso e sistematico dell'insiemistica non prevedono di norma l'uso di *Urelemente*. Generalmente simili teorie vengono definite come teorie degli insiemi puri, dove "puri" è da intendersi proprio nel senso che, nell'orizzonte intuitivo prima e formale poi, non esistono altri oggetti all'infuori degli insiemi stessi.

Osservando una moderna teoria degli insiemi, ci si accorge dunque facilmente che l'universo di discorso, cui ci si rivolge, è una costellazione di oggetti puramente ideali, dove l'originario interesse per un possibile studio dei casi non-standard è stato messo da parte.

Per "casi non-standard" intendiamo riferirci a tre possibili situazioni, in cui possa risultare invece interessante rivolgere la propria attenzione alle proprietà insiemisticamente descrivibili di certi oggetti, che vengono naturalmente dati all'intuizione o, più correttamente, che vengono assunti sin da principio come

[154] Il termine "*Urelement*" è un vocabolo tedesco composto dal sostantivo "*Element*", che vuol dire semplicemente "elemento", e dal prefisso "*Ur-*" (presumibilmente da "*Ursprung*", che vuol dire "origine"), il quale sottende l'idea che vi sia qualcosa di originario, di primitivo. In tal caso dunque possiamo intendere l'applicazione del prefisso "*Ur-*" al vocabolo "*Element*" come la volontà di designare qualcosa di eventualmente diverso dagli elementi normalmente trattati nella teoria, cioè a dire gli insiemi; questi ultimi infatti dovrebbero sorgere, nell'ottica dei primi studiosi di teoria degli insiemi, proprio dalla disamina delle proprietà fondamentali degli oggetti che si prende in considerazione di volta in volta, senza particolare riguardo alla natura degli oggetti stessi.

individui autodeterminati e non insiemisticamente decomponibili[155]. In particolare ricadono in questo tipo di approccio quei tentativi, che non hanno come unico obiettivo la definizione o la costruzione degli oggetti di studio mediante le tecniche insiemistiche; al contrario essi li accettano come dati, concentrando il grosso del lavoro sulle proprietà insiemisticamente catturabili.

Casi non-standard si riscontrano principalmente in tre filoni di ricerca, molto differenti fra loro e molto lontani anche nell'ordine cronologico, con cui esse sono state formulate:

1) nell'insiemistica *naïve*;

2) nello studio di quelle teorie degli insiemi sufficientemente deboli dal punto di vista assiomatico o in quelle teorie che divergono dall'impostazione assiomatica classica;

3) nell'applicazione della teoria degli insiemi a casi di studio non strettamente matematico, come ad esempio nel caso di oggetti la cui natura attiene alla loro esistenza nel mondo empirico.

Di seguito discuteremo brevemente questi tre aspetti per meglio delineare il profilo sotto cui intendiamo collocare la presente ricerca.

Si dovrà tener presente che l'attuale esclusione degli *Urelemente* non è da imputarsi ad una loro generale superfluità; quanto piuttosto ad una loro inessenzialità per gli scopi fondazionali della matematica. La costruzione della teoria degli insiemi, così come venne delineandosi soprattutto nel corso degli anni Venti del Novecento, era infatti una teoria fortemente influenzata dalle più importanti correnti filosofico-matematiche dell'epoca, che premevano, ad esclusione dell'intuizionismo, per una ricognizione di proposizioni adeguate e sufficienti ad imprimere una svolta decisiva nella ricerca di solide basi per l'edificio matematico.

In tal senso le metodologie elaborate in Germania a cavallo fra Ottocento e Novecento da Frege prima ed affinate da Hilbert e dalla scuola che questi aveva contribuito ad accrescere a Göttingen poi, funsero da volano alle prime ricerche insiemistiche, che si svolgevano sino ad allora su di un terreno «ingenuo» (come nel caso di Cantor) o semiformalizzato (come nel caso di Zermelo), trasmettendo

[155] Il termine lo si deve a Fraenkel, che utilizzava in tal caso l'aggettivo "*unzerlegbaren*". Cfr. Fraenkel, A., *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*, «Mathematische Annalen», vol. 86, 1922, p. 233

una netta accelerazione in direzione dei canoni che Hilbert aveva precedentemente stabilito per la Geometria[156].

Questo lavoro mirava così a definire con l'aiuto degli strumenti insiemistici i concetti elementari della matematica, attraverso cui rielaborare a mano a mano l'intero *corpus*. In seguito si sarebbe dovuto aggiungere e soddisfare a indispensabili richieste di natura altrettanto basilare, come la dimostrazione di non-contraddittorietà[157] o come la dimostrazione di completezza[158] della base assiomatica prescelta.

Tale lavoro condusse nel volgere di pochi anni al superamento di alcuni aspetti caratteristici, sui quali pure si ergeva la teoria degli insiemi di Cantor e che erano stati ben presenti all'intuizione di Zermelo, allorché questi ne fornì una prima sistemazione assiomatica[159]. Tra queste caratteristiche vi era quella di non limitare necessariamente l'universo di discorso all'ambito puramente insiemistico. Tuttavia, nonostante ciò, la prevalenza ed il fervore animato dal programma hilbertiano[160] non tennero conto di questi caratteri originari, determinando un

---

[156] Così Ebbinghaus: «Zermelo dà il suo sistema assiomatico nello stile delle *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert». Cfr. Ebbinghaus, H.-D., *Ernst Zermelo. An Approach to His Life and Work*, Springer, Berlin, 2007, p. 80 o lo stesso Borgers: «Nel 1908 Zermelo applicò alla teoria degli insiemi il metodo di assiomatizzazione (in un linguaggio naturale), che viene usato in aritmetica, geometria e algebra, il cui esempio classico era stato dato da Hilbert nelle *Grundlagen der Geometrie* pubblicate nel 1899». Cfr. Borgers, A., *Development of the Notion of Set and of the Axioms for Sets*, «Synthese», vol. 7, n. 6-A, 1948/49, pp. 374-90. Si veda inoltre Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1899; trad. it., *Fondamenti della geometria; con i supplementi di Paul Bernays*, a cura di P. Canetta, Feltrinelli, Milano, 1970; Franco Angeli, Milano, 2009

[157] Non-trivialità dal nostro punto di vista. Una prova di *Widerspruchsfreiheit* costituiva per Hilbert il nodo fondamentale di ogni ricerca impegnata sul difficile terreno dei *fondamenti*.

[158] Come sappiamo, oggi si distinguono due tipologie di completezza per un dato sistema formale: una di tipo semantico e l'altra di tipo sintattico. Per ragioni metateoriche di una certa importanza è tuttavia rilevante stabilire una dimostrazione di completezza che coinvolga quest'ultimo caso, facendo sì che per una determinata teoria elementare *S*, sia possibile stabilire per ogni suo enunciato α: o $\vdash_S \alpha$ o $\vdash_S \neg\alpha$.

[159] Zermelo, E., *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, «Mathematische Annalen», vol. 65, pp. 261-81

[160] Il "programma di Hilbert", sviluppatosi in varie fasi, aveva come obiettivo fondamentale quello di rispondere efficacemente alla grave crisi innescata dal proliferare dei paradossi all'interno della matematica, con l'*Analisi infinitesimale* prima e la *Teoria degli insiemi* poi (nella celebre conferenza di Münster del 1925 (*Über das Unendliche*) Hilbert si esprimeva così: «Ciò che abbiamo sperimentato già due volte, una volta quando si trattava dei paradossi del calcolo infinitesimale e l'altra volta quando si trattava dei paradossi della teoria degli insiemi, non potrà verificarsi una terza volta né mai più»). La «cura» veniva indicata col suo nuovo metodo, chiamato Teoria della dimostrazione (*Beweistheorie*) («La nostra teoria della dimostrazione, rendendo possibile quest'ultimo importante passo (cioè una prova di non-contraddittorietà per gli assiomi dell'aritmetica formale) in base al metodo degli elementi ideali, costituisce la necessaria chiave di volta dell'edificio teorico dell'assiomatica»). Come ogni grande pensiero che si rispetti, anche la riflessione hilbertiana risulta estremamente complessa ed articolata, profondamente segnata da tutta una serie di sviluppi e di chiarimenti intorno a nozioni-chiave per il discorso metamatematico che egli intendeva portare avanti. È difficile pertanto parlare di «un programma» di Hilbert e,

come ha fatto notare Abrusci, sarebbe forse opportuno parlare di «vari programmi» di Hilbert. Tuttavia esistono dei caratteri ovviamente comuni a tutte queste fasi e ad essi cercheremo qui di riferirci brevemente. Per Hilbert i limiti della matematica ritenuta *contenutisticamente* sicura e decidibile coincidevano con quelli della matematica da lui indicata come *finitaria*; non a caso Resnik ha denominato quest'impostazione filosofico-matematica come *formalista-finitista*, in opposizione alle due altre varianti, quella -*gioco* e quella -*teorica*. Questa terminologia veniva impiegata per meglio marcare l'opposizione che il matematico tedesco avvertiva nei confronti della matematica *transfinita*. Hilbert non nutrì mai sfiducia nei confronti di questo prezioso strumento; era tuttavia persuaso dall'idea che in fondo questi costrutti non mettessero del tutto al riparo la matematica da eventuali critiche, giacché nella sua ottica solo la matematica *finitaria* poteva dirsi esente da contraddizioni («L'operare con l'infinito può venir reso sicuro soltanto mediante il finito». Si tenga anche presente che per Hilbert la *non-contraddittorietà* equivaleva all'*esistenza*, come espresso in comunicazione epistolare con Frege). Cosa egli intendesse con "matematica finitaria" non è del tutto chiaro ed anche un'analisi approfondita delle sue opere pone delle difficoltà di interpretazione. Per alcuni infatti essa coinciderebbe con l'*aritmetica ricorsiva primitiva* (ad esempio per Cellucci); per altri invece la includerebbe (ad esempio per Abrusci). Ciò che tuttavia appare certo è che Hilbert intendesse separare i ragionamenti genuinamente matematici, che nella sua prospettiva erano sempre e comunque riconducibili a procedure eseguibili con «*oggetti finitarii*» (cioè «i segni numerici – *finiti* – come 1, 11, …, 11111»), dai ragionamenti di tipo *infinitario*, in cui erano determinanti delle astrazioni, che tenessero in gran conto l'infinito non più nella sua veste *potenziale*, come l'Analisi classica aveva imparato a presentare, bensì nella sua nuova essenza *attuale*, così come Cantor lo aveva invece riformulato (sempre nel '25 Hilbert si era riferito ad esso come al "paradiso di Cantor": «Dal paradiso che Cantor ha creato per noi, nessuno deve poterci mai scacciare»). Tale scelta era quasi obbligata: Hilbert aveva posto a fondamento della sua ricerca una dimostrazione di non-contraddittorietà (*Widerspruchsfreiheitsproblem*) innanzitutto per l'aritmetica dei numeri naturali, da estendersi successivamente sino all'aritmetica dei numeri reali («Questo problema della non-contraddittorietà, tuttavia, nella situazione attuale ammette senz'altro di poter essere trattato. Esso si riduce, come si riconosce subito, ad accettare che, partendo dagli assiomi e mediante le regole stabilite, non si può avere "$1 \neq 1$" come ultima formula, e cioè che "$1 \neq 1$" non è una formula dimostrabile». Tale questione risultava la seconda per importanza nella lista dei famosi 23 problemi esposti a Parigi nel 1900. Al primo posto Hilbert pose l'*ipotesi del continuo*). Per far questo però egli aveva bisogno di collocarsi al di fuori della matematica genuinamente intesa per osservarla in un certo senso dall'alto. Così Hilbert illustrò nel corso degli anni come realizzare *sistemi formali* «privi di significato» (Hilbert comprese a differenza di Frege la necessità di lavorare con sistemi che non fossero semi-interpretati, tenendo separate la prospettiva *sintattica* da quella *semantica*: « […] è coerente adesso negare ogni significato anche ai segni logici, così come ai segni matematici, e dichiarare che anche le formule del calcolo logico, in se stesse non significano niente ma sono enunciati ideali». O ancora: «In perfetta analogia con il passaggio dalla teoria contenutistica all'algebra formale, noi consideriamo ora i segni e i simboli di operazioni del calcolo logico astraendo dal loro significato contenutistico»), da cui esigere certe importanti metaproprietà. Garantito un certo patrimonio di formule *ideali*, quelle della teoria dei numeri, Hilbert credé fermamente di poter realizzare quanto aveva annunciato con gran convinzione a Parigi nel 1900: «La storia insegna la continuità dello sviluppo della scienza». La «[…] risolubilità di ogni problema è una peculiarità propria del pensiero matematico, o non è forse una legge generale che inerisce all'intima natura del nostro intelletto, quella per cui il nostro intelletto è capace di dare una risposta a tutte le questioni da lui poste? […] Dentro di noi udiamo continuamente l'appello: "Ecco il problema, cerca la soluzione. La puoi trovare mediante il puro pensiero; perché in matematica non c'è l'*ignorabimus*"». E ancora nel '30: «[…] la nostra parola d'ordine è invece: noi dobbiamo sapere, noi sapremo», riportate anche sul suo epitaffio). Per maggiori approfondimenti sulla filosofia della matematica di Hilbert, rinviamo a Abrusci, V. M., *Autofondazione della matematica. Le ricerche di Hilbert sui fondamenti della matematica*, in Hilbert, D., *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di V. Abrusci, Bibliopolis, Napoli, 1985, pp. 15-131, con particolare riferimento alle pp. 101-13. Kreisel, G., *Hilbert's Programme*, in progressivo abbandono dell'uso, inizialmente ammesso, degli *Urelemente* per ragioni sia di economia assiomatica che di eleganza concettuale.

Tenendo a mente questa importante premessa, specifichiamo ora meglio i tre filoni di ricerca sopra elencati.

Al punto numero 1) abbiamo indicato innanzitutto la teoria degli insiemi *naïve*. Con tale denominazione si intende generalmente delimitare la concezione preassiomatica di Cantor, all'interno della quale si mossero le sue prime ricerche. Una simile denominazione fa riferimento ad un periodo di studi molto complesso, di fondazione e che – sottolineiamo – non aveva nulla di «ingenuo»: spesso in letteratura l'aggettivo "*naïf*" viene impiegato per circoscrivere quello spazio teorico, all'interno del quale emersero le prime grandi difficoltà sotto forma di paradossi. Pertanto con tale termine si tende ad indicare un momento, nella

---

Benacerraf, P., Putnam, H., (eds.), *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1964; 1983^2, pp. 207-38; trad. it., *Il programma di Hilbert*, in Cellucci, C., (ed.), *La filosofia della matematica*, Laterza, Bari, 1967, pp. 185-221. Kreisel, G., *A Survey of Proof Theory*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 33, 1968, pp. 321-88. Moriconi, E., *La teoria della dimostrazione di Hilbert*, *op. cit.*. Resnik, M., *Frege and the Philosophy of Mathematics*, Cornell University Press, Ithaca, 1980. Garavaso, P., *Filosofia della matematica*, Guerini, Milano, 1998, pp. 99-109. Cellucci, C., *La filosofia della matematica del Novecento*, Laterza, Roma-Bari, 2007, pp. 38-62. Lolli, G., *Filosofia della matematica*, Il Mulino, Bologna, 2002, pp. 145-55. Casari, E., *La filosofia della matematica del '900*, Sansoni, Firenze, 1973, pp. 20-1. Berto, F., *Tutti pazzi per Gödel!*, *op. cit.*, pp. 46-63. Blanché R., *L'axiomatique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1955. Ladrière, J., *Les limitations internes des formalismes*, *op. cit.*, *passim*. I seguenti lavori originali di Hilbert e di alcuni dei suoi più stretti collaboratori sono essenziali per una comprensione adeguata del suo pensiero. Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie*, *op. cit.* Hilbert, D., *Über die Zahlbegriff*, «Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung», vol. 8, 1900, pp. 180-4; trad. it., *Sul concetto di numero*, in Hilbert, D., *Ricerche sui fondamenti della matematica*, *op. cit.*, pp. 139-43. Hilbert, D., *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*, in *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongress in Heidelberg vom 8. Bis 17. August 1904*, Teubner, Leipzig, 1905, pp. 174-85; trad. it., *Sui fondamenti della logica e dell'aritmetica*, in Hilbert, D., *Ricerche sui fondamenti della matematica*, *op. cit.*, pp. 163-75. Hilbert, D., *Axiomatisches Denken*, «Mathematische Annalen», vol. 78, 1918, pp. 405-15; trad. it., *Pensiero assiomatico*, in Hilbert, D., *Ricerche sui fondamenti della matematica*, *op. cit.*, pp. 177-88. Hilbert, D., *Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung*, «Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität», vol. 1, 1922, pp. 157-77; trad. it., *Nuova fondazione della matematica. Prima comunicazione*, in Hilbert, D., *Ricerche sui fondamenti della matematica*, *op. cit.*, pp. 189-213. Hilbert, D., *Die logischen Grundlagen der Mathematik*, «Mathematische Annalen», vol. 88, 1923, pp. 151-65; trad. it., *I fondamenti logici della matematica*, in Hilbert, D., *Ricerche sui fondamenti della matematica*,*op. cit.*, pp. 215-31. Hilbert, D., *Über das Unendliche*, «Mathematische Annalen», vol. 95, 1926, pp. 161-90; trad. it., *Sull'infinito*, in Hilbert, D., *Ricerche sui fondamenti della matematica*, *op. cit.*, pp. 233-66. Hilbert, D., *Probleme der Grundlegung der Mathematik*, «Mathematische Annalen», vol. 102, 1929, pp. 1-9; trad. it., *Problemi della fondazione della matematica*, in Hilbert, D., *Ricerche sui fondamenti della matematica*, *op. cit.*, pp. 291-300. Hilbert, D., *Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre*, «Mathematische Annalen», vol. 104, 1931, pp. 485-94; trad. it., *La fondazione della teoria elementare dei numeri*, in Hilbert, D., *Ricerche sui fondamenti della matematica*,*op. cit.*, pp. 313-23. Hilbert, D., Ackermann, W., *Grundzüge der theoretischen Logik*, *op. cit.*. Hilbert, D., Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik*, 2 voll., Springer, Berlin, 1934-1939; 1968^2-1970^2. Alcune epistole di grande interesse sono reperibili in Frege, G., *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, G. Gabriel *et alii* (eds.), Meiner, Hamburg, 1976, pp. 58-80 travagliata fase di sviluppo della teoria degli insiemi, in cui l'assenza di determinati criteri formali, simili per certi aspetti a quelli oggi impiegati, impediva una chiara visualizzazione delle questioni. Una simile concezione è però malfondata per due motivi:

1. Cantor era perfettamente conscio di quasi tutti i paradossi emersi sul finire del XIX secolo. Egli cioè era a conoscenza del fatto che principi troppo «liberali» potevano indurre in contraddizione ed aveva per ciò formulato anche dei possibili vincoli da adottare al fine di non vanificare lo sforzo sino ad allora compiuto[161];

2. nonostante il laboratorio concettuale di Cantor si muovesse su fondamenta ancora incerte dal punto di vista del rigore formale, si disponeva già all'epoca di potenti strumenti teorici e linguistici, molto capaci dal punto di vista espressivo, all'interno dei quali trovano accoglienza, con opportune riformulazioni, molte delle idee cantoriane. Ci riferiamo in particolare alle ricerche di Gottlob Frege[162].

Il problema di questa primissima fase fu che nemmeno i protosistemi formali elaborati dal matematico di Jena erano in grado di far fronte a certe tipologie di inconsistenza, a meno di ridurre la portata «universalistica» del proprio approccio.

Russell fu in tal senso lo scardinatore di tutto un sistema di pensiero; sistema che tuttavia – come dicevamo – veniva sempre più rendendosi conto autonomamente dei propri limiti. Zermelo fu probabilmente, ancor più di Russell, il vero traghettatore del vecchio *modus operandi* verso le nuove strategie di ricerca. Riflettendo entrambi sugli enigmi del celebre teorema di Cantor, essi giunsero ciascuno per proprio conto a trovare una formulazione paradossale, antinomica, che imponeva una svolta, rispetto a quanto sino ad allora fatto. Il nome di Russell è passato alla storia per la famosa lettera, con la quale egli mandò in frantumi il proposito freghiano[163]; tuttavia fu Zermelo ad accorgersi con pochi anni di anticipo rispetto a Russell, che il modo di considerare classi troppe grandi, come ad esempio la classe universale, al pari di altre classi straordinariamente

[161] Si vedano per esempio le due lettere datate 28 agosto e 28 agosto 1899, entrambe indirizzate a Dedekind. Cfr. Cantor, G., *Gesammelte Abhandlungen*, a cura di E. Zermelo, Springer, Berlin, 1932, pp. 443-8 o Cantor, G., *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, in Cantor, G., *Gesammelte Abhandlungen*, *op. cit.*, pp. 282-9

[162] Cfr. Frege, G., *Grundgesetze der Arithmetik*, 2 voll., Pohle, Jena, 1893-1903

[163] Si guardi allo scambio epistolare che Frege intrattenne con Russell nel 1902. Cfr. Frege, G., *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, *op. cit.*, pp. 211 e ss.

estese, poteva essere motivo di enormi difficoltà. Sarà inoltre lo stesso Zermelo a proporre una soluzione insiemisticamente soddisfacente del problema sollevato, mentre Russell, pur avendo valutato espedienti analoghi, seguirà un percorso alternativo, con l'intento di salvaguardare quanto più poteva del lavoro freghiano. Zermelo costituì a nostro avviso l'anello di congiunzione tra la prima fase e la successiva e meriterebbe perciò una collocazione intermedia, tra la fase di gestazione delle idee di Cantor ed il momento successivo alle ricerche avviate già a inizio Novecento.

Tuttavia ciò che ci impedisce di tagliare il cordone ombelicale, che lega ideologicamente Zermelo alla fase propriamente *naïve* è la necessità avvertita da questi circa l'importanza di non abbandonare le idee originali del Cantor, sia per quanto riguardava il rispetto dei principi informalmente adottati dal matematico di Halle che per quanto riguardava la sua convinzione di un'adozione il più ampia possibile dei metodi insiemistici[164].

Per tali ragioni, senza dilungarci oltre su questioni di storia della *Mengenlehre*, considereremo Zermelo come il rappresentante-cardine di questa importantissima fase e alla sua concezione e al suo dibattito a distanza con Fraenkel dedicheremo due paragrafi successivi.

Al punto numero 2) possono invece ricondursi quelle teorie, che fanno uso di *Urelemente* in virtù della propria debolezza assiomatica o in virtù della rivisitazione di alcuni principi. Ad esse possono ascriversi ad esempio le teorie elaborate da Quine già a partire dalla fine degli anni Trenta o la teoria KPU, sviluppata nel corso degli anni Settanta soprattutto da Jon Barwise[165].

Entrambi i sistemi formali presentano infatti una propria rilettura degli assiomi impiegati sebbene per ragioni differenti.

[164] Cfr. Casalegno, P., Mariani, M., *Teoria degli insiemi*, Carocci, Roma, 2004, p. 27: «L'idea che un insieme possa cntenere oggetti che non sono insiemi è parte integrante della nozione originaria di insieme elaborata da Cantor. La teoria proposta da Zermelo nel 1908 si conforma a questa idea: postula l'esistenza di un dominio di *Urelemente* – cioè, appunto, di oggetti che non sono insiemi – e contempla la possibilità che gli insiemi contengano *Urelemente*. Ma quali siano questi *Urelemente* la teoria non lo dice. […] Se poi spostiamo la nostra attenzione dalla teoria proposta originariamente da Zermelo alla versione della teoria di Zermelo-Fraenkel di cui si fa uso oggi, scopriamo che, in quest'ultima, gli *Urelemente* sono del tutto scomparsi e che vi figurano solo insiemi per così dire "puri", cioè insiemi che non presuppongono in alcun modo cose che non siano insiemi». Casari, E., *Questioni di filosofia della matematica*, *op. cit.*, p. 52: «Zermelo era del parere che […] potessero venir impiegate delle cose qualunque e gli sembrava arbitrario e soprattutto contrario allo spirito della definizione cantoriana di insieme l'esclusione o comunque la limitazione di queste entità ultime. Gli insiemi si costituiscono via via, in ogni singolo ambito, a partire da un certo stock iniziale di sostanza individuali proprie di quell'ambito. […] La caratteristica fondamentale delle sostanze individuali e l'unica realmente impiegata nella costruzione logica della teoria è la loro 'atomicità', e cioè il loro non risultare ulteriormente decomponibili, al pari degli insiemi, in altri elementi. […] La vera caratteristica logica delle entità di partenza consiste nel fatto che non esiste alcuna entità che sia loro elemento».

[165] Cfr. Barwise, J., *Admissible Sets and Structures*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1975

Nella teoria elaborata da Jon Barwise, il richiamo all'uso di *Urelemente* è dettato da ragioni perlopiù pratiche. In relazione alla caratteristica indicata al punto 2) della nostra lista, il sistema presentato costituisce un'estensione del sistema KP, al quale si aggiungono delle entità primitive, non meglio precisate (dunque $KPU = KP + U$). Tuttavia KP risulta essere un indebolimento assiomatico di sistemi formali più comuni, come ad esempio ZF. In particolare questa teoria degli insiemi ha come obiettivo quello di studiare solo una certa porzione dell'universo insiemistico e pertanto essa si offre come uno spazio teorico, entro cui far convergere solo alcuni degli assiomi canonici. Inoltre alcuni degli assiomi ammessi risultano essere fortemente indeboliti dall'azione di misure restrittive, legate soprattutto alla scelta di quantificatori limitati e alla conseguente formulazione ristretta di certi predicati (così non tutti i predicati di ZF sono isolabili in KPU). Più concretamente tali misure si esplicano nel trascurare certi importanti assiomi, come l'assioma della potenza e l'assioma dell'infinito, che rendono in genere la teoria cui essi si applicano particolarmente capace da un punto di vista deduttivo. In teorie come ZF^{-I}[166] infatti risulta impossibile dimostrare l'esistenza di almeno un insieme con una quantità numerabile di elementi e risulta impossibile provare in ZF^{-P}[167] l'esistenza del *singleton* per l'insieme vuoto. Tali restrizioni sono ulteriormente rafforzate poi in considerazione del fatto che ad esse va aggiunta la condizione di Δ_0-separabilità e di Δ_0-collezionabilità. Queste ultime costituiscono due versioni notevolmente indebolite dei rispettivi principi di isolamento e di rimpiazzamento. La loro debolezza risiede nel fatto che formule appartenenti all'una o all'altra classe sono formule nelle quali non è consentito l'uso dei quantificatori in senso generale, ma solo limitato. Tale restrizione conferisce però alla teoria degli evidenti vantaggi, in quanto i sottoinsiemi così isolati risultano essere assoluti e dunque veri sull'universo vero e proprio della teoria e non soltanto su qualche modello di essa. Inoltre – come affermava Barwise – la formulazione ristretta di molti predicati rispecchia bene anche i tratti di certe proprietà riscontrabili in natura. Gli assiomi prescelti sono perciò fondamentalmente 6:

1) estensionalità;

2) fondazione;

3) coppia;

[166] Con 'ZF^{-I}' si intende la teoria ZF senza l'assioma dell'infinito.
[167] Con 'ZF^{-P}' si intende l teoria ZF senza l'assioma dell'insieme potenza.

4) riunione;

5) Δ_0-separabilità;

6) Δ_0-collezionabilità.

Le riflessioni che hanno indotto Barwise a ripristinare l'uso di *Urelemente* sono di grande interesse per noi ed hanno un carattere soprattutto matematico: una volta indebolita una teoria degli insiemi del tipo ZF, l'uso e la reintroduzione di entità primitive risulta abbastanza naturale, giacché ciò consentirebbe quell'efficacia deduttiva, che verrebbe meno allorché si trascurassero certi postulati. L'idea che riposa alla base della concezione barwisiana sembra essere quella per cui gli *Urelemente* possono essere esclusi solo in virtù di una base assiomatica dimostrabilmente molto capace. Egli sosteneva infatti che, riammettendo assiomi come quello della potenza o quello dell'infinito o ancora rimuovendo le restrizioni imposte alla costruzione degli insiemi, allora si poteva riacquisire di fatto la possibilità di fabbricare collezioni arbitrariamente complesse, pur sempre nel rispetto dei limiti fondamentali; e con ciò risultava pertanto negata l'utilità e la ragion d'essere degli *Urelemente* stessi. Ma non vi sono, per Barwise, condizioni diverse da queste per escluderne l'utilizzo, dal momento che per "*Urelemente*" – sottolineava – potrebbero assumersi ad esempio anche i numeri reali, la cui collezione non risulterebbe indifferente al potere espressivo del sistema stesso[168].

Nel caso di Quine invece abbiamo una teoria in cui si ammettono degli *Urelemente* con l'intento specifico di descrivere certe nuove entità a metà strada fra una concezione insiemistica ed una oggettuale. In Quine non abbiamo, come invece per Barwise, l'intenzione di integrare la potenza espressiva della nostra teoria per uno scopo specifico; bensì si ha come obiettivo quello di ridefinire la relazione fondamentale considerata sul dominio di riferimento al fine di studiare

[168] Tale concezione ci pare concordi con la visione del problema di ammettere o meno gli *Urelemente*, espressa anche da Ebbinghaus. Questi – come abbiamo ricordato – sostiene che gli *Urelemente* possono essere visti come gli elementi fondamentali da cui partire. Se dunque non si ha a disposizione un certo «materiale» in partenza, come nel caso esaminato da Barwise, è allora legittimo considerare tali oggetti come i mattoni fondamentali su cui ergere la costruzione dei differenti livelli di insiemi. Infatti non importa quale sia la natura interna di tali cose; poiché ciò che conta è soltanto il tipo di relazioni che è possibile stabilire tra loro. In sostanza, senza particolare attenzione alla natura degli *Urelemente*, si può pensare e lavorare con essi come con degli atomi (i mattoni fondamentali appunto). Va però segnalata la distinzione, che Ebbinghaus pare voglia rimarcare, per cui un *Urelement* mantiene pur sempre un'accezione "concreta" rispetto ai caratteri propriamente astratto di una teoria matematica. Cfr. Ebbinghaus, H.-D., *et alii*, *Zahlen*, Springer, Berlin, 1983; 1991[2]; trad. ingl., *Numbers*, a cura di K. Lamotke, H. Orde, J. Ewing, Springer, Berlin *et alii*, 1991, pp. 358-9

oggetti di tipo non-standard, come quegli oggetti che, oltre ad appartenere, sono eguali al proprio *singleton*. Questo fatto induce da una parte all'introduzione *ante litteram* di oggetti non-ben-fondati[169], che non per questo violano del tutto le prescrizioni degli assiomi comunemente ammessi; dall'altra si cerca per questa via di tentare una mediazione fra le due concezioni, cercando di accogliere tanto le richieste originarie di Zermelo quanto quelle successive di Fraenkel. Un simile obiettivo trova attuazione nell'introduzione di certi particolari individui, oggetti cioè del tipo "$x = \{x\}$". In tal modo, osservava Quine, non è necessario rinunciare agli individui totalmente e non è necessario nemmeno postulare l'esistenza di individui, la cui natura diverga sensibilmente dall'ontologia privilegiata da Fraenkel. Inoltre si è potuto osservare come tale introduzione non risulti nociva in termini di coerenza per il sistema cui essi sono aggiunti[170], anzi. Ciò che risulta alterato è tuttavia la relazione fondamentale che si va a prendere sul dominio di discorso, che non può più essere semplicemente e univocamente la relazione di appartenenza, bensì una relazione che va intesa ed utilizzata come una relazione di eguaglianza o di *membership*, a seconda che si stia considerando un individuo piuttosto che un insieme vero e proprio.

Veniamo infine al punto 3). A quest'ultimo filone possiamo ascrivere senz'altro la teoria degli insiemi elaborata da Décio Krause all'inizio degli anni Novanta. In questa teoria degli insiemi l'obiettivo fondamentale è lo studio e la soluzione di alcuni paradossali fenomeni della fisica quantistica ("*Quantum Set Theory*" o più semplicemente "QST"). Per tale ragione la teoria risultante è stata denominata teoria quantistica degli insiemi. In essa è possibile trattare adeguatamente il problema di dover prendere in considerazione particelle elementari[171] come i fotoni, che risultano fra loro identici sebbene numericamente distinti. Questo fatto è abbastanza sorprendente, se pensiamo alla definizione comunemente accettata di identità, risalente alla formulazione datane nel Seicento da Leibniz[172]. In base a tale definizione oggetti identici sono lo stesso oggetto e per due oggetti "a" e "b", per i quali sussiste la relazione di identità, vale la condivisione di tutti i predicati. In termini informali impropri ma forse più efficaci, essi «denotano» lo stesso oggetto – come avrebbe detto Zermelo. Questo

[169] Il primo vero studio sistematico di tali oggetti lo si deve ad Ennio De Giorgi (Lecce, 1928 – Pisa, 1996) e alla scuola pisana. Una trattazione sistematica comunque è dovuta a Peter Aczel. Cfr. Aczel, P., *Non-Well-Founded Sets*, CSLI, Stanford, 1988

[170] Dana Scott, S., *Quine's Individuals*, in Nagel, E., Suppes, P., Tarski, A., *Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proceedings of the 1960 International Congress*, Stanford University Press, Stanford, 1962, pp. 111-5

[171] Secondo il modello standard.

[172] Leibniz affermava che due oggetti sono identici se e solo se ogni proprietà dell'uno ineriva anche all'altro. In base a ciò non era possibile considerare due oggetti "*a*" e "*b*" identici eppure differenti nel contempo sotto il rispetto del loro numero. Cfr. Leibniz, G., *Die Philosophischen Schriften*, vol. 4, C. I. Gerhardt (ed.), Weidmann, Berlin, 1880, pp. 427- 63, sez. 9

modo di considerare la relazione di identità impedisce dunque un approccio consistente alle difficoltà concettuali sollevate dalla meccanica quantistica, giacché con una simile definizione non potrebbe darsi che un solo fotone. Fatto questo manifestamente falso per la fisica. Un modo per aggirare tale difficoltà è dunque consistita, secondo l'approccio di Krause, nel reintrodurre non solo gli *Urelemente*, bensì due sorte di *Urelemente*. In particolare, distinguendo fra *M-atoms* e *m-atoms* (gli *Urelemente* della teoria), Krause ha delimitato l'applicazione della normale relazione di identità agli *M-atoms*, che intuitivamente costituiscono gli oggetti macroscopici della nostra esperienza (oggetti per i quali molti dei paradossi riscontrati a livello subatomico scompaiono), e definendo una nuova relazione, detta di indiscernibilità, per gli *m-atoms*, distinta da quella di identità e che può intrattenere con quest'ultima al più una relazione logica di implicazione (se due oggetti sono identici, allora essi sono anche indiscernibili) ma non di equivalenza (l'implicazione inversa non vale, preservando la pluralità di oggetti indistinguibili)[173].

[173] Tale approccio richiede una logica paraconsistente del tipo considerato nella parte prima.

XII. *Cosa sono gli Urelemente*

1. *Il ruolo degli Urelemente e la prospettiva di Zermelo*

La natura degli *Urelemente* non è precisabile con assoluta determinatezza. Non possiamo infatti dire *a priori* cosa o quali siano gli *Urelemente*. Non possiamo definirli esplicitamente; tuttavia possiamo designarli indirettamente attraverso una definizione implicita, dicendo semplicemente che un *Urelement* è un qualunque oggetto, un individuo, che non risulti essere un insieme[174].

Con ciò non abbiamo evidentemente fatto alcuna assunzione in merito; non abbiamo detto *cosa* essi siano o se ne esistano. Un sistema formale, che si proponga di trattare di *Urelemente* oltre che di insiemi, dovrebbe immischiarsi – nell'ottica di Zermelo – il meno possibile nella determinazione della natura di questi oggetti al fine di offrire un ventaglio di ipotesi quanto più articolato possibile[175].

In tal senso allora è opportuno disporre di un apparato assiomatico sensibile alla circostanza in cui risultino essere presenti anche oggetti non-insiemistici, senza per questo però rischiare di restringerne il campo, per quel che concerne la loro natura, o determinare *ab initio* il loro numero o la loro quantità[176].

---

[174] Più precisamente dovremmo dire che se all'interno di una data teoria degli insiemi, poniamo Z, un certo oggetto "x" non possiede elementi ed è diverso dall'insieme vuoto, allora "x" risulta essere un *Urelement*. Questa definizione, come si può notare, pone sin da subito dei problemi teorici notevoli, concernenti la difficoltà di giustificare l'«insiemisticità» della collezione priva di elementi. Così Russell nei suoi *Principles*: «[…] with the strictly extensional view of classes […], a class which has no terms fails to be anything at all: what is merely and solely a collection of terms cannot subsist when all the terms are removed». Inoltre egli aggiunge: «We may now reconsider the proposition "nothing is not nothing" – a proposition plainly true, and yet, unless carefully handled, a source of apparently hopeless antinomies. *Nothing* is a denoting concept, which denotes nothing. The concept which denotes is of course not nothing, *i.e.* it is not denoted by itself. The proposition which looks so paradoxical means no more than this: *Nothing*, the denoting concept, is not nothing, *i.e.* is not what itself denotes. But it by no means follows from this that there is an actual null-class: only the null class-concept and the null concept of a class are to be admitted.». Cfr. Russell, B., *Principles of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1903; Allen and Unwin, London, 1956[2], pp. 74-5

[175] Si veda quanto afferma Rootselaar a proposito del ruolo *descrittivo* e non meramente *prescrittivo* degli assiomi nel sistema Z: «Zermelo rimarcava la natura descrittiva degli assiomi, partendo con un dominio B di oggetti e specificando allora sotto quali condizioni (gli assiomi) un oggetto doveva essere chiamato insieme». Cfr. Rootselaar, B. van, *Zermelo, Ernst Friedrich Ferdinand*, in Gillispie, C. *et alii*, (eds.), *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 14, Scribner's Sons, New York, 1981, p. 614

[176] Così Fraenkel: «Let us refer to those elements which have members as *sets*, and to those elements which have no members as *individuals*. When we develop a system of set theory we have

Per questo tipo di esame è preferibile incaricare semmai la teoria dei modelli e lasciare che sia una circostanza ben determinata, un frammento, uno spaccato di una certa porzione di realtà a dirci cosa esattamente essi siano ed eventualmente in che quantità essi siano presenti. È ovvio tuttavia che dal punto di vista matematico i casi di maggior interesse saranno quelli riguardanti la presenza di una quantità almeno numerabile di *Urelemente*[177]; soprattutto nel caso in cui non si disponesse di una base assiomatica sufficientemente potente[178]. L'idea soggiacente a tale concezione è infatti ancora una volta riconducibile a Zermelo e alla sua idea di modello naturale per la teoria degli insiemi[179]. Quest'ultimo avrebbe dovuto avere una struttura simile ad un cono tronco rovesciato, la cui base avrebbe dovuto essere a sua volta determinata dal numero di *Urelemente* presi in considerazione[180]; mentre la sua altezza avrebbe dovuto rappresentare una costruzione parzialmente determinata, in quanto sempre estendibile attraverso la reiterazione del processo di passaggio all'insieme potenza, che – come noto – non ammette un livello ultimo conseguentemente al teorema di Cantor[181] e al teorema di Zermelo[182]. Questi dichiarava che ogni modello naturale della teoria degli insiemi avrebbe dovuto così rispettare due fondamentali parametri, che egli

to make up our mind as to how many individuals we want to have. The same question arises also with respect to the sets, i.e., we have to make up our mind as to "how many" sets we want to have. […] there are no ways of "constructing" individuals and, as a consequence, there is nothing to tell us how many individuals to admit». Inoltre l'autore aggiunge ancora alla nota 1 di p. 24 che «if *ZF* is consistent then so are corresponding systems of set theory with any prescribed number, finite or infinite, of individuals (in addition to the null-set discussed below)». Cfr. Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, North Holland, Amsterdam, 1958; 1973[2], pp. 23-4

[177] Come primo esempio, storicamente dato, si veda il caso della dimostrazione di indipendenza per l'assioma di scelta presentata da Fraenkel proprio con l'uso di una quantità numerabile di *Urelemente*. Cfr. Fraenkel, A., *Der Begriff "definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlsaxioms*, 1922, «Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalische-mathematische Klasse», 1922, pp. 253-7

[178] Qui l'espressione "sufficientemente potente" è da intendersi in maniera diversa rispetto a quanto fatto con riferimento ai risultati di Gödel, per certi sistemi formali dell'aritmetica. Con riferimento al caso degli assiomi per una certa teoria degli insiemi, sono sufficientemente potenti quei sistemi in grado di fabbricare tutta una serie di insiemi altrimenti non-edificabili. L'assunzione di un potente assioma come quello di rimpiazzamento ad esempio consente di soddisfare a questa condizione. Diversamente – come vedremo – potrebbe anche darsi il caso di non poter procedere oltre nella costruzione di nuovi insiemi, in disaccordo con i principi fondamentali della teoria *naïve* considerata da Cantor. Tale circostanza è in parte riconducibile anche al discorso già accennato a proposito degli insiemi ammissibili trattati da Barwise.

[179] Zermelo, E., *Über Grenzzahlen und Mengenbereich*, «Fundamenta Mathematicae», vol. 16, 1930, pp. 29-47

[180] *Ibidem*, p. 30: La «[…] Gesamtheit seiner *Urelemente* (die keine eigentlichen Mengen sind)».

[181] La cardinalità di un insieme "x" è sempre strettamente minore di quella del suo insieme potenza: $\forall x(|x| \lneqq |\wp(x)|)$. Cfr. Cantor, G., *Über eine elementare Frage der Männigfaltigkeitslehre*, «Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung», vol. 1, 1892, pp. 75-8; trad. it., *Sopra una questione elementare della teoria degli aggregati*, a cura di G. Vivanti, «Rivista di matematica», vol. 2, 1892, pp. 165-7

[182] Ci riferiamo qui all'importante teorema 10 dimostrato nel 1908. Cfr. Zermelo, E., *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, *op. cit.*, p. 265

denominava *base* (*Basis*) e *caratteristica* (*Charakteristik*) del modello. Quest'ultima era suddivisa per Zermelo in strati, costituiti da «mucchi» (*Schichten*) e «cumuli» (*Abschnitte*): i primi con la caratteristica di non essere cumulativi; mentre i secondi con questa intrinseca proprietà. Oggi si fa riferimento soltanto a questi ultimi nella descrizione dei modelli per la teoria degli insiemi puri del tipo Zermelo(-Skolem)-Fraenkel e ad essi è dato il nome di "*ranks*".

Formalmente l'universo di Zermelo[183] può essere definito ricorsivamente da una funzione '*V*', che assegna a ciascun ordinale α una porzione, uno strato (*rank*) dell'universo stesso, nel modo che segue:

$$V`\emptyset = \{u_1, \dots, u_n, \dots\}$$

$$V`\alpha + 1 = \wp(V`\alpha)$$

$$V`\lambda = \bigcup_{\mu<\lambda} V`\mu$$

I modelli che potevano delinearsi corrispondevano così, per una data caratteristica σ, all'universo costruito entro quel determinato livello, cioè a dire: $V`\lambda = \bigcup_{\mu<\sigma} V`\mu$.

Tale costruzione risente dell'influsso esercitato dal modello interno di von Neumann, con cui questi aveva provato un anno prima la consistenza degli assiomi della teoria degli insiemi, da lui stesso elaborata, con l'assioma di fondazione (*Fundierung*)[184]; e del resto risulta «cruciale» qui – come scrive lo stesso Ebbinghaus[185] – il ruolo dell'assioma di fondazione, che Zermelo assunse in questa sede proprio per assicurare la coincidenza di ogni possibile modello con la struttura cumulativa da lui stesso concepita[186].

---

[183] Esso costituiva la *gerarchia cumulativa di Zermelo*.

[184] Cfr. Neumann, J. von, *Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», vol. 160, 1929, pp. 227-41. In tale articolo von Neumann illustrava ed introduceva per la prima volta quella che è oggi nota come "gerarchia di von Neumann" e che viene più comunemente utilizzata.

[185] Cfr. Ebbinghaus, E.-D., *Ernst Zermelo. An Approach to His Life and Work*, *op. cit.*, p. 190

[186] È opportuno però ricordare anche che Zermelo faceva qui riferimento ad una teoria degli insiemi al secondo ordine, contrariamente alla prassi elementaristica, cui qualche anno prima Skolem aveva indirizzato la ricerca. Cfr. Skolem, T., *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre*, «Mathematiker Kongressen i Helsingfors den 3-7 Juli 1922», Akademiska Bokhandeln, Helsinki, 1923, pp. 217-32

Come si può notare il modello non escludeva gli *Urelemente*: al contrario esso ne ammetteva un certo *stock* iniziale; e poi si passava alla stratificazione progressiva, che partendo dalla collezione iniziale, univa l'alfesimo *step* ottenuto nella ricorsione (per un dato ordinale α finito) con il successivo, mediante l'operazione potenza. Infine si generalizzava la procedura per quei casi in cui $\alpha = \lambda$, per λ ordinale limite, sfruttando l'unione transfinita di tutti gli *steps* μ inferiori a λ, precedentemente ottenuti.

La presenza di *Urelemente* non era dunque affatto estranea alla concezione di Zermelo: essa era piuttosto una concreta possibilità. Possibilità testimoniata e rafforzata anche dal modo in cui vent'anni prima il matematico berlinese aveva concepito la sua celebre assiomatizzazione. Nel definire l'eguaglianza di due insiemi o la costruzione di nuove classi, da ottenersi operando sugli elementi genericamente intesi del dominio, Zermelo non si limitava mai a formulare i propri principi con riferimento ad una teoria per sole classi[187]. Rileggendo la formulazione del 1908[188], Zermelo indicava così i due principi fondamentali[189] della sua teoria Z[190]: «[…]

I. Assioma di estensionalità:

Se ogni elemento di M è anche un elemento dell'insieme N e viceversa, cioè se $M \subseteq N$ e $N \subseteq M$, allora $N = M$; in breve, ogni insieme è determinato dai suoi elementi».

[…]

III. Assioma di separazione:

Allorché la funzione proposizionale $\mathfrak{E}(x)$ è definita per tutti gli elementi di una classe M, M possiede una sottoclasse $M_{\mathfrak{E}}$ contenente

[187] Qui intendiamo come sinonimi i termini "insieme" e "classe", come traduzione del vocabolo tedesco "*Menge*", dal momento che la teoria considerata è una teoria ad una sola sorta di oggetti.
[188] Zermelo, E., *Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik I*, *op. cit.*, pp. 261-81
[189] I due principi di estensionalità e di comprensione, adeguatamente formulati, costituiscono il nocciolo della teoria degli insiemi. La loro presenza fornisce gli elementi minimi per parlare di "calcolo ideale", così come lo hanno definito Hermes e Scholz: «Man kommt dann mit einer einzigen Variablenart aus, wenn man sich auf einstellige *P*-Variablen beschränkt. Ein Kalkül dieser Art heiße […] der Idealkalkül. […] Als K_0-Axiome sollen gelten […] zwei Axiomenschemata: […] das Extensionalitätsprinzip [und] das Komprehensionsprinzip». Cfr. Hermes, H., Scholz, H., *Mathematische Logik*, *op. cit.*, pp. 57-9. Tale posizione è inoltre condivisa anche da Fraenkel. Cfr. Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 155
[190] Cfr. Casari, E., *Questioni di filosofia della matematica*, *op. cit.*, pp. 38-42

come elementi esattamente quegli elementi x di M per cui $\mathfrak{E}(x)$ è vera. [...]»[191]

È da notarsi che nella formulazione sopra riportata, Zermelo parla di elementi di insiemi. Come si mostrerà in seguito, questo fatto non è di per sé privo di conseguenze: innanzitutto, valutando positivamente il fatto di parlare di "elementi" piuttosto che di soli "insiemi", si rimarca la possibilità in cui, nel dominio di discorso, si trovino anche oggetti di natura non-insiemistica, come appunto gli *Urelemente*[192]. Ma soprattutto, cosa ancor più importante è che gli oggetti privi di elementi non necessariamente debbono identificarsi con l'insieme vuoto. Ciò riposa sulla concezione zermeliana dell'identità, la quale era legata ad aspetti di natura intensionale – come ha ben chiarito Robinson[193]. Infatti sebbene fosse ravvisabile in Zermelo la probabile «confusione tra uso e menzione dei simboli»[194] adottati in proposito, tradita dal modo in cui egli si esprimeva[195], la sua concezione dell'identità fra cose risultava essere legata da una parte alla coestensività, se le «cose» fossero state insiemi, le quali si sarebbero così trovate a condividere tutti i loro elementi (condizione di determinatezza); dall'altra invece se l'identità fosse stata da valutarsi tra due «cose», liberamente intese, senza cioè necessariamente intendere due classi ma pensando piuttosto a due individui, allora l'identità avrebbe dovuto funzionare in modo tale da consentire a due cose identiche di trovarsi anche nel medesimo insieme. Ciò è dovuto in ultima analisi al fatto che Zermelo dava alla relazione di eguaglianza il significato di identità logica, rafforzata dalla clausola di *Bestimmtheit*, limitatamente al caso di due oggetti del dominio, che fossero stati insiemi[196].

---

[191] Si tratta dei cosiddetti *Axiom der Bestimmtheit* (traducibile anche come "assioma di determinatezza") e *Axiom der Aussonderung*. Cfr. Zermelo, E., *Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik I*, *op. cit.*, p. 263

[192] Nel suo scritto Zermelo vi si riferisce denominando gli oggetti primitivi del dominio prescelto come "*Dinge*" cioè "cose", «fra le quali gli insiemi costituiscono una parte». Sarà propriamente nello scritto del 1930, cui abbiamo precedentemente rivolto la nostra attenzione, a sancire per la prima volta l'utilizzo stabile del termine "*Urelemente*". Cfr. Zermelo, E., *Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik, I*, *op. cit.*, p. 262. Si veda ancora Ebbinghaus, E.-D., *Ernst Zermelo. An Approach to His Life and Work*, *op. cit.*, p. 80 e Bernays, P., Fraenkel, A., *Axiomatic Set Theory*, North Holland, Amsterdam, 1958; 1968[2]; Dover, New York, 1991, p. 7

[193] Robinson, A., *On the Independence of the Axioms of Definiteness (Axiome der Bestimmtheit)*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 4, n. 2, 1939, pp. 69-72

[194] Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, pp. 25-6. A scorgere tale inesattezza è stato Quine, come ricordano gli autori stessi. Cfr. Quine, W., *Mathematical Logic*, Harvard University Press, Cambridge, 1940; 1951[2], pp.

[195] «Sollen zwei Symbole a und b dasselbe Ding bezeichnen, so schreiben wir $a = b$, im entgegengesetzten Falle $a \neq b$». Cfr. Zermelo, E., *Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik, I*, *op. cit.*, p. 262

[196] Cfr. Bernays, P., Fraenkel, A., *Axiomatic Set Theory*, North Holland, Amsterdam, 1958, p. 6

Nelle definizioni che daremo per ZFU_1, avremo modo di osservare come tale strategia risulti di grande utilità nel lasciare indeterminata le sostanze primitive del dominio di riferimento, non escludendo che si abbia a che fare con oggetti di natura matematica, cui si nega una definizione in termini insiemistici, oppure direttamente con oggetti empiricamente dati.

Un'ulteriore testimonianza dell'importanza che Zermelo riservava alla presenza di oggetti qualunque all'interno della teoria degli insiemi, risulta anche dalla sua reazione all'opera di semplificazione che Fraenkel aveva proposto a partire dal 1922[197]. L'idea che sembra caratterizzare la filosofia degli insiemi zermeliana è quella di non limitare in alcun modo la sua applicazione agli oggetti puramente matematici. Se osserviamo il principio di isolamento inteso in maniera più liberale, rinunciando all'«ingenuità» triviale che ciò può comportare, e tenendo fermo il fatto che esso possa in certa misura agevolare il lavoro di astrazione concettuale, allora non si vede una ragione determinante nell'escludere la possibilità di trattare l'astrazione anche di proprietà, che valgano per oggetti insiemisticamente non-decomponibili. Il riferimento qui risulta essere chiaro ed è Zermelo stesso che ha illustrato una posizione abbastanza chiara. In una lettera inviata a Fraenkel il 20 gennaio 1924, Zermelo si dice alquanto preoccupato dalla scelta di considerare come elementi di insiemi unicamente gli insiemi stessi; si può ipotizzare che Zermelo non fosse per ciò nemmeno disposto ad accontentarsi di un solo *Urelement*. Infatti, sebbene tale scelta «formalmente vada bene e semplifichi la formulazione», il matematico berlinese poneva il seguente interrogativo: «Come metterla allora con l'*applicazione* della teoria degli insiemi alla Geometria e alla Fisica?»[198] Da questo breve estratto si può comprendere come per Zermelo la teoria degli insiemi non sia una teoria di soli insiemi o per soli insiemi. Nel senso che un'adeguata *Mengenlehre* dovrebbe disporre di un'efficacia teorica in grado di evitare vincoli di sorta. Essa non dovrebbe cioè venir concepita unicamente per applicazioni alla matematica, rispetto alle quali egli prendeva le dovute distanze, nella misura in cui tale approccio tendeva a vestire panni fondazionali[199]; ma al contrario essa avrebbe dovuto essere

---

[197] Fraenkel, A., *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*, *op. cit.*

[198] Così Zermelo: «Bedenklich scheint mir Förderung, daß jedes Element einer Menge *selbst* eine Menge sein soll. Formell geht es wohl und vereinfacht die Formalisierung. Aber wie steht es dann mit der *Anwendung* der Mengenlehre auf Geometrie und Physik?». Si confronti l'Appendice in Ebbinghaus, E.-D., *Ernst Zermelo. An Approach to His Life and Work*, *op. cit.*, p. 293

[199] Sembra che Zermelo non condividesse l'impegno profuso dalle scuole fondazionali nella ricerca di solide basi per la matematica, in quanto ciò avrebbe comportato una netta restrizione, se non la più completa eliminazione, del momento puramente concettuale, legato al processo della speculazione e della riflessione matematica in genere. Nei termini allora molto dibattuti, ci sono buone ragioni per credere che Zermelo rifiutasse la visione analitico-riduzionista della matematica, rispetto alla quale sembrava invece privilegiare quella sintetica, come testimonia lo stesso Hessenberg in sua epistola a Nelson, datata 7 settembre 1907. Ciò che traspare da quelle poche righe è la forte convinzione che Zermelo nutrisse una certa avversione al riduzionismo e al

sufficientemente articolata, da poter individuare fra i propri scopi anche un eventuale impiego in ambiti non strettamente matematici, come appunto quello della Fisica.

Ciò che se ne ricava dunque in relazione alla nostra ricerca sulla possibilità e l'interesse congiunto allo sviluppo di una teoria degli insiemi con *Urelemente*, è che la loro presenza, lungi dal costituire uno strumento utile alle scoperte matematiche, potrebbe invece costituire un valido strumento teorico al fine di reintegrare in tale settore ambiti di ricerca fra i più disparati[200], con l'unica ma non banale osservanza di un basilare criterio formale di trattazione quale requisito minimo.

La visione zermeliana, concernente l'uso degli *Urelemente* in teoria degli insiemi, risulta essere così un ottimo esempio ed un buon caso di studio per trarre ispirazione nella riformulazione di una teoria altrettanto capace dal punto di vista teorico.

---

contempo una spiccata convinzione circa il fatto che la teoria degli insiemi non avesse nulla a che fare col laboratorio logicista, col quale – egli sosteneva – Poincaré l'aveva «confusa». Cfr. Ebbinghaus, E.-D., *Ernst Zermelo. An Approach to His Life and Work*, *op. cit.*, p. 68. Cfr. anche Casari, E., *Questioni di filosofia della matematica*, *op. cit.*, p. 39: «Un'altra caratteristica della teoria di Zermelo che la differenzia da quella di Russell è che essa viene concepita come una teoria matematica piuttosto che come una teoria logica. Con ciò vogliamo dire che nella formulazione e nell'impostazione della teoria di Zermelo v'è quel senso di relatività e arbitrarietà degli assiomi che manca ad una impostazione logica come quella di Russell».

[200] Come ricorda Casari: «[…] ci pare innegabile il fatto che attualmente ci si vada sempre più rendendo conto come anche il momento linguistico-teorico delle scienze empiriche possa ottenere la sua sistemazione e giustificazione logica ultima all'interno della teoria degli insiemi». Cfr. Casari, E., *Questioni di filosofia della matematica*, *op. cit.*, p. 54

2. *La posizione di Fraenkel sull'impiego degli Urelemente*

Discuteremo ora brevemente del lavoro di analisi e di valutazione della questione posta dalla presenza degli *Urelemente*, così come affrontata da Fraenkel già a partire dagli anni Venti del Novecento. Essa risulta essere di un certo interesse ai fini della presente ricerca in quanto costituisce, entro certi limiti, la ragione fondante di un orientamento contrario a quanto qui si tenta di fare.

Abbiamo in precedenza ricordato che il lavoro fondamentale, in cui Fraenkel discusse per la prima volta della necessità o meno di disporre di *Urelemente*, risale al 1922[201]. Questo fu un anno di enormi stravolgimenti per l'allora nascente teoria assiomatica degli insiemi, per via dei contributi di Fraenkel da una parte e di Skolem[202] dall'altra. Le loro osservazioni e le loro proposte di miglioramento, sia in termini assiomatici che in termini di rigore e chiarezza , costituirono un nuovo corso per la ricerca e incisero non poco sulle fasi successive di studio.

Nella discussione della posizione assunta da Fraenkel, limitatamente alla questione da noi qui indagata, esamineremo complessivamente il pensiero del matematico tedesco-israeliano, così come fatto nel paragrafo precedente per Zermelo. Non ci limiteremo dunque ad un'analisi esclusiva del celebre lavoro del '22, giacché da esso non ci sembrano emergere ancora chiaramente certe importanti considerazioni, che sono invece rintracciabili in lavori (anche di poco) successivi[203]; terremo presenti nella nostra esposizione allora anche le riflessioni maturate in seguito, nella quali l'autore ritornò nuovamente sull'argomento, chiarendo ancor di più la propria posizione[204].

Riflettendo sulla prima proposta zermeliana, Fraenkel osservò che combinatoriamente si potevano valutare tre casi[205]:

1) il dominio contiene l'insieme vuoto accanto ad altri individui;

2) il dominio contiene individui ma non l'insieme vuoto;

[201] Fraenkel, A., *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*, *op. cit.*
[202] Skolem, T., *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre*, *op. cit.*
[203] Ci riferiamo qui soprattutto al lavoro del '25. Cfr. Fraenkel, A., *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, «Mathematische Zeitschrift», vol. 22, 1925, pp. 250-73
[204] Particolarmente rilevanti, in concomitanza col tema affrontato in questo paragrafo, risultano essere soprattutto le pagine dei celebri *Foundations*, opera in cui Fraenkel ha discusso in maniera dettagliata e compiuta la propria scelta, mettendo in luce con estrema chiarezza le ragioni che lo indussero, oltre un trentennio prima, a richiedere l'esclusione degli *Urelemente* e la riformulazione dell'"assioma di determinatezza". Si veda Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, con particolare riferimento alle pp. 23-30
[205] Bernays, P., Fraenkel, A., *Axiomatic Set Theory*, *op. cit.*, p. 7

3) il dominio contiene l'insieme vuoto ma non ulteriori individui.

Il primo caso sarebbe quello privilegiato da Zermelo ma non solo[206]; il secondo – riferisce Fraenkel – sarebbe stato accettato e studiato da Quine a partire dal 1936[207]; il terzo infine costituisce la posizione accettata da Fraenkel.

Si nota sin da subito la mancanza di un quarto ed ultimo caso: il caso in cui il dominio non contenga né l'insieme vuoto né gli *Urelemente*. Ebbene questo caso non può darsi, pena l'impraticabilità e l'inadeguatezza del dominio stesso. La negazione di una simile eventualità, lungi dal costituire un caso banale, mette in luce un fatto fondamentale e cioè che qualsiasi teoria degli insiemi si abbia in mente, con o senza *Urelemente*, occorre trovare per essa un fondamento solido, magari unico ma determinato ed effettivamente presente. È solo attraverso di esso che si può cominciare una graduale opera di costruzione degli oggetti fondamentali di questa disciplina.

Fraenkel sgombrò dunque il campo a possibili fraintendimenti e chiarì sin da subito che:

1) l'assunzione di *Urelemente* non era per lui necessaria e anzi che la teoria degli insiemi avrebbe potuto e, dal punto di vista della matematica, avrebbe dovuto esserne emendata;

2) l'universo insiemistico non poteva originarsi, se alla sua base non si fosse concesso almeno un oggetto, sia esso insiemistico (l'insieme vuoto) oppure no (un individuo qualunque).

In questo discorso l'autore valutava dunque l'opportunità di eventuali *Urelemente* soltanto in previsione di una praticabilità effettiva della teoria degli insiemi. Non vi sono solo ragioni speculative o filosofiche – egli ricordava – ma anche ragioni pratiche. Nel primo caso egli sosteneva a ragion veduta che «un individuo era necessario per la fondazione dell'universo»[208]: a conferma di ciò, Fraenkel ricordava ad esempio come solo ammettendo l'esistenza di almeno un

---

206 Cfr. Ackermann, W., *Mengentheoretische Begründung der Logik*, «Mathematische Annalen», 1937, vol. 115, pp. 1-22. Mostowski, A., *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip*, «Fundamenta Mathematica», vol. 32, 1938, pp. 201-52

207 Cfr. Quine, W., *Set-Theoretic Foundations for Logic*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 1, n. 2, 1936, pp. 45-57

208 Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 24

individuo fosse possibile erigere, a partire da esso, la costruzione dell'intero universo.

Ancor più rilevanti appaiono le sue considerazioni in merito alle ragioni pratiche. Fraenkel ci pare avesse tentato inizialmente una posizione di mediazione e di conciliazione con quella allora sostenuta da Zermelo. Egli aveva infatti osservato nel 1922 come il dominio normale (*Normalbereich*), di cui parlava Zermelo, non contemplasse l'eventualità di essere vuoto. Fatto questo che avrebbe evidentemente comportato l'eliminazione *tout court* degli *Urelemente* per le ragioni sopra esposte. Fraenkel notò però che tale affermazione non era del tutto corretta. Se si esaminava infatti la concezione originaria di Zermelo, ci si accorgeva che più propriamente Zermelo intendeva per "*Urelement*" qualsiasi cosa non contenesse a sua volta elementi; cioè a dire qualunque oggetto non fosse identificabile con un qualche tipo di insieme per mezzo della condizione di *Bestimmtheit*. Se si esaminava dunque la proprietà caratterizzante l'insieme vuoto[209], si poteva osservare che anche quest'ultimo in fondo soddisfaceva a tale condizione in quanto privo di elementi. In effetti l'insieme vuoto è una sorta di *Urelement* improprio, così come risulta essere allo stesso tempo una classe impropria per le stesse ragioni. Esso si trova a metà strada fra le due concezioni ed è solo un rafforzamento definitorio dettato da una scelta metodologica di non secondaria importanza, che ne consente una chiara collocazione fra gli insiemi. Fraenkel osservò che era possibile mediare fra una posizione pura ed una impura, diciamo così, proprio accettando il compromesso di accontentarsi di un solo individuo cioè la *Nullmenge*.

«Questa visione era sufficiente a tutti gli scopi della matematica e semplificava la concezione materialmente e in parte anche formalmente»[210], come anche Zermelo ebbe modo di riconoscere. Inoltre, sostituendo l'assioma di estensionalità adottato da Zermelo nel 1908 con una rielaborazione che coinvolgesse non più i soli insiemi, bensì tutte le cose del dominio in questione, Fraenkel era in grado di mostrare che qualsiasi individuo od oggetto fosse dovuto occorrere nel dominio, sarebbe per forza di cose stato eguale all'insieme vuoto.

Ciò è di fondamentale importanza proprio per rispondere con maggior adeguatezza alle esigenze pratiche. Trascurando il fatto che una pluralità di entità diverse avrebbe compromesso il problema della categoricità[211], Fraenkel riconobbe l'indiscusso vantaggio di poter disporre di un insieme vuoto non tanto per accontentare l'esigenza e l'aspirazione zermeliana ad un'applicazione

[209] "*Nullmenge*" nel linguaggio originario di Zermelo. Cfr. Zermelo, E., *Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik, I*, p. 263
[210] Fraenkel, A., *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*, *op. cit.*, p. 234
[211] *Ibidem*, p. 234

universalistica della teoria degli insiemi; quanto per favorire la semplificazione dei calcoli e la linearità dei ragionamenti.

A prevalere dunque nella concezione fraenkeliana non sembra essere un'esigenza meramente teoretica; piuttosto appare evidente la necessità matematica di fornire adeguata giustificazione delle proprie scelte in relazione al carattere operativo della teoria stessa. Tuttavia ciò non avviene e non può avvenire senza forzare in qualche misura anche la soggiacente concezione teorica. La decisione infatti di unificare, per così dire, le sostanze non-insiemistiche in un solo oggetto, l'insieme vuoto, non può essere priva di conseguenze sull'intera visione dell'universo insiemistico.

Per comprendere ciò è allora opportuno considerare alcune delle ragioni addotte da Fraenkel. Esaminiamo cosa dice ad esempio nei suoi *Foundations*:

> «When we define the intersection of two sets *r* and *s* to be the set *t* which consists of those elements which belong to both *r* and *s*, we want the intersection to be defined even in the case where *r* and *s* have no members in common. In this case the intersection *t* has to be a memberless element, i.e., an individual. There are also many other examples where the existence of a memberless element makes things simpler. The same practical reasons which call for the existence of such an element also call for using always the same element for the intersection of any two sets *r* and *s* with no members in common, and for referring to this element as a set. Therefore we shall call this element the *null-set* and our sets are, from now on, the elements which have members as well as the null-set. Let us, however, stress at this point that whereas the existence of at least one individual is required for serious philosophical reasons, referring to one of the individuals as the null-set is done only for reasons of convenience and simplicity, and can be regarded as a mere notational convention»[212].

In questo passaggio Fraenkel sottolinea un fatto molto importante: non è possibile rinunciare al'insieme vuoto, giacché questo consente di definire elegantemente la situazione in cui verrebbero a trovarsi due insiemi fra loro disgiunti, tali cioè che dati due insiemi "*r*" ed "*s*", allora $r \cap s = \emptyset$. In tal caso sarebbe la necessità di esprimere questo fatto a comportare un rivolgimento all'universo individuale, nella misura in cui risultino essere individui quegli oggetti *memberless*. A ciò vi si aggiungerebbe poi la necessità di dover considerare seriamente l'ipotesi circa l'esistenza di almeno un individuo, come

[212] Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 24

precedentemente visto. Così le due ragioni assieme costituiscono – sembra sostenere Fraenkel – un buon viatico all'adozione di un dominio di riferimento meno diversificato, dal punto di vista delle sostanze, sebbene non del tutto privo ed emendato dalle individualità.

In realtà la visione di Fraenkel è un po' più restrittiva di quanto non appaia nei *Foundations*; infatti egli scorgeva non solo la necessità di trovare un referente per il concetto di *memberless* ma anche il bisogno di assicurarne l'unicità.

Ciò è in perfetto accordo con quanto egli stesso aveva stabilito nelle *Untersuchungen*[213]: se si vuol esprimere il fatto che l'intersezione di altri due insiemi qualunque "v" e "w" sia eguale al vuoto o che, data una classe di insiemi $J = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, i suoi membri siano a due a due eguali all'insieme vuoto (e quindi tra loro disgiunti), allora occorrerà anche garantire che quell'insieme vuoto, cui le intersezioni considerate rimandano, sia lo stesso in tutte le circostanze, autorizzando l'ovvia proprietà per cui intersezioni disgiunte, sebbene costituite da elementi diversi, siano fra loro eguali.

Tale passaggio ci pare piuttosto importante per comprendere come allora Fraenkel sembri organizzare la propria concezione intorno agli *Urelemente*: occorre infatti una riformulazione dell'assioma di *Bestimmtheit*, tale per cui l'unicità che quest'ultimo riesce a garantire per tutti gli altri insiemi dell'universo, sia estesa e garantita anche per l'individuo in questione. Per realizzare tuttavia un simile proposito, non è sufficiente osservare che la *Nullmenge* è l'unica sostanza individuale concessa, né tenere indeterminata la circostanza ontologica di intermediarietà fra natura insiemistica e natura individuale.

L'insieme vuoto ci pare essere a questo punto senz'altro un insieme, per due ragioni:

1) l'occorrenza richiesta di estendere l'assioma di estensionalità a tutte le cose del dominio implica l'identificazione di tutti gli individui, eventualmente presenti, con l'insieme vuoto;

2) viceversa, se l'insieme vuoto non fosse un insieme come tutti gli altri, allora non potrebbe soggiacere alla condizione di determinatezza ed affermare con ciò la propria unicità, complicando e rendendo poco naturali i calcoli insiemistici.

[213] Cfr. Fraenkel, A., *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, *op. cit.*, pp. 255-6

Del resto, come affermerà Fraenkel nel '58, sono «le stesse ragioni pratiche che invocano l'esistenza di un tale elemento […] [ad] invocare l'uso costante dello stesso elemento […] e a riferirsi ad esso come ad un insieme»[214].

L'ammissione di un solo *Urelement* non sembra pertanto una scelta innocua né tantomeno mediana rispetto alla volontà di estendere l'ontologia, se così possiamo dire, dell'universo cui si rivolge la propria attenzione.

Ci sembra possibile concluderne pertanto che, in netta antitesi al pensiero di Zermelo, per l'altro grande contributore del pensiero insiemistico-assiomatico, non vi sia in fondo alcuna necessità di rivolgersi all'uso di sostanze non-insiemistiche, nemmeno per fondare in un'ultima analisi l'universo stesso.

Inoltre, a riprova di ciò, potrebbe essere considerata anche l'insoddisfazione provata per certi versi dallo stesso Fraenkel allorché questi dimostrò l'indipendenza dell'assioma di scelta[215] dal resto della base assiomatica proprio mediante l'uso determinante degli *Urelemente*, arrangiati – come noto – in coppie non-ordinate di oggetti fondamentalmente indistinguibili[216]. Occorrerà attendere i risultati di Cohen[217] (1963) per provare con assoluta certezza che, congiuntamente ai lavori di Gödel[218], poteva finalmente affermarsi l'indipendenza dell'*Auswahlaxiom*, all'interno di una teoria totalmente priva ormai di individui.

In base a quanto considerato sin qui dunque, non scorgiamo ragioni determinanti per escludere eventuali *Urelemente* dal dominio di riferimento, quanto piuttosto validi motivi per operarvi con attenzione e relativa parsimonia. Le richieste di Fraenkel risultano sono infatti assolutamente corrette; definiscono eleganza di pensiero e conferiscono al sistema *ZF* notevoli qualità estetiche. Tuttavia non ci sembrano concludere necessariamente in favore della sua scelta, se non riconoscendo qui unicamente delle ragioni metodologiche, di impostazione, sulle quali si potrebbe benissimo non concordare, come faceva Zermelo. Ciò che sembrava dominare e catturare l'attenzione di Fraenkel era innanzitutto la ricerca degli elementi assolutamente necessari ad imbastire adeguatamente la trama del tessuto matematico. La matematica infatti può fare a

---

[214] Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 24. Nel 1922 Fraenkel non era dello stesso avviso: «Verfährt man in dieser Art, so wird die Nullmenge zu dem einzigen Ding, das keine Menge ist». Cfr. Fraenkel, A., *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*, *op. cit.*, p. 234. Queste osservazioni offriranno un fertile terreno per le considerazioni circa il sistema formale ZFU_1, allorché si discuterà proprio dell'insieme vuoto. In quanto insieme, la *Nullmenge* non potrà che risultare fortemente definita, giacché le inconsistenze riguarderanno, per quel che sarà possibile mostrare, solo gli *Urelemente*.

[215] Fraenkel, A., *Der Begriff "definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlsaxioms*, *op. cit.*

[216] Cfr. Torretti, R., *El paraìso de Cantor*, Editorial Universitaria, Santiago de Chile, 1998, pp. 472-5

[217] Gödel, K., *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis*, «Proceedings of the National Academy of Sciences», vol. 24, 1938, pp. 556-7

[218] Cohen, P. J., *The Independence of the Axiom of Choice*, mimeographed, Stanford University, 1963

meno degli individui – come egli stesso aveva brillantemente dimostrato: agli occhi dei matematici tali sostanze risultavano e risultano tuttora per la gran parte superflue. Ciò denota un atteggiamento piuttosto autoreferenziale della matematica, che non ammette in linea di principio contaminazioni ontologiche nel proprio ambito di ricerca. Più probabilmente, perlomeno nel caso di Fraenkel, attraverso un simile atteggiamento si intendeva esprimere quella forte esigenza di sistemazione, che negli anni Venti del Novecento poteva addirittura vantare pretese fondazionali; ma che oggi, particolarmente dopo Gödel[219], sappiamo essere insoddisfacibili, almeno sotto certe specifiche condizioni logiche e teoriche, trasversalmente rilevanti per molti ambiti della matematica.

Questa tesi sembrerebbe essere ulteriormente rafforzata poi dal fatto che Fraenkel si pronunciava sulle *Dinge des Normalbereichs* come su di oggetti di «origine non-matematica e soprattutto non-concettuale». Fatto questo abbastanza sorprendente, se si pensa che fra di essi potrebbero benissimo trovarsi gli oggetti della geometria, per i quali sarebbe difficile non ammettere una natura altrettanto ideale. Inoltre potrebbero trovarvi collocazione anche oggetti della matematica stessa, per i quali si è semplicemente rinunciato ad una definizione insiemistica. L'assunzione dunque di oggetti come naturalmente dati e non insiemisticamente definiti, pone la seria questione di cosa possa o debba intendersi come «*begrifflich*». Ci sembra di poter rintracciare ancora una volta il filo conduttore della ricerca fondazionale, che prevedeva una sistematica riduzione di tutti gli oggetti della matematica ad oggetti elementari fra loro omogenei[220].

Tuttavia una simile riduzione crediamo possa riposare pacificamente solo su di una relazione di questo tipo:

$$(matematico \subseteq concettuale) = insiemistico$$

Ci pare ammissibile una tesi del genere per la filosofia della matematica di Fraenkel, giacché nella sua prospettiva la teoria degli insiemi restava pur sempre

[219] Gödel, K., *Über unentscheidbare Sätze der „Principia Mathematica" und verwandter Systeme I*, *op. cit.*

[220] Possiamo provare a ricostruire in estrema sintesi, intuitivamente e senza alcuna pretesa di rigore questo passaggio, immaginando di ricondurre certe questioni le une alle altre, per esempio in quest'ordine: i problemi intorno agli oggetti della geometria possono essere visti come problemi intorno ad oggetti propri dello spazio reale $\mathbb{R}^3$; quest'ultimo lo si potrebbe ricondurre al caso particolare di un'espansione ottenuto a partire dall'aritmetica dei numeri razionali; il caso della definizione dei numeri razionali a quello dei numeri interi e questi ultimi a quello dell'aritmetica dei numeri naturali, definiti a loro volta attraverso gli strumenti insiemistici, sfruttando i quali sarebbe possibile virtualmente considerare i numeri reali come di sottoinsiemi dell'insieme dei numeri naturali.

Idealkalkül; inoltre, affermando che le cose del dominio 𝔅 erano di origine non-matematico ma soprattutto non-concettuale[221], egli sembrava intendere una maggiore estensione dell'ambito concettuale rispetto a quello puramente matematico, il che appare del tutto sostenibile. Ciò che ammette una riduzione concettuale appare in ultima analisi proprio per questo dover in qualche modo accordarsi con l'analisi insiemistica, in virtù del fatto che la "decomponibilità" di cui parla Fraenkel è sempre "decomponibilità insiemistica"; e ciò sembra del tutto plausibile, dal momento che, dato un certo oggetto, la sua decomponibilità dovrebbe innanzitutto darsi mediante la capacità di isolarne specifiche proprietà. Del resto Fraenkel aveva parlato degli *Urelemente* come di oggetti «non-costruibili», laddove per "costruibilità" egli intendeva la "costruibilità insiemistica", da realizzarsi attraverso le operazioni ammesse. Ci pare allora di poter affermare che per Fraenkel "decomponibilità" e "costruibilità" siano in fondo due processi simili seppur inversi l'uno rispetto all'altro e che il loro svolgersi determini proprio il processo di concettualizzazione. Posizione questa che rimanda in qualche misura anche al modo in cui Dedekind aveva precedentemente inteso la logica ed il suo rapporto con la teoria degli insiemi[222].

Ad ogni modo ciò che è rilevante osservare per il nostro studio è che se ciò fosse ritenuto vero ancora oggi, allora ci troveremmo dinanzi alla contraddizione di dover ammettere l'evidente «matematicità» e «concettualità» dell'aritmetica, pur non essendo quest'ultima interamente ricostruibile nella teoria degli insiemi a causa dei limiti di tale sistema formale.

Che cosa dunque stabilisce un confine fra ciò che è concettuale e ciò che non lo è? Per Fraenkel si potrebbe rispondere forse dicendo che concettuale è tutto ciò che si lascia descrivere insiemisticamente. Tuttavia, come detto, ciò non risulterebbe del tutto soddisfacente ed avrebbe probabilmente conseguenze poco gradite ai matematici stessi. Fra di esse ad esempio quella secondo cui la matematica fonderebbe, in ultima analisi, la propria esistenza non su giudizi analitici di qualche tipo; bensì su giudizi sintetici *a posteriori*[223], attraverso un lavorio costante di astrazione esercitato sui dati empirici forniti dall'esperienza.

---

[221] Fraenkel, A., *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*, *op. cit.*, p. 233

[222] Cfr. Gana, F., *Introduzione*, in Dedekind, R., *Scritti sui fondamenti della matematica*, a cura di F. Gana, Bibliopolis, Napoli, 1982, p. 33

[223] Questa era ad esempio la contesta posizione assunta da John Stuart Mill, che voleva, nel rapporto con l'esperienza quotidiana del mondo, la fonte ultima donde derivare i più basilari concetti della matematica. Mill, che si definiva un «filosofo dell'esperienza», era alla ricerca di un sistema di carattere generale, che gli consentisse di indebolire il momento deduttivo delle scienze a favore del momento euristico vero e proprio, quello che si riscontra in laboratorio o, in termini più generali, nel quotidiano rapportarsi ai risultati dei *tests* scientifici. Ciò mirava alla costruzione di una «scienza "perfetta" dei corpi naturali – o, in altre parole, una teoria dimostrativa dell'induzione»; in contrasto con l'Empirismo anglosassone, egli sosteneva che era solo attraverso di essa che si dava la possibilità di una conoscenza adeguata delle cose. Come scriveva Cranston, «egli sosteneva che tutta la conoscenza dell'universo è derivata dall'osservazione sensoriale» e

In base a ciò è forse possibile affermare che le acute osservazioni di Fraenkel, per quanto corrette e portatrici di un'interessante visione dei problemi sin qui affrontati, non siano determinanti nello scardinare radicalmente l'impianto teorico di Zermelo e che in fondo, se limitiamo l'intervento degli *Urelemente* nella normale vita dell'insiemistica pura, allora potrebbero non manifestarsi sostanziali difficoltà nell'accettare la presenza di individui «estranei» al *corpus mathematicum*.

inoltre che «egli si opponeva a coloro i quali sostenevano che la conoscenza di qualche verità sintetica fosse o innata oppure acquisita mediante una speculazione razionale». In particolare questa visione lo conduceva, per quel che concerne la matematica, ad affermare nel II libro della sua *Logic* che «anche la conoscenza matematica era fondata in qualche modo su basi induttive». Egli condivideva l'opzione kantiana di considerare le proposizioni riguardanti la matematica come proposizioni sintetiche (anche se qui sarebbe più corretto parlare di "giudizi"); ma non ne condivideva la convinzione secondo cui esse avessero carattere analitico. Ciò cozzava fortemente con le sue convinzioni basilari, soprattutto perché in forte antitesi con l'ottica descritta poco fa, per mezzo della quale Mill intendeva rifondare la conoscenza scientifica. Nella sua concezione non era l'uomo a imporre alla realtà le proprie categorie; era piuttosto la realtà a manifestarsi all'uomo nel suo vero essere, mediante il processo di apprendimento induttivo. Pertanto «le proposizioni matematiche sono verità sperimentali di tipo altamente generale» ed «esse non sono necessariamente vere», a meno che non si intenda "necessario" «nel senso che è psicologicamente impossibile per noi dubitarne». Cfr. Mill, J. S., *System of Logic Ratiocinative and Inductive*, John W. Parker, West Strand, London, 1843, in Mill, J. S., *Collected Works of John Stuart Mill*, voll. 7-8, J. M. Robson (ed.), University of Toronto Press, Toronto, 1973, con particolare riferimento al libro II, capitolo V, paragrafi 3 e 4, pp. 229-33; capitolo VI, paragrafi 1 e 2, pp. 252-7. Cranston, M., *Mill, John Stuart*, in Gillispie, C. *et alii*, (eds.), *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 9, Scribner's Sons, New York, 1981, p. 383-6. Panza, M., Sereni, A., *Il problema di Platone*, Carocci, Roma, 2010, p. 31

XIII. *Linguaggio del sistema formale ZFU$_1$*

1. Il linguaggio $\mathcal{L}(ZFU_1)$

In questo capitolo definiamo il linguaggio del nostro sistema formale ZFU_1 come segue:

- alfabeto
  - logico
    - connettivi: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$
    - quantificatori: $\forall, \exists$
  - descrittivo
    - variabili insiemistiche: $X_1, X_2, \dots, Y_1, Y_2, \dots, W_1, W_2 \dots, Z_1, Z_2, \dots$
    - variabili individuali: $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots, w_1, w_2, \dots, z_1, z_2, \dots$
    - variabili per elementi: $m_1, m_2, \dots n_1, n_2, \dots, p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots$
    - costanti {predicati k − ari: $P_1^2(x, y)$
  - ausiliario: (,) [ ] { }
- espressioni
  - termini
    - variabili insiemistiche, individuali, per elementi
    - nient'altro
  - fbff
    - se $t_1, \dots, t_k$ sono termini, allora $P_1^2(t_1, t_2)$ è una fbf
    - $\frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}, \frac{\alpha, \beta}{\alpha \vee \beta}, \frac{\alpha, \beta}{\alpha \rightarrow \beta}, \left(\frac{\alpha, \beta}{\alpha \leftrightarrow \beta}\right), \frac{\alpha}{\neg \alpha}, \left(\frac{\alpha}{\alpha^{\circ}}\right)$
    - $\frac{\alpha}{\forall x \alpha}, \frac{\alpha}{\exists x \alpha}$
    - nient'altro

In base alla schematizzazione qui presentata, si può osservare che nel definire $\mathcal{L}(ZFU_1)$ non abbiamo fatto altro che relativizzare $\mathcal{L}(C_1^*)$ al linguaggio della teoria degli insiemi, in particolare all'alfabeto entro cui è normalmente scritto ZF[224].

[224] Occorre osservare che la dicitura '*ZF*' è un'abbreviazione della sigla dovuta ai nomi di Zermelo-Fraenkel introdotta a partire dal 1928. Tale dicitura non era mai stata impiegata in precedenza né da Zermelo né da Fraenkel. Il primo a farne uso fu John von Neumann (cfr. Neumann, J. von, *Über die Definition durch transfinite Induktion undverwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre*, «Mathematische Annalen», vol. 99, 1928, p. 374. Dopo aver adoperato l'espressione "Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre", von Neumann chiarì alla nota 4 della stessa pagina l'uso di tale dicitura, per allora del tutto nuova, rifacendosi in particolare ai contributi di Fraenkel (le *Untersuchungen I & II*), nei quali il matematico bavarese si riferiva al sistema di Zermelo ancora come al sistema di "Cantor-Zermelo": «Das Axiomensystem von Zermelo (Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Math. Ann. **65** (1908)) wurde von Fraenkel präzisiert und abgeschlossen (Unters. Über die Grundl. D. Mengenl., Math. Zeitschr. **22** (1925); Axiomatische Theorie der geordneten Mengen, Journal f. Math. **155** (1926)). Beim

Non abbiamo inoltre fornito ulteriori specifiche sulle formule contenenti variabili per insiemi piuttosto che variabili per *Urelemente* e dunque considereremo almeno per il momento la sensatezza anche di formule atomiche del tipo α del tipo “$m \in x$”. In seguito valuteremo se tenere o meno questa generalità di casi e daremo indicazioni in merito alla sostituzione di variabili all’interno delle singole formule.

Infine desideriamo osservare che l’unica relazione primitiva ammessa esplicitamente nel linguaggio, sarà intesa come la relazione di appartenenza ‘$\in$’ (*membership*), formalizzata dalla lettera predicativa ‘$P_1^2(x, y)$’.

Nel prosieguo faremo uso direttamente del simbolo ‘$\in$’, che scriveremo al posto di ‘$P_1^2(x, y)$’ in posizione infissa, anziché prefissa. Pertanto saranno equivalenti le seguenti espressioni indicanti tutte l’appartenenza insiemistica:

$$[\![E]\!] \quad P_1^2(t_1, t_2) \leftrightarrow \in (t_1, t_2) \leftrightarrow (t_1 \in t_2)$$

Zitieren und bei der Bezeichnungsweise soll für uns die letztere Arbeit von Fraenkel maßgebend sein»), al quale fece seguito due anni più tardi lo stesso Zermelo (cfr. Zermelo, E., *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, manoscritto, p. 22; UAF, C 129/216 (cfr. Ebbinghaus, H.-D-, *Ernst Zermelo. An Approach to His Life and Work*, *op. cit.*, p. 189 e p. 336)). Tuttavia è opportuno menzionare anche Thoralf Skolem, che ha dato enormi contributi allo sviluppo di questo sistema formale. Talvolta infatti si utilizza per ciò l’abbreviazione ‘ZSF’ o ‘ZFS’ proprio per rammentare quanto i contributi del matematico norvegese abbiano influenzato questo tipo di teoria.

2. Osservazioni al concetto di multisortalità

Facciamo ora qualche osservazione sia di natura teorica che di natura pratica all'impostazione generale data nella scelta del linguaggio.

Dal punto di vista teorico esistono due possibili vie all'introduzione degli *Urelemente* accanto agli insiemi:

1) l'adozione di una sola sorta di variabili e di una costante predicativa primitiva '$P_1^1(x)$', da intendersi come "x è un insieme" o "x è una classe", che può affiancare la relazione fondamentale '$P_1^2(x,y)$';

2) l'adozione di più sorte di variabili: alcune per gli insiemi, altre per gli oggetti eventualmente presenti.

Nel caso si proceda secondo la strategia indicata al punto 1), la distinzione tra "insiemi" e "classi", è necessaria solo se la teoria che si sta costruendo prevede di fatto due sorte di collezioni. Altrimenti i due termini saranno semplicemente considerati l'uno sinonimo dell'altro[225]. Se si sceglie la strada 1), si possono prendere in considerazione due predicati: '$Cls(x)$' o '$M(x)$'. Se la teoria prevede classi che non sono insiemi, è possibile partire dalla nozione primitiva di "classe" e derivare quella di "insieme" e dalla negazione di queste, quella di "*Urelement*". Se questo non fosse il caso, allora si potrebbe decidere di assumere come primitiva direttamente la nozione di "insieme".

Scegliendo "$Cls(x)$" quale nozione indefinita[226], è possibile procedere con le seguenti definizioni:

1) $Cls(x)$

2) $M(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left[Cls(x) \wedge \exists y\big(Cls(y) \wedge (x \in y)\big)\right]$

3) $Ur(x) \stackrel{\text{def}}{=} [\neg Cls(x) \wedge \neg M(x)]$

4) $Pr(x) \stackrel{\text{def}}{=} \neg M(x)$

[225] Non consideriamo qui il caso di "classe", intesa in senso logico.
[226] Rubin, J., *Set Theory for the Mathematician*, Holden-Day, San Francisco, 1967, p. 20

Nel caso la distinzione tra insiemi e classi non fosse richiesta, si può procedere con maggior facilità, giacché sarebbe sufficiente distinguere semplicemente ciò che è insieme da ciò che non lo è:

1) $M(x)$

2) $Ur(x) \stackrel{\text{def}}{=} \neg M(x)$

Lo scegliere una o più lettere predicative tra le nozioni indefinite per indicare le differenti sorte di oggetti, ha il pregio di consentire una scrittura più rapida, avendo a disposizione un solo tipo di variabili e non più un doppio registro di lettere, ripartite in lettere maiuscole e lettere minuscole. In caso contrario – notava Borgers[227] – il problema sarebbe che, disponendo di due sorte di variabili, occorrerebbe in un certo senso scrivere certe fbff due volte per ribadire la validità di una determinata condizione sia rispetto agli insiemi sia rispetto agli *Urelemente*. Per esempio, rispetto alla condizione che definisce l'insieme vuoto, dovremmo indicare la proprietà "essere privo di elementi" sia rispetto alle variabili insiemistiche che alle variabili individuali, scrivendo come segue:

$$\forall x(x \notin \emptyset) \wedge \forall X(X \notin \emptyset)$$

Inoltre, nel nostro caso, occorrerebbe prendere in considerazione il fatto che per un sistema formale del tipo ZFU_1 sarebbe necessario chiarire anche quale tipo di negazione si intende impiegare.

Un altro esempio[228] può essere costituito dalla definizione della condizione per isolare gli insiemi unità, che dovrà ovviamente essere valida tanto per insiemi quanto per oggetti. Così avremmo:

$$\exists Y\left(\forall y\big((y \in Y) \leftrightarrow (y = x)\big) \wedge \forall X\big((y \in Y) \leftrightarrow (X = x)\big)\right)$$

$$\exists Y\left(\forall y\big((y \in Y) \leftrightarrow (y = Z)\big) \wedge \forall X\big((y \in Y) \leftrightarrow (X = Z)\big)\right)$$

[227] Borgers, A., *Development of the Notion of Set and of the Axioms for Sets*, *op. cit.*, pp. 377-8
[228] *Ibidem*, p. 376-8

La scelta descritta al punto 1) consente la semplificazione di scritture così «ingombranti»[229]. Quest'ultimo caso può essere infatti semplificato scrivendo semplicemente:

$$\exists y\left(M(y)\wedge\forall z\big((z\in y)\leftrightarrow(z=x)\big)\right)$$

Tuttavia nella generalità dei casi da esaminare, fbff del tipo $Qx\alpha(x)$ dovranno essere intese sempre in maniera tale che non si creino confusioni circa la tipologia di oggetti considerati. Potrebbe infatti trattarsi di un predicato soddisfatto indistintamente da oggetti ed insiemi, come nel caso sopra esaminato, dove la variabile "*z*" ha come *range* tanto la lista di insiemi quanto quella di *Urelemente*. Potrebbe però anche darsi che il predicato considerato sia caratteristico di una sola sorta di tali cose; allora ciò dovrà esser reso chiaro almeno dal contesto. In ogni caso è possibile stipulare clausole sufficientemente rigorose a tale scopo. Ad esempio:

1.a $\forall x[Cls(x)\rightarrow \mathrm{A}(x)]$

2.a $\forall x[M(x)\rightarrow \mathrm{A}(x)]$

3.a $\forall x[Ur(x)\rightarrow \mathrm{A}(x)]$

oppure:

1.b $\exists x[Cls(x)\wedge \mathrm{A}(x)]$

2.b $\exists x[M(x)\wedge \mathrm{A}(x)]$

3.b $\exists x[Ur(x)\wedge \mathrm{A}(x)]$

229 "*Cumbersome*" è il termine utilizzato dallo stesso Borgers. Cfr. Borgers, A., *Development of the Notion of Set and of the Axioms for Sets*, *op. cit.*, p. 377

Il passo fondamentale, che andrebbe ad innervare una simile struttura, consisterebbe nella scelta degli assiomi: infatti «le proprietà delle nozioni indefinite» devono essere «descritte per mezzo di assiomi e schemi di assiomi»[230], giacché occorre fissarne chiaramente le caratteristiche.

In tal senso allora bisognerà fissare degli assiomi e degli schemi di assioma, che descrivano le proprietà di "$P_1^2(x,y)$" e "$Cls(x)$" o "$M(x)$". Un esempio di ciò può facilmente essere reperito nei lavori di Rubin[231] o di Mendelson[232]. In entrambi i casi si tratta di un *modus operandi* di grande eleganza, che procede gradualmente verso la chiarificazione di ogni punto mediante la caratterizzazione formale degli elementi primitivi del linguaggio. Altro esempio di grande interesse è senz'altro quello fornito da Mostowski[233] verso la fine degli anni Trenta.

In questi tre esempi di sistemi formali la scelta condivisa è quella indicata al punto 1). Tutti e tre sono stati concepiti per accogliere eventuali *Urelemente* e tutti e tre infatti hanno dovuto in conseguenza di ciò operare almeno una scelta.

Per lo sviluppo del sistema ZFU_1 abbiamo invece preferito seguire la strategia indicata al punto 2), introducendo variabili specifiche per oggetti ontologicamente diversi. In particolare le variabili individuali indicate in minuscolo saranno utilizzate per gli *Urelemente*; mentre le variabili scritte in maiuscolo saranno impiegate per gli insiemi. In accordo con quanto osservato in precedenza, ribadiamo di non voler ammettere *a priori* l'esistenza di alcun individuo (non-insiemistico), come può invece verificarsi in certi particolari modelli[234]. Ciò che intendiamo fare è consentire che modelli del sistema formale ZFU_1 siano anche quegli universi, all'interno di cui si trovino individui insiemisticamente non-decomponibili. Distinguere fra due sorte di oggetti, nonostante possa sembrare una forzatura rispetto a tale propensione, non costituisce alcun tipo di ostacolo al concepimento di un modello che ne risulti privo[235]. La nostra teoria, emendata dagli assiomi di carattere esplicitamente esistenziale, non è di per sé in grado di provare che ci siano effettivamente gli oggetti di cui essa parla. Ciò non può esser dimostrato in ZFU_1 così come non può essere provato nemmeno nei sistemi assiomatici tradizionali come ZF, alla cui architettura ZFU_1 è chiaramente

---

230 Rubin, J., *Set Theory for the Mathematician*, *op. cit.*, p. 24
231 *Ibidem*, pp. 24-44
232 Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, *op. cit.*, 297-304
233 Mostowski, A., *Über die Unabhängigkeit des Wohlordungssatzes von Ordnungsprinzip*, «Fundamenta Mathematicae», vol. 32, 1939, pp. 201-52; trad. ingl., *On the Independence of the Well-Ordering Theorem from the Ordering Principle*, in Mostowski, A., *Foundational Studies. Selected Works*, vol. 1, North Holland, Amsterdam, 1979, pp. 290-338
234 È questo il caso appunti di specifici modelli come quelli elaborati da Fraenkel e Mostowski. Cfr. Fraenkel, A., *Über den Begriff „Definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms*, *op. cit.* Mostowski, A., *Über die Unabhängigkeit des Wohlordungssatzes von Ordnungsprinzip*, *op. cit.*
235 Cfr. Borgers, A., *Development of the Notion of Set and of the Axioms for Sets*, «Synthese», vol. 7, n. 6, 1948/9, pp. 375-8

ispirato. Pertanto gli individui che si vuol formalmente caratterizzare, siano essi insiemi piuttosto che *Urelemente*, non esistono se non in via del tutto ipotetica. Su quest'ultimo punto avremo modo di tornare in seguito.

Desideriamo chiudere questo paragrafo spiegando brevemente le ragioni che ci hanno indotto a propendere per la seconda strategia. Sebbene infatti vi siano degli ottimi motivi sia teorici che pratici per seguire la strada precedentemente illustrata, riteniamo che vi siano motivi non del tutto infondati per muoversi anche sulla traccia indicata in 2).

Dal punto di vista teorico e senza scendere nel dettaglio delle singole teorie, ci pare che la strategia 2) offra una soluzione più diretta e lineare al problema di dover ipotizzare tipologie di individui fra loro differenti.

L'introduzione di possibili predicati primitivi per specificare la natura delle variabili coinvolte in una certa espressione non ci sembra risolvere del tutto una questione, quella concernente la costruzione e la definizione degli elementi non-primitivi. È possibile procedere assumendo come primitive le nozioni "$Ur(x)$" e "$P_1^2(x, y)$", procedendo alla definizione delle restanti; oppure assumere la costante "f_1^0" e la lettera predicativa binaria "$P_1^2(x, y)$"; o infine "$M(x)$"/" $Cls(x)$" e "$P_1^2(x, y)$". Tali scelte consentono di ricavare le nozioni mancanti mediante apposite definizioni e pertanto risultano più che sufficienti a costruire una teoria degli insiemi con *Urelemente*.

Tuttavia il raggiungimento di tale scopo ci pare soggetto ad alcune difficoltà concettuali. Qualunque strategia si intenda prediligere tra quelle poco sopra elencate, ci pare emerga la seguente difficoltà: i predicati assunti come primitivi non sembrano in grado di evitare l'uso di relazioni, per le quali non siano ancora stati fissati degli assiomi adeguati e per le quali dunque non si sia stata ancora imposta alcuna specifica condizione.

Se esaminiamo infatti la strategia con la quale si assumono come primitiva la relazione "$P_1^2(x, y)$" ed il predicato " $Cls(x)$", possiamo osservare che è possibile definire i concetti "$M(x)$" e "$Ur(x)$", qualora sia importante distinguere fra classi che sono anche insiemi e classi in senso proprio. Ciò può aver luogo soltanto se si è chiarita del tutto la distinzione tra questi due gruppi di cose, ossia se è ben determinata la differenza fra un *Urelement* e l'insieme vuoto. Tale differenza però non può essere espressa in termini di sola appartenenza – come osservava bene Quine – e sarebbe opportuno disporre almeno della relazione di eguaglianza. Tuttavia per definire quest'ultima o per fissarne degli assiomi adatti allo scopo, occorrerebbe utilizzare i predicati " $Cls(x)$" e "$Ur(x)$", che si stava in precedenza tentando di distinguere. Il problema fondamentale ci appare essere ancora una volta quello concernente la natura dell'insieme vuoto, il quale ha come propria essenza o definizione quella di non possedere elementi; definizione questa che finisce con l'appaiare quest'oggetto di natura insiemistica con un qualunque altro individuo non-insiemistico. Gli *Urelemente* sono infatti proprio quelli oggetti insiemisticamente non-decomponibili, cioè che non possiedono elementi. Quando questi ultimi vengono introdotti, la difficoltà di effettuare le dovute distinzioni ci pare non trascurabile, a differenza di quanto accade allorché la teoria non prevede altre cose all'infuori degli insiemi stessi.

Del resto, se accettassimo come condizioni primitive "$Ur(x)$" e "$P_1^2(x,y)$", ci troveremmo in una situazione analoga: potremmo infatti derivare con opportune definizioni i predicati "$M(x)$"/"$Cls(x)$", qualora la distinzione sia rilevante, ed osservare che è solo la relazione di eguaglianza a dirci quali tipologie di individui (in senso logico) effettivamente i due predicati distinguano, dal momento che ancora una volta la collezione nulla risulterebbe indistinguibile.

In sostanza nell'avviare la costruzione del nostro sistema formale e partendo dunque dalla definizione fondamentale della relazione di eguaglianza e da predicati primitivi come "$M(x)$"/"$Cls(x)$" o "$Ur(x)$" assieme a "$P_1^2(x,y)$", risulterebbe una sorta di circolarità, dovuta in breve al fatto che per introdurre la relazione di eguaglianza sarebbe opportuno distinguere le variabili tra insiemi (o classi) ed *Urelemente*; mentre per distinguere completamente gli insiemi dagli *Urelemente* occorrerebbe affermare esplicitamente la diversità dell'insieme vuoto dagli oggetti non-insiemistici. Cosa questa che richiederebbe proprio la relazione di eguaglianza, giacché non sembra possibile distinguere gli *Urelemente* dall'insieme vuoto.

Una risposta dunque a tale difficoltà appare essere quella di ammettere superabile una sorta di insufficienza per quanto riguarda la soluzione di disporre soltanto assiomi per caratterizzare i predicati primitivi prescelti. Ci appare performante invece l'idea in base a cui sia proprio la definizione della relazione di eguaglianza a giocare un primo e fondamentale passo nella determinazione del ruolo giocato proprio dai predicativi primitivi, che non esprimono la relazione di appartenenza.

Desideriamo inoltre concludere questo capitolo osservando che ciò che si perde inizialmente in termini di rapidità e maneggevolezza a causa della presenza di più sorte di variabili per altrettante sorte di oggetti, si recupera con una certa efficacia non appena si comincia a stilare la lista degli assiomi. Prova ne sia il fatto che sistemi con *Urelemente* del tipo $NBGU$ di Mendelson[236], pur cominciando proprio da predicati monadici primitivi per distinguere le classi (o insiemi) dalle classi proprie e queste dagli individui, opta ben presto per una scrittura di tipo multisortale, che risulta di grande efficacia nella semplificazione dei postulati. Inoltre, per superare l'*impasse* di definizioni o teoremi da riscrivere più di una volta – come sottolineato da Borgers, è sufficiente considerare un terzo tipo di

[236] Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, *op. cit.*, pp. 297-304

variabili, che possa valere per entrambi (o per tutti e tre) i tipi di elementi considerati.

Così in sostanza fare economia in termini di linguaggio produce riverberi in termini concettuali e si rivela nella pratica non meno complicato di quanto sia l'operare in un sistema multisorta. Viceversa ciò che non viene economizzato linguisticamente, produce buone semplificazioni nel corso del lavoro. Alla rinuncia di economia simbolica e concettuale, ci pare possa corrispondere efficacia concettuale e rapidità espressiva.

XIV. Gli assiomi propri di ZFU_1

1. La relazione di eguaglianza in ZFU_1

In questo paragrafo ci occuperemo dell'introduzione della relazione di eguaglianza. L'obiettivo fondamentale di questa sezione sarà quello di fornire a ZFU_1 una relazione binaria, che renda il sistema formale in questione una teoria elementare[237] con identità.

Per il raggiungimento di questo scopo è possibile prendere in considerazione tre strade[238], distinguibili come segue:

a. il simbolo di eguaglianza denota l'identità (logica);

b. l'eguaglianza è una delle relazioni primitive della teoria, così come lo è quella di appartenenza;

c. l'eguaglianza viene introdotta per definizione.

Esamineremo brevemente queste tre strategie. Per quanto concerne il metodo indicato al punto a., se il simbolo di eguaglianza denotasse l'identità, allora il sistema formale esprimerebbe l'eguaglianza come una relazione appartenente alla logica ad esso soggiacente. In tal caso dunque occorrerebbe accertarsi che siano garantite a livello logico proprietà quali la riflessività, la simmetria, la transitività e la sostitutività dell'identità; proprietà quest'ultima che dovrà riguardare le formule atomiche del sistema in questione.

Diciamo formalmente allora che un sistema costruito secondo la strategia a. dovrà provare le seguenti quattro proprietà:

1. $a = a$;

[237] L'espressione "teoria elementare" designa in genere ogni sistema formale al primo ordine. Cfr. Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, *op. cit.*, p. 98

[238] Cfr. Frankel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, pp. 25-30

2. $(a = b) \rightarrow (b = a)$;

3. $[(a = b) \wedge (b = c)] \rightarrow (a = c)$;

4. per ogni fbf $\beta(a)$, se vale $\beta(a)$ e vale $(a = b)$, allora vale anche $\beta(b)$.

La condizione 4. potrebbe essere indebolita, tenendo conto che nel caso di un sistema formale per la teoria degli insiemi si potrebbe assumere:

5. se $(a \in b)$ e $(a = c)$, allora $(c \in b)$; se $(b \in a)$ e $(a = c)$, allora $(b \in c)$.

Le condizioni 1.-3. e la condizione 5. sono sufficienti per derivare la condizione 4., da cui un sistema insiemistico potrebbe quindi anche essere emendato.

Esistono comunque ancora altre semplificazioni. Si potrebbe infatti sfrondare l'elenco delle proprietà richieste, limitandosi a considerare solo alcune di esse. Scegliendo infatti come assiomi la condizione di riflessività e la condizione di sostitutività, dotata di opportuni accorgimenti, è possibile sintetizzare le quattro proprietà elencate come segue:

$[\![1]\!]$ $\forall a(a = a)$

$[\![2]\!]$ $\forall a \forall b\big[(a = b) \rightarrow \big(A(a,a) \rightarrow A(a,b)\big)\big]$

dove occorre tener presente per $[\![2]\!]$ che a e b sono due variabili individuali e $\alpha(a,b)$ deriva da $\alpha(a,a)$ mediante sostituzione di una (o eventualmente di tutte le occorrenze di) a con b in $\alpha(a,a)$, posto che b sia libera per a; inoltre la formula $\alpha(a,a)$ è una formula atomica, dove non compaiono costanti individuali.

Con questa scelta è possibile notare che la simmetria e la transitività sono entrambe derivabili ed è dunque possibile contrarre il numero di richieste da soddisfare, precisamente delle condizioni 2. e 3. In linea teorica generale un qualunque sistema formale al primo ordine che soddisfi le condizioni $[\![1]\!]$ e $[\![2]\!]$, assumendole tra i propri assiomi o risultando in grado di dimostrare accanto a $[\![1]\!]$

la validità dell'espressione ⟦2⟧ per tutte le formule atomiche della teoria prive di costanti individuali, si dice avere l'identità o essere dotato di identità[239].

Venendo al caso del sistema formale ZFU_1, la scelta di non escludere *a priori* gli *Urelemente* impone degli accorgimenti, che risulteranno del tutto caratteristici della teoria che qui si intende descrivere. Così la scelta di limitare o caratterizzare *ad hoc* l'azione di questa relazione a livello logico, imporrebbe a nostro avviso una restrizione che in linea teorica parrebbe «difettosa» rispetto all'ideale di imparzialità e indifferenza della logica nei confronti del dominio di discorso trattato. Del resto una caratterizzazione logica dell'identità è già stata elaborata dalla scuola brasiliana e non intendiamo apportare cambiamenti alla tassonomia propria della gerarchia dei calcoli $C_{n,_{1\leq n<\omega}}$ provvisti di identità $\left(C^{=}_{n,_{1\leq n<\omega}}\right)$. Ciò che occorre è dunque una relazione di eguaglianza, che risulti adeguata al tipo di teoria che stiamo tentando di costruire e sarà necessario favorire quest'aderenza concettuale attraverso delle specifiche, che sarebbe a nostro avviso improprio introdurre a livello logico; senza considerare il fatto che deferire l'eguaglianza alla teoria piuttosto che alla logica del sistema formale, renderebbe quest'ultima meno impegnata assiomaticamente e dunque più flessibile.

Veniamo al percorso indicato in b. In questo caso non si riscontrano differenze essenziali rispetto alla strategia precedentemente esaminata, giacché le scelte conseguenti a tale adozione non risultano divergenti in maniera sostanziale rispetto alle conseguenze, che è possibile trarre, e rispetto all'ampliamento del numero di assiomi, che occorrerebbe comunque fissare. Infatti, in base a quanto accennato poc'anzi, in b. si andrebbe a considerare l'eguaglianza come una relazione primitiva al pari di quella di appartenenza. Si potrebbero allora prendere in considerazione come assiomi le proposizioni poco prima esaminate, osservando che, data una lettera predicativa binaria del tipo "$E^2_1(a,b)$" da affiancare a "$P^2_1(a,b)$", si dovrebbero introdurre come assiomi della teoria le seguenti quattro condizioni:

1. $\forall a E^2_1(a,a)$;
2. $\forall a \forall b[E^2_1(a,b) \rightarrow E^2_1(b,a)]$;
3. $\forall a \forall b \forall c\big[[E^2_1(a,b) \wedge E^2_1(b,c)] \rightarrow (a,c)\big]$;
4. se $P^2_1(a,b)$ e $E^2_1(a,c)$, allora $P^2_1(c,b)$; se $P^2_1(b,a)$e $E^2_1(a,c)$, allora $P^2_1(b,c)$.

239 Cfr. Mendelson E., *Introduction to Mathematical Logic*, *op. cit.*, pp.

I teoremi che è possibile ottenere mediante la strategia $b.$ sono allora gli stessi che è possibile dedurre adottando la metodologia $a.$

Tuttavia, per ragioni di economia linguistica ed assiomatica e per motivi di chiarezza concettuale, preferiamo qui evitare l'adozione di una lettera predicativa binaria da accostare alla relazione fondamentale di appartenenza, evitando così anche l'assunzione di appositi assiomi. Seguiremo pertanto la strategia restante, indicata in $c.$, che consentirà mediante definizione ed un solo assioma di governare adeguatamente questo importante predicato.

Ciò ci pare essere in accordo anche con quanto osservato a proposito della scelta di un linguaggio multisortale, dove si era riscontrato il ruolo-chiave giocato proprio dalla relazione di eguaglianza nel discernimento dei diversi tipi di oggetti presi in considerazione.

2. *Definizione della relazione di eguaglianza*

Veniamo ora alla terza ed ultima strategia tra quelle elencate, che sarà quella adottata per ZFU_1. L'obiettivo di una buona definizione per la relazione di eguaglianza è quello – come detto – di fornire uno strumento tale da consentire la deduzione delle proprietà 1.-4., 1.-3. e 5 o ⟦𝟙⟧ e ⟦𝟚⟧.

In una teoria in cui si abbia a che fare con soli insiemi, sappiamo che è possibile trovare con una certa facilità una definizione del genere. Potremmo infatti definire l'eguaglianza in questo modo:

$$[\![**]\!] \quad (m =_{\mathrm{c}} n) \stackrel{\mathrm{def}}{=} [\forall p(p \in m \leftrightarrow p \in n) \wedge \forall q(m \in q \leftrightarrow n \in q)]$$

Questo tipo di definizione dell'eguaglianza è anche denominata "congruenza rispetto all'appartenenza" (o "*membership-congruence*")[240]. Essa definisce l'eguaglianza tra due insiemi m e n come quella relazione valida nel caso in cui m e n abbiano entrambi gli stessi elementi ed appartengano a loro volta agli stessi insiemi.

Una relazione di questo tipo soddisfa evidentemente le proprietà di riflessività, di simmetria e di transitività. Inoltre è sostitutiva rispetto alle formule fondamentali del tipo $P_1^2(m,n)$ (cioè $(m \in n)$), che sarebbero le uniche ammesse nel sistema. La forza di tale definizione è molto elevata, dato che essa non fa uso di alcun assioma proprio ed è sufficiente per dimostrare la validità delle proprietà 1.-4., ricorrendo ai soli assiomi logici e alla definizione stessa. Inoltre sarebbe possibile provare che questo tipo di definizione coincide di fatto con qualunque altra relazione di eguaglianza soddisfacente le proprietà 1.-4. Per tali ragioni, in un contesto puramente insiemistico, risulterebbe del tutto appropriato l'impiego della relazione $m =_{\mathrm{c}} n$, in quanto non si correrebbe mai il rischio di perdere qualcuna delle proprietà precedentemente viste, giacché è dimostrabile che $[(m = n)\ aeq\ (m =_{\mathrm{c}} n)]$.

L'impostazione indicata in $[\![**]\!]$ è così senz'altro adeguata per sistemi formali del tipo ZF; ma risulta inappropriata per sistemi formali che non escludano *a priori Urelemente* o che contemplino l'esistenza di classi proprie. Le ragioni di questo fatto possono essere spiegate come segue. La *membership-congruence* si compone evidentemente di due asserti fondamentali, cioè a dire:

[240] Cfr. Frankel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 27

1) $\forall p(p \in m \leftrightarrow p \in n)$;

e

2) $\forall q(m \in q \leftrightarrow n \in q)$.

Il primo di questi due enunciati garantisce la natura estensionale degli oggetti del dominio; il secondo invece costituisce una «caratterizzazione duale dell'eguaglianza»[241], in base alla quale oggetti fra loro eguali appartengono alle stesse classi. In termini pratici, quando ci si pone il problema di definire l'eguaglianza all'interno di un sistema formale volto ad esprimere fatti riguardanti gli insiemi, occorre prestare attenzione a come si garantisce la proprietà della sostitutività. Se prendiamo in considerazione le formule atomiche del sistema, vale a dire formule del tipo $P_1^2(m,n)$, o più concretamente $m \in n$, e vogliamo considerare la relazione di eguaglianza tra una delle sue due variabili ed una terza, ad esempio p, si osserva che la sostitutività potrebbe allora riferirsi tanto al primo quanto al secondo elemento. Cioè la relazione di eguaglianza potrebbe stabilirsi fra m e p oppure fra n e p. Questo punto non è affatto indifferente rispetto alla scelta assiomatica o definitoria della relazione di eguaglianza per due ragioni.

La prima è che la scelta del primo dei due congiunti, senza specifiche restrizioni, renderebbe la teoria inadeguata alla trattazione degli *Urelemente*. Senza restrizioni tutti gli oggetti della teoria verrebbero a coincidere con la propria estensione e in tal modo ogni oggetto privo di elementi sarebbe eguale all'insieme vuoto. Ora, poiché la proprietà fondamentale degli *Urelemente*, che qui tratteremo, è proprio quella di non essere insiemisticamente decomponibili, cioè di non avere elementi, questi si troverebbero per forza di cose a coincidere con l'insieme nullo, determinando sostanzialmente la loro scomparsa dall'orizzonte teorico del sistema in questione.

La seconda invece è che la scelta dell'altro congiunto renderebbe la teoria inadeguata alla trattazione di oggetti come le classi proprie. Infatti se accettassimo senza restrizioni questa parte della definizione, per stabilire l'esistenza di due classi proprie differenti, occorrerebbe anche trovare almeno una classe, cui una di esse appartenga contrariamente a quanto accade per l'altra. Tuttavia è la nozione stessa di classe propria che escluderebbe una tale eventualità, dal momento che

[241] Cfr. Frankel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 28

una classe propria è per definizione una classe che non appartiene ad alcun'altra classe[242].

Rispetto a queste due difficoltà, il sistema ZFU_1 è coinvolto rispetto alla prima di esse poiché non si ammetteranno qui distinzioni di sorta tra classi (proprie) ed insiemi. Il problema che occorre affrontare consiste nella ricerca di una definizione che conservi, per quanto possibile, le buone proprietà della *membership-congruence*, senza per ciò impedire l'ipotesi di base, per la quale il sistema possa trattare liberamente anche gli *Urelemente*.

Questo fatto ci ha portato a prendere delle misure precauzionali rispetto a questo rischio e a cercare una formulazione per l'eguaglianza, che fosse adeguata allo scopo.

Per far ciò, occorre dunque considerare la definizione $[\![**]\!]$ separatamente. Spezzando infatti la definizione $[\![**]\!]$ nelle sue due componenti fondamentali, si ottengono le seguenti due definizioni parziali:

1. $(m = n) \stackrel{\text{def}}{=} \forall p(p \in m \leftrightarrow p \in n)$[243]

2. $(m = n) \stackrel{\text{def}}{=} \forall q(m \in q \leftrightarrow n \in q)$[244]

Nessuna delle due è ovviamente più in grado di garantire da sola quanto offerto dalla *membership-congruence* nella sua interezza. In particolare la relazione $(x =_{\mathrm{c}} y)$ è in grado di assicurare mediante 1. la sostitutività rispetto al secondo elemento della relazione di appartenenza; mentre riesce a garantire la sostitutività rispetto al primo argomento della relazione di appartenenza mediante 2. La loro congiunzione consente così di superare ogni *impasse* rispetto alle proprietà 4. o 5., dal momento che nessuna delle due è in grado di derivare l'altra[245].

---

[242] Un'importante differenza potrebbe essere scorta osservando la natura delle proposizioni atomiche, all'interno delle quali si troverebbero ad occorrere le variabili di classe. Cfr. Frankel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 122

[243] Nel suo celebre lavoro, Thiele chiamò questo tipo di eguaglianza "*Umfangsgleichheit*", che indicò simbolicamente con '$\underset{u}{=}$'. Cfr. Thiele, E., *Ein axiomatisches System der Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel*, «Zeitschrift für mathematische Logik», vol. 1, 1955, p. 175

[244] Questo tipo di eguaglianza è invece chiamata da Thiele "*Eigenschaftsgleichheit*" e indicata con '$\underset{e}{=}$'. La sua congiunzione logica con la relazione menzionata nella nota precedente, dà luogo all'eguaglianza insiemistica nel senso della predetta *membership-congruence*, ossia: $(X = Y) \stackrel{\text{def}}{=} \left(X \underset{u}{=} Y\right) \wedge \left(X \underset{e}{=} Y\right)$. Questa relazione costituisce fra l'altro anche un segno distintivo di rilievo fra il sistema insiemistico che l'adotta e la teoria dei tipi di Russell, per la quale sarebbe sufficiente assumere $(X = Y) \stackrel{\text{def}}{=} \forall Z(X \in Z \rightarrow Y \in Z)$. *Ibidem*, p. 175

[245] Cfr. Robinson, A., *On the Independence of the Axioms of Definiteness (Axiome der Bestimmtheit)*, *op. cit.*, pp. 69-70. Bernays, P., Fraenkel, A., *Axiomatic Set Theory*, *op. cit.*, pp. 6-9.

Il loro smembramento non consente più questo efficace binomio e d'altra parte esso appare assolutamente necessario, volendo sviluppare una teoria aperta alla possibilità concreta degli *Urelemente*.

Per sopperire a tali difficoltà, diventano così indispensabili due assiomi, che si possono assumere alternativamente a seconda che si scelga la definizione 1. o la definizione 2.

Nel primo caso sarà necessario dotare il sistema formale del seguente assioma:

$$1.\text{a } \forall m \forall n \forall p\big[[(m \in n) \wedge (m = p)] \rightarrow (p \in n)\big]$$

Mentre nel secondo, si dovrà assumere il seguente postulato:

$$2.\text{a } \forall m \forall n \forall p\big[[(p \in m) \leftrightarrow (p \in n)] \rightarrow (m = n)\big]$$

Per una teoria del tipo ZF non importa quale di queste due alternative si prediliga, se cioè si assuma le definizione 1. e l'assioma $1.a$ oppure la definizione 2. e l'assioma $2.a$, giacché $[1.+1.a]$ equivale a $[2.+2.a]$.

A questo punto la strada da seguire sembra abbastanza ovvia e in qualche modo obbligata. Non possiamo infatti scegliere *tout court* la relazione di *membership-congruence*; ma non possiamo nemmeno accettare $[1.+1.a]$ o $[2.+2.a]$, che risulterebbero equivalenti alla definizione appena accantonata.

La via che abbiamo seguito è quella di accettare le due definizioni parziali con delle opportune restrizioni, che introdurremmo facendo uso proprio del linguaggio multisortale precedentemente indicato.

La definizione di eguaglianza che accetteremo sarà allora composta delle seguenti parti fondamentali:

Definizione 14.1

$$1.\text{a } (X = Y) \stackrel{\text{def}}{=} \forall Z(Z \in X \leftrightarrow Z \in Y)$$

$$2.\text{a } (X = Y) \stackrel{\text{def}}{=} \forall z(z \in X \leftrightarrow z \in Y)$$

Abian, A., *Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, Saunders, Philadelphia-London, 1965, pp. 69-71

3.a $(X = Y) \stackrel{\text{def}}{=} \forall Z(X \in Z \leftrightarrow Y \in Z)$

4.a $(x = y) \stackrel{\text{def}}{=} \forall Z(x \in Z \leftrightarrow y \in Z)$

donde la

Definizione 14.2

$$\big[(X = Y) \stackrel{\text{def}}{=} [\forall Z(Z \in X \leftrightarrow Z \in Y) \vee \forall z(z \in X \leftrightarrow z \in Y)]\big] \vee$$
$$\vee [(x = y) \stackrel{\text{def}}{=} \forall Z(x \in Z \leftrightarrow y \in Z)]$$

ottenuta unendo alternativamente i casi $1.a$, $2.a$, $4.a$[246].

Possiamo abbreviare questo tipo di scrittura, piuttosto ingombrante, sfruttando la terza sorta di variabili, quella per elementi laddove possibile. Quest'ultima occorrerà infatti indistintamente sia per insiemi che per *Urelemente* e consentirà di sintetizzare la definizione come segue:

Definizione 14.3

$$\big[(X = Y) \stackrel{\text{def}}{=} [\forall Z(Z \in X \leftrightarrow Z \in Y)]\big] \vee [(x = y) \stackrel{\text{def}}{=} \forall Z(x \in Z \leftrightarrow y \in Z)]$$

246 Il caso $3.a$ risulterà derivabile grazie all'assioma di estensionalità che andremo ad adottare.

3. *Primo assioma: l'estensionalità degli insiemi*

A questo punto possiamo completare il discorso circa la relazione di eguaglianza nel sistema formale ZFU_1, passando direttamente alla formulazione del nostro primo assioma, quello di estensionalità[247] per gli insiemi.

Nel precedente paragrafo abbiamo osservato le peculiarità della relazione in questione, che impongono un trattamento specifico al fine di includere gli *Urelemente* accanto agli insiemi. Abbiamo anche visto come la relazione di eguaglianza, che occorre ricercare nella teoria per gli insiemi, debba essere una relazione il più aderente possibile a quella di *membership-congruence*. Ciò può avvenire soltanto se l'«indistinguibilità insiemistica completa»[248] da imporre agli eventuali modelli venga garantita assiomaticamente, assicurando entrambi i congiunti della relazione di congruenza rispetto all'appartenenza alle classi. Tale fatto consente una caratterizzazione ottimale della natura degli insiemi che intendiamo qui conservare, rispettando pur tuttavia la natura non-insiemistica di quelle cose, che invece non sono tali.

Sarà pertanto sufficiente garantire la condizione di dualità dell'estensione per i nostri insiemi affinché si possa completare il nostro discorso. Nella conclusione del paragrafo 14.2 abbiamo infatti portato a compimento metà del lavoro, potendo dimostrare che $(X =_c Y)$ implicava $(X = Y)$[249]. Per poter invertire questa relazione logica e far sì dunque che $(X = Y)$ implichi $(X =_c Y)$, occorre formulare un opportuno assioma. Solo in tal modo si avrà la certezza di aver catturato con la nostra definizione e con il prossimo assioma la relazione di eguaglianza più adatta al contesto insiemistico discusso.

Procediamo dunque alla stipulazione del nostro primo assioma:

<u>Assioma di estensionalità</u>. ***E***

$$\forall X \forall Y \forall Z \big[[(X \in Z) \wedge (X = Y)] \rightarrow (Y \in Z)\big]$$

[247] Come ammoniva Bernays, in teoria degli insiemi è abbastanza naturale parlare di eguaglianza e di estensionalità in maniera congiunta e sarebbe auspicabile per ragioni di chiarezza includere all'interno di uno stesso paragrafo la trattazione dei due concetti. «Gli insiemi sono visti» infatti «come individui che sono […] determinati dai loro stessi elementi». Il nostro obiettivo è però dichiaratamente contrario a questo indirizzo di carattere generale; il nostro scopo è far sì che accanto a ciò che è "individuo", nel senso generale in cui lo intende Bernays, possano trovarsi anche degli "individui", nel senso in cui li intendeva originariamente Zermelo. Cfr. Bernays, P., Fraenkel, A., *Axiomatic Set Theory*, *op. cit.*, p. 52

[248] Abian, A., *The Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, *op. cit.*, p. 70

[249] Questo fatto sarà meglio chiarito in seguito, quando andremo a dimostrare come la relazione di eguaglianza da noi introdotta garantisca effettivamente al sistema in questione l'identità.

Facciamo qualche osservazione e diamo qualche chiarimento al riguardo. Innanzitutto occorre osservare che l'assioma in questione è stato formulato utilizzando esclusivamente variabili in maiuscolo. Ciò significa in sostanza che il nostro assioma ha un valore prescrittivo esclusivamente per gli insiemi del nostro sistema. Ciò è in accordo con quanto detto poc'anzi. Non possiamo e non dobbiamo infatti concedere condizioni troppo forti alla relazione di eguaglianza in questione, se non vogliamo che quest'ultima costituisca un ostacolo insormontabile alla trattazione di oggetti che non siano insiemi. Se l'ottenimento della *membership-congruence* fosse slegata dalla limitazione del contesto al quale essa si applica, otterremmo che tutte le cose prive di elementi coinciderebbero o, meglio, sarebbero nient'altro che l'insieme vuoto; e l'assioma E avrebbe proprio questa conseguenza, se non opportunamente dato.

La necessità di questa formulazione, a questo punto dello sviluppo del nostro sistema formale, è necessaria proprio in questa forma. Allo stato attuale non potremmo provare dalla semplice estensionalità il suo converso giacché non sono stati ancora dati altri assiomi, come quello della coppia, che consente la deduzione di un principio più forte. Tutto ciò che potremmo ottenere a questo punto, come conseguenza diretta della definizione di eguaglianza data nel paragrafo precedente sarebbe l'assioma di estensionalità nella forma:

$$\forall X \forall Y \forall Z \big[[(Z \in X) \wedge (Z \in Y)] \rightarrow (X = Y)\big]$$

che risulterebbe una semplice tautologia.

Tuttavia Abraham Robinson[250] ha dimostrato che per un contesto insiemistico la definizione di eguaglianza del tipo:

---

[250] Robinson, A., *On the Independence of the Axioms of Definiteness (Axiome der Bestimmtheit)*, *op. cit.*, pp. 69-72. Si deve sostanzialmente a Robinson la dimostrazione del fatto che, partendo solo da una definizione della relazione di eguaglianza, che contenga solo uno dei due congiunti della *membership-congruence*, è impossibile avere fra le conseguenze tutti gli enunciati che da essa deriverebbero. Robinson ha infatti scoperto che, assumendo la definizione conversa di quella estensionale, risulta inderivabile proprio il comune assioma di estensionalità, cioè a dire che, data:

$(X = Y) \stackrel{\text{def}}{=} \forall Z[(X \in Z) \wedge (Y \in Z)]$

essa soddisfa:

$\forall X \forall Y \forall Z \big[[(X \in Y) \wedge (X = Z)] \rightarrow (Z \in Y)\big]$

e

$$(X = Y) \stackrel{\text{def}}{=} \forall Z[(Z \in X) \leftrightarrow (Z \in Y)]$$

definisce l'eguaglianza come una relazione di equivalenza, che soddisfa le seguenti due condizioni:

$$⟦1⟧\ \forall X \forall Y \forall Z\{[(Z \in X) \wedge (Z \in Y)] \rightarrow (X = Y)\}$$

$$⟦2⟧\ \forall X \forall Y \forall Z\{[(X \in Y) \wedge (Y = Z)] \rightarrow (X \in Z)\}$$

ma che non soddisfa:

$$⟦3⟧\ \forall X \forall Y \forall Z\big[[(X \in Z) \wedge (X = Y)] \rightarrow (Y \in Z)\big]$$

che è proprio l'assioma ***E*** da noi adottato sopra.

Possiamo infine osservare che la condizione di estensionalità è parte integrante del sistema formale ZFU_1, entro i limiti però che ci eravamo prefissati.

Gli insiemi sono tutti eguali fra loro secondo i criteri della *membership-congruence* e risultano pertanto estensionalmente definiti. Ciò non è di per sé una condizione necessaria: si potrebbe ad esempio prendere in considerazione l'aspetto intensionale degli aggregati, che si va a considerare. Così facendo allora si potrebbe definire gli insiemi non in base agli elementi che ne fanno parte, bensì in base alla loro proprietà definiente, facendo sì che essi risultino tra loro eguali rispetto alla proprietà che esprimono. In tal caso si dovrebbe formulare però un "assioma di intensionalità", dove con il termine "intensionalità", che è l'antonimo

---

$\forall X \forall Y \forall Z\big[[(X \in Z) \wedge (X = Y)] \rightarrow (Y \in Z)\big]$

ma risulta indipendente da:

$\forall X \forall Y \forall Z\big[[(Z \in X) \wedge (Z \in Y)] \rightarrow (X = Y)\big]$

Risultati analoghi furono ottenuti alcuni prima da Heinrich Vieler, ciatato dallo stesso Robinson. Cfr. Vieler, H., *Untersuchungen über Unabhängigkeit und Tragweite der Axiome der Mengenlehre in der Axiomatik Zermelos und Fraenkels*, (Dissertation) Kaestner, Göttingen, 1926, pp. 7-15 di "estensionalità", si potrebbe indicare, come ricordava Rubin, «la somma degli attributi contenuti o connotati dal termine»[251].

Una simile scelta sembrerebbe comportare tuttavia degli inconvenienti. Come ha fatto notare Fraenkel[252], ci sono almeno tre buone ragioni per preferire il concetto di estensionalità a quello di intensionalità, quando si parla di insiemi:

1) «la nozione estensionale di insieme è più semplice e chiara di qualunque altra nozione intensionale di insieme»[253];

2) «mentre c'è una sola nozione estensionale di insieme, potrebbero esserci diverse nozioni intensionali di insieme, che dipenderebbero dallo scopo per cui quegli insiemi vengono richiesti»[254];

3) «[…] partendo dalla semplice nozione estensionale di insieme» è possibile «ottenere, per mezzo degli assiomi, un sistema di teoria degli insiemi nel quale si possano costruire nozioni molto più complesse»[255].

Queste tre osservazioni sono di grande importanza per ogni sistema di teoria degli insiemi.

La prima di esse mette in luce una verità, legata al fatto che mentre abbiamo un'idea sufficientemente chiara di cosa debba essere un insieme estensionalmente inteso, altrettanto non ci pare possa dirsi per il concetto di intensione. Se ad esempio richiamiamo la distinzione introdotta da Frege[256] (distinzione rispetto alla quale possono legittimamente sollevarsi obiezioni[257]) tra *Sinn* e *Bedeutung*, ci accorgiamo più concretamente del fatto che la difficoltà che separa nettamente le due nozioni, risiede nella non-univocità con cui ci si riferisce ad un particolare elemento, oggetto della nostra considerazione. In maniera un po' rozza e costretta, diciamo che mediante il termine "*Sinn*" Frege soleva indicare il contenuto concettuale di una certa espressione, della quale si prendeva in esame il modo in cui essa si riferiva ad una certa cosa. Mentre col termine "*Bedeutung*" egli

---

[251] Rubin, J., *Set Theory for the Mathematician*, *op. cit.*, p. 25. Cfr. Frankel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 27
[252] Cfr. Frankel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 28
[253] *Ibidem*, p. 28
[254] *Ibidem*, p. 28
[255] *Ibidem*, p. 28
[256] Frege, G., *Über Sinn und Bedeutung*, «Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik», vol. 100/1 (Neue folge), 1892, pp. 25-50
[257] Cfr. Malatesta, M., *Fondazione della logica pragmatica transculturale*, Nova Millennium Romae, Roma, 2006, pp. 23-4

intendeva richiamare l'attenzione sul significato di una data espressione, che resta immutato al di là dei modi con cui ci si riferisce ad esso. L'esempio addotto da Frege in proposito è ormai parte integrante della letteratura e della cultura analitica: considerando i due astri Espero e Fosforo, si può facilmente comprendere questa duplice distinzione. Col primo dei due nomi si esprime una caratteristica di una certa stella, quella della sera, che si scorge al calar del Sole; mentre col secondo "Fosforo" si esprime la caratteristica di una certa stella, quella del mattino, che si scorge quando appunto, come dice il nome stesso, si fa strada la luce del giorno. Dal punto di vista concettuale, i due termini non sono affatto tra loro coincidenti, in quanto "stella del mattino" e "stella della sera" esprimono due fatti concettualmente diversi. Tuttavia, come si è poi scoperto, le due definizioni denotano in realtà il medesimo oggetto, in quanto l'astro cui entrambe fanno riferimento è sempre lo stesso e, nella fattispecie, non è una stella bensì un pianeta: Venere. Si ha così un classico esempio di connotazioni differenti, per usare la terminologia milliana[258], che condividono la medesima denotazione. Ora i concetti che queste due espressioni definiscono sono fra loro eguali solo rispetto all'estensione ma non rispetto all'intensione. Il modo con cui si caratterizza un certo oggetto non può in linea generale essere schiacciato, appiattito sul denotato; e questo può costituire un problema. Anche l'esempio che Fraenkel adduceva è abbastanza illuminante[259]: si potrebbe parlare – egli dice – dell'insieme dei numeri reali non-negativi così come della classe di tutti i quadrati dei numeri reali proprio tenendo presente questa duplice distinzione. E anche in questo caso le classi non coinciderebbero dal punto di vista intensionale, sebbene esse risultino del tutto indistinguibili da quello estensionale poiché costituite dagli stessi elementi.

Veniamo con ciò al vantaggio osservato al punto 2). Tenendo presenti tali distinzioni, la difficoltà che si riesce a superare tenendo come fondamentale la nozione estensionale di insieme rispetto a quella intensionale è la possibilità di limitare un certo grado di arbitrarietà altrimenti presente nella teoria. Arbitrarietà risultante dal fatto che si potrebbe ampiamente discutere su quale delle differenti nozioni intensionali utilizzare per riferirsi ad un certo insieme, dal momento che – osservava Fraenkel – ci sarebbe un certo margine di scelta nel decidere se definizioni intensionali di insiemi date da espressioni «verbalmente differenti ma logicamente equivalenti»[260], debbano essere o meno riguardate come la stessa. Nel caso del pianeta Venere ad esempio il fatto di connotarlo come la "stella del mattino" o la "stella della sera" esprime due definizioni o – come dice Fraenkel – due modi di "presentare" uno stesso oggetto; cioè a dire esse attribuiscono un

[258] Cfr. Malatesta, M., *La logica primaria*, LER, Napoli-Roma, 1988, pp. 16-7
[259] Cfr. Frankel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, pp. 27-8
[260] *Ibidem*, p. 28, nota 1

qualcosa ad un medesimo oggetto con verità e pertanto sono logicamente equivalenti. Tuttavia si potrebbe discutere o meno sul fatto che esse debbano essere considerate come una medesima definizione, dal momento che in tal caso la scoperta della comunanza del rispettivo denotato non era affatto una cosa risaputa.

Infine col punto 3) è possibile osservare che la scelta della nozione estensionale di insieme non comporta una rinuncia *a priori* né chiude alla possibilità di sfruttare eventuali nozioni di tipo intensionale. Queste ultime saranno infatti opportunamente introdotte per connotare certi particolari oggetti, che risulteranno importanti in seguito all'interno del discorso, che il nostro sistema formale intende sostenere[261].

La definizione data per l'eguaglianza congiuntamente all'assioma ***E*** ci sembrano, per vari motivi, adeguati al caso degli insiemi, in quanto essi consentono che l'identità tra classi dipenda innanzitutto dalla loro estensione. Inoltre anche il concetto di identità, circoscritto al caso degli *Urelemente*, ci pare dotato di proprietà ad essi adeguate. Infatti esso evita che questi ultimi vengono identificati fra loro in base alla rispettiva estensione, che – come detto – comporterebbe il loro collasso sull'insieme vuoto. Inoltre consente la distinzione degli *Urelemente* in base alle loro proprietà: ciò che risulta infatti è che due *Urelemente* sono distinti se e solo se essi differiscono per almeno una proprietà. Metodo distintivo questo già utilizzato in filosofia, giacché analogo – a nostro avviso – alla procedura di differenziazione aristotelica, che ha luogo individuando il genere e le differenze specifiche, che sempre più approssimano il soggetto che si sta tentando di individuare. In tal senso forse la nozione stessa di *Urelement*, che qui ci proponiamo di studiare, si avvicina in parte a quella aristotelica di "sostanza"; per "sostanza" – diceva Aristotele – occorre intendere una «cosa ben determinata», di cui si cerca l'essenza sostanziale o «ciò che una cosa è», data dai suoi possibili predicati. In tal caso allora – scriveva lo Stagirita – poiché «l'essenza sostanziale appartiene soltanto alle cose che sono oggetto del discorso che costituisce una definizione», bisognerà rivolgere la propria attenzione a quelle cose che possono ricevere tale definizione: ed esse sono proprio quel «qualcosa di primo» (*Ur-Element*)), dove «prime sono tutte le cose che non possono essere predicate di altre»[262].

[261] Ciò avverrà mediante apposite definizioni.
[262] Aristotele, *Metafisica*, VII, 4, 1030a 10-11

4. Alcune conseguenze dell'assioma E

In questo paragrafo discuteremo delle due importanti proprietà connesse alla relazione di eguaglianza adottata: la riflessività e la sostitutività rispetto alle formule atomiche del sistema.

Provando la loro valida per la definizione di eguaglianza prescelta, mostreremo come il sistema formale ZFU_1 possa dirsi effettivamente una teoria elementare con identità.

Veniamo alla proprietà di riflessività:

Teorema 14.1 $\vdash_{ZFU_1} \forall m(m = m)$

Dimostrazione

Dovremo distinguere due casi. Abbiamo infatti utilizzato una variabile della terza sorta e dunque l'enunciato che ci apprestiamo a dimostrare vale indistintamente tanto per gli insiemi quanto per gli eventuali oggetti primitivi presi in considerazione. Distingueremo allora la prova in due momenti:

1° caso: $(m = x)$. Allora, in base alla definizione di eguaglianza data nel paragrafo precedente, un *Urelement* è eguale a se stesso se e solo se per ogni classe X, esso appartiene ad X se e solo se esso appartiene ad X. Formalmente allora procederemo partendo dal teorema 4.2, a cui applicheremo la regola 3, ottenendo $\big((x \in X)\rightarrow(x \in X)\big)$. Di qui seguirà $\big((x \in X)\leftarrow(x \in X)\big)$ per la definizione dell'operatore '$\leftarrow$' e $\big((x \in X)\leftrightarrow(x \in X)\big)$ per la definizione del funtore '$\leftrightarrow$'. Inoltre, per l'assioma 1 e la regola MP, varrà $\big[(P\rightarrow P)\rightarrow\big((x \in X)\leftrightarrow(x \in X)\big)\big]$ e per la regola 5 applicata due volte varrà anche $\big[(P\rightarrow P)\rightarrow\forall X\forall x\big((x \in X)\leftrightarrow(x \in X)\big)\big]$. Così per la regola del *modus ponens* $\big[\forall X\forall x\big((x \in X)\leftrightarrow(x \in X)\big)\big]$, che per la definizione di eguaglianza, valida per gli oggetti non-insiemistici, potrà essere riscritta come "$\forall x(x = x)$";

2° caso: $(m = X)$. Allora, in base alla definizione di eguaglianza data nel paragrafo precedente, un insieme è eguale a se stesso se e solo se per ogni elemento n, esso appartiene ad X se e solo se esso appartiene ad X. Formalmente partiamo nuovamente dal teorema 4.2 e ricaviamo per la regola 3 $\big((n \in X)\rightarrow(n \in X)\big)$. Considerando la definizione dell'operatore '$\leftarrow$', varrà allora anche $\big((n \in X)\leftarrow(n \in X)\big)$, donde $\big((n \in X)\leftrightarrow(n \in X)\big)$ per la definizione del funtore '$\leftrightarrow$'. Così per l'assioma 1, la regola 3 e la regola MP varrà $\big[(P\rightarrow P)\rightarrow\big((n \in X)\leftrightarrow(n \in X)\big)\big]$, da cui, per doppia applicazione della regola 5, seguirà $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X \forall n\big((n \in X) \rightarrow (n \in X)\big)\right]$. Applicando la regola del *modus ponens*, si otterrà infine $\forall X \forall n\big((n \in X) \rightarrow (n \in X)\big)$, che potrà essere riscritta anche come "$\forall X(X = X)$", in base alla definizione di eguaglianza fornita.

Possiamo infine concludere che $\forall m(m = m)$.

Per dichiarare ZFU_1 una teoria al primo ordine con identità è necessario provare che la relazione d'eguaglianza adottata rispetta la condizione detta di sostitutività rispetto alle formule atomiche del sistema.

Così occorrerà provare quanto segue:

Teorema 14.2 (Schema) $\vdash_{ZFU_1} \forall m \forall n\left[(m = n) \rightarrow \big(\alpha(m) \rightarrow \mathfrak{S}_n^m \alpha(m)\big)\right]$

Dimostrazione

Questo teorema, scritto in questo modo, risulta essere uno schema e non un singolo enunciato. Ciò che occorrerà fare dunque sarà considerare le formule atomiche da sostituirsi ai predicati, indicati mediante l'uso della metavariabile α. Nel nostro caso sarà allora sufficiente considerare formule del tipo $m \in X$ e verificare come, in relazione alla definizione di eguaglianza fornita, la condizione di sostitutività venga soddisfatta sia nel caso degli eventuali atomi che nel caso degli insiemi. Suddivideremo allora la nostra dimostrazione in due casi possibili, di cui il secondo ulteriormente scomposto in altri due sottocasi. Infatti in formule come $m \in X$, avrà senso considerare solo l'identità a sinistra, se la variabile m occorre per *Urelemente*; mentre sarà importante osservare l'eguaglianza sia a sinistra che a destra della relazione di appartenenza, nel caso in cui m occorra per insiemi. Dimostriamo dunque quanto segue:

1° caso: $[(m = x) \wedge (n = y)]$. Allora dovremo verificare che dall'ipotesi per cui $(x = y)$, dove x e y non sono variabili libere, segua che se $(x \in X)$, allora $(y \in X)$, dove X è un parametro[263] della formula $\alpha(m)$. Si ammetta quale seconda ipotesi $\alpha(m)$. Allora varrà per ipotesi che $[(x = y), (x \in X)]$. Per la definizione di eguaglianza 14.3 segue che $\forall Z\big((x \in Z) \rightarrow (y \in Z)\big)$, in seguito all'indebolimento dell'operatore '$\leftrightarrow$'. Allora per l'assioma 13), la regola 3 e la regola MP varrà anche $\big((x \in X) \rightarrow (y \in X)\big)$. Ora, dal momento che si è ipotizzato $\alpha(m)$ come $(x \in X)$, segue per MP $(y \in X)$. Applicando

[263] X ha un'occorrenza non-libera nella formula.

così MD* si deduce $[(x = y) \to ((x \in X) \to (y \in X))]$. Ora per l'assioma 1, la regola 3 e MP segue anche $[(P \to P) \to [(x = y) \to ((x \in X) \to (y \in X))]]$, donde $[(P \to P) \to \forall x \forall y [(x = y) \to ((x \in X) \to (y \in X))]]$ per la regola 5. Infine si deduce per MP $\forall x \forall y [(x = y) \to ((x \in X) \to (y \in X))]$.

2° caso: $[(m = X) \wedge (n = Y)]$. In tale circostanza occorrerà ragionare intorno a due sottocassi possibili: il primo riguarderà l'eguaglianza a sinistra della relazione elementare ammessa. Il secondo riguarderà invece l'eguaglianza a destra della medesima relazione fondamentale. Allora:

1° sottocaso: $(X = Y)$ a sinistra. Allora, partendo dall'ipotesi secondo cui $(X = Y)$ e la formula $\alpha(m)$ è $(X \in Z)$, dove Z occorre come parametro, è possibile applicare l'assioma $\boldsymbol{E}$ $[[(X \in Z) \wedge (X = Y)] \to (Y \in Z)]$ e ricavare $(Y \in Z)$: infatti per l'assioma 5, la regola 3 e due applicazioni della regola 1 si avrà dapprima $[(X \in Z) \wedge (X = Y)]$ e poi per MP ed $\boldsymbol{E}$ $(Y \in Z)$. Applicando MD*, si ricava $[(X = Y) \to ((X \in Z) \to (Y \in Z))]$. Per l'assioma 1, la regola 3 e MP, si ottiene $[(P \to P) \to [(X = Y) \to ((X \in Z) \to (Y \in Z))]]$, da cui $[(P \to P) \to \forall X \forall Y [(X = Y) \to ((X \in Z) \to (Y \in Z))]]$ per la regola 5. Infine per la regola MP, si deriva $\forall X \forall Y [(X = Y) \to ((X \in Z) \to (Y \in Z))]$.

2° sottocaso: $(X = Y)$ a destra. Allora, partendo nuovamente dall'ipotesi secondo cui $(X = Y)$ e la formula $\alpha(m)$ come $(Z \in X)$, dove Z occorre come parametro, è possibile notare che, in virtù della definizione 14.3 gli insiemi dispongono di una relazione di eguaglianza tale che possa valere $\forall Z((Z \in X) \to (Z \in Y))$, sulla base dell'ipotesi $(X = Y)$. In particolare, per l'assioma 13, la regola 3 e 1, vale $((Z \in X) \to (Z \in Y))$ e per MP $(Z \in Y)$. Così per MD* varrà $[(X = Y) \to ((Z \in X) \to (Z \in Y))]$. Inoltre per l'assioma 1, la regola 3 e 1, vale $[(P \to P) \to [(X = Y) \to ((Z \in X) \to (Z \in Y))]]$, donde $[(P \to P) \to \forall X \forall Y [(X = Y) \to ((Z \in X) \to (Z \in Y))]]$ in virtù della regola 5. Infine ancora per la regola 1, si può dedurre $\forall X \forall Y [(X = Y) \to ((Z \in X) \to (Z \in Y))]$.

La dimostrazione è a questo punto completa. Per renderla maggiormente esplicita, dimostreremo di seguito le due proprietà della relazione di eguaglianza omesse poiché derivabili: quella di simmetria e quella di transitività.

Teorema 14.3 $\vdash_{ZFU_1} \forall m \forall n[(m = n) \to (n = m)]$

Dimostrazione

Cominceremo dall'ipotesi $(m = n)$, nella quale m e n non occorrono come variabili libere. Allora per il teorema 14.2 e per la definizione 14.3, si ottiene come caso particolare $\big[(m = n) \to \big((m = m) \to (n = m)\big)\big]$, per l'assioma 13, regola 3 e 1. Tenendo conto dell'ipotesi $(m = n)$ è possibile applicare la regola 1 ed ottenere così $\big((m = m) \to (n = m)\big)$. Inoltre per l'assioma 13, regola 3 e 1 applicati al teorema 14.1, si può dedurre $(m = m)$ e così ancora per MP $(n = m)$. In virtù allora di MD* ne consegue $[(m = n) \to (n = m)]$. Infine per l'assioma 1, la regola 3 e la regola 1 si ricava $\big[(P \to P) \to [(m = n) \to (n = m)]\big]$, donde $\big[(P \to P) \to \forall m \forall n[(m = n) \to (n = m)]\big]$ per la regola 5 e $\forall m \forall n[(m = n) \to (n = m)]$ per la regola 1.

Teorema 14.3 $\vdash_{ZFU_1} \forall m \forall n \forall p\big[[(m = n) \wedge (n = p)] \to (m = p)\big]$

Dimostrazione

Partiremo allora dalle ipotesi $(m = n)$ e $(n = p)$, dove m, n e p non occorrono come variabili libere. Per il teorema 14.2 si può asserire che $(n = m) \to [(n = p) \to (m = p)]$. Inoltre per il teorema 14.3, regola 3 e 1, vale anche $(m = n) \to (n = m)$, donde $(n = m)$ per MP in virtù dell'ipotesi. Così da $(n = m)$ e $(n = m) \to [(n = p) \to (m = p)]$ è possibile dedurre anche $[(n = p) \to (m = p)]$ per MP. Infine dall'ipotesi $(n = p)$ e $[(n = p) \to (m = p)]$ si dimostra $(m = p)$ ancora per la regola 1. È possibile poi applicare MD*, ottenendo $\big[[(m = n) \wedge (n = p)] \to (m = p)\big]$. Per l'assioma 1, regola 3 e 1 si ricava $\Big[(P \to P) \to \big[[(m = n) \wedge (n = p)] \to (m = p)\big]\Big]$, donde $\Big[(P \to P) \to \forall m \forall n \forall p\big[[(m = n) \wedge (n = p)] \to (m = p)\big]\Big]$ in virtù della regola 5 applicata tre volte. Infine per MP si ha $\forall m \forall n \forall p\big[[(m = n) \wedge (n = p)] \to (m = p)\big]$.

Avendo a disposizione i teoremi 14.1, 14.2, 14.3 e 14.4 di questa seconda parte, possiamo affermare che ZFU_1 è una teoria elementare con identità.

In particolare risulterà valido il seguente metateorema:

Metateorema 14.1 ZFU_1 è una teoria al primo ordine con identità.

Dimostrazione

Conseguenza dei teoremi 14.1, 14.2, 14.3 e 14.4.

5. *Gli* Urelemente

In questo paragrafo cercheremo di fissare la natura degli eventuali *Urelemente*, ai quali in maniera intesa si sta pensando. Come abbiamo già detto in precedenza, non considereremo qui gli individui di Quine[264] e ci limiteremo ad oggetti di tipo non-insiemistico.

La ragione di questo fatto è che gli individui di Quine sono in qualche modo riconducibili ad una formulazione di tipo insiemistico ed è possibile riferirsi ad essi facendo uso esclusivamente di tale linguaggio.

Egli pensava ad oggetti che potremmo esprimere in ZFU_1 come quegli m, tali che $m = \{m\}$. In tal modo si avrebbe la circostanza in cui $(m \in m)$.

In sostanza per Quine era possibile ipotizzare individui dal comportamento ancora insiemistico; fatto questo che non spingerebbe in fondo la teoria entro la quale dovessero presentarsi ad ampliare sensibilmente la propria ontologia. La natura di tali oggetti primitivi, che ripropone in qualche misura il tema degli insiemi non-ben-fondati, non altera la coerenza di sistemi formali del tipo NF[265] o ML[266] e si potrebbe scegliere di ammetterli oppure no senza particolari rischi per la tenuta della teoria, posto che questa sia consistente già in partenza[267].

Tuttavia – come detto – sussiste un riferimento insiemistico, che vorremmo almeno per il momento trascurare. Considerare individui come quelli indicati da

---

[264] Essi furono presentati nel 1940. Cfr. Quine, W., *Mathematical Logic*, Harvard University Press, Cambridge, 1940; 1951^2, pp. 121-3

[265] Il sistema NF o *New Foundations* fu presentato da Quine nel 1937. Cfr. Quine, W., *New Foundations for Mathematical Logic*, «American Mathematical Monthly», vol. 44, 1937, pp. 70-80

[266] Il sistema ML o *Mathematical Logic* fu introdotto dallo stesso Quine qualche anno dopo rispetto a NF. Il sistema ebbe origine infatti nel 1940 e deve il proprio nome al volume, in cui esso fu trattato per la prima volta: Quine, W., *Mathematical Logic*, *op. cit.* Il sistema consisteva – diciamo così – in un ampliamento assiomatico della teoria NF, volto ad accogliere oggetti come le classi proprie, sulla cui sistemazione era stata da poco pubblicata la celebre memoria di Gödel, che aveva il pregio di fare il punto sulla situazione di questo tipo di teoria, sfrondata dal difficile formalismo con cui von Neumann l'aveva concepita, soprattutto grazie ai contributi di Raphael Robinson e Paul Bernays in merito. Questo libretto, per altro l'unico mai pubblicato da Gödel, fungeva da raccordo fra i lavori che in quegli anni si erano impegnati nella trattazione e nell'introduzione di oggetti insiemistici di tipo superiore per superare le antinomie, senza dover così rinunciare ad elementi teorici di grande interesse. La differenza sostanziale tra NF e ML risiedeva dunque nell'introduzione di appositi assiomi per classi accanto a quegli assiomi destinati alla regolamentazione degli insiemi. Il tutto chiaramente nel rispetto delle norme-guida, con cui era stato concepito il sistema formale NF. Questa prima formulazione risultò però inconsistente e Quine fu costretto a ripensare il proprio sistema alla luce delle scoperte che Hao Wang aveva fatto in proposito. Fu così che l'autore diede alle stampe una seconda edizione del volume *Mathematical Logic*, nella quale si ridiscuteva il sistema formale ML e si fornivano assiomi leggermente differenti, per i quali si è potuta dare una dimostrazione di consistenza relativa, fondata sulla coerenza della teoria NF, di cui costituisce un'estensione conservativa.

[267] Dana Scott, S., *Quine's Individuals*, *op. cit.*

Quine non costituisce in alcun modo un limite di per sé. Tuttavia la nostra idea di *Urelement* è legata maggiormente a quella descritta inizialmente da Zermelo nel rispetto dell'idea originaria di Cantor.

Pensando infatti di applicare la teoria degli insiemi a contesti anche di tipo non-matematico, preferiamo esprimere la natura di questi oggetti semplicemente fissando per essi la consueta condizione di indecomponibilità insiemistica, lasciando ulteriori considerazioni in merito ad un ipotetico e specifico caso di studio da determinare meglio una volta che si sia scelto il modello di riferimento.

Volendo dunque caratterizzare gli oggetti extrainsiemistici come oggetti privi di elementi, si possono seguire due strategie: la prima consiste nell'assunzione di un apposito assioma che affermi esplicitamente l'indecomponibilità insiemistica degli oggettti primitivi attraverso l'uso di un opportuno predicato, che distingua intuitivamente un *Urelement* da un insieme. La seconda invece si fonda sulla ricchezza del linguaggio entro cui una determinata teoria può essere formulata e raggiunge sostanzialmente il medesimo obiettivo dichiarando insensate le formule che coinvolgono l'appartenenza insiemistica tra un oggetto qualunque ed un *Urelement*.

Nella nostra teoria non disponiamo di altri predicati all'infuori della relazione di appartenenza e dunque non è possibile in linea teorica seguire questa strada. Potremmo adottare una simile strategia, evitando il ricorso ad un ulteriore predicato, semplicemente affermando che:

$$\forall m[(m = x) \to \forall n(n \notin^* m)]$$

In tal caso potremmo dire che se l'elemento a destra della relazione di appartenenza è un *Urelement*, allora questo non conterrebbe alcun ulteriore elemento e potremmo assumere tale condizione come un possibile assioma della teoria.

Comunque ciò non sarebbe altrettanto naturale quanto impiegare il linguaggio multisortale per evitare l'insorgenza di simili condizioni. Un altro dei vantaggi che è infatti possibile ottenere dall'uso di variabili distinte per diverse sorte di oggetti è quello di precisare quali formule sono corrette e quali no. Inoltre, in relazione al problema di voler emendare la teoria dagli *Urelemente* di Quine, una simile strategia risulta migliore poiché in fondo nessuna teoria degli insiemi priva di assioma di regolarità è in grado di assicurare l'esclusione delle classi non-ben-fondate, tra le quali potrebbero annidarsi proprio gli individui di Quine.

Non volendo quindi utilizzare questo tipo di oggetti primitivi e volendo, in un certo senso, categorizzare la loro esclusione dal dominio di discorso della nostra teoria, è più utile considerare gli *Urelemente* come oggetti per i quali sia insensato considerare possibili rapporti di appartenenza che li vedano a destra della relazione fondamentale. In tal caso, anche se dovessero esistere classi non-ben-fondate, cosa questa che non potrà essere esclusa sino all'assioma di regolarità[268], queste non potrebbero essere considerate qui come *Urelemente*.

Per rafforzare proprio tale condizione, daremo di seguito anche dei criteri più precisi circa la possibilità di effettuare sostituzioni di variabili, in conseguenza delle quali risulterà chiaro che le classi non-ben-fondate non potrebbero mai essere sostituite dalle variabili occorrenti per individui, genuinamente intesi, evitando il rischio di confonderle con essi.

Diciamo dunque che le formule ben formate atomiche della nostra teoria sono tutte formule del seguente tipo: "$(m \in X)$". Ciò significa che possono considerarsi o formule del tipo $(x \in X)$ o formule del tipo $(Y \in X)$; mentre sarebbe insensato considerare formule del tipo $(m \in x)$.

Non avendo criteri di "stratificazione" e non avendo ulteriori assiomi a disposizione non possiamo per il momento prevenire la teoria da sostituzioni bizzarre, che darebbero luogo a formule come $(X \in X)$. L'utilizzo dello schema di comprensione e soprattutto l'assunzione dell'assioma di regolarità forniranno strumenti appropriati per evitare simili circostanze.

Per il momento comunque non si hanno nemmeno criteri per evitare sostituzioni da cui derivare eventualmente formule come $(m \in x)$. Per dichiarare dunque l'insensatezza di proposizioni che possano trasformare gli individui in oggetti contenenti eventualmente altri elementi, fisseremo dei criteri di sostituzione più precisi a partire da quelli già indicati per il calcolo logico (e qui assunti nella logica sottostante) al fine di evitare sostituzioni di variabili insiemistiche con variabili per *Urelemente* e far sì dunque che non si possano mai prendere in considerazione casi del tipo "$(m \in x)$".

Diciamo allora che le sostituzioni legittime del sistema ZFU_1 sono quelle sostituzioni che rispettano i criteri precedentemente visti nell'esame del calcolo logico puro, più le seguenti ulteriori restrizioni, dovute al linguaggio multisortale:

$$\text{Regola 2*: } \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\mathfrak{S}_m^n\, \alpha}! \\[2ex] \dfrac{\alpha}{\mathfrak{S}_Y^X\, \alpha}! \\[2ex] \dfrac{\alpha}{\mathfrak{S}_y^x\, \alpha}! \end{cases}$$

[268] Cfr. Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 33. Rieger, L., *A Contribution to Gödel's Axiomatic Set Theory, I*, *op. cit.*, p. 335

$$\text{Regola 4*:}\begin{cases} \dfrac{\alpha\,(\mathbf{Q}m\beta)}{\mathfrak{C}_m^n\ \alpha\,(\mathbf{Q}m\beta)}! \\[2ex] \dfrac{\alpha\,(\mathbf{Q}X\beta)}{\mathfrak{C}_Y^X\ \alpha\,(\mathbf{Q}X\beta)}! \\[2ex] \dfrac{\alpha\,(\mathbf{Q}x\beta)}{\mathfrak{C}_y^x\ \alpha\,(\mathbf{Q}x\beta)}! \end{cases}$$

Queste sostituzioni hanno come obiettivo quello di evitare ad esempio la sostituzione impropria di una variabile occorrente per insiemi con una variabile occorrente per *Urelemente*.

Se non assumessimo tali specificazioni, allora benché una formula α del tipo "$P_1^2(m_1, x_1)$" non sia di base una formula ben formata, avremmo comunque il problema di ritrovarci formule insensate da questo punto di vista. Infatti entrambe le variabili m_1 e x_1 sono variabili individuali della teoria e dunque potrebbero essere "legittimamente" sostituite le une alle altre, se non considerassimo altri *constraints* per le regole utilizzate.

Assumendo allora 2* e 4*, che costituiscono un restringimento delle analoghe regole logiche precedentemente trattate, è possibile escludere l'insorgenza di sostituzioni inappropriate al contesto teorico che qui si sta cercando di descrivere.

Nel corso dell'esposizione ci riferiremo ad esse semplicemente come alle regole '2' e '4', anziche '2*' e '4*'.

6. *La collezione nulla*

6.1 Secondo assioma: l'insieme vuoto

Con l'introduzione di una relazione di eguaglianza adeguata ai nostri scopi e con un apposito assioma per la regolamentazione degli *Urelemente*, possiamo a questo punto passare ad un altro assioma, caratteristico della stessa teoria da cui partiamo, cioè a dire ZF.

Si tratta di affrontare qui il discorso inerente la postulazione di un oggetto, che pur essendo privo di elementi, non è un *Urelement* e di cui pure ci siamo occupati in precedenza: l'insieme vuoto.

Nella teoria standard degli insiemi si è normalmente dispensati dalla postulazione di un apposito assioma per questo tipo di insieme, dal momento che esso seguirebbe dall'assioma (schema) di comprensione e dall'assioma dell'infinito. Tuttavia ciò è impossibile allo stato attuale della costruzione del nostro sistema formale, dal momento che non abbiamo ancora fornito tali assiomi e non abbiamo avviato al riguardo alcuna trattazione. Occorrerebbe passare direttamente a questo assioma prima di discutere dell'insieme nullo; in tal modo si guadagnerebbe l'esenzione di almeno un postulato. Esenzione che avrebbe in ogni caso una ragionevole efficacia, sebbene essa continuerebbe a dipendere fortemente da un'ipotesi esistenziale, che non siamo ancora in grado di sciogliere.

L'esistenza di insiemi specifici, come quella dell'insieme vuoto, non sarebbe infatti garantita *tout court* dall'assioma di comprensione, che – come vedremo – sarà più propriamente uno schema, una sorta di regola generale attraverso la quale produrre, isolare i sottoinsiemi dal dominio considerato.

Il postulato di costruzione per insiemi dice infatti che se esistono taluni insiemi, allora ne esisteranno anche altri di un certo tipo. Ora non abbiamo elementi sufficienti per garantire questo fatto. Non possiamo cioè dire con certezza che gli insiemi descrivibili per mezzo dell'assioma di comprensione esisteranno necessariamente, giacché non abbiamo fatto sino ad ora ipotesi vincolanti sul dominio di partenza, nel senso che non abbiamo dato assiomaticamente direttive affinché l'universo di riferimento risultasse non-vuoto.

Tuttavia è anche ragionevole pensare che tale condizione sia in fondo sostenuta dalla medesima logica esaminata nella prima parte di questo lavoro. In essa infatti si è adottato per il calcolo C_1^* una serie di assiomi e regole che condividono il «difetto», diciamo così, di dimostrare l'esistenza di almeno un individuo. Ciò è dovuto al fatto che, nella lista di assiomi dati, sono presenti i postulati 13) e 14), in base ai quali è deducibile $\forall x \mathrm{A}(x) \rightarrow \exists x \mathrm{A}(x)$. Per tali ragioni è probabilmente pleonastico dal punto di vista della correttezza formale soffermarsi su questo aspetto, poiché si hanno buone ragioni per credere nell'esistenza di almeno un insieme, una volta che si sia relativizzato il linguaggio logico di C_1^* a quello del nostro sistema formale.

Esistono comunque altre ragioni che ci inducono a trattare separatamente qui il caso dell'insieme vuoto: da una parte vi è la volontà di non discostarci troppo dal sistema originario, quello congetturato da Zermelo e raffinato da Fraenkel e Skolem; dall'altra l'importanza e la particolarità dell'insieme nullo, per definire il quale è possibile avvalersi, nelle teorie degli insiemi paraconsistenti, di due negazioni distinte grazie al calcolo logico soggiacente ed ottenere così due aggregati di tipo differente[269].

Questa seconda ragione in particolare merita alcune osservazioni aggiuntive. Il sistema formale che stiamo qui tentando di elaborare (ZFU_1) ha come obiettivo fondamentale quello di realizzare una teoria all'interno della quale poter trattare *Urelemente* inconsistenti, la cui presenza non sia fonte però di trivialità per l'intero sistema. Questo ci porta a considerare un uso più ragionato dello spazio teorico destinato all'accoglienza delle inconsistenze. Con ciò intendiamo cioè dire che il nostro obiettivo non sarà quello di dispiegare completamente il potere di un sistema formale inconsistente per gli insiemi nel suo complesso. Quanto piuttosto quello di adoperare con cautela e solo laddove ci sembrerà utile al nostro caso di studio quegli strumenti formali straordinariamente flessibili, derivanti dalla base logica del calcolo C_1^*. Tralasciando un confronto con l'approccio paraconsistente forte[270], quello dei "dialeteisti", desideriamo sin da subito chiarire che non accoglieremo in ZFU_1 tutti i vari risultati ottenuti nella rispettiva teoria "pura". Non si troveranno cioè qui riferimenti e discussioni circa l'esistenza e la natura dell'insieme universale o dell'insieme di Russell, sui quali pure esistono altrove importanti teoremi. E ciò in virtù di alcuni fatti, che emergono in gran parte da quanto osservato a proposito della concezione matematico-ontologica di Zermelo e Fraenkel:

1) non consideriamo qui inconsistenze riguardanti espressamente gli insiemi, intesi come oggetti inconsistenti. Non vogliamo cioè utilizzare la logica C_1^* per tentare un recupero il più ampio possibile della teoria degli insiemi "ingenua", in quanto è nostro obiettivo valutare la possibilità di un sistema formale in cui possano trovare spazio oggetti primitivi eventualmente

[269] Tale peculiarità caratterizza ad esempio le ricerche condotte su sistemi come ZF_1. Cfr. Da Costa, N. C. A., Krause, D., Bueno, O., *Parconsistent Logic and Paraconsistency*, in Jacquette, D., (ed.), *Philosophy of Logic*, North Holland, Amsterdam, 2007, pp. 833-6

[270] Tale denominazione è dovuta, per quanto ne sappiamo, a John Woods. Cfr. Woods, J., *Paradox and Paraconsistency*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003, p. 9

inconsistenti. Essendo qui le inconsistenze esprimibili chiaramente non a livello terministico ma mediante proposizioni e dunque formule che coinvolgono necessariamente insiemi, esse dovranno essere espresse tenendo conto di questi due fondamentali criteri. A tal fine opteremo per una localizzazione delle inconsistenze ad un unico livello, del quale è però prematuro qui parlare. Sarà sufficiente per il momento pensare alle contraddizioni concernenti gli *Urelemente* come presenti solo nel caso in cui oggetti primitivi del dominio, diciamo così, appartengano a certi insiemi. Per cui la condizione in base alla quale un insieme apparterrà ad un altro, sarà nei nostri intenti sempre consistente. Così se si pensa agli insiemi come a collezioni di cose concrete, si potrà distinguere una stratificazione ontologica sufficientemente articolata, in cui gli aggregati consisteranno di vere e proprie astrazioni, derivanti dall'isolamento di certe determinate proprietà da certi particolari oggetti[271];

2) l'insieme vuoto non è affatto un *Urelement*. In base ai criteri delineati al punto 1) e in base a quanto visto a proposito della concezione fraenkeliana nonché a proposito delle difficoltà rilevate da Russell in merito, la *Nullmenge* non può essere considerata né deve essere considerata un oggetto primitivo al pari di eventuali individui. Inoltre essa non potrà nemmeno essere pensata qui come un qualcosa di ontologicamente intermedio tra un oggetto, genuinamente inteso, e un insieme in senso proprio e ciò in virtù di due fatti fondamentali:

    2.1) la necessità pratica di disporre di un insieme vuoto come quello adoperato nei sistemi classici puri, nonché la sua auspicabile unicità, che riducono e semplificano certe particolari operazioni;

    2.2) la considerazione che gli insiemi e dunque anche la *Nullmenge* siano generalmente consistenti (come individui, nella loro unità), a meno che questi non abbiano specifici *Urelemente* contraddittori al loro interno, che possano indurre a considerazioni di tipo contrario. Caso questo che esclude comunque l'insieme vuoto e la gerarchia che da questo si determina per definizione;

[271] Nel considerare gli insiemi come controparte "ragionevole" di certe proprietà condividiamo quanto affermato in proposito dallo stesso Quine. Cfr. Quine, W., *Mathematical Logic*, *op. cit.*, pp. 119 e ss.

3) l'insufficienza, per così dire, dell'insieme vuoto nell'ottemperare a taluni compiti, che emergeranno con più chiarezza allorquando si discuterà la definizione di intersezione tra insiemi.

Il caso di studio rappresentato in questa circostanza dall'insieme vuoto costituisce un primo passo verso questa scelta metodologica.

Avremmo anche potuto operare un'eccezione in questo singolo caso, in quanto l'inconsistenza eventualmente della classe vuota ci pare possa prestarsi bene a considerazioni intorno a certi aggregati interferenti. La sua contraddittorietà infatti risulterebbe connessa fondamentalmente a ciò che le apparterrebbe, piuttosto che a ciò cui essa stessa apparterrebbe. E pertanto potrebbe tornare utile una sua applicazione allorché si consideri l'intersezione per esempio di classi di *Urelemente* inconsistenti.

Riteniamo utile quindi sfruttare un espediente, che definiremo in seguito e che consentirà di gestire maggiori informazioni di quanto l'insieme vuoto, definito mediante la negazione debole di C_1^*, possa fornire; specialmente in relazione al fatto che esso, indicato in tutte le sue occorrenze con un medesimo simbolo, potrebbe con una certa facilità risultare estremamente diversificato a seconda dei casi in cui venisse applicato. Fatto questo che sembra cozzare con l'idea intuitiva della determinazione di una classe in base a rapporti puramente estensionali – come prima discusso, senza considerare poi la difficoltà che sorgerebbe dal dover giustificare l'introduzione di un'apposita costante per un oggetto probabilmente non-unico.

Tali considerazioni ci portano così a preferire una postulazione diretta circa l'esistenza dell'insieme in questione.

Veniamo alla formulazione esatta del nostro assioma. Generalmente, come ricordato, si affermano due casi distinti, derivanti dal numero di negazioni consentite dal calcolo logico paraconsistente C_1^*. Si osservi pertanto che, quando si negano le formule atomiche del nostro sistema formale, si dovranno tener presenti due alternative possibili.

Diamo innanzitutto due definizioni utili alla semplificazione di certe espressioni:

Definizione 14.4

1) $\neg(m \in N) \overset{\text{def}}{=} (m \notin N)$

2) $\neg^*(m \in N) \overset{\text{def}}{=} \left((m \notin N) \wedge (m \in N)^{\circ}\right)$

3) $\neg^*(m \in N) \overset{\text{def}}{=} (m \notin^* N)$

Così d'ora in poi in luogo di scrivere:

1. "$\neg(m \in N)$"

e

2. "$\neg^*(m \in N)$"

abbrevieremo sempre le nostre espressioni scrivendo semplicemente:

1.a $(m \notin N)$

2.a $(m \notin^* N)$

Nell'espressione $1.$ e $1.a$ si fa chiaramente uso della negazione debole; mentre in $2.$ e $2.a$ viene utilizzata la negazione forte, che possiede tutte le proprietà della negazione classica, così come è stato dimostrato nella prima parte.

L'insieme vuoto derivante dall'applicazione delle condizioni espresse in 1 e $1.a$ viene generalmente così definito:

Insieme debolmente vuoto

1) $\exists Y \forall m(m \notin Y)$

Mentre nel caso dell'insieme vuoto derivante dall'applicazione delle condizioni viste in 2 e $2.a$, si può affermare quanto segue:

Insieme fortemente vuoto

2) $\exists Z \forall m (m \notin^* Z)$

In entrambi i casi, come è facile notare, ci si avvale della terza sorta di variabili per escludere il fatto che all'interno degli oggetti denotati da Y o da Z possano esservi elementi di qualche tipo, siano essi insiemi od *Urelemente*.

Rinunciando al caso 1), passiamo allora direttamente all'adozione dell'assioma dell'insieme vuoto vero e proprio:

<u>Assioma dell'insieme vuoto</u>. $\boldsymbol{O}$

$$\exists Y \forall m (m \notin^* Z)$$

In base allora alla definizione di eguaglianza 14.3 sopra fornita e all'applicazione dell'assioma $\boldsymbol{E}$, risulteranno immediatamente applicabili ulteriori semplificazioni linguistiche e si potrà dimostrare un'importante proprietà dell'insieme vuoto considerato, in perfetta analogia con quanto accade nel caso di un sistema formale simile ma di tipo classico.

*6.2 La costante $\emptyset$ e alcune conseguenze dell'assioma **O***

In base all'assioma ***O*** possiamo a questo punto introdurre una nuova costante individuale, sfruttando le comuni regole di definizione.

Considerando la condizione formulata per l'insieme fortemente vuoto, possiamo osservare che esso definisce univocamente l'oggetto Z in base ai criteri di estensionalità prescelti.

Possiamo così spingerci alla definizione di un nuovo di tipo di quantificatore, che indicheremo col simbolo '$\exists_1$'. Nelle espressioni in cui esso occorrerà, tale quantificatore servirà ad affermare la presenza di un unico oggetto in grado di soddisfare una data proprietà; in tal caso quella di non avere elementi, in senso forte.

Definizione 14.5

1) $\exists_1 XP(X) \stackrel{\text{def}}{=} \Big[\exists XP(X) \wedge \forall X \forall Y \big[\big(P(X) \wedge P(Y)\big) \rightarrow (X = Y)\big]\Big]$

2) $(X \neq^* Y) \stackrel{\text{def}}{=} \Big[\exists m\big[\big((m \in X) \wedge (m \notin^* Y)\big) \vee \big((m \notin^* X) \wedge (m \in Y)\big)\big]\Big]$

Dimostriamo a questo punto il seguente teorema:

Teorema 14.4 $\exists_1 Z \forall m (m \notin^* Z)$

Dimostrazione

Dal momento che la formula $\exists_1 Z \forall m (m \notin^* Z)$ può anche essere scritta come $\exists_1 Z \forall m \neg^* (m \in Z)$ per la definizione 14.4, si può facilmente osservare come in tale espressione occorra il connettivo '$\neg^*$'. Ora, valendo in sua presenza tutto l'insieme di leggi logiche di tipo classico concernenti l'uso della negazione, possiamo passare alla dimostrazione del teorema in questione procedendo in maniera analoga a quanto accade nei sistemi formali per l'insiemistica di tipo classico. Procediamo allora per assurdo e ammettiamo che il teorema sia falso. Ammettiamo cioè che esiste almeno un altro insieme X soddisfacente la condizione $\forall m (m \notin^* X)$. Allora avremmo che Z ed X soddisfano entrambi la condizione $\forall m (m \notin^* X)$ e che $(Z \neq^* X)$. Siccome tuttavia per la condizione in questione non è possibile esibire alcun elemento che sia elemento di Z senza esserlo di X e viceversa e valendo sia per X che per Z l'assioma di estensionalità e la definizione di eguaglianza 14.3, se ne conclude che $Z = X$, per ogni X.

Dimostrato così il teorema 14.4, possiamo introdurre ora una nuova costante individuale, proprio per questo tipo di insieme. Nella prassi si è soliti riferirsi ad esso utilizzando differenti simboli, tra i quali ricorrono spesso '0', 'Λ', '$\emptyset$'. Noi faremo uso di quest'ultimo per parlare dell'insieme fortemente vuoto, dal momento che esso soddisferà la seguente condizione:

$$(\emptyset = Y) \wedge [\forall m(m \notin^{*} \emptyset)]$$

Tale proprietà si basa sulla dimostrazione di unicità espressa dal teorema 14.4 ed asserisce semplicemente che il termine $\emptyset$ è un insieme e che esso è fortemente privo di elementi.

Così potremo esprimere lo stesso assioma $\boldsymbol{O}$ più rapidamente scrivendo:

Assioma $\boldsymbol{O}^{*}$

$$\forall m(m \notin^{*} \emptyset)$$

È possibile infine stabilire un'ulteriore proprietà caratteristica dell'insieme $\emptyset$. Tale classe risulterà infatti essere contenuta in tutti gli altri insiemi, rivelandosi parte o "sottoinsieme" di ogni aggregato.

Per osservare ciò, diamo innanzitutto la definizione di sottoinsieme, che indicheremo come prassi con '$X \subseteq Y$':

Definizione 14.6 $(X \subseteq Y) \overset{\text{def}}{=} \forall m[(m \in X) \rightarrow (m \in Y)]$

Varrà allora il seguente teorema:

Teorema 14.5 $\vdash_{ZFU_1} \forall X(\emptyset \subseteq X)$

Dimostrazione

In virtù della definizione 14.6, si può notare come l'enunciato $\forall X(\emptyset \subseteq X)$ possa essere riscritto anche come $\forall m[(m \in \emptyset) \rightarrow (m \in X)]$. Ora, dal momento che per l'assioma $\boldsymbol{O}^*$ la proposizione $\forall m[(m \in \emptyset) \rightarrow (m \in X)]$ sarà sempre falsa relativamente al suo antecedente (definita mediante l'uso della negazione forte), l'enunciato nella sua interezza risulterà sempre vero per ragioni di pura logica.

6.3 Proprietà e osservazioni al concetto di "parte"

Concludiamo il paragrafo 6, discutendo di alcune proprietà della relazione '$\subseteq$' precedentemente introdotta. In particolare proveremo di seguito alcune condizioni canoniche, cui essa soggiace, osservando come queste possano risultare per certi versi più informative di quanto non accada nel caso classico.

Tali proprietà saranno:

1) riflessività;

2) antisimmetria;

3) transitività.

Cominciamo dalla prima delle tre proprietà menzionate. A differenza di quanto si verifica normalmente nei sistemi di tipo classico, la riflessività ci offre in ZFU_1 uno spunto di riflessione interessante. Normalmente in una teoria di tipo classico questa proprietà viene dimostrata partendo dall'ovvia considerazione, in base alla quale è impossibile mostrare, per un qualunque insieme, che questi abbia un elemento che appartenga e nello stesso tempo non appartenga a quello stesso insieme[272].

Se si considera infatti la condizione espressa da $(X \subseteq X)$, per un certo X, allora si osserva che essa sarebbe innanzitutto equivalente a:

$$[\![\mathbb{1}]\!] \ \forall m[(m \in X) \rightarrow (m \in X)]$$

per definizione. Così se ciò non fosse vero, si dovrebbe poter verificare per almeno qualche elemento m, che esso sia e non sia in X. Fatto questo che in sede classica, per *reductio ad absurdum*, porta a negare l'ipotesi secondo cui la $[\![\mathbb{1}]\!]$ possa risultare falsa. Così la condizione:

$$[\![\mathbb{2}]\!] \ \exists m[(m \in X) \wedge (m \notin X)]$$

[272] Cfr. Abian, A., *Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, *op. cit.*, pp. 74-5

non trova spazio nelle considerazioni di tipo classico.

Ciò non sembra però altrettanto vero per un sistema formale come quello in discussione. Il fatto di poter eventualmente ospitare individui, che presentano proprietà contraddittorie, potrebbe infatti ben giustificare la condizione ⟦2⟧, in quanto un *Urelement* inconsistente potrebbe appartenere ad una certa classe e nel contempo non appartenervi. Così se ad esempio un dato x fosse in X, allora senz'altro varrebbe che $x \in X$ e dunque che $[(x \in X) \rightarrow (x \in X)]$. Ma l'eventuale ipotesi che x appartenga ad X non potrebbe escludere di per sé che $(x \notin X)$, se x fosse un individuo di tipo contraddittorio. In tal modo, accanto alla condizione $\forall x[(x \in X) \rightarrow (x \in X)]$, cioè a dire $(X \subseteq X)$, potrebbe darsi anche il caso in cui $[(x \in X) \wedge (x \notin X)]$.

Da quanto stabilito nella prima parte, nella logica C_1^* non vale l'equivalenza logica tra le due formule $\neg\forall m\big((m \in X) \rightarrow (m \in X)\big)$ e $\exists m\big((m \in X) \wedge (m \notin X)\big)$. Sarebbe sufficiente ridurre il caso in questione ad un dominio di interpretazione nel finito per osservare come ciò non sia possibile. Così il fatto di trovarsi in presenza di un oggetto inconsistente di tipo non-insiemistico non corrisponde direttamente alla contraddizione $\big((X \subseteq X) \wedge \neg(X \subseteq X)\big)$ poiché, dal punto di vista interno al nostro sistema formale, essa dovrebbe essere equivalente a $\big[\forall m[(m \in X) \rightarrow (m \in X)] \wedge \neg\forall m[(m \in X) \rightarrow (m \in X)]\big]$ per definizione.

Una tale condizione ci fornisce comunque un interessante caso di studio poiché essa mette in luce un fatto alquanto sorprendente, in base al quale un insieme potrebbe anche non essere, in un certo senso, interamente contenuto in se stesso. Ciò dipenderebbe fortemente dalla presenza o meno di elementi contraddittori. Se pensiamo infatti alla proprietà di "essere-contenuto-in-se-stesso" come a quella proprietà valida se tutti gli elementi di una data classe appartengono a quella stessa classe, allora il caso in cui almeno un *Urelement* violasse questa disposizione dovrebbe farci pensare al «fallimento» di una corretta formalizzazione di tale idea. Una simile conseguenza è perfettamente in linea con il concetto mediante cui intendiamo qui la nozione di "contraddittorietà"; tuttavia essa non è direttamente rappresentabile attraverso la proposizione $[(X \subseteq X) \wedge \neg(X \subseteq X)]$.

Per discutere adeguatamente tali possibilità è necessario fissare qualche ulteriore utile definizione. Cominceremo da quella di *Urelement* inconsistente e da quella di classe in sovrapposizione:

Definizione 14.7 $Incon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \exists X[(x \in X) \wedge (x \notin X)]$

Definizione 14.8 $Sovr(X) \overset{\text{def}}{=} \exists x[(x \in X) \wedge (x \notin X)]$

Un individuo di tipo non-insiemistico si dirà allora "inconsistente" se e solo se esisterà un insieme al quale esso appartiene e non appartiene (in senso debole). Detto altrimenti esso sarà inconsistente se possiederà almeno una proprietà rispetto alla quale risulti essere contraddittorio.

Mentre una classe si dice "in sovrapposizione" o "sovrapposta" se essa contiene almeno un *Urelement* inconsistente rispetto a quella stessa classe.

Se ciò dovesse verificarsi la prima delle due condizioni per almeno un individuo x rispetto ad una sua data proprietà espressa da X, allora potrebbe verificarsi la condizione vista in ⟦2⟧, che non contraddice *sic et simpliciter* quella esposta in ⟦1⟧, sebbene ciò determini il fatto espresso da $\big[(X \subseteq X) \wedge [(x \in X) \wedge (x \notin X)]\big]$.

Per meglio chiarire come ciò sia effettivamente possibile dovremo innanzitutto dimostrare la validità della formula $(X \subseteq X)$ ed affermare così la condizione di riflessività della relazione '$\subseteq$'.

Partiamo dunque dal seguente:

Teorema 14.6 $\vdash_{ZFU_1} \forall X(X \subseteq X)$

Dimostrazione

Possiamo provare questo enunciato senza sfruttare il ragionamento per assurdo, partendo dall'ipotesi $m \in X$, dove la variabile per elementi m e la variabile per insiemi X non occorrono libere. Per il teorema 4.1 e per la regola 3 varrà $[(m \in X) \rightarrow (m \in X)]$ e così per *modus ponens* $(m \in X)$. Per MD* seguirà allora $(m \in X) \rightarrow (m \in X)$. Sfruttando l'assioma 1), la regola 3 e 1 risulta che $\big[(P \rightarrow P) \rightarrow \big((m \in X) \rightarrow (m \in X)\big)\big]$ e così, applicando due volte la regola 5, $\big[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X \forall m\big((m \in X) \rightarrow (m \in X)\big)\big]$. Applicando infine ancora il *modus ponens*, si avrà $\big[\forall X \forall m\big((m \in X) \rightarrow (m \in X)\big)\big]$, cioè $\forall X(X \subseteq X)$.

Nella dimostrazione del teorema precedente si è fatto uso della terza sorta di variabili a disposizione. Ciò significa dunque che il teorema provato sarà valido sia nel caso si considerino insiemi sia nel caso si considerino individui.

Possiamo a questo punto sfruttare il teorema appena dimostrato per definire un nuovo concetto, utile al chiarimento dell'osservazione poc'anzi accennata.

Diciamo che un insieme X contenente *Urelemente* inconsistenti e per il quale, oltre a valere la condizione $(X \subseteq X)$ (ossia: $\forall x[(x \in X) \rightarrow (x \in X)]$), valga anche la condizione $Sovr(X)$ (ossia: $\exists x\big((x \in X) \wedge (x \notin X)\big)$), è un "insieme debordante":

Definizione 14.9 $Deb(X) \overset{\text{def}}{\equiv} \big[(X \subseteq X) \wedge \exists x\big((x \in X) \wedge (x \notin X)\big)\big]$

Le conseguenze di una simile circostanza sarebbero quelle di far sì che l'insieme sia, in un certo senso, «deformato» rispetto a se stesso, in modo da debordare su collezioni in teoria complementari[273], a causa della situazione descritta dalla formula $\big((x \in X) \wedge (x \notin X)\big)$.

Per delimitare e prevenire una tale circostanza ed esser così certi che una data collezione rispetti i comuni canoni di autocontenimento, come accade nelle teorie di tipo classico, sarà necessario definire un nuovo operatore, analogo a quello sin qui considerato, per il quale non varrà la condizione di debordamento.

La sua applicazione dipenderà da due ragioni di fondo: primo la presenza di individui, che qui risulterà possibile ma non indotta da alcun fattore interno al sistema formale stesso; secondo la possibile coerenza degli eventuali *Urelemente*.

Diciamo dunque che:

Definizione 14.10 $\neg^{*}Deb(X) \overset{\text{def}}{\equiv} \big[(X \subseteq X) \wedge \neg^{*} \exists x\big((x \in X) \wedge (x \notin X)\big)\big]$[274]

In tal modo l'insieme X risulterà, in un certo senso, "autocircoscritto" ossia intuitivamente delimitato esattamente all'interno della propria.

Formalizzando tale nozione, diciamo che:

Definizione 14.11 $(X \subseteq^{+} X) \overset{\text{def}}{\equiv} \neg^{*}Deb(X)$

---

[273] Ciò significa che l'insieme X si troverebbe a condividere parte della propria estensione con un insieme ad esso complementare.

[274] La definizione dice allora che una classe non è debordante se non esistono *Urelemente* oppure se esistono individui che non sono contraddittori rispetto alla condizione espressa dall'insieme X.

Possiamo indicare la condizione di non-debordamento anche come la condizione di "essere-circoscritto" entro la propria estensione:

Definizione 14.11 $AutCirc(X) \overset{\text{def}}{\equiv} \neg^* Deb(X)$

Possiamo a questo punto affermare che se vale la condizione di non-debordamento per un qualunque insieme X, contenuto in se stesso, allora X è anche "autocircoscritto".

Passiamo ora alle proprietà 2) e 3) di antisimmetria e di transitività. Cominceremo col dimostrare la loro validità, per poi esaminare, a partire da esse, casi legati alla presenza di individui contraddittori.

Teorema 14.7 $\vdash_{ZFU_1} \forall X \forall Y \big[[(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)] \rightarrow (X = Y)\big]$

Dimostrazione

Assumiamo per ipotesi $[(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)]$, dove X e Y non occorrono come variabili libere. Allora per definizione si avrà anche $\forall m[(m \in X) \rightarrow (m \in Y)]$ e $\forall m[(m \in Y) \rightarrow (m \in X)]$ e in particolare, per l'assioma 13), la regola 3 e MP, $[(m \in X) \rightarrow (m \in Y)]$ e $[(m \in Y) \rightarrow (m \in X)]$, cioè $[(m \in X) \leftrightarrow (m \in Y)]$ in virtù della definizione dell'operatore '$\leftrightarrow$'. Inoltre varrà per l'assioma 1, regola 3 e 1 che $\big[(P \rightarrow P) \rightarrow [(m \in X) \leftrightarrow (m \in Y)]\big]$, donde $\big[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall m[(m \in X) \leftrightarrow (m \in Y)]\big]$ per la regola 5 e $\forall m[(m \in X) \leftrightarrow (m \in Y)]$ per MP. Quest'ultimo enunciato può infine essere scritto come "$X = Y$" grazie alla definizione di eguaglianza qui adottata e così per MD* varrà che $\big[[(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)] \rightarrow (X = Y)\big]$. Ora ancora per l'assioma 1, la regola 3 e 1 si può dedurre l'ulteriore conseguenza $\Big[(P \rightarrow P) \rightarrow \big[[(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)] \rightarrow (X = Y)\big]\Big]$ e, per la regola 5 applicata due volte, prima sulla variabile X e successivamente sulla variabile Y, ricavare $\Big[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X \forall m\big[[(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)] \rightarrow (X = Y)\big]\Big]$, da cui $\forall X \forall Y \big[[(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)] \rightarrow (X = Y)\big]$ per MP.

Da questo teorema, dalla definizione di eguaglianza e dalla condizione di debordamento ci pare possano farsi ulteriori considerazioni anche per quel che riguarda l'eguaglianza tra classi.

Se considerassimo l'enunciato del teorema 14.7, potremmo ad esempio ricavare per l'assioma 13) e le regole 3 e 1 il teorema $[[(X \subseteq X) \wedge (X \subseteq X)] \rightarrow (X = X)]$. Tale proposizione è soggetta a considerazioni analoghe a quelle fatte dunque nel caso della riflessività.

Potrebbe infatti darsi il caso che oltre alla formula $[[(X \subseteq X) \wedge (X \subseteq X)] \rightarrow (X = X)]$, possa valere pure $\left[[(X \subseteq X) \wedge (X \subseteq X)] \wedge \left(\exists x\big((x \in X) \wedge (x \notin X)\big)\right)\right]$, se in X vi è almeno un *Urelement* inconsistente. Così potrebbe emergere anche la non perfetta identità di una classe debordante.

Sappiamo infatti che ogni classe ha una natura puramente estensionale e che $(X = X)$ equivale per definizione a "$\forall m\big((m \in X) \leftrightarrow (m \in X)\big)$". Ora se X fosse una collezione debordante, allora risulterebbe vero anche l'enunciato $\exists x\big((x \in X) \wedge (x \notin X)\big)$, dal momento che ciò non potrebbe essere escluso *a priori* dalla contrapposizione della formula che definisce l'eguaglianza tra insiemi.

Tale circostanza ci pare in accordo con quanto già osservato, dal momento che un insieme X debordante ammette almeno un *Urelement*, che gli appartiene e che non gli appartiene per definizione; così sarebbe abbastanza plausibile ammettere in sua presenza anche una condizione di non perfetta identità per X.

Diciamo allora un insieme "non-autoidentico" se:

Definizione 14.12

$$\neg Autid(X) \overset{\text{def}}{=} \left[\forall m\big((m \in X) \leftrightarrow (m \in X)\big) \wedge \exists x\big((x \in X) \wedge (x \notin X)\big)\right]$$

Possiamo così stabilire la seguente equivalenza, considerando l'antisimmetria della relazione '$\subseteq$', relativamente ad uno stesso insieme X:

Teorema 14.8 $\vdash_{ZFU_1} \forall X \left[Deb(X) \leftrightarrow \left[(X = X) \wedge \left(\exists x\big((x \in X) \wedge (x \notin X)\big)\right)\right]\right]$

Dimostrazione

($\to$) Sia $Deb(X)$ una formula in cui per ipotesi X non occorre libera. Allora per definizione si avrà anche che $\exists x\big((x \in X)\wedge(x \notin X)\big)$. Inoltre dal teorema 14.1 di questa seconda parte si ha che $\forall X(X = X)$, donde, per l'assioma 13), la regola 3 e 1, $(X = X)$. Così in virtù dell'assioma 5, della regola 3 e 1 si deduce $\Big[(X = X)\wedge\Big(\exists x\big((x \in X)\wedge(x \notin X)\big)\Big)\Big]$. Per MD* allora di ottiene $Deb(X)\to\Big[(X = X)\wedge\Big(\exists x\big((x \in X)\wedge(x \notin X)\big)\Big)\Big]$.

($\leftarrow$) Sia ora $\Big[(X = X)\wedge\Big(\exists x\big((x \in X)\wedge(x \notin X)\big)\Big)\Big]$ la nostra ipotesi, all'interno della quale X non occorre libera. Allora per l'assioma 3 e le regole 3 e MP si deduce $(X = X)$, da cui segue $(X \subseteq X)$. Inoltre sempre dall'ipotesi, in virtù dell'assioma 4 e delle stesse regole sopra utilizzate, segue anche $\exists x\big((x \in X)\wedge(x \notin X)\big)$ e così per l'assioma 5, la regola 3 e 1, si ottiene $\Big[(X \subseteq X)\wedge\Big(\exists x\big((x \in X)\wedge(x \notin X)\big)\Big)\Big]$. Ora, applicando MD*, si può ricavare $\Big[(X \subseteq X)\wedge\Big(\exists x\big((x \in X)\wedge(x \notin X)\big)\Big)\Big]\to Deb(X)$ e così, per definizione dell'operatore '$\leftrightarrow$', $Deb(X)\leftrightarrow\Big[(X = X)\wedge\Big(\exists x\big((x \in X)\wedge(x \notin X)\big)\Big)\Big]$. Infine applicando l'assioma 1, la regola 3 e 1 si ricava $\Big[(P\to P)\to\Big[Deb(X)\leftrightarrow\Big[(X = X)\wedge\Big(\exists x\big((x \in X)\wedge(x \notin X)\big)\Big)\Big]\Big]\Big]$, donde $\Big[(P\to P)\to\forall X\Big[Deb(X)\leftrightarrow\Big[(X = X)\wedge\Big(\exists x\big((x \in X)\wedge(x \notin X)\big)\Big)\Big]\Big]\Big]$ per la regola 5 e $\forall X\Big[Deb(X)\leftrightarrow\Big[(X = X)\wedge\Big(\exists x\big((x \in X)\wedge(x \notin X)\big)\Big)\Big]\Big]$ per MP.

Possiamo consolidare la condizione di eguaglianza di una classe rispetto a se stessa, introducendo la nozione di autoidentità nel modo che segue:

Definizione 14.13 $(X =^{+} X) \overset{\text{def}}{=} \big[\neg^{*}\exists x\big((x \in X)\wedge(x \notin X)\big)\wedge(X = X)\big]$

Definizione 14.14 $AutId(X) \overset{\text{def}}{=} (X =^{+} X)$

Così possiamo facilmente asserire che se un insieme contiene *Urelemente* tutti consistenti, allora esso è autoidentico:

Teorema 14.9 $\vdash_{ZFU_1} \forall X \left(\neg^{*}\exists x\big((x \in X)\wedge(x \notin X)\big) \rightarrow (X =^{+} X)\right)$

Dimostrazione

Sia per ipotesi $\neg^{*}\exists x\big((x \in X)\wedge(x \notin X)\big)$ una formula nella quale non occorrono variabili libere. Allora per il teorema 14.1, si ottiene $X = X$, sfruttando l'assioma 13, la regola 3 e la regola 1. Impiegando ancora l'assioma 5, congiuntamente alla regola 3 e alla regola del *modus ponens*, si ottiene $\left[\neg^{*}\exists x\big((x \in X)\wedge(x \notin X)\big)\wedge(X = X)\right]$, donde per definizione $(X =^{+} X)$. Dall'ipotesi, in virtù di MD*, si può allora derivare $\left(\neg^{*}\exists x\big((x \in X)\wedge(x \notin X)\big)\rightarrow(X =^{+} X)\right)$. Inoltre per l'assioma 1, la regola 3 e MP si può ancora dedurre $\left[(P\rightarrow P)\rightarrow\left(\neg^{*}\exists x\big((x \in X)\wedge(x \notin X)\big)\rightarrow(X =^{+} X)\right)\right]$, da cui per la regola 5 $\left[(P\rightarrow P)\rightarrow\forall X\left(\neg^{*}\exists x\big((x \in X)\wedge(x \notin X)\big)\rightarrow(X =^{+} X)\right)\right]$. Applicando ancora una volta MP, si ottiene infine $\forall X\left(\neg^{*}\exists x\big((x \in X)\wedge(x \notin X)\big)\rightarrow(X =^{+} X)\right)$.

L'autoidentità di un insieme X determina allora l'esclusione del caso di proprietà (analiticamente) nascoste, indotte dalla presenza di *Urelemente* inconsistenti poiché in base ad essa non sono più considerate condizioni di contraddittorietà circa la natura dei possibili *Urelemente*.

Stabiliamo infine un teorema a proposito della condizione di transitività della relazione inclusione '$\subseteq$':

Teorema 14.10 $\vdash_{ZFU_1} \forall X\forall Y\forall Z\big[[(X \subseteq Y)\wedge(Y \subseteq Z)] \rightarrow (X \subseteq Z)\big]$

Dimostrazione

Assumiamo come ipotesi $[(X \subseteq Y)\wedge(Y \subseteq Z)]$, dove X, Y e Z non occorrono come variabili libere. In tal modo avremo per definizione $\forall m[(m \in X)\rightarrow(m \in Y)]$ e $\forall m[(m \in Y)\rightarrow(m \in Z)]$ e $[(m \in X)\rightarrow(m \in Y)]$ e $[(m \in Y)\rightarrow(m \in Z)]$ per l'assioma 13, regola 3 e 1. Per il teorema 4.3, per la regola 3 e 1, segue allora $[(m \in X)\rightarrow(m \in Z)]$. Inoltre, ancora per l'assioma 1, la regola 3 e MP, segue $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow [(m \in X) \rightarrow (m \in Z)]\right]$, donde $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall m[(m \in X) \rightarrow (m \in Z)]\right]$ in virtù della regola 5. Infine per MP, si può dedurre $\forall m[(m \in X) \rightarrow (m \in Z)]$, ossia $(X \subseteq Z)$ per definizione. Così dall'ipotesi e da MD* si deriva $\left[[(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq Z)] \rightarrow (X \subseteq Z)\right]$. Reiterando il medesimo ragionamento fatto sopra, segue dapprima $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \left[[(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq Z)] \rightarrow (X \subseteq Z)\right]\right]$ e poi $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X \forall Y \forall Z \left[[(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq Z)] \rightarrow (X \subseteq Z)\right]\right]$ applicando tre volte la regola 5. Infine si deduce $\forall X \forall Y \forall Z \left[[(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq Z)] \rightarrow (X \subseteq Z)\right]$ per MP dall'enunciato precedente.

7. *Coppie, singletons, n-ple*

7.1 Terzo assioma: l'insieme coppia

Se si disponesse sin da subito di un potente assioma (schema) come quello di comprensione o quello (schema) del rimpiazzamento, ci si renderebbe immediatamente conto del fatto che l'insieme vuoto non è il solo insieme la cui esistenza potrebbe essere dedotta anziché postulata e che dunque si potrebbe emendare la teoria da tutta una serie di postulati originariamente ammessi.

Tra essi Zermelo aveva espressamente postulato ad esempio l'insieme *singleton* o "singoletto" di un dato elemento m, così come l'insieme che ha come elementi due oggetti m e n. Fraenkel dimostrò la superfluità di tali assiomi, facendo notare come fosse sufficiente disporre dell'esistenza anche di un solo insieme e di un adeguato principio di costruzione per economizzare la base assertoria dell'intera teoria.

A questo punto della nostra trattazione però siamo ancora privi di assiomi adeguati allo scopo e non siamo in grado di garantire l'esistenza dell'insieme coppia o dell'insieme singoletto sulla base degli assiomi sinora elencati. Per ragioni di chiarezza espositiva, preferiamo proseguire senza dar conto ancora dei potenti assiomi sopra menzionati, che costituiscono un rafforzamento considerevole della base teorica fin qui delineata sotto vari punti di vista. Sarà pertanto lasciata aperta la strada a una possibile contrazione del numero di assiomi, da valutarsi al più in seguito, senza per questo però accettarla in linea di principio.

Fisseremo dunque come assioma un enunciato che garantirà esplicitamente l'esistenza di una coppia non-ordinata di oggetti m"e n; ciò significherà che tali oggetti, siano essi insiemi od *Urelemente*, si troveranno in una data collezione senza dare importanza alla posizione che essi occuperanno. Per dirla con le parole di Quine[275], per essi varrà la commutatività degli elementi.

Anche la negazione di una simile condizione (la non-commutatività cioè degli elementi m e n) potrà essere successivamente ricavata proprio dall'assioma in questione, sfruttando un semplice ed efficace definizione di Kuratowski[276] ed avrà utili conseguenze.

Per il momento diamo la formulazione del nostro assioma:

---

[275] Quine, W., *Mathematical Logic*, Harvard University Press, Cambridge, 1940; 1951^2, p. 198

[276] Kuratowski, K., *Sur la notion d'ordre dans la théorie des ensembles*, «Fundamenta Mathematica», vol. 2, 1921, pp. 161-71

Assioma della coppia. $\boldsymbol{P}$ $\forall m \forall n \exists Z \forall p \big[(p \in Z) \leftrightarrow [(p = m) \vee (p = n)]\big]$

Questo enunciato prescrive l'esistenza di un insieme e non concerne pertanto l'esistenza di alcun individuo, dal momento che questi appaiono tutt'al più nella formula solo come elementi della classe considerata. Infatti le variabili individuali indicano che l'oggetto in questione è sempre e soltanto una classe al cui interno possono trovarsi come elementi o insiemi oppure *Urelemente*.

L'insieme Z allora avrà sempre almeno due elementi m e n, non necessariamente distinti – come vedremo – e qualunque oggetto p sia membro di Z, dovrà per forza di cose essere eguale ad uno degli elementi precedentemente indicati.

Trattandosi di un insieme, anch'esso sarà caratterizzato dalla propria estensione. Pertanto è possibile verificare l'unicità di una simile collezione, provando il seguente:

Teorema 14.11 $\vdash_{ZFU_1} \forall m \forall n \exists_1 Z \forall p \big[(p \in Z) \leftrightarrow [(p = m) \vee (p = n)]\big]$

Dimostrazione

Ammettiamo che esista un altro insieme Y avente come unici elementi m e n. Allora dalla definizione 14.3 seguirà immediatamente l'eguaglianza tra Y e Z, giacché essi condividono ogni rispettivo elemento, cioè a dire $\forall m \forall n \big[[(m \in Y) \wedge (n \in Y)] \leftrightarrow [(m \in Z) \wedge (n \in Z)]\big]$. Così $(Y = Z)$.

Introdurremo di seguito un po' di notazione, che agevolerà talune formulazioni. Ci serviremo della simbologia standard e passeremo ad indicare le collezioni della nostra teoria, per un numero eventualmente arbitrario di elementi in esse contenuti, nel modo seguente:

Definizione 14.15

$$\{m\} \stackrel{\text{def}}{=} \{m, \emptyset\} \stackrel{\text{def}}{=} \{n | n = m\} \stackrel{\text{def}}{=} \big\{m | m \in \{m\}\big\}$$

$$\{m_1, \dots, m_n\} \stackrel{\text{def}}{=} \{n | (n = m_1) \vee \dots \vee (n = m_n)\} \stackrel{\text{def}}{=} \big\{m | m \in \{m_1, \dots, m_n\}\big\}$$

Così, in virtù della definizione 14.15, sarà possibile fare riferimento al concetto di coppia, indicando l'insieme corrispondente con '$\{m, n\}$' e a quello di insieme vuoto, indicandolo anche con '{ }'.

È sufficientemente chiaro che tale simbologia preserva l'idea generale secondo la quale nelle collezioni non importa in quale ordine vengano dati gli elementi. Così, come caso particolare, non avrà importanza nemmeno per l'insieme coppia (non-ordinata) in quale ordine appariranno i suoi due elementi. Cioè a dire, gli assiomi sin qui tracciati non escludono in alcun modo il caso seguente:

Teorema 14.12 $\vdash_{ZFU_1} \{m, n\} = \{n, m\}$

Dimostrazione

L'eguaglianza fra i due insiemi è diretta conseguenza della definizione 14.3. È possibile riscrivere infatti "$\{m, n\} = \{n, m\}$" come "$\forall p[(p \in \{m, n\}) \leftrightarrow (p \in \{n, m\})]$" e "$\forall p[(p \in \{m, n\}) \leftrightarrow (p \in \{n, m\})]$" come "$\forall p([(p \in \{q | (q = m) \vee (q = n)\}) \leftrightarrow (p \in \{q | (q = n) \vee (q = m)\})])$". Poiché l'equivalenza risulta banalmente soddisfatta in virtù delle proprietà logiche del sistema formale considerato, sarà corretto affermare che $(\{m, n\} = \{n, m\})$.

In base a questo teorema, i due insiemi risultano estensionalmente indistinguibili benché l'ordine con cui sono presentati i rispettivi elementi sia differente; e ciò in base a considerazioni puramente estensionali, valide per qualunque altro insieme.

7.2 L'insieme singleton

Dall'assioma $\boldsymbol{P}$ possiamo ora derivare l'esistenza di un altro utile insieme, detto "*singleton*" o "singoletto". A tale collezione corrisponderà una classe, la cui proprietà sarà quella di avere un unico elemento al suo interno. Ciò significa in particolare che qualunque oggetto ne faccia parte sarà eguale all'oggetto che essa contiene.

Questo fatto è una diretta conseguenza dell'assioma della coppia, dal momento che l'assioma $\boldsymbol{P}$ non esclude un caso importante e solo in apparenza banale: quello per cui le variabili oggettuali m e n potrebbero anche non essere distinte tra loro.

Consideriamo infatti il caso in cui gli elementi p e q di una data coppia Y siano fra loro identici. Allora per qualunque m appartenente a Y, avremo banalmente che:

$$\vdash_{ZFU_1} (m \in Y) \leftrightarrow [(m = p)\vee(m = p)]$$

o equivalentemente:

$$\vdash_{ZFU_1} (m \in Y) \leftrightarrow [(m = q)\vee(m = q)]$$

Così $\{p, p\} = \{q, q\} = \{m, m\} = Y$. Inoltre dal momento che non si possono scorgere differenze di sorta tra $\{p, p\}$ e $\{p\}$, poiché vale $\forall p[(p \in \{p, p\} \leftrightarrow p \in \{p\})]$, considereremo equivalenti queste due scritture. Esse indicheranno infatti due insiemi estensionalmente eguali e per ciò indistinguibili in base alla definizione 14.3.

Fisseremo tale concetto con la seguente definizione:

Definizione 14.16

$$\{m\} \stackrel{\text{def}}{=} \{m, m\} \stackrel{\text{def}}{=} \{m, \emptyset\}$$

C'è un'altra considerazione comunque che desideriamo fare a proposito dell'assioma coppia e dei *singletons* prima di procedere con alcune speciali caratteristiche di talune coppie. Applicando infatti l'assioma $\boldsymbol{P}$ all'assioma $\boldsymbol{O}$**,** è possibile dedurre a questo punto l'esistenza di molti altri insiemi puri, nel modo che segue:

Teorema 14.13 $\vdash_{ZFU_1} \exists Y_1\big[(n \in Y_1) \leftrightarrow [(n = \emptyset)\vee(n = \emptyset)]\big]$

da cui, per l'idempotenza dell'operatore logico '$\vee$', varrà anche:

$$\vdash_{ZFU_1} \exists Y_1[(n \in Y_1) \leftrightarrow (n = \emptyset)]$$

nonché il:

Teorema 14.14 $\vdash_{ZFU_1} \exists_1 Y_1[(n \in Y_1) \leftrightarrow (n = \emptyset)]$

Trascureremo le relative dimostrazioni per osservare invece come l'insieme Y_1 costituisca il *singleton* dell'insieme vuoto, cioè $\{\emptyset\}$. Tale fatto è conseguenza immediata degli assiomi $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{P}$ finora dati. È sufficientemente chiaro a questo punto però che le conseguenze da trarre sono molte altre.

Possiamo infatti reiterare questo procedimento, applicando ancora l'assioma $\boldsymbol{P}$ all'oggetto ottenuto col teorema 14.14, ottenendo:

Teorema 14.15 $\vdash_{ZFU_1} \exists Y_2[(n \in Y_2) \leftrightarrow (n = \{\emptyset\})]$

Ciò che prova il teorema 14.15 sopra enunciato è che l'insieme Y_2 è il *singleton* del *singleton* dell'insieme vuoto, indicato con '$\{\{\emptyset\}\}$'. È possibile così iterare il medesimo procedimento un numero arbitrario di volte, ottenendo l'esistenza di altri insiemi, del tipo $\{\{\{\emptyset\}\}\}$, $\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}$, $\{\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}\}$, $\{\{\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}\}\}$, ecc. Si possono anche complicare apparentemente le cose, ottenendo da insiemi quali Y_1 e

Y_2 insiemi Y_k del tipo $\{\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$. In generale diciamo che per ogni dato elemento m esiste il suo *singleton*, cioè:

Teorema 14.16 $\vdash_{ZFU_1} \forall n \exists Z[(n \in Z) \leftrightarrow (n = m)]$

Dimostrazione

(→) Sia $(n \in Z)$ la nostra ipotesi, priva di variabili libere, in cui $Z = \{m\}$. Allora $(n \in Z)$↔$(n \in \{p|p = m\})$ per la definizione 14.16. Dall'ipotesi assunta, segue allora proprio che $(n = m)$. Così per MD* $[(n \in Z)$→$(n = m)]$.
(←) Sia $(n = m)$ la nostra ipotesi, anch'essa priva di variabili libere. Allora $(n \in X)$, per ogni X, e in particolare $(n \in Z)$. Così $[(n = m)$→$(n \in Z)]$ per MD*.
(↔) Si ricava a questo punto $[(n \in Z)$↔$(n = m)]$ in virtù della definizione concernente l'operatore logico '↔'. Inoltre, per l'assioma 14, regola 3 e 1, è possibile affermare $\exists Z[(n \in Z)$↔$(n = m)]$ e, per l'assioma 1, regola 3 e 1 $[(P$→$P)$→$\exists Z[(n \in Z)$↔$(n = m)]]$, donde $[(P$→$P)$→$\forall n \exists Z[(n \in Z)$↔$(n = m)]]$ per la regola 5. Infine per MP si ricava $\forall n \exists Z[(n \in Z)$↔$(n = m)]$.

Teorema 14.17 $\vdash_{ZFU_1} \emptyset \neq^* \{\emptyset\}$

Dimostrazione

In base all'assioma $\boldsymbol{O}$ vale $\forall m \neg^*(m \in \emptyset)$ e dunque, ragionando in modo classico, anche $\neg^* \exists m(m \in \emptyset)$. Così se per assurdo $(\emptyset = \{\emptyset\})$, allora seguirebbe, in base a quanto sinora detto, che $(\emptyset \in \emptyset)$. Il che è in contraddizione con quanto poc'anzi visto. Così è possibile affermare $\emptyset \neq^* \{\emptyset\}$.

È importante osservare a questo punto che, sebbene il procedimento di costruzione dei *singletons*, illustrato nel precedente teorema, ammetta una reiterazione arbitraria e dunque una produzione potenzialmente infinita di insiemi, non per questo è possibile dichiarare l'esistenza in ZFU_1 di un oggetto esso stesso infinito, avente cioè infiniti elementi.

Tale impossibilità è confermata dalle considerazioni fatte in precedenza, che nella sostanza non si discostano da quanto è comunemente verificabile nelle teorie degli insiemi di tipo classico.

Conseguenza immediata allora di questo fatto è l'impossibilità di dimostrare l'esistenza di una classe infinita e giustificare con ciò lo stesso assioma dell'infinito semplicemente sulla base degli assiomi sin qui presentati ($\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{P}$).

Una simile possibilità risulterebbe infatti solo apparente, dal momento che dimostrare l'esistenza di infiniti insiemi è cosa ben diversa dal dimostrare l'esistenza di un insieme che abbia infiniti elementi[277]. Gli insiemi che è possibile determinare mediante l'assioma della coppia hanno infatti tutti la caratteristica precipua di contenere al più due oggetti ciascuno; e ciò limita significativamente la grandezza di tali classi.

Insiemi del tipo $\left\{\left\{\underbrace{\dots}_{\{-n-volte}\{\{\emptyset\}\}\underbrace{\dots}_{n-volte-\}}\right\}\right\}$, contrariamente alla loro scrittura, sono oggetti di taglia piuttosto limitata, in quanto equivalenti al tipo d'oggetto $\left\{\left\{\left\{\underbrace{\dots}_{\{-n-volte}\{\{\emptyset\}\}\underbrace{\dots}_{n-volte-\}}\right\}\right\},\left\{\left\{\underbrace{\dots}_{\{-n-volte}\{\{\emptyset\}\}\underbrace{\dots}_{n-volte-\}}\right\}\right\}\right\}$, che possiede due elementi eguali e pertanto riscrivibile come "$\left\{\left\{\underbrace{\dots}_{\{-n-volte}\{\{\emptyset\}\}\underbrace{\dots}_{n-volte-\}}\right\}\right\}$"; mentre una classe del tipo $\left\{\{\emptyset\},\left\{\{\emptyset\}\right\}\right\}$ è una collezione con due soli elementi, cioè a dire $\{\emptyset\}$ e $\left\{\{\emptyset\}\right\}$. Così tutto ciò che fin qui si potrà fabbricare sarà una serie di insiemi di piccola taglia, costituiti al più da due elementi.

Infine veniamo ad alcune nozioni che ci sembra possano ragionevolmente legarsi al caso già esaminato a proposito degli insiemi debordanti. Abbiamo infatti osservato che potrebbero esistere insiemi per i quali sia vero possedere tutti i propri elementi e, nello stesso tempo, «non possederne» almeno qualcuno. Tale fatto, alquanto controverso, è stato spiegato finora adducendo quale motivazione quella di poter considerare casi all'interno dei quali si dessero proprietà incompatibili eppure coesistenti in relazione a qualche individuo.

Considerando ora il caso particolare dell'insieme *singleton*, possiamo valutare degli ulteriori elementi per comprendere meglio il ruolo giocato dagli individui inconsistenti, eventualmente da considerare, e definire più esattamente la prospettiva assunta nella formulazione del nostro sistema formale.

[277] Cfr. Mariani Casalegno, *Introduzione alla teoria degli insiemi*, *op. cit.*, pp. 33-5

Abbiamo detto che un elemento m appartiene ad un singoletto del tipo $\{n\}$ se e solo se $m = n$. In base allora alla definizione 14.3, che regolamenta la relazione di eguaglianza, si ha che $m = n$ equivale a $\forall Z[(m \in Z) \leftrightarrow (n \in Z)]$, se $m = x$ e $n = y$. In tal caso $[(m \in \{n\}) \rightarrow (m = n)]$ e $\big[(m = n) \rightarrow \forall Z[(m \in Z) \leftrightarrow (n \in Z)]\big]$ e pertanto $\big[(m \in \{n\}) \rightarrow \forall Z[(m \in Z) \leftrightarrow (n \in Z)]\big]$.

Se immaginiamo quindi concretamente la condizione in cui $m = x$, allora potrebbe darsi anche il caso che x, in quanto individuo non-insiemistico, possa o meno essere inconsistente. Ammettiamo per ipotesi che esso lo sia secondo la definizione 14.7. Allora ci sarebbe almeno una proprietà P e dunque una classe Z, tale che $(x \in Z)$ e $(x \notin Z)$. In tal modo le condizioni precedentemente viste a proposito delle classi debordanti potrebbero essere considerate anche per gli insiemi-singoletto.

Rispetto a questo specifico caso, ci pare importante osservare quanto segue: se pensiamo all'"essenza" di un oggetto primitivo come alla totalità dei suoi predicati, potremmo rendere formalmente questa nozione dicendo che l'essenza di un certo individuo x è data dai predicati $P_1, \ldots, P_n, \ldots$ ad esso attribuibili. Ciò potrebbe essere espresso affermando che $(x \in P_1 \wedge \ldots \wedge x \in P_n \wedge \ldots)$ ecc. che equivarrebbe ad asserire che $[x \in \bigcap\{X_1, \ldots, X_n, \ldots\}]$[278], dove "$X_1, \ldots, X_n, \ldots$" sono le classi corrispondenti rispettivamente alle proprietà $P_1, \ldots, P_n, \ldots$. Così un certo oggetto x appartiene al *singleton* $\{y\}$ se e solo se esso appartiene a tutte le proprietà dell'elemento in esso contenuto, cioè a dire $x \in \{y\}$ se e solo se $(x = y)$ se e solo se $\forall X[(x \in X) \leftrightarrow (y \in X)]$.

Dunque $\forall X[(x \in X) \leftrightarrow (y \in X)]$ se e solo se $[x \in \bigcap\{X_1, \ldots, X_n, \ldots\} \leftrightarrow y \in \bigcap\{X_1, \ldots, X_n, \ldots\}]$ se e solo se $[x \in \bigcap\{X_1, \ldots, X_n, \ldots\} \leftrightarrow x \in \bigcap\{X_1, \ldots, X_n, \ldots\}]$[279].

278 Con '$x \in \bigcap\{X_1, \ldots, X_n, \ldots\}$' si intende che x appartiene all'intersezione delle classi $X_1, \ldots, X_n, \ldots$.

279 Questo fatto sembrerebbe allora spiegare anche la mancata validità di una legge molto importante come "$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \leftrightarrow \neg B))$". Se considerassimo infatti in luogo degli enunciati "A" e "B" le formule "$x \in \{x\}$" e "$x = x$", allora avremmo che $[(x \in \{x\}) \leftrightarrow (x = x)] \leftrightarrow [\neg(x \in \{x\}) \leftrightarrow \neg(x = x)]$ e dunque per definizione $[(x \in \{x\}) \leftrightarrow (x = x)] \leftrightarrow \big[\neg(x \in \{x\}) \leftrightarrow \neg\forall Z[(x \in Z) \leftrightarrow (x \in Z)]\big]$. Ciò vorrebbe dire che l'appartenenza di x al proprio singoletto affermerebbe tale stato di cose se e solo se la negazione di tale verità corrispondesse alla falsità dell'attribuzione di tutte le proprietà Z all'individuo x. Cosa questa che – come visto – potrebbe anche non verificarsi in presenza di oggetti contraddittori, che in quanto tali potrebbero appartenere a classi sovrapposte. Questo fatto protrebbe costituire una risposta al problema della non-autoestensionalità del calcolo logico sottostante, posto da Béziau: «Many people think that a logic must be self-extensional. However this is rather because it is a nice technical and practical property than for any precise philosophical reason. […] Moreover it seems that any logic that wants to capture intensionality should be non self-extensional. Nevertheless if a logic is not self-extensional, the counter examples of self extensionality must have an intuitive explanation. Unfortunetely it seems that is not the case with several paraconsistent logics which are not self-extensional. […] In Da Costa's logicC_1 the formulas $a \wedge b$ e $b \wedge a$ are logically equivalent (i.e. $a \wedge b \dashv\vdash b \wedge a$) but not their negations and nobody has presented a philosophical idea to support this failure». Cfr. Béziau, J.-Y., *Are Paraconsistent Negations Negations?*, in Carnielli, W.,

L'insieme *singleton* è allora il più piccolo insieme contenente l'oggetto in questione e consiste pertanto nella sua essenza, che lo «individua» come tale e che lo distingue da tutti gli altri elementi che non dovessero condividere le medesime proprietà[280].

Per come intendiamo qui la negazione primitiva, il fatto di considerare come possibili alcune circostanze contraddittorie ci porta ad interpretare una eventuale formula del tipo $(x \in X) \wedge (x \notin X)$ come una proposizione secondo la quale x ha la proprietà espressa da X ed X possiede anche la proprietà indicata dal complemento relativo di X.

La negazione alla base del nostro sistema formale non può essere intesa come significante semplicemente la falsità della relazione di inerenza fra il soggetto x e la proprietà X, poiché essa non ha la forza del funtore di negazione classica.

Se dovesse dunque determinarsi una condizione del tipo $(x \in X) \wedge (x \notin X)$, la negazione debole coinvolta indicherebbe invece l'esistenza di una classe in sovrapposizione, dove cioè l'estensione della classe X interferirebbe con quella della classe complemento rispetto ad essa. Ciò potrebbe indicare la nuova proprietà emergente dalla circostanza contraddittoria "$(x \in X) \wedge (x \notin X)$".

L'essenza di x potrebbe quindi essere costituita oltre che da un certo numero di predicati positivamente determinati anche da qualche altro predicato, che risulterebbe complementare a qualcuno di quelli posseduti; e non sarebbe possibile così considerare l'essenza di x come pienamente determinata, se si dovessero escludere condizioni inconsistenti.

Pertanto tra tutti i predicati attribuibili ad un *Urelement* inconsistente dovrà figurarvi almeno un predicato che si oppone per definizione a qualcuna delle proprietà considerate. Ciò sarà tollerato ed eventualmente supportato proprio dall'uso della negazione debole. Questa sarà intuitivamente la ragione e la spiegazione delle possibili inconsistenze che noi qui adotteremo.

In tal senso allora, se si considera l'essenza e dunque il *singleton* di un oggetto inconsistente almeno rispetto ad una determinata proprietà, allora potrebbe accadere che l'insieme in questione risulti anch'esso debordante, poiché per almeno una delle proprietà possedute da x, questa proprietà si sovrappone ed interferisce con la sua negata.

Sia così X un *singleton* avente come elemento un individuo inconsistente x. Allora varrà il seguente:

Coniglio, M., D'Ottaviano Loffredo, I., (eds.), *Paraconsistency. The Logical Way to the Inconsistent*, Marcel Dekker, Basel, 2002, p. 477

[280] Ciò sarà inteso negando fortemente l'appartenenza di x ad almeno una classe Y, nella quale vi sia un certo y. In tal caso infatti risulterebbe che $x \neq^* y$.

Teorema 14.18 $\vdash_{ZFU_1} \forall X\big[(X = \{m\}) \wedge \exists x[(m = x) \wedge Incon(x)]\big] \rightarrow Deb(\{x\})$

Dimostrazione

Sia per ipotesi $(X = \{m\}) \wedge \exists x[(m = x) \wedge Incon(x)]$, dove non occorrono variabili libere. Allora vale che $(X \subseteq X)$ per il teorema 14.6 e per l'assioma 13, regola 3 e 1 ad esso applicati. Inoltre vale per ipotesi $Incon(x)$, cioè $\exists Z[(x \in Z) \wedge (x \notin Z)]$, e dunque vi sarà anche almeno una proprietà di x in sovrapposizione con la sua negata. Così la totalità dei predicati attribuibili ad x dovrà per forza di cose comprendere anche una proprietà opposta a qualcuna di quelle positivamente determinate. Così per l'assioma 5, la regola 3 e la regola 1 si avrà che $\big[(X \subseteq X) \wedge \exists Z[(x \in Z) \wedge (x \notin Z)]\big]$, cioè a dire $Deb(X)$ per la definizione 14.7. Inoltre dato che $(X = \{m\})$ e che $(m = x)$, ne segue che $Deb(\{x\})$. Per MD* allora risulterà $\Big[\big[(X \subseteq X) \wedge \exists x[(m = x) \wedge Incon(x)]\big] \rightarrow Deb(\{x\})\Big]$. Inoltre per l'assioma 14, regola 3 e 1 si dedurrà $\Big[\big[(X \subseteq X) \wedge \exists x[(m = x) \wedge Incon(x)]\big] \rightarrow Deb(\{x\})\Big]$; mentre per l'assioma 1, la regola 3 e 1 che $\Big[(P \rightarrow P) \rightarrow \Big[\big[(X \subseteq X) \wedge \exists x[(m = x) \wedge Incon(x)]\big] \rightarrow Deb(\{x\})\Big]\Big]$, donde $\Big[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X\Big[\big[(X \subseteq X) \wedge \exists x[(m = x) \wedge Incon(x)]\big] \rightarrow Deb(\{x\})\Big]\Big]$ per la regola 5. Infine per MP si avrà che $\forall X\Big[\big[(X \subseteq X) \wedge \exists x[(m = x) \wedge Incon(x)]\big] \rightarrow Deb(\{x\})\Big]$.

La forma implicativa di questo teorema è conseguenza dell'impostazione che abbiamo cercato di dare al nostro sistema formale. Non abbiamo infatti asserito l'esistenza esplicita di alcun *Urelement*, tantomeno di *Urelemente* inconsistenti. Va da sé pertanto che in caso valesse l'antecedente del teorema sopra dimostrato, allora potrebbe dedursi l'esistenza di *singletons* debordanti.

Possiamo a questo punto introdurre una definizione per quei singoletti, soggiacenti alla condizione precedentemente dimostrata:

Definizione 14.17 $ParSing(X) \overset{\text{def}}{=} [(X = \{x\}) \wedge (Deb(X))]$[281]

[281] Con '$ParSing(X)$' intendiamo dire che X è un *singleton*, il cui elemento risulta essere membro di almeno una classe in sovrapposizione.

o più semplicemente:

Definizione 14.18 $ParSing(X) \stackrel{\text{def}}{=} Deb(\{x\})$

Le definizioni e i teoremi sopra riportati ci sembrano in accordo con l'impostazione generale che abbiamo delineato in apertura di questo capitolo.

Il dato che se ne ricava è che una perfetta identità fra individui è analiticamente determinabile soltanto se questi hanno stabilmente i medesimi predicati. Mentre un criterio di distinguibilità appropriata sembrerebbe essere ancora l'individuazione di una proprietà che possa essere attribuita con verità dell'uno e falsità dell'altro, cioè: $\exists X\big[\big((x \in X)\wedge(y \notin^* X)\big)\vee\big((y \in X)\wedge(x \notin^* X)\big)\big]$.

Nel caso degli insiemi-coppia si possono fare considerazioni analoghe, se queste dovessero avere come elementi *Urelemente* inconsistenti.

Sia infatti X una data coppia non-ordinata di elementi. Allora vale il seguente:

Teorema 14.19

$$\vdash_{ZFU_1} \forall X\left[(X = \{m,n\})\wedge\exists x\big[\big((x = m)\vee(x = n)\big)\wedge Incon(x)\big]\right] \to Deb(\{m,n\})$$

Dimostrazione

Sia $\left[(X = \{m,n\})\wedge\exists x\big[\big((x = m)\vee(x = n)\big)\wedge Incon(x)\big]\right]$ la nostra ipotesi, in cui non occorrono variabili libere. Allora varrà per il teorema 14.6 che $(X \subseteq X)$ per l'assioma 13, la regola 3 e 1. Inoltre per ipotesi vale che m o n è un *Urelement* inconsistente e cioè $\exists Z\big((x \in Z)\wedge(x \notin^* Z)\big)$. Per l'assioma 5, la regola 3 e 1 vale inoltre $\big[(X \subseteq X)\wedge\exists Z\big((x \in Z)\wedge(x \notin^* Z)\big)\big]$, ossia $Deb(X)$ per la definizione 14.9, donde $Deb(\{m,n\})$. Per MD* quindi si dedurrà $\left[(X = \{m,n\})\wedge\exists x\big[\big((x = m)\vee(x = n)\big)\wedge Incon(x)\big]\right] \to Deb(\{m,n\})$ e per l'assioma 1, regola 3 e 1 anche $\left[(P\to P)\to\left[\left[(X = \{m,n\})\wedge\exists x\big[\big((x = m)\vee(x = n)\big)\wedge Incon(x)\big]\right] \to Deb(\{m,n\})\right]\right]$, donde $\left[(P\to P)\to\forall X\left[\left[(X =\right.\right.\right.$

$\{m,n\})\wedge\exists x\big[\big((x=m)\vee(x=n)\big)\wedge Incon(x)\big]\big]\rightarrow Deb(\{m,n\})\Big]\Big]$ per la regola 5. Infine si otterrà $\forall X\Big[\big[(X=\{m,n\})\wedge\exists x\big[\big((x=m)\vee(x=n)\big)\wedge Incon(x)\big]\big]\rightarrow Deb(\{m,n\})\Big]$ per MP.

Questo teorema mostra come la presenza di almeno un *Urelement* inconsistente all'interno di una qualsivoglia coppia (non-ordinata) X di oggetti non-insiemistici determini il suo debordamento, analogamente al caso dei *singletons*. Ne consegue che la proprietà di debordamento, valida per qualche *singleton*, si propaga alle coppie non-ordinate, scaturenti dall'unione di due singoletti

Nulla vieta ovviamente che siano entrambi gli elementi della coppia non-ordinata ad essere inconsistenti. Varrebbe anche così il seguente:

Teorema 14.20

$$\vdash_{ZFU_1} \forall X\big[(X=\{m,n\})\wedge\exists x\big((x=m)\wedge Incon(x)\big)\wedge\exists y\big((y=n)\wedge Incon(y)\big)\big]\rightarrow$$
$$\rightarrow Deb(\{m,n\})$$

Dimostrazione

Sia $\big[(X=\{m,n\})\wedge\exists x\big((x=m)\wedge Incon(x)\big)\wedge\exists y\big((y=n)\wedge Incon(y)\big)\big]$ la nostra ipotesi di partenza, nella quale non occorrono variabili libere. Allora varrà per il teorema 14.6 che $(X\subseteq X)$ per l'assioma 13, la regola 3 e 1. Inoltre vale per ipotesi che m e n occorrano per oggetti non-insiemistici inconsistenti. Così varrà anche che $\exists Z\big((x\in Z)\wedge(x\notin Z)\big)$ e $\exists Z\big((y\in Z)\wedge(y\notin Z)\big)$ e così per l'assioma 5, regola 3 e 1 $\big[(X\subseteq X)\wedge\exists Z\big((x\in Z)\wedge(x\notin Z)\big)\wedge\exists Z\big((y\in Z)\wedge(y\notin Z)\big)\big]$, cioè $Deb(X)$ per la definizione 14.9, nonché $Deb\{m,n\}$. Per MD* allora risulta che $\Big[\big[(X=\{m,n\})\wedge\exists x\big((x=m)\wedge Incon(x)\big)\wedge\exists y\big((y=n)\wedge Incon(y)\big)\big]\rightarrow Deb\{m,n\}\Big]$ e per l'assioma 1, la regola 3 e 1 $\Big[(P\rightarrow P)\rightarrow\Big[\big[(X=\{m,n\})\wedge\exists x\big((x=m)\wedge Incon(x)\big)\wedge\exists y\big((y=n)\wedge Incon(y)\big)\big]\rightarrow Deb\{m,n\}\Big]\Big]$ e $\Big[(P\rightarrow P)\rightarrow\forall X\Big[\big[(X=\{m,n\})\wedge\exists x\big((x=m)\wedge Incon(x)\big)\wedge\exists y\big((y=$

$n)\wedge Incon(y)\big)\big]\rightarrow Deb\{m,n\}\Big]\Big]$ per la regola 5. Infine si può dedurre $\forall X\Big[\big[(X = \{m,n\})\wedge\exists x\big((x = m)\wedge Incon(x)\big)\wedge\exists y\big((y = n)\wedge Incon(y)\big)\big]\rightarrow Deb\{m,n\}\Big]$ per MP.

Introduciamo anche per le coppie una definizione specifica per questo tipo di condizione:

Definizione 14.18 $PairPa(X) \overset{\text{def}}{=} \big[(X = \{m,n\})\wedge\big(Deb(X)\big)\big]$[282]

o abbreviando:

Definizione 14.19 $Pairpa(X) \overset{\text{def}}{=} Deb(\{m,n\})$

Diremo allora autoidentici quei *singletons* e quelle coppie non-ordinate per i quali non valgono le condizioni sopra viste:

Definizione 14.20 $AutSing(\{n\}) \overset{\text{def}}{=} [(\{n\} = X)\wedge(X =^{+} X)]$

Definizione 14.21 $AutPair(\{m,n\}) \overset{\text{def}}{=} [(\{m,n\} = X)\wedge(X =^{+} X)]$

[282] Con '$Pairpa(X)$' intendiamo dire che X è una coppia non-ordinata, di cui almeno un elemento risulta essere un individuo inconsistente.

7.3 Coppie ordinate

Finora abbiamo visto come ciò che distingue insiemisticamente due coppie in ZFU_1 siano soltanto gli elementi che ne fanno parte. Possiamo però introdurre delle specifiche definizioni per far sì che nelle coppie acquisti rilevanza anche l'ordine con cui i vari membri vengono collocati.

A tale scopo sarà impiegata un'apposita definizione, del tutto aderente a quella utilizzata per quanto riguarda teorie degli insiemi di tipo standard e in conformità con quella adoperata ad esempio in altri sistemi con *Urelemente*, come quello dato da Mendelson (UR)[283].

Tenendo presente la nozione di estensionalità delle classi ed avendo assunto l'assioma dell'insieme coppia, definiremo ora una coppia ordinata secondo la strategia di Kuratowski[284], che ci pare per certi aspetti più intuitiva e soddisfacente di quella introdotta da Wiener[285]. Sebbene il celebre logico e matematico polacco pensasse fondamentalmente ad un contesto di teoria degli insiemi puri piuttosto che ad un universo al cui interno potessero darsi degli individui di natura non-insiemistica, non ci pare emergano elementi contrari a questo tipo di scelta in presenza di individui.

Veniamo così ad un impiego più concreto della nozione di intensionalità, finora tralasciata, che si apre proprio grazie alla definizione di simili classi. Lo faremo in maniera mirata e per scopi ben precisi. L' aver optato infatti per la nozione estensionale di insieme ci consente un adeguato margine di manovra nell'utilizzo di questo tipo di nozione, che non soggiacendo a prescrizioni di alcun tipo, dal momento che non vi sono assiomi per essa, può essere opportunamente impiegata per la definizione di certi specifici oggetti, molto importanti nel seguito della trattazione.

Cominciamo col dire che una coppia ordinata è così definita:

Definizione 14.22 $\langle m, n\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{\{m\}, \{m, n\}\}$[286]

[283] Cfr. Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, *op. cit.*, pp. 297-304

[284] Kuratowski, K., *Sur la notion d'ordre dans la théorie des ensembles*, *op. cit.*, pp. 170-1

[285] Wiener utilizzava la seguente definizione: $\langle m, n\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{\{m\}, \{n, \emptyset\}\}$. Tale definizione risente comunque della semplificazione apportata da Quine. Cfr. Wiener, N., *A Simplification of the Logic of Relations*, «Proceedings of the Cambridge Philosophical Society», vol. 17, 1914, pp. 387-90. Quine, W., *Mathematical Logic*, *op. cit.*, p. 198. Oberschelp, A., *On Pairs and Tuples*, «Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik», vol. 37, 1991, pp. 55-6

[286] Un'ulteriore definizione comunque possibile è quella introdotta da Hausdorff sempre nel 1914, corrispondente a: $\langle m, n\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{\{m, 1\}, \{n, 2\}\}$, dove 1 e 2 sono oggetti differenti da m e n. Cfr. Hausdorff, F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Von Veit, Leipzig, 1914, pp. 32-3. Per una

Questa definizione può essere utilizzata nella dimostrazione del seguente:

Teorema 14.21

$$\vdash_{ZFU_1} \forall m \forall n \forall p \forall q\big[[\langle m,n\rangle = \langle p,q\rangle] \rightarrow [(m = p)\wedge(n = q)]\big]$$

Dimostrazione

Si parta dall'ipotesi $[\langle m,n\rangle = \langle p,q\rangle]$, dove non compaiono variabili libere. Allora per la definizione 14.24 si sta ipotizzando che $\big[\{\{m\},\{m,n\}\} = \{\{p\},\{p,q\}\}\big]$. Così $\big[\big(\{p\} \in \{\{m\},\{m,n\}\}\big)\big]$, cioè $[(\{p\} = \{m\})\vee(\{p\} = \{m,n\})]$ per l'assioma $\boldsymbol{P}$. In tutti e due i casi varrà che $m = p$. Ragionando in maniera analoga, si ha per ipotesi anche che $\big[\{p,q\} \in \{\{m\},\{m,n\}\}\big]$ e dunque che $[(\{m,n\} = \{p\})\vee(\{m,n\} = \{p,q\})]$ per l'assioma $\boldsymbol{P}$. Ora se vale il primo dei due disgiunti e $\{p,q\} = \{m\}$, allora si ha che $m = n = p = q$. Se vale invece il secondo disgiunto, allora $\{p,q\} = \{m,n\}$ e così $\{p,q\} = \{p,n\}$. Pertanto $[(p \neq^* q)\rightarrow(n = q)]$[287], mentre $[(p = q)\rightarrow(n = q)]$ allo stesso modo e così in ogni caso $n = q$. Applicando ora l'assioma 5, regola 3 e 1, si può ricavare la congiunzione $[(m = p)\wedge(n = q)]$. Così dall'ipotesi si deduce per MD* $\big[[\langle m,n\rangle = \langle p,q\rangle]\rightarrow[(m = p)\wedge(n = q)]\big]$, donde $\Big[(P\rightarrow P)\rightarrow\big[[\langle m,n\rangle = \langle p,q\rangle]\rightarrow[(m = p)\wedge(n = q)]\big]\Big]$ per l'assioma 1, regola 3 e 1. Applicando quattro volte la regola 5, è possibile dunque provare $\Big[(P\rightarrow P)\rightarrow\forall m\forall n\forall p\forall q\big[[\langle m,n\rangle = \langle p,q\rangle]\rightarrow[(m = p)\wedge(n = q)]\big]\Big]$, da cui $\forall m\forall n\forall p\forall q\big[[\langle m,n\rangle = \langle p,q\rangle]\rightarrow[(m = p)\wedge(n = q)]\big]$ per MP.

Chiudiamo questo paragrafo introducendo un pratico modo di distinguere gli elementi di una data coppia ordinata. Generalmente le due componenti di un certo insieme $\langle m,n\rangle$ vengono dette "coordinate": rispettivamente "prima coordinata" e "seconda coordinata". Possiamo allora fissare due apposite operazioni, dette "proiezioni" della coppia, al fine di individuarle:

---

discussione circa le differenze fra queste tre definizioni si confronti ancora: Oberschelp, A., *On Pairs and Tuples*, *op. cit.*

[287] In tal caso si assume come ipotesi che vi sia almeno una proprietà che distingue chiaramente p da q, essendo vera dell'uno e falsa dell'altro.

Definizione 14.23

$$K_1(\langle m, n \rangle) = m$$

$$K_2(\langle m, n \rangle) = n$$

Indicheremo l'insieme $\{\{m\}\}$ con '$\langle m \rangle$'. Con tale scrittura specificheremo una coppia ordinata costituita da un unico elemento, caso che si verifica allorché le due coordinate risultano tra loro coincidenti.

La generalizzazione di questo concetto può a questo punto aver luogo tramite la seguente definizione:

Definizione 14.24

$$\langle m \rangle = \{\{m\}, \{m, m\}\} = \{\{m\}, \{m\}\} = \{\{m\}\}$$

$$\langle m_1, \dots, m_n, m_{n+1} \rangle = \langle \langle m_1, \dots, m_n \rangle, m_{n+1} \rangle$$

È possibile infine estendere il teorema 14.21 anche alle n-ple, garantendo allo stesso modo che n-ple eguali hanno coordinate e proiezioni tra loro eguali.

8. *Il concetto di riunione*

8.1 Quarto assioma: l'assioma dell'unione

In questo paragrafo introdurremo un assioma molto importante, che consentirà di superare i limiti precedentemente rilevati a proposito della grandezza degli insiemi fin qui visti. Nei due paragrafi precedenti abbiamo infatti osservato che l'assioma della coppia non era in grado di provare l'esistenza di insiemi con un numero di oggetti maggiore di due. Esso infatti poteva produrre un numero anche infinito di insiemi, ma non insiemi infiniti essi stessi o aventi un numero di elementi maggiore di due.

L'assioma dell'unione consentirà al sistema ZFU_1 di compiere un netto cambio di passo rispetto a questo stato di cose, giacché esso apre alla possibilità di riunire in un solo aggregato insiemi di taglia arbitraria, consentendo, sulla base degli assiomi fin qui delineati, che si possa arrivare a determinare l'esistenza di una classe avente un numero qualunque, sebbene ancora non infinito, di elementi.

L'assioma dell'unione ha come obiettivo fondamentale quello di fissare per un dato insieme Y l'esistenza dell'insieme avente come membri gli elementi degli elementi di Y. Ciò potrebbe venir garantito, entro certi limiti, mediante l'applicazione dell'assioma (schema) di separazione, che però non abbiamo ancora fornito. Così il postulato che stiamo per discutere è, almeno per il momento, necessario per superare l'*impasse* in cui ci troviamo. Ad ogni modo, come vedremo, esso risulterà comunque indispensabile nel seguito, anche quando assiomi come quello di separazione verranno forniti, giacché se l'insieme Y dovesse avere una quantità illimitata di elementi e ciascuno di tali elementi avere a sua volta una quantità illimitata di elementi, allora la riunione di Y non sarebbe determinabile a partire dagli altri postulati dati[288].

Nella pratica l'assioma agirà in questo modo. Se in ZFU_1 si ha un Y, tale che:

$$Y = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

dove

$$X_1 = \{m_1, m_2\},\ X_2 = \{m_3\},\ X_3 = \{m_1, m_4\},\ X_4 = \{m_2, m_5\}$$

[288] Cfr. Abian, A., *The Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, *op. cit.*, p. 92

allora l'assioma dell'unione consentirà di ottenere l'esistenza dell'insieme $\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$.

Come si può osservare, l'applicazione dell'assioma in questione consente di ottenere proprio ciò di cui parlavamo poc'anzi, cioè a dire la riunione in un'unica collezione degli elementi degli elementi di Y: m_1, m_2, m_3, m_4, m_5. Inoltre si osserva facilmente come esso contenga una sola volta quegli oggetti comuni agli elementi di Y, dal momento che – come sappiamo – $\{m, m\} = \{m\}$, cioè a dire il numero di volte con cui si presenta uno stesso oggetto non ha alcun tipo di influenza sulla riunione ottenuta. È questo ad esempio il caso degli insiemi X_1 e X_4, elementi di Y, che condividono l'elemento m_2, o degli insiemi X_1 e X_3, che condividono l'elemento m_2. In tali casi gli elementi degli elementi di Y vengono presi una sola volta, come accade anche nei sistemi di tipo classico, dal momento che non sono state fornite disposizioni contrarie.

Si può infine osservare che grazie all'uso fatto dei differenti tipi di variabili l'assioma agirà su insiemi che contengono altri insiemi, i quali a loro volta contengono elementi non meglio precisati. Ciò è diretta conseguenza del fatto che, nella teoria che qui si intende descrivere, si vuol lasciare spazio agli *Urelemente* e questo è sottolineato dall'uso delle differenti sorte di variabili impiegate nella formulazione dell'esempio prima esaminato. Risulta inoltre che se gli elementi fossero stati vuoti, allora l'assioma avrebbe dato la collezione nulla.

L'adozione di un assioma per l'unione consente al sistema ZFU_1 la costruzione di classi sempre più grandi rispetto a quelle sin qui viste, contenendo sin da ora un numero (limitato) qualunque di elementi, generabili per mezzo dei principi dati. Il potere espressivo e costruttivo della teoria è allora notevolmente aumentato rispetto a quanto accadeva sino al paragrafo precedente e sarà ulteriormente accresciuto dalla combinazione determinata dagli assiomi che seguiranno, specialmente nella caratterizzazione del transfinito.

Come per altri sistemi formali, non possiamo allora evitare l'assunzione di questo assioma, giacché qui come in altre teorie siamo interessati allo sviluppo e alla determinazione non solo di riunioni sufficientemente grandi ma anche e soprattutto alla costruzione della porzione transfinita dell'insiemistica. Infatti la presenza di almeno un insieme di taglia illimitata, cioè infinita nel senso che a breve indicheremo, sarà per noi importante al fine di definire insiemisticamente i numeri naturali ($\boldsymbol{N}$) e a partire da essi i numeri reali ($\boldsymbol{R}$).

Per assicurare allora l'esistenza dell'insieme-unione (*Vereinigung*) ammetteremo per ZFU_1 il seguente:

Assioma dell'unione. $\boldsymbol{Un}$

$$\forall X \exists Y \forall m \big[(m \in Y) \leftrightarrow \exists Z[(m \in Z) \wedge (Z \in X)]\big]$$

L'assioma $\boldsymbol{Un}$ sintetizza proprio le condizioni sopra esposte e rispetta i normali canoni di formulazione. La differenza sostanziale risiede nel fatto che – come detto poc'anzi – solo gli elementi degli elementi possono essere eventualmente *Urelemente*, dal momento che in caso contrario otterremo $Y = \emptyset$.

L'insieme di cui l'assioma $\boldsymbol{Un}$ garantisce l'esistenza ammette in genere una rappresentazione caratteristica, che assumeremo anche in ZFU_1, in base alla seguente definizione:

Definizione 14.24

$$\bigcup X \stackrel{\text{def}}{=} \{m | \exists Z[(m \in Z) \wedge (Z \in X)]\}$$

Inoltre dal momento che $X = \{m | m \in X\}$, possiamo anche scrivere la riunione di un qualunque insieme Y come:

$$\bigcup Y = \bigcup \{Z | Z \in Y\}$$

o anche come[289]:

$$\bigcup Y = \bigcup_{Z \in Y} Z$$

In questo modo denoteremo d'ora in poi l'insieme-somma o la riunione degli elementi di un qualunque insieme X.

Proviamo desso l'unicità dell'insieme-somma. Dimostriamo dunque che:

Teorema 14.22 $\vdash_{ZFU_1} \forall X \exists_1 Y \forall m \big[(m \in Y) \leftrightarrow \exists Z[(m \in Z) \wedge (Z \in X)]\big]$

[289] Cfr. Abian, A., *The Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, *op. cit.*, pp. 92-3

Dimostrazione

La prova di questo teorema si basa come nei casi precedentemente esaminati sulla relazione di eguaglianza data. Assumendo infatti che esista un secondo insieme somma Y', ottenuto dalla riunione degli stessi elementi, si noterà come esso si troverà ad avere tutti gli elementi m, che sono anche membri di Y. Pertanto i due insiemi saranno eguali per la definizione della relazione di eguaglianza per classi, di cui ZFU_1 è dotata.

8.2 Alcune conseguenze dell'assioma dell'unione

Illustreremo mediante dimostrazione alcune conseguenze derivanti dall'assunzione dell'assioma $\boldsymbol{Un}$. Innanzitutto proviamo che:

Teorema 14.22 $\vdash_{ZFU_1} \bigcup \emptyset = \emptyset$

Dimostrazione

Poiché $\emptyset$ è l'insieme vuoto, esso sarà del tutto privo di elementi, cioè $\forall m(m \notin^* \emptyset)$. Così l'insieme degli elementi dei suoi elementi sarà egualmente nullo, non contenendo $\emptyset$ alcun elemento.

Teorema 14.23 $\vdash_{ZFU_1} \forall X[\bigcup\{X\} = X]$

Dimostrazione

Sia $X = \{n|n \in X\}$, dove X non è una variabile libera. Allora $\bigcup\{X\} = \{n|n \in X\}$ e $\bigcup\{X\} = X$. Così per l'assioma 1, regola 3 e 1 vale $\big[\big((P{\rightarrow}P){\rightarrow}[\bigcup\{X\} = X]\big)\big]$, donde $\big[\big((P{\rightarrow}P){\rightarrow}\forall \mathrm{X}[\bigcup\{X\} = X]\big)\big]$ per la regola 5 e $\forall \mathrm{X}[\bigcup\{X\} = X]$ per MP.

Teorema 14.24 $\vdash_{ZFU_1} \forall X \exists Y\big[\big((m \in X) \rightarrow (\{m\} \in Y)\big) \rightarrow (\bigcup Y = X)\big]$

Dimostrazione

Sia per ipotesi $\big((m \in X){\rightarrow}(\{m\} \in Y)\big)$, dove non occorrono variabili libere. Allora X sarà l'insieme costituito degli elementi m, mentre Y sarà l'insieme costituito dai *singletons* dei singoli elementi di X, ricavati mediante n applicazioni dell'assioma $\boldsymbol{P}$. Occorre dimostrare così che la riunione su Y è eguale ad X. Sarà sufficiente allora considerare che $\bigcup Y = \bigcup\{Z|Z \in Y\}$ e che $\bigcup\{Z|Z \in Y\} = \{m|(m \in \{m\}) \wedge (\{m\} \in Y)\}$. Così $\bigcup Y = \{m|m \in X\}$, giacché esso conterrebbe tutti gli m dei *singletons* di Y, costruiti a partire dagli elementi di X. Allora, in virtù dell'estensionalità per classi garantita dalla definizione 14.3, è possibile determinare anche $\bigcup Y = X$. Applicando allora

MD*, si ottiene $\big[\big((m \in X)\rightarrow(\{m\} \in Y)\big)\rightarrow(\bigcup Y = X)\big]$. Per l'assioma 14, la regola 3 e 1 si ottiene $\exists Y\big[\big((m \in X)\rightarrow(\{m\} \in Y)\big)\rightarrow(\bigcup Y = X)\big]$. Inoltre per l'assioma 1, la regola 3 e 1, vale $\Big[(P\rightarrow P)\rightarrow\exists Y\big[\big((m \in X)\rightarrow(\{m\} \in Y)\big)\rightarrow(\bigcup Y = X)\big]\Big]$, donde $\Big[(P\rightarrow P)\rightarrow\forall X\exists Y\big[\big((m \in X)\rightarrow(\{m\} \in Y)\big)\rightarrow(\bigcup Y = X)\big]\Big]$ per la regola 5. Applicando infine la regola 1, si deduce $\forall X\exists Y\big[\big((m \in X)\rightarrow(\{m\} \in Y)\big)\rightarrow(\bigcup Y = X)\big]$.

Possiamo visualizzare l'affermazione dimostrata nel teorema 14.24, esaminando un esempio concreto e banale, dato da un ipotetico insieme X, tale che $X = \{m, n, p, q\}$. Allora, sfruttando tale enunciato, si ottiene quanto segue:

$$X = \{m, n, p, q\} = \bigcup\{\{m\}, \{n\}, \{p\}, \{q\}\}$$

8.3 Definizione dell'operatore di unione e sue proprietà

Introduciamo a questo punto l'operatore di unione tra insiemi, di comune utilizzo anche negli altri sistemi insiemistici, adoperando proprio l'assioma $\boldsymbol{Un}$.

Fissiamo allora le seguenti definizioni di unione tra classi:

Definizione 14.25

$$X \cup Y \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup\{X, Y\}$$

Possiamo inoltre sfruttare la definizione 14.25, adeguandola ai casi esaminati nel paragrafo precedente, per stabilire quanto segue:

Definizione 14.26

$$X \cup Y \stackrel{\text{def}}{=} \{m|(m \in X)\vee(m \in Y)\}$$

Generalizzando allora le definizioni 14.25 e 14.26, è possibile ottenere:

Definizione 14.27

$$X_1 \cup \ldots \cup X_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup\{X_1 \cup \ldots \cup X_n\}$$

Definizione 14.28

$$X_1 \cup \ldots \cup X_n \stackrel{\text{def}}{=} \{m|(m \in X_1)\vee \ldots \vee(m \in X_n)\}$$

Queste definizioni consentono di verificare alcune importanti proprietà dell'operatore di unione.

Dimostriamo innanzitutto il seguente:

Teorema 14.25 $\vdash_{ZFU_1} \forall X(X \cup \emptyset) = X$

Dimostrazione

Sappiamo che $(X \cup \emptyset) = \{m|(m \in X) \vee (m \in \emptyset)\}$ per la definizione 14.26. In virtù dell'assioma $\boldsymbol{O}$ sappiamo però anche che $\forall m(m \notin^* \emptyset)$ e così $\{m|(m \in X) \vee (m \in \emptyset)\} = \{m|(m \in X)\}$. Allora varrà $(X \cup \emptyset) = \{m|(m \in X)\}$, cioè $(X \cup \emptyset) = X$. Dall'assioma 1, regola 3 e 1 segue $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow [(X \cup \emptyset) = X]\right]$ e, per la regola 5, $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X[(X \cup \emptyset) = X]\right]$. Infine per MP, è possibile dedurre $\forall X[(X \cup \emptyset) = X]$.

Passiamo ora alla dimostrazione di alcune fondamentali proprietà, quali l'idempotenza, la commutatività e la associatività dell'operatore '$\cup$'.

Proviamo che per esso vale l'idempotenza:

Teorema 14.26 $\vdash_{ZFU_1} \forall X(X \cup X) = X$

Dimostrazione

Sappiamo che $(X \cup X) = \bigcup\{X, X\} = \bigcup\{X\}$ per le definizione sopra esaminate e che $\bigcup\{X\} = X$ per il teorema 14.23. Varrà così, per le eguaglianze dimostrate, che $(X \cup X) = X$. Applicando poi l'assioma 1, la regola 3 e 1, seguirà $\left[\left((P \rightarrow P) \rightarrow [(X \cup X) = X]\right)\right]$, donde $\left[\left((P \rightarrow P) \rightarrow \forall X[(X \cup X) = X]\right)\right]$ per la regola 5 e infine $\forall X[(X \cup X) = X]$ per MP.

Proviamo ora che l'operatore di unione gode della proprietà di commutatività:

Teorema 14.27 $\vdash_{ZFU_1} \forall X \forall Y[(X \cup Y) = (Y \cup X)]$

Dimostrazione

In base alla definizione 14.25 vale $(X \cup Y) = \bigcup\{X, Y\}$. Inoltre in base al teorema 14.12, vale $\{X, Y\} = \{Y, X\}$. Così $\bigcup\{X, Y\} = \bigcup\{Y, X\}$, cioè $\bigcup\{X, Y\} = (Y \cup X)$ per la definizione 14.25. Allora, per le eguaglianze dimostrate, varrà anche $[(X \cup Y) = (Y \cup X)]$. Applicando l'assioma 1, la regola 3 e 1, si avrà così $\big[\big((P \to P) \to [(X \cup Y) = (X \cup Y)]\big)\big]$, donde $\big[\big((P \to P) \to \forall X[(X \cup Y) = (X \cup Y)]\big)\big]$ per la regola 5. Infine risulterà $\forall X[(X \cup Y) = (X \cup Y)]$ per MP.

Dimostriamo infine la proprietà di associatività per l'operatore '$\cup$', data dal seguente teorema:

Teorema 14.28 $\vdash_{ZFU_1} \forall X \forall Y \forall Z\big[\big((X \cup Y) \cup Z\big) = \big(X \cup (Y \cup Z)\big)\big]$

Dimostrazione

Procederemo mostrando che i due termini dell'eguaglianza sono eguali poiché eguali ad un termine comune. Osserviamo infatti le seguenti eguaglianze: $\big[\big((X \cup Y) \cup Z\big) = (\bigcup\{X, Y\} \cup \bigcup\{Z\}) = \bigcup\{\bigcup\{X, Y\}, \bigcup\{Z\}\}\big]$ per la definizione 14.27. Inoltre, per la medesima definizione, si avrà anche $\big[\bigcup\big(\bigcup\{\{X, Y\}, \{Z\}\}\big) = \bigcup\{X, Y, Z\}\big]$ e così $\big[\big((X \cup Y) \cup Z\big) = \bigcup\{X, Y, Z\}\big]$. Ora si può osservare come valga anche $\big[\big(X \cup (Y \cup Z)\big) = (\bigcup\{X\} \cup \bigcup\{Y, Z\}) = \bigcup\{\bigcup\{X\}, \bigcup\{Y, Z\}\}\big]$ e $\big[\bigcup\{\bigcup\{X\}, \bigcup\{Y, Z\}\} = \bigcup\big(\bigcup\{\{X, Y\}, \{Z\}\}\big) = \bigcup\{X, Y, Z\}\big]$. Così avremo che $\big[\big(X \cup (Y \cup Z)\big) = \bigcup\{X, Y, Z\}\big]$. Varrà quindi la seguente eguaglianza: $\big[\big((X \cup Y) \cup Z\big) = \bigcup\{X, Y, Z\} = \big(X \cup (Y \cup Z)\big)\big]$. Ma allora per la definizione 14.3 varrà $\Big[\forall m\Big[\Big(m \in \big((X \cup Y) \cup Z\big)\Big) \leftrightarrow (m \in \bigcup\{X, Y, Z\})\Big]\Big]$, $\Big[\forall m\Big[(m \in \bigcup\{X, Y, Z\}) \leftrightarrow \Big(m \in \big(X \cup (Y \cup Z)\big)\Big)\Big]\Big]$ e dunque $\Big[\forall m\Big[\Big(m \in \big((X \cup Y) \cup Z\big)\Big) \leftrightarrow \Big(m \in \big(X \cup (Y \cup Z)\big)\Big)\Big]\Big]$, cioè a dire $\big[\big((X \cup Y) \cup Z\big) = \big(X \cup (Y \cup Z)\big)\big]$. Utilizzando l'assioma 1, la regola 3 e 1, si dedurrà a questo punto $\Big[(P \to P) \to \big[\big((X \cup Y) \cup Z\big) = \big(X \cup (Y \cup Z)\big)\big]\Big]$, donde $\Big[(P \to P) \to \forall X \forall Y \forall Z\big[\big((X \cup Y) \cup Z\big) = \big(X \cup (Y \cup Z)\big)\big]\Big]$ in base alla regola 5 applicata tre volte e $\forall X \forall Y \forall Z\big[\big((X \cup Y) \cup Z\big) = \big(X \cup (Y \cup Z)\big)\big]$ per MP.

Sfruttando allora una generalizzazione di quest'ultima proprietà, è possibile ottenere:

$\left[\left(\left((X_1 \cup X_2) \cup \ldots\right) \cup X_n\right) = \bigcup\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} = \left(X_1 \cup \left(X_2 \cup \ldots (X_{n-1} \cup X_n)\right)\right) = (X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n)\right].$

Fissiamo un ultimo importante teorema, tra quelli che valgono anche in ZFU_1:

Teorema 14.29 $\vdash_{ZFU_1} \forall X \forall Y\left[(X \subset Y) \leftrightarrow \left((X \cup Y) = Y\right)\right]$

Dimostrazione

($\rightarrow$) Sia per ipotesi $(X \subset Y)$ una formula in cui non compaiono variabili libere. Allora per la definizione 14.6 si avrà come ipotesi anche $\forall m[(m \in X) \rightarrow (m \in Y)]$. Ma in base a ciò varrà che $\bigcup\{X, Y\} = \{m|(m \in X) \vee (m \in Y)\} = \{m|(m \in Y)\}$, dove $\{m|(m \in Y)\} = Y$. Inoltre per la definizione 14.25 si avrà $[\bigcup\{X, Y\} = (X \cup Y)]$ e così, per le eguaglianze dimostrate, $[(X \cup Y) = Y]$. Per MD* si avrà quindi $\left[(X \subset Y) \rightarrow \left((X \cup Y) = Y\right)\right]$.
($\leftarrow$) Partiamo dall'ipotesi $\left((X \cup Y) = Y\right)$, dove non occorrono variabili libere. Allora, per la definizione 14.3, si avrà anche $\forall m\left[\left(m \in (X \cup Y)\right) \leftrightarrow (m \in Y)\right]$. Per la definizione dell'operatore logico '$\leftrightarrow$', seguirà $\forall m\left[\left(m \in (X \cup Y)\right) \rightarrow (m \in Y)\right]$, che per la definizione 14.6 potrà anche riscritta come "$[(X \cup Y) \subset Y]$". Ciò significa allora che $\{m|(m \in X) \vee (m \in Y)\} \subset \{m|(m \in Y)\} = Y$; in particolare quindi varrà che $\{m|(m \in X)\} \subset \{m|(m \in Y)\}$, ossia $(X \subset Y)$. Per MD* quindi è possibile ricavare dall'ipotesi $\left[\left((X \cup Y) = Y\right) \rightarrow (X \subset Y)\right]$
($\leftrightarrow$) Dai due punti sopra dimostrati è possibile ricavare allora $\left[\left[(X \subset Y) \rightarrow \left((X \cup Y) = Y\right)\right] \wedge \left[\left((X \cup Y) = Y\right) \rightarrow (X \subset Y)\right]\right]$ in base all'assioma 5, la regola 3 e 1. Inoltre, per la definizione dell'operatore '$\leftrightarrow$', è possibile derivare $\left[(X \subset Y) \leftrightarrow \left((X \cup Y) = Y\right)\right]$. Ancora per l'assioma 1, regola 3 e 1 segue $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \left[(X \subset Y) \leftrightarrow \left((X \cup Y) = Y\right)\right]\right]$, donde $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X \forall Y\left[(X \subset Y) \leftrightarrow \left((X \cup Y) = Y\right)\right]\right]$ in virtù della regola 5 applicata due volte. Infine, applicando la regola 1, si deriva $\forall X \forall Y\left[(X \subset Y) \leftrightarrow \left((X \cup Y) = Y\right)\right]$.

Concludiamo questo paragrafo esaminando alcune possibili caratteristiche dei nuovi insiemi derivati in base all'assioma $\boldsymbol{Un}$. Abbiamo detto in precedenza che la presenza di individui quali elementi di certe specifiche collezioni potrebbero perturbare, per così dire, la stabilità dell'insieme stesso. Ciò significa che se vi fossero *Urelemente* che hanno caratteristiche contraddittorie, allora gli insiemi che li ospitano potrebbero presentare caratteri di debordamento.

Ciò è stato visto già a proposito degli insiemi singoletto e delle coppie non-ordinate. Disponendo ora di un metodo per riunire collezioni di questo tipo, la cui esistenza è stata già dimostrata, è ragionevole attendersi una propagazione di tali aspetti anche agli insiemi derivanti dalla loro riunione.

Per verificare ciò sarebbe sufficiente considerare ad esempio un insieme $X = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$, dovuto all'unione dei *singletons* degli elementi m_1, m_2, m_3, m_4, m_5.

Per tali ragioni ci pare appropriato estendere le condizioni di inconsistenza fin qui esaminate e provarne alcune proprietà. Ribadiamo tuttavia il carattere ipotetico in base al quale verranno formulate anche le seguenti definizioni, le quali non specificano né determinano l'esistenza di individui di qualche tipo oltre alle classi per cui si è esplicitamente postulata l'esistenza. L'intento di queste come delle altre definizioni date in proposito è quello di rilevare certe possibili caratteristiche che la teoria non è in grado di escludere analiticamente e che potrebbero presentarsi in taluni modelli.

Veniamo dunque alle seguenti:

Definizione 14.29 $ParPle(X) \overset{\text{def}}{\equiv} [X = \{m_1, \dots, m_n\}_{dove\ n \geq 3} \wedge Deb(X)]$[290]

o più brevemente:

Definizione 14.30 $ParPle(X) \overset{\text{def}}{\equiv} Deb(\{m_1, \dots, m_n\}_{dove\ n \geq 3})$

La specificazione introdotta negli indici di queste definizioni non è necessaria in linea di principio ma consente di escludere quei casi già esaminati a proposito dei *singletons* e delle coppie non-ordinate. Pertanto, sebbene un *singleton* o una coppia non-ordinata, soggiacenti rispettivamente alle condizioni di $ParSing$ o di $ParPa$, risultino legittimamente soggiacere anche alla condizione di $ParPle$, dato che si tratta di una n-pla costituita di uno o di due elementi, preferiamo qui

[290] Con '$Parple$' intendiamo una n-pla non-ordinata di eventuali elementi inconsistenti.

escludere questi casi particolari per rafforzare maggiormente la specificità di questa condizione.

Generalizzando ed escludendo dunque le limitazioni imposte nei rispettivi indici, è possibile assorbire i casi particolari delle coppie non-ordinate come dei *singletons*. Lasceremo tuttavia inalterate le definizioni fin qui fornite, potendo ricorrere ad un loro accorpamento allorquando ne risultasse utile l'applicazione.

Veniamo così ad un teorema che è possibile stabilire in presenza di *Urelemente* inconsistenti all'interno di una data n-pla non-ordinata.

Fissiamo allora il seguente ovvio:

Teorema 14.30

$$\forall X\left[\left[(X=\{m_1,\dots,m_n\}_{dove\ n\geq 3})\wedge\left[\exists x_1\big(Incon(x_1)\big)\vee\dots\vee\exists x_n\big(Incon(x_n)\big)\right]_{dove\ n\geq 3}\right]\right.$$
$$\left.\rightarrow Deb(\{m_1,\dots,m_n\}_{dove\ n\geq 3})\right]$$

Dimostrazione

Sia $\left[(X=\{m_1,\dots,m_n\}_{dove\ n\geq 3})\wedge\left[\exists x_1\big(Incon(x_1)\big)\vee\dots\vee\exists x_n\big(Incon(x_n)\big)\right]_{dove\ n\geq 3}\right]$ la nostra ipotesi, in cui X non compare come variabile libera. Allora per il teorema 14.6 e per l'assioma 13, regola 3 e 1 ad esso applicati vale $(X\subseteq X)$. Inoltre dall'ipotesi per l'assioma 4, regola 3 e 1 è possibile ricavare $\exists x_1\big(Incon(x_1)\big)\vee\dots\vee\exists x_n\big(Incon(x_n)\big)$. Così per l'assioma 5, la regola 3 e 1 varrà $\left[(X\subseteq X)\wedge\left[\exists x_1\big(Incon(x_1)\big)\vee\dots\vee\exists x_n\big(Incon(x_n)\big)\right]\right]$, cioè a dire $Deb(X)$ per la definizione 14.7. Essendo però $(X=\{m_1,\dots,m_n\}_{dove\ n\geq 3})$, risulterà allora anche che $Deb(\{m_1,\dots,m_n\}_{dove\ n\geq 3})$. Applicando MD* sarà così possibile ottenere dall'ipotesi $\left[\left[(X=\{m_1,\dots,m_n\}_{dove\ n\geq 3})\wedge\left[\exists x_1\big(Incon(x_1)\big)\vee\dots\vee\exists x_n\big(Incon(x_n)\big)\right]_{dove\ n\geq 3}\right]\rightarrow\right.$ $\left.\rightarrow Deb[(X=\{m_1,\dots,m_n\}_{dove\ n\geq 3})]\right]$. Per l'assioma 1, regola 3 e 1 varrà quindi anche

$$\left[(P\rightarrow P)\rightarrow\left[\left[\begin{array}{c}(X=\{m_1,\dots,m_n\}_{dove\ n\geq 3})\wedge\\ \wedge\left[\exists x_1\big(Incon(x_1)\big)\vee\dots\vee\exists x_n\big(Incon(x_n)\big)\right]_{dove\ n\geq 3}\end{array}\right]\rightarrow Deb[(X=\{m_1,\dots,m_n\}_{dove\ n\geq 3})]\right]\right],$$

donde:

$$\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X \left[\begin{bmatrix} (X = \{m_1, \dots, m_n\}_{dove\ n\geq 3}) \wedge \\ \wedge [\exists x_1(Incon(x_1)) \vee \dots \vee \exists x_n(Incon(x_n))]_{dove\ n\geq 3} \end{bmatrix} \rightarrow Deb[(X =\right.\right.$$

m1,…,mndove n≥3 in base alla regola 5. Infine si dedurrà $\forall X\left[\left[(X =\right.\right.$

m1,…,mndove n≥3∧∃*x1Inconx1*∨…∨∃*xnInconxndove n≥3*→*DebX=m1,…,mndove n≥3* per MP.

Stabiliamo infine la seguente definizione di autoidentità per n-ple non-ordinate:

Definizione 14.31

$$AutPle(\{m_1, \dots, m_n\}_{dove\ n\geq 3}) \stackrel{\text{def}}{=} [AutId(X) \wedge (X = \{m_1, \dots, m_n\}_{dove\ n\geq 3})]$$

9. *Quinto assioma (schema): lo schema di comprensione (CP)*

9.1 Introduzione

Ci occuperemo ora di discutere uno schema di assiomi molto importante per il nostro sistema formale. Probabilmente si tratta del principio-cardine di ZFU_1, in virtù dell'enorme potere espressivo e deduttivo, che questo postulato è in grado di offrire. La sua formulazione consentirà infatti di definire collezioni con maggior facilità, immediatezza e con una discreta liberalità; e pertanto, attraverso la sua assunzione, sarà possibile giungere alla costruzione di classi più complesse di quelle sinora trattate senza particolare ingombro. La sua presenza, al contrario, fornirà all'intero sistema una certa maneggevolezza ed agilità pratica, come si vedrà nelle sue applicazioni.

In letteratura si è soliti riferirsi ad esso in diversi modi, sfruttando differenti diciture: "schema di comprensione" (ristretta)[291] o di "separazione"[292], "schema di isolamento"[293], "schema dei sottoinsiemi"[294] o "schema di costruzione di insiemi"[295]. Noi adotteremo quello di "schema d'assiomi di comprensione", ma ci serviremo indifferentemente delle altre per fare riferimento ad esso.

Abbiamo visto come a partire dall'insieme vuoto e dunque a partire da un unico oggetto, di cui si è esplicitamente assunta l'esistenza, sia possibile, iterando certe operazioni come ad esempio la costruzione dei *singletons* o delle coppie (non-ordinate), ottenere ulteriori oggetti ciascuno di modesta taglia, dal momento che ognuno di essi conteneva al più due oggetti; riunendo poi le classi così

---

291 "*Komprehensionsaxiom*" o "*Zusammenfassungsaxiom*". Cfr. Skolem, T., *Bemerkungen zum Komprehensionsaxiom*, «Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik», vol. 3, 1957, pp. 1-17. Dana Scott, S., *Axiomatizing Set Theory*, in Jech, T., (ed.), *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. XIII, parte 2, American Mathematical Society, Providence, 1974, pp. 207-8

292 "*Separation*". Cfr. Skolem, T., *Abstract Set Theory*, Notre Dame University Press, Notre Dame, 1962, p. 12

293 "*Aussonderungsaxiom*". Cfr. Zermelo, E., *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, *op. cit.*, p. 264

294 Tale denominazione non va confusa con l'assioma che assicura l'esistenza di un insieme, i cui membri siano tutti i sottoinsiemi di un insieme dato, cioè a dire con l'assioma Potenza, che vedremo in seguito. Qui "sottoinsieme" va inteso in relazione all'insieme ottenuto isolando, mediante una certa proprietà, una porzione di un insieme precedentemente ottenuto (di qui probabilmente il concetto di "*aussondern*", cui faceva riferimento Zermelo). Cfr. Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 36, dove l'assioma in questione viene anche detto «(*axiom schema of*) *separation*». Infine Abian, A., *Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, *op. cit.*, p. 83, dove si parla (conseguentemente all'assunzione dell'*Ersetzungsaxiom*) di "*theorem scheme of subsets*".

295 "*Mengenbildung*" o "*Mengenbildungsaxiom*". Cfr. Thiele, E., *Ein axiomatisches System der Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel*, *op. cit.*, pp. 175-6

ottenute, abbiamo mostrato come la taglia poteva essere arbitrariamente accresciuta, elevandola ad un qualsiasi $k \geq 1$ (ma finito).

L'esistenza delle nuove classi che si arriverà così a determinare, partendo dall'insieme vuoto, sarà da tenersi per certa nel caso di classi pure, che non coinvolgono cioè *Urelemente*. Infatti, data l'esistenza di almeno un insieme, è possibile definirne altri ed esser sicuri che essi pure esistano. Invece risulterà ancora solo un'ipotesi l'esistenza di quelle collezioni, al cui interno trovino spazio individui di natura non-insiemistica, per i quali non vale alcuna esplicita assunzione esistenziale.

Per mostrare in breve il funzionamento di questo (schema di) assioma sarà sufficiente osservare come esso operi a partire dall'individuazione di una certa condizione, che definisca «precisamente» una proprietà, per ottenere la classe di tutti quegli elementi che la soddisfano. Così il concetto che si intende esprimere potrà essere veicolato formalmente attraverso una sua naturale formulazione insiemistica, fermo restando alcune precauzioni d'obbligo.

In particolare sarà nostro compito qui chiarire come tutto ciò possa avvenire nel rispetto di criteri minimi di non-trivialità.

Osserviamo innanzitutto che, per poter esibire un principio «sicuro» e adeguato allo scopo, occorrerà esaminare dapprima due punti:

1) la determinazione di quelle restrizioni in grado di autorizzare correttamente l'isolamento di una data collezione;

2) l'esplicitazione di cosa esattamente sia una "condizione" isolante.

Prima di passare ad un esame più approfondito dei due punti sopra esposti, c'è però qualche osservazione preliminare da fare. Innanzitutto ricordiamo che il sistema formale ZFU_1 è stato concepito nell'intento di trattare eventuali *Urelemente* inconsistenti e non classi di per sé inconsistenti.

Ciò significa in primo luogo che non siamo interessati all'utilizzo del calcolo logico paraconsistente C_1^* per trattare quegli insiemi che normalmente danno luogo ad inconsistenze; siamo interessati invece a descrivere l'eventuale inconsistenza degli individui, ipoteticamente presenti nel modello di riferimento (modello inteso), come un fatto strettamente legato e circoscritto alle classi a cui essi possono appartenere e non alle classi in generale. Nel caso infatti si diano classi di classi che contengano *Urelemente* eventualmente inconsistenti non ha importanza per noi parlare di inconsistenze e le definizioni che daremo nei capitoli successivi cercheranno di chiarire meglio la nostra ricerca in questo senso.

Per tale ragione non affronteremo qui il discorso di quegli insiemi che normalmente generano contraddizioni potenzialmente esplosive – pensiamo in particolare all'insieme di Russell[296] o all'insieme universale[297]. Non discuteremo specificamente la possibilità di lavorare con tali classi e non ci occuperemo – per quanto possibile – direttamente di esse, limitandoci a richiamarle laddove ciò sarà opportuno per comprendere certe scelte.

In secondo luogo la letteratura brasiliana ha fornito a proposito di tali insiemi vari risultati[298] e di notevole interesse. Noi qui però non li affronteremo non a causa di un differente punto di vista in merito ma più semplicemente in virtù del fatto che non siamo interessati ad investigare oltre certi aspetti.

---

[296] L'insieme di Russell è la classe di tutte le classi che non si appartengono. Formalmente: $R = \{X | \neg(X \in X)\}$ (nel caso di Russell e Frege, l'operatore '¬' valeva come negazione classica. Nel caso degli studi compiuti dai logici brasiliani, esso va invece interpretato a partire dalla nozione di negazione debole paraconsistente). Essa fu presentata per la prima volta in maniera ufficiale in comunicazione epistolare privata con Frege. Russell l'aveva inconsapevolmente scoperta verso la fine del XIX secolo, riflettendo sul teorema di Cantor. Tuttavia comprese la gravità del problema che essa poneva solo qualche tempo dopo, dandone notizia al logico di Wismar il 16 giugno 1903. Cfr. Frege, G., *Briefwechsel*, *op. cit.*, pp. 211 e ss.

[297] L'insieme universale o classe universale è l'insieme di tutti gli insiemi. Formalmente: $V = \{X | X = X\}$. L'esistenza di quest'ultima comporta tuttavia una contraddizione, dato che dalla sua ammissione potrebbe seguire anche l'esistenza della classe di Russell, isolata al suo interno selezionando le classi ben-fondate. Tale ragione allora porta a negare l'ipotesi relativa alla sua esistenza. Cfr. Abian, A., *Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, *op. cit.*, p. 90

[298] Cfr. Jacquette, D., (ed.), *Philosophy of Logic*, *op. cit.*, pp. 831-38. Da Costa, N. C. A., Grana, N., *Il recupero dell'inconsistenza*, *op. cit.*, pp. 141-74. Da Costa, N. C. A., Béziau, J.-Y., Bueno, O., *Elementos de teoria paraconsistente de conjuntos*, *op. cit.*, pp. 35-62

9.2 *La schematicità dell'assioma di comprensione*

Prima di passare alla discussione dei punti 1) e 2) del precedente paragrafo, c'è un'osservazione preliminare, che occorre fare, concernente la dicitura "schema d'assiomi"[299]. Questo postulato non si presenterà affatto con la semplicità con cui sono stati dati sinora tutti gli altri assiomi. Cioè a dire esso si distinguerà dagli altri postulati poiché questi ultimi sono stati scelti mediante la formulazione di un unico enunciato; mentre qui – come vedremo – si descriverà piuttosto una procedura o una «regola» generale del sistema, per usare le parole di Quine[300], per mezzo della quale inferire l'esistenza di certi altri insiemi.

Esso non potrà pertanto essere assunto né considerato come un singolo enunciato, bensì come un insieme di enunciati, uno per ciascuna condizione espressa. Ciò che li accomunerà, saranno le linee-generali attraverso cui si autorizzerà l'isolamento di determinate collezioni.

Per tali ragioni allora si parlerà di "schema di assiomi" e si farà riferimento impropriamente ad esso come "assioma", solo quando la tacita assunzione del rilievo appena fatto sia tenuta presente.

La formulazione dello schema in questione, che non sarà l'unico del nostro sistema formale, discende direttamente dalla teoria da cui esso trae origine, cioè a dire ZF.

Per ragioni di chiarezza rinvieremo ulteriori considerazioni in merito solo dopo aver affrontato i punti intorno ai quali si articoleranno i paragrafi seguenti e solo dopo che la lista dei nostri assiomi (e schemi d'assiomi) sarà completamente determinata. Tali considerazioni esulano infatti da una trattazione interna alla teoria, che si sta qui esaminando, e fanno parte di un livello di analisi superiore, nel senso che la "finita assiomatizzabilità" di un dato sistema formale fa parte di quelle proprietà attribuibili al sistema ZFU_1 in sede metateorica.

Per il momento sarà sufficiente tener presente il fatto che l'eliminazione del concetto di schema d'assiomi implica la possibilità di dover trovare un insieme finito di condizioni da postulare, senza che il principio abbia per ciò a perdere generalità.

---

[299] Per quanto ne sappiamo. questa dicitura fu utilizzata per la prima volta da John von Neumann nel 1927, come ricordava Curry. Cfr. Neumann, J. von, *Zur Hilbertschen Beweistheorie*, «Mathematische Zeitschrift», vol. 26, 1927, pp. 13-4. Curry, H., *Some Aspects of the Problem of Mathematical Rigor*, «Bulletin of the American Mathematical Society», vol. 47, n. 4, 1941, p. 227

[300] Cfr. Quine, W., *Set-Theoretic Foundations for Logic*, *op. cit.*, p. 46: «[…] we can express the *Aussonderungsaxiom* itself as another rule of inference, which we may call the *Aussonderungsregel* […] The *Aussonderungsaxiom* thus ceases to depend on the notion of "definiteness" and acquires the same formal status as the logical rules of inference».

Ciò è stato tuttavia dimostrato essere impossibile per la teoria ZF[301] ed essendo il nostro principio in-formato su tale postulato è ragionevole attendersi anche per esso un risultato analogamente negativo. Per provare tale impossibilità in maniera più esatta, ricondurremo il caso concernente ZFU_1 a quello di ZF, provando semplicemente che se ZFU_1 fosse finitamente assiomatizzabile, allora anche ZF lo sarebbe, contro il metateorema di Montague.

[301] La dimostrazione è dovuta a Richard Montague e risale originariamente al 1957. Tuttavia si è soliti fare riferimento ai «risultati migliorati» che Montague presentò nel 1961. Cfr. Montague, R., *Fraenkel's Addition to the Axioms of Zermelo*, in Bar-Hillel, Y., Poznanski, E., Rabin, M., Robinson, A., (eds.), *Essays on the Foundations of Mathematics*, Magnes, Jerusalem, 1961, pp. 91-114. Kreisel, G., Lévy, A., *Reflection Principles and Their Use for Establishing the Complexity of Axiomatic Systems*, «Zeitschrift für mathematische Logik», vol. 14, 1968, pp. 97-191. Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, pp. 38-9. Kunen, K., *Set Theory*, North Holland, Amsterdam, 1980, pp. 136-41

9.3 Le restrizioni di CP: da ZF a ZFU_1

9.3.1 L' antinomia di Russell e la classe universale

Veniamo ora alla discussione del punto 1) precedentemente illustrato, prima di passare alla formulazione effettiva del nostro assioma.

Una qualunque teoria che intenda ispirarsi al gruppo di assiomi caratterizzante ZF, deve in qualche modo tentare di rispettare il più possibile lo schema di comprensione in esso adottato. L'insorgenza dei paradossi[302], avutasi sul finire dell'Ottocento e all'inizio del Novecento, aveva sollevato polemiche di vario tipo: c'era chi come Poincaré stigmatizzava gli eventi in modo talvolta sarcastico[303], sostenendo che essi non erano altro che la naturale conseguenza di una prassi troppo liberale nei confronti dell'infinito attuale e troppo ottimista rispetto ai metodi logico-formali; e c'era chi come Zermelo o Russell pensava che la

[302] Cfr. Peano G., *Super theorema de Cantor-Bernstein et additione*, «Rendiconti del Circolo matematico di Palermo», vol. 21, 1906, pp. 360-366. Ramsey, F. P., *The Foundations of Mathematics*, «Proceedings of the London Mathematical Society», serie 2, vol. 25, parte 5, 1926, pp. 338-384. Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, pp. 1-14. Beth, E., *Les fondements logiques des mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1955, pp. 175-98. Russell, B., Whitehead, A. N., *Principia Mathematica*, vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1910, pp. 63-8. Suppes P., *Axiomatic Set Theory*, *op. cit.*, pp. 8-12. Da Costa, N. C. A., Grana, N., *Il recupero dell'inconsistenza*, *op. cit.*, pp. 66-83. Clarke, M., *Paradoxes from A to Z*, Routledge, New York-London, 2002; 2007^2, pp. 190-5

[303] In una celebre pagina di un articolo risalente al 1906, Poincaré si esprimeva con tono lapidario nei confronti di due filoni di ricerca, che allora stavano suscitando grande interesse nella comunità scientifica e animavano il dibattito accademico: la *Mengenlehre* di Cantor da una parte e il *Logicismo* di Frege dall'altro. In due brevi ma incisivi passi, egli si esprime così: « Il n'y a pas d'infini actuel ; les Cantoriens l'ont oublié, et il sont tombés dans la contradiction ». Poco sopra aveva invece dichiarato: « La Logistique n'est plus stérile, elle engendre l'antinomie ». Cfr. Poincaré, H., *Les mathématique et la logique*, « Revue de métaphysique et de morale », vol. 14, 1906, p. 316. Come osservava Zermelo, Poincaré probabilmente esprimeva tutta la propria contrarietà alla *Mengenlehre* di Cantor a causa della frettolosa identificazione dell'originale creazione cantoriana con la monumentale opera logicista, che stava allora sorgendo soprattutto grazie agli sforzi e ai contributi di Frege e Russell. Così si esprimeva infatti Zermelo due anni più tardi, intervenendo in difesa del principio di scelta e ribattendo nello specifico alle obiezioni circa le definizioni impredicative: «Den hier vertretenen Standpunkt einer in letzter Linie auf Intuition beruhenden produktiven Wissenschaft hat neuerdings auch Herr *H. Poincaré* der Peanoschen „Logistik“ gegenüber in einer Reihe von Aufsätzen geltend gemacht, in denen er auch dem Auswahlprinzip, das er für ein unbeweisbares, aber unentbehrliches Axiom ansieht, durchaus gerecht wird. Dabei ist er aber, weil seine Gegner sich vorzugsweise der Mengenlehre bedienten, im Angriff soweit gegangen, die ganze *Cantor*sche Theorie, diese ursprüngliche Schöpfung genialer Intuition und spezifisch mathematischen Denkens, mit der von ihm bekämpften Logistik zu identifizieren und ihr ohne Rucksicht auf ihre positiven Leistungen lediglich auf Grund der noch ungeklärten „Antinomien“ jede Existenzberechtigung abzusprechen». Cfr. Zermelo, E., *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*, «Mathematische Annalen», vol. 65, 1908, p. 116

responsabilità delle contraddizioni incontrate fosse dovuta più esattamente alle forme *naïves* del postulato in questione, non adeguatamente delimitate dal formalismo sino ad allora utilizzato. Inizialmente infatti non si ammettevano *constraints* di qualche tipo[304] al fine di limitare le condizioni attraverso cui definire le classi e fu proprio questa eccessiva liberalità ad innescare l'implosione dei primi sistemi (semi)formalizzati. L'idea catturata da Zermelo in proposito, fissata nel celebre articolo del 1908, in cui si delineava il sistema Z[305], coincideva in buona parte con alcune intuizioni dello stesso Russell[306] e consisteva nel far sì che si ponesse in qualche modo un vincolo alla costruzione di classi «troppo grandi».

Il principio di comprensione veniva liberamente formulato in maniera tale che, data una certa condizione, l'assioma dovesse essere in grado di assicurare l'esistenza della classe contenente tutti quegli elementi, che soddisfacessero una data proprietà. Per certi versi si cercava di formalizzare e di precisare l'idea per cui le classi non fossero altro che estensioni di concetti; fatto questo molto importante all'interno dell'orizzonte logicista freghiano. Tuttavia una simile attitudine celava non pochi problemi. Sia Zermelo che Russell, indipendentemente e per vie diverse[307], avevano osservato che ciò produceva una contraddizione molto problematica, oggi nota come paradosso di Russell.

Tale paradosso era strettamente connesso al problema delle collezioni «troppo grandi» e, alla luce del vincolo introdotto da Zermelo, giocava un ruolo fondamentale nell'esclusione di insiemi eccessivamente estesi.

Per mostrare ciò, esaminiamo innanzitutto come le due collezioni siano entrambe derivabili dallo schema di comprensione, nel caso in cui si adotti il principio *naïf* $[\![C]\!]$.

Utilizzando allora il linguaggio di ZFU_1, si può illustrare la situazione come segue: si dia la classe V, generata dal considerare tutti quegli insiemi che

[304] Né Cantor né Frege sembra abbiano mai formulato esplicitamente condizioni vincolanti al fine di evitare la costruzione di collezioni inconsistenti. Tuttavia mentre il primo ebbe modo di avvedersene già a metà degli anni Novanta del XIX secolo, proponendo utili accorgimenti in proposito, mediante la distinzione fra classi "consistenti" e classi "inconsistenti" (ciò che oggi probabilmente diremmo "insiemi" e "classi proprie"), l'altro rifiutò di accettare una formulazione del principio in questione tale da limitarne le conseguenze. La scoperta dell'antinomia di Russell segnò infatti una crisi profonda per il logico di Wismar e lo indusse a mutare radicalmente le proprie idee sulle ipotesi di successo di una riduzione logicista già a partire dal 1903. Cfr. Grana, N., *Ermeneutica della matematica*, L'Orientale, Napoli, 2007, pp. 180-200

[305] Zermelo, E., *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I*, *op. cit.*

[306] Cfr. Russell, B., *On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types*, «Proceedings of the London Mathematical Society», serie 2, vol. 4, 1906, pp. 29-53. Russell tuttavia abbandonò in seguito questa strategia per approdare due anni più tardi ad una prima formulazione della teoria dei tipi. Cfr. Russell, B., *Mathematical Logic as Based on the Theory of Types*, «American Journal of Mathematics», vol. 30, n. 3, 1908, pp. 222-62

[307] Cfr. Felgner, U., *Introductory Note to 1908b*, in Zermelo, E., *Collected Works*, H.-D- Ebbinghaus, C. Fraser, A. Kanamori, (eds.), Springer, Berlin-Heidelberg, 2010, pp. 160-74

possegono $\emptyset$ come sottoinsieme. Impiegando allora la definizione 14.6 e riflettendo sul teorema 14.5, è possibile considerare la classe:

$$[\![1]\!]\ V = \{X | \emptyset \subset X\}$$

giustificata dall'applicazione dell'assioma di comprensione *naïf* $[\![C]\!]$, che risulta ancora privo di restrizioni:

$$[\![C]\!]\ \exists Y \forall X \Big((X \in Y) \leftrightarrow \big(P(X)\big)\Big)$$

Considerando infatti il predicato che definisce la classe V in $[\![1]\!]$, si può ricavare da $[\![C]\!]$:

$$[\![2]\!]\ \forall X\big((X \in V) \leftrightarrow (\emptyset \subset X)\big)$$

L'uso della costante individuale 'V' in luogo della variabile individuale Y, quantificata esistenzialmente, risulta giustificato dal fatto che V sarebbe eventualmente l'unico oggetto determinato dal predicato in questione, grazie alla relazione di eguaglianza adottata. Fissando assiomaticamente il fatto così constatato, è possibile osservare che, in virtù del teorema14.5, ogni X ha come sottoinsieme l'insieme vuoto, cioè: $\forall X(\emptyset \subset X)$.

Così la classe V sarebbe una classe contenente tutti gli insiemi che è possibile determinare, ossia:

$$[\![3]\!]\ \forall X(X \in V)$$

V è allora la classe o insieme universale.

Considerando d'altra parte ancora il principio $[\![C]\!]$, è possibile aggregare anche tutte quelle classi che non appartengono a se stesse. Scegliendo una costante individuale anche per tale collezione, si può allora rappresentare un simile oggetto nel modo seguente:

$$[\![4]\!] \quad R = \{Z|Z \notin^{*} Z\}^{308}$$

Se si adottasse la formulazione «ingenua» dello schema di comprensione, si potrebbe giustificare l'esistenza della classe di Russell, derivandola come istanza di $[\![C]\!]$ nel modo seguente:

$$[\![5]\!] \quad \exists Y \forall X[(X \in Y) \leftrightarrow (X \notin^{*} \mathrm{X})]$$

Analogamente al caso della classe universale, si potrebbe qui utilizzare la costante 'R' per rimpiazzare la variabile apparente Y, dal momento che Y risulterebbe unico per la definizione di eguaglianza tra insiemi. Assumendo allora come assioma il fatto che R sia l'unico oggetto della teoria ad essere determinato dal predicato in questione, si potrebbe egualmente affermare che:

$$[\![6]\!] \quad \forall X[(X \in R) \leftrightarrow (X \notin^{*} \mathrm{X})]$$

A questo punto, in virtù dell'assioma 13 e della regola 3, si deriverebbe:

$$[\![7]\!] \quad \forall X[(X \in R) \leftrightarrow (X \notin^{*} \mathrm{X})] \rightarrow [(R \in R) \leftrightarrow (R \notin^{*} \mathrm{R})]^{309}$$

308 Utilizzeremo qui l'operatore di negazione forte in luogo della negazione classica.

309 A proposito di questo passaggio logico, Behmann (cfr. Behmann, H., *Zu den Widersprüchen der Logik und der Mengenlehre*, «Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung», vol. 40, 1931, pp. 37-48) ha fatto osservare che questo tipo di sostituzione risulta alquanto problematica. Essa infatti violerebbe le norme "pascaliane" di definizione: in base a tali norme la sostituzione del *definiendum* col *definiens* è possibile solo se essa non dà luogo a contraddizioni, ovunque applicata all'interno di un dato sistema, se prima questo risultava essere non-contraddittorio. Definendo la classe di Russell, indicata dalla costante individuale 'R' ($[\![4]\!]$) e sostituendola all'interno della formula che la definisce, si va incontro a una contraddizione. Così si violerebbe la regola di sostituzione tra *definiens* e *definiendum* di Pascal. Se si tenesse conto di tale norma, allora si dovrebbe escludere il passaggio $[\![7]\!]$, evitandone le disastrose conseguenze, poiché la sostituzione della costante individuale R non sarebbe ovunque possibile, senza ingenerare contraddizioni di sorta ($[\![9]\!]$). Ciò potrebbe in qualche maniera preservare il sistema di Frege e tutti quei sistemi ad esso ispirati. Tuttavia – come ha fatto osservare Beth – proprio il programma logicista non risulterebbe più attuabile, se la regola di Pascal venisse utilizzata in maniera generale. Cfr. Beth, E., *Les fondements logique des mathématiques*, *op. cit.*, pp. 189-90

donde per *modus ponens* da ⟦6⟧ e ⟦7⟧:

$$⟦8⟧\ [(R \in R) \leftrightarrow (R \notin^* \mathrm{R})]$$

Questa proposizione non esprime ancora una contraddizione vera e propria ma consente la sua derivazione, dal momento che $[(R \in R) \leftrightarrow (R \notin^* \mathrm{R})] \rightarrow [(R \in R) \wedge (R \notin^* \mathrm{R})]$. Si giunge così, ancora per *modus ponens*, alla celebre contraddizione russelliana:

$$⟦9⟧\ [(R \in R) \wedge (R \notin^* \mathrm{R})]$$

L'antinomia ⟦9⟧ rende impraticabile buona parte delle teorie che sono in grado di derivarla e perciò un principio come ⟦C⟧ risultava del tutto inadeguato.

L'idea che Zermelo avanzò per contrastarne l'insorgenza, si basava sull'impossibilità di accettare il principio ⟦C⟧, così come si presentava, per definire arbitrariamente delle classi: senza adeguate restrizioni infatti si sarebbero potuti isolare anche insiemi «troppo grandi», come quelli che si è appena visto e che avrebbero determinato il collasso dell'intero sistema.

Le cautele adottate da Zermelo si concretizzavano allora nel rendere disponibili solo quelle classi che era possibile isolare a partire da insiemi già dati. Perciò esse costituivano più semplicemente dei sottoinsiemi di collezioni, la cui esistenza era già stata assicurata, donde la definizione di "assioma (schema) di costruzione per i sottoinsiemi"[310].

I vantaggi che si possono acquisire da una simile strategia sono molti, dal momento che il principio postulato da Zermelo è in grado di offrire una risposta adeguata ai paradossi sino ad oggi noti[311], soprattutto a quello di Russell.

---

[310] Così Zermelo: «[…] es sich durch die folgenden Einschränkungen unterscheidet: Erstens dürfen mit Hilfe dieses Axiomes niemals Mengen *independent definiert*, sondern immer nur als Untermengen aus bereits gegebenen *ausgesondert* werden, wodurch widerspruchsvolle Gebilde wie „die Menge aller Mengen" oder „die Menge aller Ordinalzahlen" und damit nach dem Ausdrucke des Herrn *G. Hessenberg* („Grundbegriffe der Mengenlehre" XXIV) die „ultrafiniten Paradoxien" ausgeschlossen sind». Cfr. Zermelo, E., *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I*, *op. cit.*, pp. 263-4

[311] Cfr. Zermelo, E., *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I*, *op. cit.*, pp. 264-5. Tra questi inseriamo qui anche quello di Curry-Moh Shaw-Kwei. Cfr. Curry, H., *The Incosistency of Certain Formal Logic*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 7, n. 3, 1942, pp. 115-7. Shaw-Kwei,

Il principio $[\![C]\!]$ è stato più correttamente riformulato come segue:

$$[\![* \, C \, *]\!] \;\; \forall X_2 \dots \forall X_n \forall Z \exists Y \forall X_1 \left[(X \in Y) \leftrightarrow \Big((X \in Z) \wedge \big(P(X)\big)\Big)\right]$$

dove $X_1, \dots, X_n$ sono le sole variabili libere di $P(X)$.

Il postulato $[\![* \, C \, *]\!]$ traduce perfettamente allora il concetto di limitazione zermeliana mediante l'isolamento di soli sottoinsiemi, quelli ottenibili a partire da Z, che è sempre un insieme già determinato.

Il superamento del paradosso $[\![9]\!]$ è a questo punto possibile: si immagini infatti di poter isolare la classe R a partire dal principio $[\![* \, C \, *]\!]$. Allora, per ragioni puramente logiche, analoghe a quelle esaminate poc'anzi e che qui evitiamo di palesare, varrebbero le seguenti proposizioni:

$$[\![10]\!] \;\; \forall Z \exists Y \forall X \big[(X \in Y) \leftrightarrow \big((X \in Z) \wedge (X \notin^* X)\big)\big]$$

$$[\![11]\!] \;\; \exists Y \forall X \big[(X \in Y) \leftrightarrow \big((X \in Z) \wedge (X \notin^* X)\big)\big]$$

$$[\![12]\!] \;\; \forall X \big[(X \in R) \leftrightarrow \big((X \in Z) \wedge (X \notin^* X)\big)\big]$$

$$[\![13]\!] \;\; \big[(R \in R) \leftrightarrow \big((R \in Z) \wedge (R \notin^* R)\big)\big]$$

A questo punto – osservava Zermelo – è immediato fare considerazioni analoghe a quelle osservate per la classe di Russell, ma con risultati del tutto differenti.

Infatti la proposizione $[\![13]\!]$ risulta essere equivalente alla proposizione:

$$[\![14]\!] \;\; \big[(R \notin^* R) \leftrightarrow \big((R \notin^* Z) \vee (R \in R)\big)\big]$$

M., *A Paradox for Many-Valued Systems*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 19, n. 1, 1954, pp. 37-40 che offre una pratica via d'uscita al problema visto ai punti ⟦8⟧ e ⟦9⟧. Infatti dal momento che la verità di $(R \in R)$ implicherebbe una contraddizione, la medesima riscontrata dal paradosso di Russell, non resterebbe che asserire la verità della sua alternativa e cioè quella di $(R \notin^* Z)$.

L'antinomia ingenerata dalla classe di Russell è così superata con facilità e rigore. Valendo infatti una simile circostanza per ogni insieme Z ed essendo R un suo sottoinsieme, quanto affermato da ⟦14⟧ comporterà che ogni insieme Z avrà almeno un sottoinsieme che non gli appartiene. In tal modo è allora dimostrabile il celebre «Teorema 10», provato da Zermelo nel 1908:

$$[\![15]\!] \quad \forall Y \exists X \big((X \subseteq Y) \wedge (X \notin^* Y) \big)$$

A partire da esso, si scorge lo stretto legame, che congiunge sottilmente la classe R alla classe V. Infatti è questione di pura logica notare come il «Teorema 10» sia equivalente alla negazione dell'esistenza di un insieme di tutti gli insiemi:

$$[\![16]\!] \quad \forall Y \exists X \neg^* (X \in Y) \leftrightarrow \forall Y \neg^* \forall X (X \in Y) \leftrightarrow \neg^* \exists Y \forall X (X \in Y)$$

che costituisce l'esatta negazione della proposizione ⟦3⟧. Così è possibile dedurre la non-esistenza della classe universale, dalle osservazioni compiute a proposito della classe di Russell.

9.3.2 La questione della **Definitheit**

Affronteremo ora il punto 2) menzionato nel paragrafo 9.1, discutendo della nozione di condizione.

La teoria che Zermelo aveva imbastito nel 1908 (Z) era una teoria di tipo semiformalizzato, come è stato ricordato più volte e pertanto non poteva soddisfare quei requisiti di rigore che oggi invece sono comunemente accettati.

Essa non divergeva in questo da una prassi all'epoca abbastanza diffusa e dovuta perlopiù alla costituzione stessa di quei requisiti che avrebbero caratterizzato in seguito i sistemi formali in quanto tali.

In particolare la teoria di Zermelo, sebbene avesse presentato una brillante soluzione al problema dei paradossi, come quello di Russell o quello della classe universale, aveva trascurato, diciamo così, una questione fondamentale, emergente dal chiedersi a quali tipi di condizioni fosse lecito pensare sulla base del nuovo assioma (schema) di comprensione.

Nel caso del sistema Z erano state fornite indicazioni insufficienti a raggiungere lo scopo di una chiara e definitiva determinazione del quesito proposto. Zermelo si era limitato ad affermare che:

> «Una domanda o un'affermazione $\mathfrak{E}$ si dicono essere "definite" se le relazioni fondamentali del dominio, attraverso gli assiomi e le regole universalmente validi della logica, determinano senza arbitrarietà la loro validità o meno. Similmente una "funzione proposizionale" $\mathfrak{E}(x)$ si dice essere "definita" se essa è definita per *ciascun singolo* individuo x della classe $\mathfrak{K}$».[312]

Sebbene questa indicazione sembri a prima vista sufficientemente dettagliata, essa manca di chiarezza proprio nei punti su cui essa vorrebbe invece fondare la propria esattezza.

In primo luogo mancano adeguate spiegazioni circa «gli assiomi e le regole universalmente valide della logica», che – come ricordato – non vengono esplicitamente assunti da Zermelo, ma soltanto tacitamente accettati[313].

In secondo luogo si può ancora una volta soltanto presumere cosa Zermelo intendesse dire con "relazioni fondamentali del dominio", dato che non esistono adeguate chiarificazioni in merito. Dall'esempio che Zermelo addusse poco dopo l'osservazione riportata, è possibile comprendere cosa egli volesse intendere, ma

[312] Zermelo, E., *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I*, *op. cit.*, p. 263

[313] Tra questi ad esempio mancavano o, meglio, erano implicite alcune importanti assunzioni sulla relazione di identità.

non era affatto chiaro né scontato pensare che Zermelo intendesse optare per una strategia simile a quella oggi adottata e dovuta fondamentalmente a Skolem.

Così come Z venne presentata nel 1908, non poteva propriamente dirsi una teoria formalizzata in maniera adeguata. In effetti non è corretto parlare della "comprensione" in Z in termini di "schema"; d'altra parte però, per le stesse ragioni, non ci pare si possa parlare nemmeno propriamente di assioma, nel senso in cui lo si intende oggi.

Ad ogni modo Z costituiva un insieme di postulati finito nel numero e sicuri dai paradossi sino ad allora noti.

La risoluzione però della seconda parte del problema, che consente l'adeguata formulazione di uno schema di comprensione, non può ergersi su tali presupposti ed abbisogna di un supplemento di rigore. Tale supplemento venne fornito nel 1922 da Fraenkel[314] e da Skolem[315] indipendentemente e per vie separate.

Tralasceremo qui le considerazioni di Fraenkel, che risultano riconducibili alle idee molto più eleganti e concise di Skolem, sebbene gli accorgimenti in questione, al fianco di molti altri, consentirono a Fraenkel di integrare la sigla del sistema Z con la propria iniziale, donde 'ZF'.

Skolem intervenne nel 1922 con un articolo estremamente denso, che avrebbe avuto enormi conseguenze negli anni a venire per lo studio dei fondamenti della matematica. Senza troppi giri di parole, egli si espresse così a proposito della questione qui affrontata:

> «Un punto molto debole in Zermelo è la nozione di "proposizione definita". Nessuno probabilmente troverà soddisfacenti le spiegazioni di Zermelo in proposito; e nessuno, per quanto ne sappia, ha tentato di darne una formulazione rigorosa. Ciò è molto strano, dal momento che può esser fatto abbastanza facilmente e inoltre nel modo naturale, che essa stessa suggerisce».[316]

Pochi sino ad allora avevano adeguatamente riflettuto sulla scarsa chiarezza di questo punto. Skolem fu tra i primi a sollevare obiezioni ad esso e a dare una adeguata formulazione di questo secondo importante *constraint*.

La sua soluzione infatti consisteva in questo:

> «Per spiegare […] [tale nozione], faccio qui riferimento alle cinque operazioni fondamentali della logica, utilizzando la notazione di Schröder (1890):

[314] Fraenkel, A., *Der Begriff „definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlsaxioms*, *op. cit.*

[315] Skolem, T., *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre*, Matematikerkongressen i Helsingfors den 4-7 Juli 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redogörelse (Akademiska Bokhandeln, Helsinki, 1923), pp. 217-32; trad. ingl., in Heijenoort, J. van, (ed.), *From Frege to Gödel*, *op. cit.*, 1967, pp. 290-301

[316] *Ibidem*, p. 292

$(1_{\times})$ congiunzione, denotata da un punto o da una giustapposizione;
(1_{+}) disgiunzione, denotata dal segno +;
(2) negazione, denotata da una linea sull'espressione da negare;
$(3_{\times})$ quantificazione universale, denotata mediante il simbolo Π;
(3_{+}) quantificazione esistenziale, denotata mediante il simbolo Σ.

[…] *Per proposizione definita intendiamo ora un'espressione finita costruita a partire da proposizioni elementari della forma* $a\varepsilon b$ *o* $a = b$ *per mezzo delle cinque operazioni menzionate*. Questa è una nozione completamente chiara e sufficientemente comprensiva, da permettere tutte le ordinarie dimostrazioni insiemistiche»[317]

Il corsivo utilizzato nella citazione è dello stesso autore e consente effettivamente – come egli stesso afferma subito dopo – di dare una risposta precisa e adeguata al problema da noi sollevato al punto 2) del paragrafo 9.1. Essa consentì sin da subito l'acquisizione di notevoli vantaggi.

L'esplicitazione delle operazioni logiche è infatti il primo elemento da chiarificare ed è un fatto abbastanza sorprendente che ad averlo avvertito come tale fosse stato Skolem e non Zermelo, giacché il primo si serviva spesso della notazione piuttosto ingombrante, derivante dall'impostazione algebrica di Schröder; mentre l'altro, più vicino ai metodi e ai linguaggi formali chiari e immediati che si stavano diffondendo in quell'epoca anche in Germania, non reputò altrettanto importante sfruttare la potenza dei linguaggi formalizzati per esplicitare meglio la propria concezione. Probabilmente i vantaggi offerti dalla logica formalizzata non risultavano così evidenti quando Zermelo redasse il proprio articolo e probabilmente, esplicitare in modo altrettanto chiaro quali funtori della logica fosse lecito adoperare, poteva risultare rischioso o addirittura difettoso, danneggiando proprio quei termini di "sufficiente comprensività", che invece Skolem poteva esibire. Infatti nel 1908 non erano ancora noti i risultati di interdipendenza tra i cinque funtori logici fondamentali e fu solo a partire dal 1913[318] che si diffuse tale consapevolezza. Skolem infatti asseriva esplicitamente che i tre connettivi di negazione, congiunzione e disgiunzione risultavano sufficienti ad ottenere tutti gli altri. Elemento anche questo non del tutto scontato. Ciò che però ci pare più importante osservare è la condivisione da parte di Skolem di quei principi "universalmente validi", di tipo classico, che caratterizzavano lo spazio teorico di Z e che continuavano a determinare anche quello, cui il logico norvegese rivolgeva la propria attenzione.

[317] Skolem, T., *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre*, *op. cit.*, p. 292-3
[318] Cfr. Sheffer, H., *A Set of Five Postulates for Boolean Algebras, with Application to Logical Constants*, *op. cit.*

Un secondo elemento guadagnato dall'impostazione adottata da Skolem era la determinazione di quali caratteristiche facesse di un'espressione una proposizione. Il logico di Oslo determinò anche questo carattere di «finitarietà», che sembra anche qui in accordo con l'impostazione hilbertiana molto più di quanto non lo fosse quella zermeliana.

Un terzo ed ultimo aspetto di grande importanza era infine la trasformazione definitiva della teoria Z in un sistema formale al primo ordine (o teoria elementare degli insiemi: ZF o più esattamente ZSF). Esplicitando quali fossero le proposizioni elementari della teoria, riconducibili alla relazione di appartenenza o alla relazione di eguaglianza, Skolem determinò inequivocabilmente e in modo implicitamente ricorsivo tutti i tipi di predicati possibili. Infatti, avendo chiarito la natura delle espressioni elementari o atomiche della teoria ed avendo indicato quali concetti della logica potevano effettivamente intervenire per formarne degli altri, era sufficiente consultare la lista delle regole di formazione per le formule ben formate al fine di ottenere combinatoriamente e sistematicamente tutti i predicati finitamente esprimibili a partire da $(a\varepsilon b)$ e $(a = b)$. Tale risultato era forse quello di maggior importanza, dal momento che portava a compimento un ulteriore progetto di restrizione sui predicati istanziabili, consistente nell'eliminazione di quei predicati che ingeneravano i cosiddetti paradossi "semantici"[319]. Questi ultimi erano dovuti alla determinazione di condizioni, che in effetti risultavano all'atto pratico estranei a quanto potesse determinarsi a partire dalle «relazioni fondamentali del dominio» ed erano fonte di antinomie di diverso tipo. L'aver assicurato che i predicati dovevano essere tutti definiti a partire dai rapporti primitivi, che era possibile fissare sugli oggetti di riferimento, non era ancora sufficiente a superare quei paradossi, cui Zermelo faceva riferimento attraverso la ricostruzione di Hessenberg[320]. Esattamente vent'anni dopo[321], il matematico tedesco aveva ribattuto al logico norvegese che per "proprietà definite" egli intendeva già (1908) quanto Skolem avrebbe asserito oltre dieci anni dopo (1922) e che dunque le riserve piovute da più parti[322] contro la sua idea di "proprietà definita" fossero in un certo senso pretestuose. Tuttavia è da notare che Zermelo era in errore: infatti egli non aveva colto evidentemente il

[319] Cfr. Zermelo, E., *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I*, *op. cit.*, p. 264

[320] Hessenberg, G., *Grundbegriffe der Mengenlehre*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1906, pp. 135-59

[321] Zermelo, E., *Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik*, «Fundamenta Mathematica», vol. 14, 1929, pp. 339-44

[322] Oltre a Fraenkel e Skolem, ad aver mosso delle critiche al concetto di *Definitheit* zermeliana era stato anche Hermann Weyl, che già nel 1910 aveva sostenuto posizioni analoghe a quelle dei due matematici sopra ricordati. Cfr. Weyl, H., *Über die Definition der mathematischen Grundbegriffe*, «Mathematisch-naturwissenschaftliche Blätter», vol. 7, 1910, pp. 93-5 e pp. 109-13, in Weyl, H., *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 1, a cura di K. Chandrasekharan, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1968, p. 304

punto fondamentale della questione, consistente nella trasformazione della teoria Z in una teoria elementare (ZSF). Nel caso specifico infatti Zermelo non poneva limiti al tipo di quantificatori che potevano eventualmente intervenire nella definizione di un predicato; mentre Skolem, rispondendo poco dopo alla piccata nota zermeliana[323], sottolineava come proprio questa fosse una delle differenze fondamentali, risultante dal fatto che per lui non erano ammissibili quei predicati che richiedessero una quantificazione al secondo ordine. Tale accorgimento costituisce ancora oggi un monito e un limite fondamentale di quasi tutte le teorie degli insiemi, specialmente a partire dai limiti imposti dai risultati di Gödel[324] e Church[325] a quei formalismi troppo potenti. Probabilmente è ragionevole ipotizzare che Zermelo intendesse rispondere più al paradosso che Skolem aveva presentato in quel medesimo articolo che alle critiche portate al suo metodo di definizione per i predicati. Difficilmente il matematico berlinese poteva prevedere nel 1908 i risultati delle ricerche di Löwenheim[326] e Skolem[327] sui modelli numerabili e dunque difficilmente egli poteva immaginare uno scarto così importante fra teorie del primo ordine e teorie del secondo ordine. La scelta di immaginare predicati definibili con una logica al secondo ordine ci pare possa essere giustificata alla luce di tali scoperte, dal momento che la mancata esplicitazione del bagaglio logico a disposizione dei predicati definibili ci pare fosse dovuta proprio a questo tipo di circostanza[328]. Non pensiamo dunque che Zermelo avesse davvero voluto intendere ciò che Skolem aveva descritto con una certa puntualità nel 1922 poiché egli non poteva immaginare la non-categoricità del suo sistema, disperatamente ricercata soprattutto attraverso i lavori del '29 e del '30[329] e che si sarebbe dovuta infrangere contro i teoremi di Gödel e Church.

[323] Skolem, T., *Einige Bemerkungen zu der Abhandlung von E. Zermelo „Über die Definitheit der Axiomatik"*, «Fundamenta Mathematica», vol. 15, 1930, pp. 337-41

[324] Gödel, K., *Über formal unentscheidbare Sätze der „Principia Mathematica" und verwandter Systeme, I*, *op. cit.*

[325] Church, A., *A Note on the Entscheidungsproblem*, *op. cit.*

[326] Löwenheim, L., *Über Möglichkeiten im Relativkalkül*, «Mathematische Annalen», vol. 76, n. 4, 1915, pp. 447-70

[327] Skolem, T., *Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktations- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen*, «Videnskapsselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse», n. 3. Skolem, T., *Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen*, «Videnskapsselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse», n. 4

[328] Cfr. anche Ebbinghaus, H.-D., *Introductory Note to 1929a*, in Zermelo, E., *Collected Works*, *op. cit.*, pp. 352-7

[329] Zermelo, E., *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche*, *op. cit.*

9.3.3 Il principio di comprensione in ZFU_1

Dopo aver discusso dei *constraints* che vigono normalmente per il sistema formale di riferimento, cioè a dire ZF, possiamo ora passare alla disamina dello schema di comprensione che adotteremo per ZFU_1.

Lo studio dell'espediente zermeliano, fortemente connesso – come visto – al paradosso di Russell, ci consente di affrontare con maggior convinzione il problema di fornire uno strumento tanto flessibile quanto sicuro per la costruzione di nuove classi all'interno di ZFU_1. Non ci discosteremo infatti dalla prassi inaugurata dal matematico berlinese e terremo per valido l'ammonimento a non concedere troppo spazio a quelle collezioni troppo comprensive.

D'altra parte non potremo accontentarci di adottare soltanto questo tipo di indicazione. Quanto rilevato da Weyl, Fraenkel e Skolem costituisce infatti un altro fondamentale tassello alla costruzione di un sistema sufficientemente adeguato alla trattazione delle classi e non sarà possibile derogare dalle loro osservazioni. Esse costituiranno al contrario un punto di forza allorché sarà necessario esplicitare quale tipologia di predicati sia possibile istanziare dallo schema di comprensione e in che modo.

Articoleremo il nostro assioma secondo i due aspetti caratterizzanti il sistema formale che intendiamo qui descrivere:

1) la comprensione di eventuali oggetti insiemisticamente non-decomponibili;

2) la comprensione di oggetti insiemisticamente decomponibili.

In base al primo punto allora sarà necessario chiarire il modo con cui si intenderà isolare classi, al cui intero compaiano come elementi anche individui o *Urelemente*.

Mentre in base al secondo sarà necessario fornire dei criteri mediante i quali assicurare il buon funzionamento dell'assioma rispetto a collezioni che posseggono o natura puramente insiemistica o natura intermedia, potendo queste ultime annoverare come elementi oggetti primitivi, non ottenibili semplicemente a partire dall'insieme vuoto e dall'iterazione di alcune operazioni su di esso.

Cominceremo allora dallo sviluppo del punto primo. Il sistema ZFU_1 non è stato concepito per trattare esplicitamente degli *Urelemente*, in quanto esso non ne assume o presuppone espressamente l'esistenza. Abbiamo invece tentato di realizzare il sistema in questione in maniera tale che esso non fosse dotato di quegli accorgimenti per cui se ne escludesse *a priori* la presenza[330]. Ciò fornisce alla nostra teoria un carattere polivalente, potendo essa ospitare oggetti primitivi senza per questo compromettere necessariamente la propria ontologia con elementi estranei al *Grund* insiemistico. La presenza silente tuttavia di tali oggetti è comunque auspicata, dal momento che quanto di più caratteristico avrà questa teoria, sarà dovuto proprio agli *Urelemente*.

Per sottolineare quest'ultimo aspetto, desideriamo infatti ribadire che le inconsistenze eventualmente riscontrabili nel sistema saranno dovute proprio alla presenza di oggetti primitivi e non alla natura stessa delle classi. Abbiamo infatti mostrato nei capitoli precedenti come siano questi ultimi portatori di inconsistenza, potendo immaginare per essi situazioni in cui siano pensati sotto il rispetto di qualche proprietà incoerentemente attribuita. Chiaramente la presenza di eventuali contraddizioni, dovrà pur sempre rientrare all'interno di un discorso concretamente sostenibile, che non dia luogo a trivialità; e questo ci pare possa essere garantito dal calcolo logico utilizzato (C_1^*). Occorre però a questo punto quel supplemento teorico di chiarificazione, che consenta all'intera struttura di potersi adeguatamente misurare con le circostanze immaginate.

Cercheremo di indirizzare allora la presenza di contraddizioni, restringendo il loro campo d'azione ad un livello molto circostanziato, fondamentalmente di «base». Ciò sarà giustificato dal fatto che, se i possibili modelli dovessero contenere *Urelemente*, allora tali *Urelemente*, appartenendo alla *Basis* dell'universo da essi generabile, determinerebbero inconsistenze entro il secondo livello di costruzione degli insiemi. L'idea è quella di consentire aderenze concettualmente inconsistenti attraverso la relazione minima fondamentale, scelta sul possibile dominio, in maniera tale che le contraddizioni possano darsi soltanto se la prima coordinata della relazione in questione sia un *Urelement* mentre la seconda sia una classe. Tale fatto sembrerebbe scontato, data la natura degli *Urelemente* qui considerati; ma è pienamente giustificabile alla luce dell'obiettivo che qui ci prefiggiamo di raggiungere, in virtù del quale è per noi irrilevante parlare di condizioni inconsistenti, se la prima coordinata della coppia appartenente alla relazione fondamentale sia un insieme di qualche tipo.

Il punto focale del nostro sistema è infatti quello di studiare una teoria degli *Urelemente* inconsistenti e non delle classi inconsistenti *tout court*.

Per cercare di mettere in atto queste tutte queste specifiche caratteristiche, riteniamo adeguato accettare uno schema del tipo visto nei due paragrafi precedenti. Sarà tuttavia importante notare che la presenza degli individui, eventualmente inconsistenti, costituisce un elemento da tener ben presente. Così la formulazione del principio in questione dovrà fare i conti con le premesse sin

330 Intendiamo riferirci qui all'azione limitata della relazione di eguaglianza e dell'assioma $\boldsymbol{E}$.

qui dichiarate, evitando inadempienze rispetto ai canoni fondamentali dello nostro discorso teorico.

A tal fine ci pare importante richiamare la nozione di multisortalità. Disponendo infatti di un linguaggio con tre sorte di variabili, potremo meglio precisare l'azione dello schema, in modo tale che risulti ben chiaro il ruolo degli eventuali *Urelemente* nelle diverse istanze che si andranno a determinare.

Fissiamo allora il caso per gli oggetti insiemisticamente indecomponibili:

$$[\![\mathbb{1}]\!]\ \ \forall Z \exists Y \forall x \left[(x \in Y) \leftrightarrow [(x \in Z) \wedge (P(x))]\right]$$

L'enunciato $[\![\mathbb{1}]\!]$ fa uso della seconda sorta di variabili, quella per individui non-insiemistici, e della prima, specificamente intesa per occorrere come insiemi. L'ordine con cui essi compaiono all'interno dello schema di comprensione, esprime l'idea fondamentale per cui solo le classi possono contenere elementi, in tal caso specificamente *Urelemente*. Tuttavia mancano ancora degli elementi, di cui lo schema potrebbe pure essere emendato. Così formulato infatti lo schema esprime la possibilità di istanziare soltanto predicati, che per il momento non possiamo ancora ulteriormente determinare, aventi come sola variabile libera la x. Questo fatto potrebbe limitare fortemente le possibilità deduttive dell'assioma in questione; ma non ci pare sia il caso del nostro sistema formale. Normalmente, per estendere il potere espressivo dello schema di comprensione è necessario esprimere tale postulato facendo uso di parametri, che possono occorrere nella formula che definisce il predicato in questione. Un esempio lo abbiamo fornito con lo schema denominato $[\![* \, C \, *]\!]$, dove in $P(X)$ potevano occorrere al più X_n variabili libere. Relativizzando tale fatto al caso qui in esame, potremmo riformulare $[\![\mathbb{1}]\!]$ come segue:

$$[\![\mathbb{2}]\!]\ \ \forall m_1 \dots \forall m_n \forall Z \exists Y \forall x \left[(x \in Y) \leftrightarrow [(x \in Z) \wedge (P(x))]\right]$$

Il caso $[\![\mathbb{2}]\!]$ differirebbe allora da $[\![\mathbb{1}]\!]$ perché il predicato $P(x)$ potrebbe avere altre variabili libere oltre x e precisamente le variabili $m_1, \dots, m_n$[331].

Si può osservare che anche così riformulato, lo schema di comprensione preserverebbe la caratteristica di avere x come variabile libera in $P(x)$ occorrente

[331] "$P(x, m_1, \dots, m_n)$".

esclusivamente per individui; possiederebbe in aggiunta delle ulteriori variabili libere $m_1,\ldots, m_n$, che non sono effettivamente determinate: esse sono state infatti genericamente indicate mediante l'uso della terza sorta di variabili e possono occorrere tanto per insiemi quanto per individui.

La differenza di fondo tra ⟦𝟙⟧ e ⟦𝟚⟧ risiede dunque nella possibilità di poter definire predicati più complessi rispetto a quanto non sia possibile fare mediante un principio di tipo ⟦𝟙⟧. Tale fatto dipende proprio dalla presenza o meno di parametri all'interno del predicato, che si intende definire, e che non possono essere considerati se si utilizzasse un principio come ⟦𝟙⟧.

D'altra parte un principio del tipo ⟦𝟚⟧ non è generalmente necessario se si sono assunti certi altri assiomi. Se infatti si assumesse semplicemente ⟦𝟙⟧, non si potrebbe «derivare direttamente l'intersezione tra due insiemi»[332]; ma se si dispone già di assiomi come quello della coppia, dell'unione e della potenza, allora sarebbe possibile derivare la forma ⟦𝟚⟧ dello schema di comprensione dalla forma più ristretta ⟦𝟙⟧. Gli assiomi $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Un}$, in aggiunta al postulato $\boldsymbol{Pw}$ che daremo poco più avanti, soddisferanno proprio tale condizione e pertanto potremo dispensare ZFU_1 dall'assunzione assiomatica di un principio come ⟦𝟚⟧, semplificandone notevolmente anche la scrittura e giustificando così la formulazione di un principio più debole del tipo ⟦𝟙⟧.

Inoltre la restrizione zermeliana sulla grandezza delle collezioni così ottenibili, resterebbe egualmente valida, sebbene con esclusivo riferimento a classi contenenti i possibili *Urelemente*. Ciò tuttavia ci pare di una certa importanza. Volendo infatti tentare la costruzione di una teoria in grado di esprimere tutto quanto sia possibile dimostrare in un sistema come ZF, dovremo realizzare all'interno di ZFU_1 anche una costruzione degli insiemi "puri". Intuitivamente allora, se non vigesse la restrizione zermeliana, potremmo pensare di istanziare dallo schema di comprensione un predicato del seguente tipo:

$$\exists Y \forall Z\big[(Z \in X) \leftrightarrow \forall x[x \notin^* Z]\big]$$

Esso raccoglierebbe tutti quegli insiemi, che non contengono *Urelemente*. Ma potendo derivare in ZFU_1 tutti gli insiemi puri derivabili in ZF, allora la classe Y dovrebbe contenere tutti gli insiemi puri. Tale circostanza potrebbe allora riproporre i paradossi precedentemente esaminati, come quello di Russell; mentre la presenza della restrizione zermeliana ci pare consenta di escludere una simile circostanza, dal momento che tutto ciò che sarebbe possibile derivare sarebbero i

[332] Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 36, nota 2

sottoinsiemi di un certo Z, precedentemente determinato, privi degli eventuali *Urelemente*.

Passiamo ora alla definizione dei possibili predicati derivabili dal principio di comprensione ristretto al caso degli individui fin qui esaminato, seguendo la traccia indicata da Skolem. Nella loro determinazione allora ci atterremo alle indicazioni del logico norvegese, sfruttando i vantaggi scaturenti dalla formulazione del sistema ZFU_1 come teoria elementare o al primo ordine.

Diciamo pertanto che saranno predicati derivabili da $[\![\mathbb{1}]\!]$ quelli che:

1) sono definiti da un'espressione finita;

2) sono costruiti a partire dalla proposizione elementare $(x \in X)$;

3) sono definiti con l'uso dei seguenti connettivi logici:

    3.1) ($\wedge$): espressioni del tipo $(x \in X) \wedge (x \in Y)$;

    3.2) ($\vee$): espressioni del tipo $(x \in X) \vee (x \in Y)$;

    3.3) ($\rightarrow$): espressioni del tipo $(x \in X) \rightarrow (y \in X)$;

    3.4) ($\neg^*$): espressioni del tipo $\neg^*(x \in X)$[333] o espressioni del tipo $\neg^* \alpha$, dove α è una formula costruita a partire dai criteri 3.1)-3.4);

    3.5) ($\neg$): espressioni del tipo $\neg(x \in X)$[334];

    3.6) ($\leftrightarrow$): espressioni del tipo "$(x \in X) \leftrightarrow (y \in X)$" ottenibili per definizione da "$\Big[\big[(x \in X) \rightarrow (y \in X) \wedge [(y \in X) \rightarrow (x \in X)]\big]\Big]$";

4) ($\forall$): espressioni del tipo $\forall x \alpha$, dove α è una matrice costruibile a partire dai criteri 1)-3);

5) ($\exists$): espressioni del tipo $\exists x \alpha$, dove α è una matrice costruibile a partire dai criteri 1)-3);

6) nient'altro è un predicato.

[333] Indicata anche come "$(x \notin^* X)$".
[334] Indicata anche come "$(x \notin X)$".

I requisiti sopra esposti sono tutti abbastanza comuni e non divergono nella sostanza da quanto comunemente accettato in sistemi come ZF.

Vogliamo qui discutere brevemente soltanto dei punti 3.4) e 3.5), che coinvolgono gli operatori di negazione debole e forte, propri del calcolo logico soggiacente. Essi costituiranno infatti la caratteristica fondamentale del sistema ZFU_1 e consentiranno di ospitare eventuali *Urelemente* inconsistenti.

Partendo dal caso 3.4), osserviamo che l'operatore di negazione forte ha tutte le proprietà della negazione classica. Pertanto esso potrebbe essere utilizzato per negare fortemente le formule cui venisse applicato, esprimendo con ciò semplicemente la falsità della proprietà considerata per un dato x. Ciò ci pare essere in accordo con l'idea secondo la quale potrebbe darsi il caso di *Urelemente* consistenti e l'uso di questo tipo di negazione ne consentirebbe un'adeguata trattazione.

Nel caso 3.5 invece osserviamo che la formulazione con cui è stata definita la condizione di un predicato debolmente negato e avente soltanto x come variabile libera, intende esprimere la possibilità per un certo individuo x di non avere una determinata proprietà in senso debole. Ciò formalizza l'idea per cui gli eventuali individui possano presentare caratteri inconsistenti (fatto questo espresso – come visto – dalla presenza di classi in sovrapposizione). Così se uno stesso individuo x avesse anche la proprietà negata debolmente da una certa formula, allora sarebbe possibile supportare la contraddizione riscontrata senza compromettere la stabilità o coerenza generale dell'intero sitema. Altrettanto non accadrebbe se si utilizzasse la negazione forte.

Passiamo a questo punto alla considerazione 2), concernente gli oggetti insiemisticamente decomponibili o, più semplicemente, le classi.

In questa specifica circostanza le osservazioni da fare saranno di carattere più immediato e varrà per esse una certa parte delle condizioni e dei vincoli già osservati per il caso dei possibili *Urelemente*.

Lo schema che assumeremo allora per la costruzione di classi sarà del seguente tipo:

$$[\![\mathbb{3}]\!]\quad \forall Z \exists Y \forall X \Big[(X \in Y) \leftrightarrow \big[(X \in Z) \wedge \big(P(X)\big)\big]\Big]$$

Anche in questo caso varranno le medesime condizioni circa le variabili libere occorrenti nel predicato $P(X)$. Non espliciteremo infatti l'occorrenza di eventuali ulteriori variabili libere poiché ciò potrà sempre esser fatto alla luce degli assiomi

$\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Un}$ (e $\boldsymbol{Pw}$). Inoltre, così come avveniva per il caso di classi contenenti possibili individui non-insiemistici, vale la restrizione di Zermelo, che consente l'isolamento di soli sottoinsiemi di insiemi già dati come Z e mai di classi arbitrariamente estese. Ciò salvaguarderà il nostro sistema dalle inconsistenze trivializzanti del tipo già preso in considerazione.

Non ci resta dunque che definire i predicati per la costruzione di nuove classi a partire da classi già date. Ciò avverrà in base ai seguenti analoghi criteri. Tutti i predicati occorrenti nella determinazione di esistenza di classi:

1) sono definiti da un'espressione finita;

2) sono costruiti a partire dalla proposizione elementare $(X \in Y)$;

3) sono definiti con l'uso dei seguenti connettivi logici:

   3.1) $(\wedge)$: espressioni del tipo $(X \in Y) \wedge (X \in Z)$;

   3.2) $(\vee)$: espressioni del tipo $(X \in Y) \vee (X \in Z)$;

   3.3) $(\rightarrow)$: espressioni del tipo $(X \in Z) \rightarrow (Y \in Z)$;

   3.4) $(\neg^*)$: espressioni del tipo $\neg^*(X \in Y)$[335] o espressioni del tipo $\neg^* \alpha$, dove α è una formula costruita a partire dai criteri 3.1)-3.4);

   3.5) $(\leftrightarrow)$: espressioni del tipo $(X \in Y) \leftrightarrow (X \in Z)$, ottenibili per definizione da $\left[[(X \in Z) \rightarrow (Y \in Z) \wedge [(Y \in Z) \rightarrow (X \in Z)]\right]$";

4) $(\forall)$: espressioni del tipo $\forall X \alpha$, dove α è una matrice costruibile a partire dai criteri 1)-3);

5) $(\exists)$: espressioni del tipo $\exists X \alpha$, dove α è una matrice costruibile a partire dai criteri 1)-3);

6) nient'altro è un predicato.

---

[335] Indicata anche come '$(X \notin^* Y)$'.

Come si può notare, le differenze intercorrenti tra i predicati che coinvolgono possibili *Urelemente* e i predicati che determinano l'esistenza di classi a partire da classi, riguardano nella sostanza l'uso che si può fare nella definizione del connettivo logico della negazione. Non è infatti consentito definire predicati per sole classi che facciano uso della negazione debole e ciò in accordo – a nostro avviso – con l'idea secondo la quale siano gli individui insiemisticamente non-decomponibili i soli a poter esibire caratteri di inconsistenza. Così non sarà necessario considerare il caso riguardante l'uso della negazione debole, in quanto non saranno presi in esame casi di classi, intese nella loro individualità, che mostrino aspetti inconsistenti, in accordo con quanto detto poc'anzi. L'unica forma di negazione ammessa sarà allora quella forte[336].

Occorrerà a questo punto dare una formulazione unitaria e definitiva dello schema di comprensione per ZFU_1. Potremmo a questo punto tentare una fusione fra i due principi ⟦𝟙⟧ e ⟦𝟛⟧ sopra esposti. Ciò che ne potrebbe risultare, sarebbe un'alternativa del seguente tipo:

$$[\![4]\!] \quad \Big[\forall Z \exists Y \forall x \Big[(x \in Y) \leftrightarrow \big[(x \in Z) \wedge \big(P(x)\big)\big]\Big]\Big] \vee$$
$$\vee \Big[\forall Z \exists Y \forall X \Big[(X \in Y) \leftrightarrow \big[(X \in Z) \wedge \big(P(X)\big)\big]\Big]\Big]$$

fermo restando le condizioni di definibilità per i predicati sopra illustrati, rispettivamente per *Urelemente* e classi.

Tuttavia la forma espressa in ⟦𝟜⟧ non è molto elegante. Nella formulazione dello schema in questione infatti, riteniamo possa utilmente essere impiegato il linguaggio multisortale adottato per ZFU_1 al fine di ottenere un principio più conciso dal punto di vista formale. Considerando allora le variabili individuali dl terzo tipo, potremmo provare una sintesi di ⟦𝟜⟧ come segue:

$$[\![5]\!] \quad \forall Z \exists Y \forall m \Big[(m \in Y) \leftrightarrow \big[(m \in Z) \wedge \big(P(m)\big)\big]\Big]$$

[336] Un mdo alternativo per esprimere questo tipo di condizione potrebbe essere quello di affermare la stabilità della formula di appartenenza nel caso in cui sia una classe ad appartenere ad un'altra. Allora si potrebbe riformulare lo schema ⟦𝟛⟧ come: $\forall Z \exists Y \forall X \Big[(X \in Y) \leftrightarrow \Big[(X \in Z) \wedge \big(P(X)\big) \wedge \big(P(X)\big)^{\circ}\Big]\Big]$.

Ciò che afferma lo schema ⟦5⟧ è una condizione di isolamento valida tanto per individui primitivi quanto per classi, genuinamente intese. Infatti la variabile individuale m potrebbe occorrere nella formula $P(m)$ tanto per un *Urelement* quanto per un insieme. Ciò che si può esprimere con $P(m)$ è allora la possibilità di osservare tanto una proprietà $P(x)$ quanto una proprietà $P(X)$, rispetto alle quali varranno le relative condizioni di definibilità.

Dunque $\forall Z \exists Y \forall m \left[(m \in Y) \leftrightarrow \left[(m \in Z) \wedge \left(P(m)\right)\right]\right]$ sarà in grado di stanziare una condizione se e solo se la stessa condizione risulterà derivabile o da $\forall Z \exists Y \forall x \left[(x \in Y) \leftrightarrow \left[(x \in Z) \wedge \left(P(x)\right)\right]\right]$ o da $\forall Z \exists Y \forall X \left[(X \in Y) \leftrightarrow \left[(X \in Z) \wedge \left(P(X)\right)\right]\right]$.

Formuliamo allora lo schema d'assioma di comprensione come segue:

<u>Schema d'assioma di comprensione</u>. $\boldsymbol{CP}$

$$\forall Z \exists Y \forall m \left[(m \in Y) \leftrightarrow \left[(m \in Z) \wedge \left(P(m)\right)\right]\right]$$ [337]

dove Y non è una variabile libera di $P(m)$ e valgono le seguenti condizioni di definibilità per il predicato $P(m)$:

I) $m = x$. Allora $P(x)$ è un predicato definito:

1) da un'espressione finita;

2) a partire dalla proposizione elementare $(x \in X)$;

3) con l'uso dei seguenti connettivi logici:

3.1) $(\wedge)$: espressioni del tipo $(x \in X) \wedge (x \in Y)$;

3.2) $(\vee)$: espressioni del tipo $(x \in X) \vee (x \in Y)$;

3.3) $(\rightarrow)$: espressioni del tipo $(x \in X) \rightarrow (y \in X)$;

---

[337] Da questa formulazione debole seguirà anche quella forte: $\forall n_1 \ldots \forall n_k \forall Z \exists Y \forall m \left[(m \in Y) \leftrightarrow\right.$ *m∈Z∧Pm,n1,…,nk*.

3.4) ($\neg^*$): espressioni del tipo $\neg^*(x \in X)$ o espressioni del tipo $\neg^*\alpha$, dove α è una formula costruita a partire dai criteri 3.1)-3.4);

3.5) ($\neg$): espressioni del tipo $\neg(x \in X)$;

3.6) ($\leftrightarrow$): espressioni del tipo $(x \in X)\leftrightarrow(x \in Y)$, ottenibili per definizione da "$\Big[[(x \in X)\rightarrow(y \in X)\wedge[(y \in X)\rightarrow(x \in X)]]\Big]$";

4) ($\forall$): espressioni del tipo $\forall x\alpha$, dove α è una matrice costruibile a partire dai criteri 1)-3);

5) ($\exists$): espressioni del tipo $\exists x\alpha$, dove α è una matrice costruibile a partire dai criteri 1)-3);

6) nient'altro è un predicato.

II) $m = X$. Allora $P(X)$ è un predicato definito:

1) da un'espressione finita;

2) a partire dalla proposizione elementare $(X \in Y)$;

3) con l'uso dei seguenti connettivi logici:

3.1) ($\wedge$): espressioni del tipo $(X \in Y)\wedge(X \in Z)$;

3.2) ($\vee$): espressioni del tipo $(X \in Y)\vee(X \in Z)$;

3.3) ($\rightarrow$): espressioni del tipo $(X \in Z)\rightarrow(Y \in Z)$;

3.4) ($\neg^*$): espressioni del tipo $\neg^*(X \in Y)$ o espressioni del tipo $\neg^*\alpha$, dove α è una formula costruita a partire dai criteri 3.1)-3.4);

3.5) ($\leftrightarrow$): espressioni del tipo $(X \in Y)\leftrightarrow(X \in Z)$, ottenibili per definizione da "$\Big[[(X \in Z)\rightarrow(Y \in Z)\wedge[(Y \in Z)\rightarrow(X \in Z)]]\Big]$";

4) ($\forall$): espressioni del tipo $\forall X\alpha$, dove α è una matrice costruibile a partire dai criteri 1)-3);

5) (∃): espressioni del tipo $\exists X\alpha$, dove α è una matrice costruibile a partire dai criteri 1)-3);

6) Nient'altro è un predicato.

9.3.4 Sinossi dello schema d'assiomi di comprensione $\boldsymbol{CP}$

Sintetizziamo di seguito lo schema di comprensione adottato in ZFU_1.

<u>Schema d'assioma di comprensione</u>. $\boldsymbol{CP}$

$$\forall Z \exists Y \forall m \left[(m \in Y) \leftrightarrow [(m \in Z) \wedge (P(m))]\right]$$

dove Y non è una variabile libera di $P(m)$ e valgono le seguenti condizioni di definibilità per il predicato $P(m)$:

1) $P(m)$ è definito da un'espressione finita;

2) $P(m)$ è definito a partire dalla proposizione elementare $(m \in Y)$;

3) $P(m)$ è definito con l'uso dei seguenti connettivi logici:

   3.1) ($\wedge$): espressioni del tipo $(m \in Y) \wedge (m \in Z)$;

   3.2) ($\vee$): espressioni del tipo $(m \in Y) \vee (m \in Z)$;

   3.3) ($\rightarrow$): espressioni del tipo $(m \in Z) \rightarrow (n \in Z)$;

   3.4) ($\neg^*$): espressioni del tipo $\neg^*(m \in Y)$ o espressioni del tipo $\neg^*\alpha$, dove α è una formula costruita a partire dai criteri 3.1)-3.4);

   3.5) ($\neg$): espressioni del tipo $\neg(x \in Y)$;

   3.5) ($\leftrightarrow$): espressioni del tipo $(m \in Y) \leftrightarrow (m \in Z)$, ottenibili per definizione da $\left[[(m \in Z) \rightarrow (n \in Y) \wedge [(n \in Z) \rightarrow (m \in Z)]]\right]$;

4) ($\forall$): espressioni del tipo $\forall m\alpha$, dove α è una matrice costruibile a partire dai criteri 1)-3);

5) ($\exists$): espressioni del tipo $\exists m\alpha$, dove α è una matrice costruibile a partire dai criteri 1)-3);

6) Nient’altro è un predicato.

9.4 Alcune conseguenze dello schema di comprensione

9.4.1 Conseguenze limitative dello schema di comprensione

Lo schema di comprensione adottato per il nostro sistema formale è in grado di salvaguardare la teoria dai paradossi che normalmente costituiscono un problema, una minaccia per la sua non-trivialità, sebbene esso non garantisca in generale la non-deducibilità di antinomie banalizzanti.

Le garanzie che è possibile ottenere mediante l'adozione dei *constraints* sopra discussi ed accettati, ispirati a quelli di Zermelo e Skolem, hanno tuttavia un prezzo da pagare.

In ZFU_1 non è infatti possibile derivare né la classe di Russell né la classe universale. Varranno pertanto i seguenti due teoremi, per le medesime ragioni precedentemente discusse:

Teorema 14.31 $\vdash_{ZFU_1} \neg^* \exists Y \forall X[(X \in Y) \leftrightarrow (X \notin^* X)]$

Dimostrazione

Sia per assurdo Y un tale insieme. Allora per ogni X varrà $(X \notin^* X)$. Per $X = Y$ ne seguirebbe quindi che $[(Y \in Y) \leftrightarrow (Y \notin^* Y)]$, donde $(Y \in Y) \wedge (Y \notin^* Y)$. Così per *reductio ad absurdum* non esiste un tale Y.

Teorema 14.32 $\vdash_{ZFU_1} \neg^* \exists Y \forall X(X \in Y)$

Dimostrazione

Sia per assurdo Y un insieme tale che $\forall X(X \in Y)$. Allora in Y potremmo isolare una classe Z di elementi X del tipo: $Z = \{X | (X \notin^* X)\}$. Ma l'esistenza dell'insieme Z contraddirebbe il teorema 14.31 e così non esiste la classe Y, cioè non esiste in ZFU_1 la classe universale.

Inoltre non sarà possibile istanziare dallo schema $\boldsymbol{CP}$ nemmeno una condizione che individui la classe di Russell così come studiata in alcuni sistemi insiemistici paraconsistenti[338], dal momento che, dai criteri di definizione visti, non sarebbe corretto isolare una condizione del tipo $[(X \in Y) \leftrightarrow (X \notin X)]$ sia perché mancherebbe la restrizione ad un insieme precedentemente isolato, sia perché l'uso della negazione debole non sarebbe consentito per quelle formule atomiche in cui a sinistra della relazione di appartenenza si trovasse una variabile per insiemi.

Tali conseguenze possono essere riguardate allora come «negative»[339] o limitative rispetto alla formulazione «ingenua» della teoria, sebbene la loro presenza fornisca un margine sufficientemente ampio per assicurarne la non-trivialità. Dal punto di vista però del sistema che qui si intende descrivere, tali risultati sono in linea con le premesse indicate, in base alle quali si era escluso un riferimento esplicito a collezioni del genere.

[338] Cfr. Da Costa, N. C. A., Béziau, J.-Y., Bueno, O., *Elementos de teoria paraconsistente de conjuntos*, *op. cit.*, pp. 35 e ss.

[339] Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 40

9.4.2 Il concetto di complementazione

9.4.2.1 L'insieme complemento "forte" e "debole"

Discuteremo ora un altro risultato limitativo derivante dallo schema di comprensione adottato, quello di complementazione.

Nella teoria ingenua degli insiemi o in quelle teorie che operano una distinzione ontologica fondamentale fra classi ed insiemi è possibile parlare liberamente di complemento di un dato insieme Z, pensando alla classe che è possibile definire come:

$$[\![Cmp]\!] \ \{m|(m \notin^* Y)\}$$

Tuttavia una simile condizione non è accettabile alla luce di uno schema di comprensione come $\boldsymbol{CP}$. Se adottassimo infatti tale definizione, allora potremmo scegliere di indicare $[\![Cmp]\!]$ come '$\overline{Y}^*$' e, in base agli assiomi sin discussi, derivare l'esistenza della classe $(Y \cup \overline{Y})$. Tale classe tuttavia comporterebbe una contraddizione trivializzante a questo punto, in quanto essa risulterebbe eguale alla classe universale, la cui esistenza è stata negata dal teorema 14.32. Perciò dato che $\left(Y \cup \overline{Y}^*\right) = V$, dove V è la classe universale, è possibile affermare che:

Teorema 14.33 $\vdash_{ZFU_1} \neg^* \exists Z \left(Z = \{m|(m \notin^* Y)\} = \overline{Y}^*\right)$

Dimostrazione

Sia per assurdo Z una tale classe. Allora $\left(Y \cup \overline{Y}^*\right) = V$. Tuttavia il teorema 14.32 asserisce che $\neg^* \exists X(X = V)$ e così, per *reductio ad absurdum*, varrà la non-esistenza anche di Z.

Nel nostro sistema formale disponiamo inoltre di due negazioni differenti, in relazione alle proprietà di cui esse godono, e dunque sarà possibile in generale riguardare al concetto di complementazione da due prospettive diverse[340]. Volendo però uniformare la nozione di complemento, dando una definizione che sia la stessa in entrambe le circostanze e rispettando il teorema 14.32, che asserisce la non-esistenza (in senso forte) della classe universale, occorrerà ripensare la definizione dell'insieme-complemento, scegliendo dei criteri adeguati ad aggirare simili difficoltà.

Diremo allora che un certo insieme X è complemento rispetto ad Y se e solo se X contiene come membri tutti quegli elementi che appartengono ad X ma che non appartengono ad Y.

La natura concettuale dell'insieme così definito è allora abbastanza elementare e immediata da comprendere: dato un certo universo di discorso è possibile isolarne una data porzione, mediante una condizione che determini una certa classe di oggetti Y; allora l'insieme-complemento X relativizzato ad Y, costituirà tutto ciò che è in X ma che non è in Y, senza per questo fare riferimento a tutto ciò che non è in Y in assoluto.

Questo tipo di insieme ha delle caratteristiche molto importanti, che si rivelano innanzitutto in conseguenza dell'assioma di comprensione adottato. La definizione intuitivamente illustrata sopra non è – come visto – quella che comunemente si attribuisce al concetto di complementazione e, per quanto essa risulti estremamente chiara, essa è tutt'altro che ingenua.

Una nozione di complementazione simile viene generalmente detta anche "differenza" tra gli insiemi X e Y ed indicata nel modo che segue:

$$\overline{Y_X} = (X - Y)$$

In una teoria come ZFU_1 il concetto in questione deve tuttavia essere meglio specificato in relazione al tipo di "non-appartenenza" che si intende formalizzare in virtù del doppio funtore di negazione impiegato.

Distingueremo allora tra "complemento forte" o "complemento standard" e "complemento debole" a seconda che nella definizione occorra l'insieme complemento determinato nel primo caso dalla negazione forte, nel secondo dalla negazione debole.

In base alla prima definizione allora si avrà un tipo di complementazione del tutto analoga a quella impiegata nei casi classici poiché il funtore di negazione lì utilizzato ha tutte le proprietà della negazione classica. Esso sarà pertanto

[340] Si potrebbe infatti riscrivere la condizione $[\![Cmp]\!]$ sfruttando la negazione debole, indicando l'insieme complemento debole come: '$\overline{Y} = \{m|(m \notin X)\}$'.

utilizzato per descrivere stati di cose non-contraddittori, casi cioè in cui compaiano insiemi puri o casi in cui vi siano *Urelemente* consistenti.

La seconda definizione invece, ottenuta mediante l'impiego della negazione debole, verrà impiegata per descrivere stati di cose in cui possono verificarsi contraddizioni, come potrebbe accadere in presenza di individui inconsistenti.

Le due nozioni verranno allora così definite:

Definizione 14.32 $(X-^{*}Y) \stackrel{\text{def}}{=} \{m|(m \in X)\wedge(m \notin^{*} Y)\}$

Definizione 14.33 $\overline{Y_X}^{*} = (X-^{*}Y)$

Definizione 14.34 $(X - Y) \stackrel{\text{def}}{=} \{m|(m \in X)\wedge(m \notin Y)\}$

Definizione 14.35 $\overline{Y_X} = (X - Y)$

In base alle definizioni sopra riportate sarà possibile ripristinare anche l'unione di un insieme con il suo complemento relativo, in quanto $\left(Y \cup \overline{Y_X}^{*}\right) = \left(Y \cup (X-^{*}Y)\right) = [\{m|(m \in Y)\} \cup \{m|(m \in X)\wedge(m \notin^{*} Y)\}]$ mentre $\left(Y \cup \overline{Y_X}\right) = \left(Y \cup (X - Y)\right) = [\{m|(m \in Y)\} \cup \{m|(m \in X)\wedge(m \notin Y)\}]$. In nessuno dei due casi risulta possibile verificare l'eguaglianza $\left(Y \cup \overline{Y_X}^{(*)}\right) = V$ poiché questa sarebbe determinabile soltanto nel caso in cui si considerasse il «complemento assoluto» di Y, dato dal caso $\overline{Y^{(*)}} = \left(V-^{(*)}Y\right)$[341].

Così:

1) $\left(Y \cup \overline{Y_X}^{*}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{m\middle|\left[(m \in Y)\vee\left((m \in X)\wedge(m \notin^{*} Y)\right)\right]\right\}$

2) $\left(Y \cup \overline{Y_X}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{m\middle|\left[(m \in Y)\vee\left((m \in X)\wedge(m \notin Y)\right)\right]\right\}$

[341] Cfr. Casalegno, P., Mariani, M., *Teoria degli insiemi*, *op. cit.*, pp. 39-41

In base al discorso fin qui fatto si potrebbe pensare che due insiemi, di cui l'uno sia complemento relativo dell'altro in senso forte, siano tali da non potersi considerare come debordanti. In realtà questo fatto non può affermarsi con sufficiente generalità. Se condiseriamo infatti due insiemi X e Y e consideriamo $X - Y$ e $Y - X$, allora si otterrebbero due insiemi $\overline{Y_X}^*$ e $\overline{X_Y}^*$, tali che essi non hanno alcun elemento in comune. Così o $m \in \overline{Y_X}^*$ o $m \in \overline{X_Y}^*$, per ogni m. Tuttavia nulla può escludere la presenza di qualche *Urelement* che risulti inconsistente rispetto a qualche altro insieme scelto come complemento relativo e dunque il fatto che un insieme ed un suo complemento relativo siano tra loro classicamente disgiunti non può implicare il fatto che essi non siano debordanti.

Se avessimo potuto definire il complemento assoluto della classe Y, allora avremmo potuto affermare ciò, in virtù del fatto che la condizione sopra indicata avrebbe avuto valore senza la restrizione ad un particolare insieme-complemento.

Potremmo illustrare la situazione attraverso due schemi, che riportiamo dalla celebre monografia di Abian[342]. Dati quattro insiemi c, e, m e n – scrive l'autore – possono considerarsi due casi:

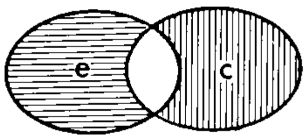


Figura 1

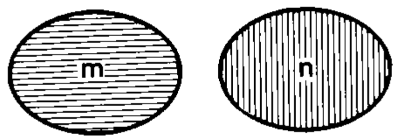


Figura 2

Nella figura 1 si ha che $(e{-^*}c)$ è uguale alla parte barrata orizzontalmente mentre $(c{-^*}e)$ alla parte barrata verticalmente. Nella figura 2 invece si ha che $(m{-^*}n)$ è barrato orizzontalmente mentre $(n{-^*}m)$ è barrato verticalmente. In entrambi i casi ogni elemento appartenente ad uno dei due insiemi relativamente complementari o appartiene all'uno o appartiene all'altro e ciò esclude che via un infividuo inconsistente che possa essere in entrambi relativamente alle condizioni che le due classi esprimono. Tuttavia non si può escludere che via per entrambi i casi una qualche proprietà relativamente complementare ad uno degli insiemi considerati, che risulti sensibile alla presenza di qualche individuo inconsistente e che pertanto giustifichi l'affermazione per cui un insieme potrebbe appartenere tanto all'insieme considerato quanto al nuovo complemento relativo.

[342] Cfr. Abian, A., *Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, *op. cit.*, pp. 123-4

Così da condizioni di stabilità tra due determinate proprietà, relativamente complementari, non si può dedurre con certezza l'inesistenza di *Urelemente* contraddittori.

9.4.2.2 Alcune semplificazioni sull'insieme complemento

Per semplificare la scrittura e lo studio di alcune proprietà dell'insieme complemento all'interno di ZFU_1, sfrutteremo le definizioni 14.32-35 per consentire l'introduzione di una scrittura di tipo più comune.

Sappiamo dal teorema 14.33 che non esiste il complemento assoluto di un qualsivoglia insieme Y e che tale condizione è ineliminabile dal sistema formale qui presentato. Restringendo però la condizione di complementazione sempre ad un determinato insieme, che chiameremo per la sua generalità V, è possibile semplificare la scrittura '$\overline{Y_V{}^*}$' data nel paragrafo precedente con '$\overline{Y}$', considerando che «tutti gli insiemi considerati sono sottoinsiemi dell'insieme V e che tutti i complementi sono tali rispetto all'insieme fissato V»[343]:

Definizione 14.36 $\forall Y\left(\overline{Y_V{}^*} = V -^* Y = \overline{Y^*}\right)$

Definizione 14.37 $\forall Y\left(\overline{Y_V} = V - Y = \overline{Y}\right)$

L'insieme $\overline{Y^*}$ è detto "duale forte" di Y, con riferimento all'insieme V. Mentre l'insieme $\overline{Y}$ è detto "duale debole" di Y, con riferimento all'insieme V.

La situazione sopra descritta può essere illustrata ancora mediante uno schema, che riportiamo dalla monografia di Abian[344]:

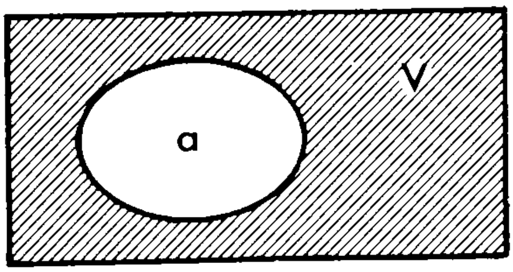


Figura 3

[343] Cfr. Abian, A., *Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, *op. cit.*, p. 126
[344] *Ibidem*, p. 127

dove è possibile assumere $a = Y$ e dunque $\overline{Y}$ come la parte corrispondente alla porzione di V barrata in modo obliquo.

A questo punto si possono valutare alcune condizioni riguardanti gli insiemi-complemento così introdotti:

Teorema 14.34 $\vdash_{ZFU_1} \forall X \left(\overline{\overline{X}} \subseteq X\right)$

Dimostrazione

Bisogna provare che $\forall m \left[\left(m \in \overline{\overline{X}}\right) \rightarrow (m \in X)\right]$, dove X non occorre come una variabile libera. Assumiamo dunque come ipotesi $\left(m \in \overline{\overline{X}}\right)$, dove m non è una variabile libera della formula. Allora sappiamo che $\left(m \in \overline{\overline{X}}\right)$ è uguale per definizione a $\neg\neg(m \in X)$. Per l'assioma 12, regola 3 e 1, varrà inoltre $[\neg\neg(m \in X) \rightarrow (m \in X)]$. Allora per la regola 1 applicata a quest'ultima proposizione e all'ipotesi fatta, seguirà $(m \in X)$. Applicando poi MD*, è possibile dedurre $\left[\left(m \in \overline{\overline{X}}\right) \rightarrow (m \in X)\right]$. Applicando l'assioma 1, regola 3 e 1, si ricava $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \left[\left(m \in \overline{\overline{X}}\right) \rightarrow (m \in X)\right]\right]$, donde $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall m \left[\left(m \in \overline{\overline{X}}\right) \rightarrow (m \in X)\right]\right]$ in virtù della regola 5. Per MP vale quindi che $\forall m \left[\left(m \in \overline{\overline{X}}\right) \rightarrow (m \in X)\right]$, che è riscrivibile come "$\left(\overline{\overline{X}} \subseteq X\right)$" per la definizione 14.6. Per lo stesso ragionamento varrà quindi $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \left(\overline{\overline{X}} \subseteq X\right)\right]$ per l'assioma 1, regola 3 e 1, nonché $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X \left(\overline{\overline{X}} \subseteq X\right)\right]$ per la regola 5. Infine, applicando il *modus ponens*, si potrà dedurre $\forall X \left(\overline{\overline{X}} \subseteq X\right)$.

La relazione inversa $\left(X \subseteq \overline{\overline{X}}\right)$ non è sempre valida. Infatti non è possibile pensare ad una dimostrazione analoga, applicando la legge intuizionista della doppia negazione (cioè: A→A), poiché tale legge non è valida in C_1^*. Così non vale in generale l'eguaglianza $(X = X)$.

Teorema 14.35 $\vdash_{ZFU_1} \forall X \left(X \subseteq \overline{\overline{X^*}}^{*} \right)$

Dimostrazione

Bisogna provare che $\forall m \left[(m \in X) \rightarrow \left(m \in \overline{\overline{X}}\right)\right]$, dove X non occorre come una variabile libera. Assumiamo dunque come ipotesi $(m \in X)$, dove m non è una variabile libera della formula. Allora sappiamo che $\left(m \in \overline{\overline{X}}\right)$ è uguale per definizione a $\neg^{*}\neg^{*}(m \in X)$ e che $[(m \in X) \rightarrow \neg^{*}\neg^{*}(m \in X)]$ per le proprietà della negazione forte esaminate nella prima parte. Allora per MP dall'ipotesi e da quest'ultima proposizione seguirà $\neg^{*}\neg^{*}(m \in X)$. Applicando poi MD*, è possibile dedurre $\left[(m \in X) \rightarrow \left(m \in \overline{\overline{X}}\right)\right]$. Applicando l'assioma 1, regola 3 e 1, si ricava $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \left[(m \in X) \rightarrow \left(m \in \overline{\overline{X}}\right)\right]\right]$, donde $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall m \left[(m \in X) \rightarrow \left(m \in \overline{\overline{X}}\right)\right]\right]$ in virtù della regola 5. Per MP vale quindi che $\forall m \left[\left(m \in \overline{\overline{X}}\right) \rightarrow (m \in X)\right]$, che è riscrivibile come "$\left(X \subseteq \overline{\overline{X^*}}^{*} \right)$" per la definizione 14.6. Per lo stesso ragionamento varrà quindi $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \left(X \subseteq \overline{\overline{X^*}}^{*} \right)\right]$ per l'assioma 1, regola 3 e 1, nonché $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X \left(X \subseteq \overline{\overline{X^*}}^{*} \right)\right]$ per la regola 5. Infine, applicando il *modus ponens*, si potrà dedurre $\forall X \left(X \subseteq \overline{\overline{X^*}}^{*} \right)$.

Così se l'insieme complemento è definito mediante l'uso della negazione forte si ha che $\left(X \subseteq \overline{\overline{X^*}}^{*} \right)$ e, data l'ovvia validità della relazione inversa, cioè $\left(\overline{\overline{X^*}}^{*} \subseteq X \right)$, varrà anche $\left(X = \overline{\overline{X^*}}^{*} \right)$.

9.4.3 L'insieme intersezione

9.4.3.1 Definizione dell'insieme intersezione

Grazie alla formulazione dello schema di comprensione $\boldsymbol{CP}$ è ora possibile passare alla definizione di un altro tipo di insieme, estremamente importante sia per lo sviluppo della porzione classica sia per lo sviluppo della porzione non-classica di ZFU_1.

Discuteremo di seguito dell'insieme-intersezione ovvero dell'insieme costituito dagli elementi comuni a due insiemi dati, la cui esistenza cioè sia stata precedentemente determinata.

Partiremo dunque da una definizione rigorosa di questo concetto, che può essere così espresso:

Definizione 14.38 $(X_1 \cap \ldots \cap X_n) \stackrel{\text{def}}{=} \{m|((m \in X_1) \wedge \ldots \wedge (m \in X_n))\}$

Definizione 14.39 $(X \cap Y) \stackrel{\text{def}}{=} \{m|((m \in X) \wedge (m \in Y))\}$

L'insieme in questione avrà così tutti gli elementi comuni agli insiemi presi in considerazione. Tali elementi potrebbero essere a loro volta classi oppure individui, appartenenti alle due collezioni di riferimento. Ciò risulta garantito dall'uso della terza sorta di variabili, che occorre tanto per insiemi quanto per *Urelemente*.

Normalmente si impiega questo tipo di concetto per individuare quella determinata collezione, che si produce allorché due classi si sovrappongono fra loro, determinando ciò che viene talvolta chiamato "*overlapping*" o "interferenza"[345].

Tale circostanza è molto comune, basti pensare a due proprietà godute da un medesimo individuo della teoria, per poter rappresentare insiemisticamente l'oggetto in questione quale membro dell'intersezione prodotta.

Di norma il concetto di intersezione è utilizzato anche per descrive certe particolari condizioni come ad esempio la caratteristica di due classi di essere tra loro disgiunte. Quest'ultima condizione si verifica di norma quando due classi non

[345] In tal caso la sovrapposizione si determina tra proprietà che non sono incompatibili tra loro.

hanno alcun membro in comune e dunque quando gli elementi dell'una sono privi della proprietà che definisce l'altra.

Come vedremo, questa condizione che viene normalmente indicata tra due classi X e Y semplicemente affermando che $\neg^* \exists m[(m \in X) \wedge (m \in Y)]$, dovrà essere ridefinita qui, ponendo attenzione al fatto che l'operatore logico di negazione potrebbe essere anche quello debole. Ciò fornirebbe una maggiore elasticità costruttiva.

Sarà opportuno notare allora che utilizzeremo il termine "*overlapping*" o "interferente" con riferimento ad un contesto più esteso rispetto a quanto comunemente accade. Di norma infatti si usa dire "interferenti" due classi che non sono tra loro disgiunte. Tuttavia, in virtù del doppio funtore di negazione di cui il nostro sistema dispone, questa circostanza risulterà più ampia e si presenteranno casi più complessi, cui sarà necessario dedicare qualche osservazione.

Il risultato di questa dualità, dovuto appunto all'impiego del funtore di negazione, si riverbererà nel poter dare la nozione di "disgiunzione" e quella di "interferenza" tra classi con un'accezione più particolareggiata, che possa tenere eventualmente in conto l'esigenza di ospitare classi tra loro disgiunte eppure interferenti. Per chiarire tali peculiarità, ci serviremo di alcune definizioni fondamentali, che chiariranno l'occorrenza di tali concetti.

Cominceremo da un teorema abbastanza naturale, dovuto proprio allo schema di assioma $\boldsymbol{CP}$, che garantisce l'esistenza dell'insieme-intersezione sopra definito:

Teorema 14.36[346]

$$\vdash_{ZFU_1} \forall X \exists Z \forall m \left[(m \in Z) \leftrightarrow \left(\left(m \in \bigcup X \right) \wedge \left(\forall Y \big((Y \in X) \rightarrow (m \in Y) \big) \right) \right) \right]$$

Dimostrazione

Questo teorema è diretta conseguenza dello schema di comprensione $\boldsymbol{CP}$, di cui costituisce una precisa istanza.

Introduciamo ora un po' di notazione, utile nel prosieguo del lavoro. Stabiliamo pertanto le seguenti:

[346] L'intersezione è dimostrabile anche a partire da uno schema indebolito, come quello assunto, ed è quindi possibile considerare il principio di comprensione con parametri pienamente ristabilito.

Definizione 14.40

$$\bigcap X = \left\{m \middle| \left[\left(m \in \bigcup X\right) \wedge \left(\forall Y\big((Y \in X) \rightarrow (m \in Y)\big)\right)\right]\right\}$$

Tale definizione non pone limiti al numero di elementi di X e consente così una facile generalizzazione, dal momento che gli insiemi Y potrebbero essere in numero superiore a due, come visto nella definizione 14.38. Ciò consentirà anche di denotare l'intersezione prima vista in modo più semplice e naturale come:

$$\bigcap X = \left\{m \middle| \left[\left(m \in \bigcup X\right) \wedge (m \in Y_1) \wedge \ldots \wedge (m \in Y_n)\right]\right\}$$

o più semplicemente:

$$\bigcap X = \{m|[(m \in Y_1) \wedge \ldots \wedge (m \in Y_n)]\}$$

dove $(Y_1 \in X), \ldots, (Y_n \in X)$.

In tal modo, giacché sappiamo che per un qualunque insieme X, $X = \{m|(m \in X)\}$, possiamo stabilire anche che $\bigcap X = \bigcap(Y|Y \in X)$, cioè a dire:

$$\bigcap X = \bigcap_{Y \in X} Y$$

Varranno pertanto le seguenti eguaglianze:

$$\bigcap X = \bigcap_{Y \in X} Y = \{m|[(m \in Y_1) \wedge \ldots \wedge (m \in Y_n)]\}$$

Dimostriamo ora le seguenti proposizioni:

Teorema 14.37 $\vdash_{ZFU_1} \forall Y[(Y = \{Z\}) \rightarrow (\bigcap\{Z\} = Z)]$

Dimostrazione

Sia $(Y = \{Z\})$ l'ipotesi di partenza, in cui Y non è una variabile libera. Possiamo riscrivere l'ipotesi come $Y = \{\{X|X \in Z\}\}$ e considerare l'intersezione $\bigcap\{Z\}$. Allora, in base alla definizione 14.38, possiamo stabilire che $\bigcap\{Z\} = \{X|(X \in Z) \wedge (X \in Z)\} = \{X|(X \in Z)\}$. Infine, per la definizione 14.14, risulta $\{X|(X \in Z)\} = Z$ e dunque $\bigcap\{Z\} = Z$. Per MD* vale allora $[(Y = \{Z\}) \rightarrow (\bigcap\{Z\} = Z)]$. Inoltre per l'assioma 1, la regola 3 e 1 vale $[(P \rightarrow P) \rightarrow [(Y = \{Z\}) \rightarrow (\bigcap\{Z\} = Z)]]$, da cui $[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall Y[(Y = \{Z\}) \rightarrow (\bigcap\{Z\} = Z)]]$ per la regola 5. Infine per MP si deduce $\forall Y[(Y = \{Z\}) \rightarrow (\bigcap\{Z\} = Z)]$.

Teorema 14.38 $\vdash_{ZFU_1} \forall X \forall Y \exists_1 Z(Z = (X \cap Y))$

Dimostrazione

Ammettiamo che esista un altro insieme Z_1, tale da contenere come membri tutti quegli elementi che sono elementi di X e di Y. Allora varrà che $\forall m[(m \in Z) \leftrightarrow (m \in Z_1)]$ e così, per la definizione di eguaglianza tra insiemi, segue che $(Z = Z_1)$.

Definiamo ora due condizioni di grande importanza per il discorso che qui stiamo formalizzando. Normalmente due insiemi di dicono "disgiunti" se, intuitivamente parlando, essi non condividono alcun elemento ovvero non hanno alcun membro in comune. Per poter esprimere adeguatamente tale condizione è sufficiente in genere adoperare il funtore di negazione classico, mediante cui asserire il fatto che non esiste elemento che sia contemporaneamente membro sia del primo che del secondo insieme.

Nel nostro caso abbiamo però scelto di utilizzare una logica non-classica, di tipo paraconsistente. Tale scelta ci consente di disporre di due tipi di negazione differenti e pertanto è necessario ridefinire il medesimo concetto di disgiunzione tra insiemi in una duplice maniera.

Da una parte infatti possiamo ristabilire la definizione di tipo classico, impiegando la negazione forte.

Dall'altra invece sarà possibile considerare casi di tipo paraconsistente. Allora, ipotizzando l'esistenza di *Urelemente* inconsistenti, è possibile immaginare classi tra loro non completamente disgiunte, anche se queste dovessero essere complementari fra loro. Una simile circostanza non inficerebbe la coerenza generale del sistema o, più correttamente, non sarebbe compromessa per ciò la non-trivialità dell'intero sistema.

Stabiliamo allora di dire che due insiemi X e Y sono fra loro "disgiunti" se e solo se vale la seguente:

Definizione 14.41 $(X \perp^* Y) \overset{\text{def}}{=} \neg^* \exists m[(m \in X) \wedge (m \in Y)]$

Questa definizione fa uso ella negazione forte e pertanto dà luogo ad una condizione di tipo classico.

Facendo uso invece della negazione debole, possiamo definire il seguente diverso concetto:

Definizione 14.42 $(X \perp Y) \overset{\text{def}}{=} \neg \exists m[(m \in X) \wedge (m \in Y)]$

Se considerassimo l'ipotesi $Y = \overline{X}$ e il caso di un individuo inconsistente, tale che $(x \in X) \wedge (x \in Y)$, allora si otterrebbe per l'assioma 14, la regola 3 e il MP anche l'enunciato $\exists m[(m \in X) \wedge (m \in Y)]$. Una contraddizione del tipo $\left[\neg \exists m[(m \in X) \wedge (m \in Y)] \wedge \exists m[(m \in X) \wedge (m \in Y)]\right]$ non costituisce però all'interno di ZFU_1 un problema insormontabile, in quanto esso sarebbe in grado di reggere un'inconsistenza di questo tipo.

Possiamo a questo punto fissare le seguenti proposizioni:

Teorema 14.39 $\vdash_{ZFU_1} \forall X \forall Y\left[(X \perp^* Y) \rightarrow \left((X \cap Y) = \emptyset\right)\right]$

Dimostrazione

Assumiamo per ipotesi che $(X \perp^* Y)$, dove X e Y non sono due variabili libere. Allora sarà vero per la definizione 14.41 che $\neg^* \exists m[(m \in X) \wedge (m \in Y)]$, ossia che $\forall m[m \notin \{n | (n \in X) \wedge (n \in Y)\}]$. Ciò significa dunque che l'intersezione individuata tra X e Y sarà priva di elementi e cioè che $(X \cap Y) = \emptyset$. Così per

MD* varrà $\big[(X \perp^{*} Y) \rightarrow \big((X \cap Y) = \emptyset\big)\big]$. Allora per l'assioma 1, regola 3 e 1 varrà anche $\Big[(P \rightarrow P) \rightarrow \big[(X \perp^{*} Y) \rightarrow \big((X \cap Y) = \emptyset\big)\big]\Big]$, donde $\Big[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X \forall Y \big[(X \perp^{*} Y) \rightarrow \big((X \cap Y) = \emptyset\big)\big]\Big]$ per doppia applicazione della regola 5. Infine per MP seguirà che $\forall X \forall Y \big[(X \perp^{*} Y) \rightarrow \big((X \cap Y) = \emptyset\big)\big]$.

Il teorema asserisce un fatto molto importante e cioè che l'intersezione di due insiemi fortemente disgiunti è vuota e che dunque essa non potrà contenere *Urelemente* inconsistenti rispetto alle proprietà che essi esprimono. Il converso di questo teorema risulta altrettanto vero:

Teorema 14.40 $\vdash_{ZFU_1} \forall X \forall Y \big[\big((X \cap Y) = \emptyset\big) \rightarrow (X \perp^{*} Y)\big]$

Dimostrazione

Assumiamo come ipotesi $\big((X \cap Y) = \emptyset\big)$, dove X e Y non sono variabili libere. Allora, in base all'assioma $\boldsymbol{O}$, vale che $\forall m \neg^{*}(m \in \emptyset)$ ed essendo $\emptyset = (X \cap Y)$ vale anche che $\forall m \neg^{*}[m \in (X \cap Y)]$, cioè $\neg^{*} \exists m[m \in (X \cap Y)]$. Così è possibile dedurre anche $\neg^{*} \exists m[(m \in X) \wedge (m \in Y)]$. Per la definizione 14.46 possiamo quindi riscrivere "$\neg^{*} \exists m[(m \in X) \wedge (m \in Y)]$" come "$(X \perp^{*} Y)$" e, applicando MD*, ottenere $\big[\big((X \cap Y) = \emptyset\big) \rightarrow (X \perp^{*} Y)\big]$. Per generalizzare, applichiamo l'assioma 1, regola 3 e 1, ricavando $\Big[(P \rightarrow P) \rightarrow \big[\big((X \cap Y) = \emptyset\big) \rightarrow (X \perp^{*} Y)\big]\Big]$, da cui $\Big[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X \forall Y \big[\big((X \cap Y) = \emptyset\big) \rightarrow (X \perp^{*} Y)\big]\Big]$ in virtù della regola 5 utilizzata due volte di seguito. Infine per MP deduciamo $\forall X \forall Y \big[\big((X \cap Y) = \emptyset\big) \rightarrow (X \perp^{*} Y)\big]$.

Teorema 14.41 $\vdash_{ZFU_1} \forall X \big[\big(X \cap \overline{X^{*}}\big) = \emptyset\big]$

Dimostrazione

Sia $m \in \big(X \cap \overline{X^{*}}\big)$ la nostra ipotesi, in cui non occorrono variabili libere. Allora avremo che per alcun m vale $\Big((m \in X) \wedge \big(m \in \overline{X^{*}}\big)\Big)$, in virtù della definizione di complemento forte e così $\forall m \neg^{*} \Big[\Big((m \in X) \wedge \big(m \in \overline{X^{*}}\big)\Big)\Big]$. Così $\forall m \neg^{*}\big[m \in \big(X \cap \overline{X^{*}}\big)\big]$ e dunque l'intersezione $\big(X \cap \overline{X^{*}}\big)$ risulterà priva di elementi, cioè eguale a $\emptyset$. Per l'assioma 1, regola 3 e 1, varrà allora che $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \left[\left(X \cap \overline{X^*}\right) = \emptyset\right]\right]$, donde $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X\left[\left(X \cap \overline{X^*}\right) = \emptyset\right]\right]$ per la regola 5 e $\forall X\left[\left(X \cap \overline{X^*}\right) = \emptyset\right]$ per MP.

È possibile stabilire a questo punto che la validità del seguente:

Teorema 14.42 $\vdash_{ZFU_1} \forall X\left[\left(\left(X \cap \overline{X^*}\right) = \emptyset\right) \rightarrow (X \perp^* X)\right]$

Dimostrazione

Assumiamo come ipotesi $\left(X \cap \overline{X^*}\right) = \emptyset$, dove X non è una variabile libera. Essendo vero per l'assioma $\boldsymbol{O}$ che $\forall m \neg^*(m \in \emptyset)$, allora dall'ipotesi segue anche che $\forall m \neg^*\left[m \in \left(X \cap \overline{X^*}\right)\right]$ ovvero $\neg^* \exists m\left[m \in \left(X \cap \overline{X^*}\right)\right]$ e dunque $\neg^* \exists m\left[(m \in X) \wedge \left(m \in \overline{X^*}\right)\right]$. Per la definizione 14.46 possiamo allora riscrivere "$\neg^* \exists m\left[(m \in X) \wedge \left(m \in \overline{X^*}\right)\right]$" come "$X \perp^* X$". Così per MD* si dedurrà che $\left[\left(\left(X \cap \overline{X^*}\right) = \emptyset\right) \rightarrow (X \perp^* X)\right]$, donde $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \left[\left(\left(X \cap \overline{X^*}\right) = \emptyset\right) \rightarrow (X \perp^* X)\right]\right]$ per l'assioma 1, regola 3 e 1 e $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X\left[\left(\left(X \cap \overline{X^*}\right) = \emptyset\right) \rightarrow (X \perp^* X)\right]\right]$ per la regola 5. Infine $\forall X\left[\left(\left(X \cap \overline{X^*}\right) = \emptyset\right) \rightarrow (X \perp^* X)\right]$ per MP.

Passiamo ora ad alcuni concetti circa la relazione di disgiunzione debole tra insiemi. In particolare osserveremo ora alcuni possibili casi, che potrebbero risultare rilevanti per il nostro studio. Se infatti la teoria disponesse di *Urelemente* e se questi fossero inconsistenti, almeno in parte, allora potrebbe accadere che un insieme contenente tali oggetti potrebbe non essere totalmente disgiunto ad esempio dal proprio complemento (debole). Questo in particolare sarà il caso più interessante dal nostro punto di vista, al quale dedicheremo di seguito alcune osservazioni.

Cominciamo col fissare un po' di notazione utile ad esprimere casi di questo tipo. Normalmente, in teorie di tipo classico, è sufficiente considerare due casi:

1) due insiemi sono disgiunti;

2) due insiemi sono interferenti.

Nel primo caso due insiemi non hanno elementi in comune e – come mostrato – la loro intersezione risulterà sempre fortemente vuota.

Nel secondo caso invece, si dà la possibilità che esista almeno un elemento membro di entrambe le classi e dunque membro della loro intersezione. In tal caso – come abbiamo già detto – i due insiemi si dicono "interferenti" o "*overlapped*". È conseguenza però della logica classica verificare che per due insiemi qualunque, l'*overlapping* non può verificarsi tra quel determinato insieme ed il suo complemento, la cui intersezione ricadrà sempre all'interno del caso 1).

Cambiando tuttavia la logica sottostante ed indebolendo il calcolo logico come fatto per ZFU_1, è possibile dar spazio a nuovi casi, scartati *a priori* da quelle teorie basate su sistemi deduttivi troppo vincolanti dal punto di vista ontologico.

Così, adottando come logica sottostante C_1^*, è possibile poter discutere il caso in cui si diano oggetti non-insiemistici aventi caratteristiche inconsistenti.

Ammettiamo dunque per ipotesi che per un dato insieme X vi sia un suo elemento contraddittorio. Allora ci pare ragionevole ammettere che X non sarà classicamente disgiunto dal proprio complemento, comportando ciò una contraddizione.

Se x è un tale oggetto, si verificherà che $[(x \in X) \wedge (x \in \overline{X})]$ e cioè che $[x \in (X \cap \overline{X})]$. Applicando l'assioma 14, la regola 3 e la regola 1, risulterà dunque che $\exists x[x \in (X \cap \overline{X})]$, donde $\exists x[(x \in X) \wedge (x \in \overline{X})]$. Tale proposizione contraddice esplicitamente la condizione di disgiunzione $(X \perp \overline{X})$, dal momento che, per la definizione 14.47, essa risulterebbe essere un'abbreviazione di "$\neg\exists x[(x \in X) \wedge (x \in \overline{X})]$".

In tal caso allora, indicheremo l'interferenza inconsistente riscontrata, sfruttando il termine stesso con cui normalmente si esprime l'intersezione. Un'intersezione Z è infatti una funzione insiemistica del tipo:

$$Z = (X \cap Y) = f(X, Y)$$

cioè a dire Z è un termine funzionale, che aggrega in un unico insieme gli elementi comuni a X e a Y. Allora:

$$Z = (X \cap Y) = f(X, Y) = \{m_2, \dots, m_k\}$$

se $m_2, \dots, m_k$ sono gli elementi appartenenti tanto a X quanto a Y.

Se invece non vi è alcun elemento di questo tipo, che ricada dunque nell'intersezione Z, si ha:

$$Z = (X \cap Y) = f(X, Y) = \{\ \ \} = \emptyset$$

In sostanza se il termine funzionale in questione non dipende dagli elementi di X e Y che sono comuni ad entrambi, allora il termine in questione può considerarsi costante, in quanto esso non dipende né dagli elementi in X né da quelli in Y, assumendo sempre il valore insiemistico nullo, rappresentato dalla classe fortemente vuota.

Generalizzando questa osservazione, ci sembra di poter inquadrare i fatti in questo modo:

1) $f^0 = f^0(X_1, \dots, X_n) = (X_1 \cap \dots \cap X_n) = \emptyset$;

2) $f^1 = f^1(X_i, X_i) = (X_i \cap X_i) = X_i$;

3) $f^2 = f^2(X_1, X_2) = (X_1 \cap X_2)$;

…………………………………………………………………...

4) $f^{n+1} = f^2(f^n(X_1, \dots, X_n), X_{n+1}) = \big((X_1 \cap \dots \cap X_n) \cap X_{n+1}\big) = (X_1 \cap \dots \cap X_{n+1})$.

Il termine dato dall'intersezione è allora definito in relazione agli elementi comuni agli insiemi considerati.

Nel caso-limite in cui gli insiemi esaminati siano fra loro fortemente disgiunti, allora il termine in questione è costante, in quanto vuoto a prescindere dal tipo di collezioni considerate.

Mentre nel caso di insiemi non fortemente disgiunti potrebbe essere che la loro intersezione non risulti fortemente vuota. Possiamo indicare tale condizione affermando che:

Teorema 14.43 $\vdash_{ZFU_1} \forall X \forall Y\big[(X \perp Y) \rightarrow [(X \cap Y) = f(X,Y)]\big]$

Dimostrazione

Sia per ipotesi $(X \perp Y)$, in cui non occorrono variabili libere. Allora per la definizione 14.47 vale per ipotesi che $\neg\exists m[(m \in X)\wedge(m \in Y)]$. Così i casi da esaminare si riducono alla presenza o meno di *Urelemente* eventualmente inconsistenti. Se gli elementi m sono tutti insiemi, allora in base alla formulazione dell'assioma $\boldsymbol{C}$, essi risultano essere consistenti e dunque dall'ipotesi seguirebbe che $(X \cap Y) = \emptyset = f^0(X,Y)$. Se invece gli m sono *Urelemente*, allora occorre distinguere due casi: nel primo gli individui sono consistenti; in tal caso varranno le considerazioni fatte a proposito delle classi. Nel secondo invece si può ammettere che alcuni di essi siano inconsistenti con riferimento alle classi considerate. In tal caso allora l'intersezione sarebbe non-vuota, in contraddizione con l'ipotesi, e dipendente dagli elementi in X e in Y, cioè $[(X \cap Y) = f^2(X,Y)]$. In ogni caso quindi vale banalmente che $[(X \cap Y) = f(X,Y)]$. Applicando MD*, si può a questo punto dedurre $\big[(X \perp Y) \rightarrow [(X \cap Y) = f(X,Y)]\big]$, donde $\Big[(P{\rightarrow}P){\rightarrow}\big[(X \perp Y) \rightarrow [(X \cap Y) = f(X,Y)]\big]\Big]$ per l'assioma 1, regola 3 e 1 e $\Big[(P{\rightarrow}P){\rightarrow}\forall X \forall Y\big[(X \perp Y) \rightarrow [(X \cap Y) = f(X,Y)]\big]\Big]$ per la regola 5 impiegata due volte. Infine si ricava $\forall X \forall Y\big[(X \perp Y) \rightarrow [(X \cap Y) = f(X,Y)]\big]$ per MP.

Questo teorema mostra come in presenza di qualche *Urelement* inconsistente appartenente tanto a X quanto a Y, debolmente disgiunti per ipotesi, allora il termine costituito dall'intersezione dipenderà proprio da quei determinati elementi comuni ad entrambe le collezioni X e Y e non sarà generalmente eguagliabile alla collezione fortemente vuota. Se invece non dovessero esservi individui primitivi di questo tipo, allora il termine risulterà costantemente vuoto, indipendentemente dagli insiemi su cui si considera l'intersezione[347].

Relativizzando tale discorso al caso di studio qui considerato, possiamo prendere in esame un insieme X ed il suo complemento debole $\overline{X}$. Allora varrà che

[347] Avremmo potuto impiegare forse una costante come quella per l'insieme debolmente vuoto al fine di sottolineare l'interferenza appena considerata. Tuttavia ci pare maggiormente informativo il tipo di notazione qui adottata, per il semplice fatto che essa «rende noti» gli insiemi coinvolti nella situazione di interferenza e dunque rende possibile rintracciare anche quelle eventuali proprietà, che vengono a loro volta impegnate in una situazione di sovrapposizione.

$\left(X \perp \overline{X}\right) = \left(X \cap \overline{X}\right) = f\left(X, \overline{X}\right)$, dove l'intersezione consente di poter esaminare casi in cui due insiemi normalmente disgiunti senza eccezioni possano invece risultare interferenti rispetto a qualche elemento primitivo. Ciò non forzerebbe affatto la teoria ad ammetterne uno poiché, qualora non ne esistessero, risulterebbe $f\left(X, \overline{X}\right) = \left(X \cap \overline{X}\right) = \emptyset = \left(X \perp \overline{X}\right)$.

9.4.3.2 Alcune proprietà dell'insieme intersezione

Proveremo di seguito alcuni teoremi concernenti le proprietà usuali degli insiemi-intersezione. Mostreremo come per essi siano valide alcune importanti leggi, riguardanti le collezioni che condividono alcuni dei propri elementi.

Cominciamo con l'osservare che:

Teorema 14.44 $\vdash_{ZFU_1} \forall X(\bigcap X \subseteq \bigcup X)$

Dimostrazione

Dobbiamo dunque provare che $\forall m[(m \in \bigcap X) \rightarrow (m \in \bigcup X)]$, dove X non è una variabile libera. Ammettiamo dunque per ipotesi che $(m \in \bigcap X)$, dove m non è una variabile libera. Allora $[(m \in \bigcap X) \rightarrow (m \in \bigcap\{Y|Y \in X\})]$ e dunque per MP $[m \in \bigcap\{Y|Y \in X\}]$. Inoltre vale che $\Big[(m \in \bigcap\{Y|Y \in X\}) \rightarrow \Big((m \in \bigcup X) \wedge \forall Y\big((Y \in X) \rightarrow (m \in Y)\big)\Big)\Big]$. Così applicando ancora la regola 1 si ricava $\big[(m \in \bigcup X) \wedge \forall Y\big((Y \in X) \rightarrow (m \in Y)\big)\big]$. Per l'assioma 3, la regola 3 e 1, si ottiene $(m \in \bigcup X)$. Così per MD* è possibile dedurre dall'ipotesi che $[(m \in \bigcap X) \rightarrow (m \in \bigcup X)]$ e per l'assioma 1, regola 3 e 1, $\big[(P \rightarrow P) \rightarrow [(m \in \bigcap X) \rightarrow (m \in \bigcup X)]\big]$. Applicando di seguito la regola 5 e la regola 1, si deduce prima $\big[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall m[(m \in \bigcap X) \rightarrow (m \in \bigcup X)]\big]$ e infine $\forall m[(m \in \bigcap X) \rightarrow (m \in \bigcup X)]$. Per la definizione 14.6 possiamo riscrivere "$\forall m[(m \in \bigcap X) \rightarrow (m \in \bigcup X)]$" come "$[\bigcap X \subseteq \bigcup X]$". A questo punto, dato che la X non occorre come variabile libera nella formula per ipotesi, si potrà reiterare il medesimo ragionamento, applicando l'assioma 1, regola 3 e 1, ricavando $\big[(P \rightarrow P) \rightarrow [\bigcap X \subseteq \bigcup X]\big]$. Per la regola 5 si ha inoltre che $\big[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X[\bigcap X \subseteq \bigcup X]\big]$ e per MP $\forall X[\bigcap X \subseteq \bigcup X]$.

Possiamo allora provare il seguente:

Teorema 14.45 $\vdash_{ZFU_1} (\bigcap \emptyset = \emptyset)$

Dimostrazione

Sappiamo che $[\bigcap \emptyset \subseteq \bigcup \emptyset]$ per il teorema 14.44, assioma 13, regola 3 e 1 e inoltre sappiamo anche che $(\bigcup \emptyset = \emptyset)$ per il teorema 14.24. Quindi sappiamo anche che $[\bigcap \emptyset \subseteq \emptyset]$.

Dimostriamo ora alcune proprietà canoniche, rispettivamente dette "idempotenza", "commutatività", "associatività"

Teorema 14.46 $\vdash_{ZFU_1} \forall X \forall Y[(X \cap X) = X]$

Dimostrazione

Dobbiamo provare dunque che $\forall m\big[\big(m \in (X \cap X)\big) \leftrightarrow (m \in X)\big]$, dove X non occorre come variabile libera. Procederemo allora dimostrando le due parti essenziali dell'enunciato.
$(\rightarrow)$ Sia $\big(m \in (X \cap X)\big)$ la nostra ipotesi, in cui m non occorre come variabile libera. Allora $\big[\big(m \in (X \cap X)\big) \rightarrow \big((m \in X) \wedge (m \in X)\big)\big]$ e dunque per MP $\big((m \in X) \wedge (m \in X)\big)$. Ma $\big[\big((m \in X) \wedge (m \in X)\big) \rightarrow (m \in X)\big]$ per l'assioma 3 e la regola 3 e dunque per MP si potrà dedurre $(m \in X)$. Così per MD* varrà $\big[\big(m \in (X \cap X)\big) \rightarrow (m \in X)\big]$.
$(\leftarrow)$ Sia $(m \in X)$ la nostra ipotesi, in cui m non occorre come variabile libera. Allora $\big[(m \in X) \rightarrow \big((m \in X) \wedge (m \in X)\big)\big]$ per l'idempotenza dell'operatore '$\wedge$'. Per MP vale allora che $\big((m \in X) \wedge (m \in X)\big)$, cioè $[m \in (X \cap X)]$. Così per MD* $\big[(m \in X) \rightarrow \big(m \in (X \cap X)\big)\big]$.
$(\leftrightarrow)$ Dalla definizione dell'operatore '$\leftrightarrow$' possiamo quindi ricavare $\big[\big(m \in (X \cap X)\big) \leftrightarrow (m \in X)\big]$. Per l'assioma 1, regola 3 e 1, varrà anche $\Big[(P \rightarrow P) \rightarrow \big[\big(m \in (X \cap X)\big) \leftrightarrow (m \in X)\big]\Big]$, donde $\Big[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall m\big[\big(m \in (X \cap X)\big) \leftrightarrow (m \in X)\big]\Big]$ per la regola 5. Per la regola 1 invece si avrà $\forall m\big[\big(m \in (X \cap X)\big) \leftrightarrow (m \in X)\big]$, che possiamo riscrivere come "$[(X \cap X) = X]$" per la definizione di eguaglianza. Ancora per lo stesso ragionamento poc'anzi applicato, varrà $\big[(P \rightarrow P) \rightarrow [(X \cap X) = X]\big]$ per l'assioma 1, regola 3 e 1, nonché $\big[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X[(X \cap X) = X]\big]$ in virtù della regola 5. Per MP infine di dedurrà $\forall X[(X \cap X) = X]$.

Teorema 14.47 $\vdash_{ZFU_1} \forall X \forall Y[(X \cap Y) = (Y \cap X)]$

Dimostrazione

Dobbiamo provare dunque che $\forall m[(m \in (X \cap Y)) \leftrightarrow (m \in (Y \cap X))]$, dove X e Y non occorrono come variabili libere. Procederemo anche qui dimostrando le due parti essenziali dell'enunciato.

($\rightarrow$) Sia $(m \in (X \cap Y))$ la nostra ipotesi, in cui m non occorre come variabile libera. Allora $[(m \in (X \cap Y)) \rightarrow ((m \in X) \wedge (m \in Y))]$ e dunque per MP $((m \in X) \wedge (m \in Y))$. Ma $[((m \in X) \wedge (m \in Y)) \rightarrow ((m \in Y) \wedge (m \in X))]$ per la commutatività dell'operatore '$\wedge$' e dunque per MP si dedurrà $((m \in Y) \wedge (m \in X))$ e dunque $[m \in (Y \cap X)]$. Così per MD* varrà $[(m \in (X \cap Y)) \rightarrow (m \in (Y \cap X))]$.

($\leftarrow$) Sia $(m \in (Y \cap X))$ la nostra ipotesi, in cui m non occorre come variabile libera. Allora $[(m \in (Y \cap X)) \rightarrow ((m \in Y) \wedge (m \in X))]$ e per MP $((m \in Y) \wedge (m \in X))$. Inoltre, sempre per la commutatività dell'operatore '$\wedge$', varrà che $[((m \in Y) \wedge (m \in X)) \rightarrow ((m \in X) \wedge (m \in Y))]$, donde $((m \in X) \wedge (m \in Y))$ per MP, cioè $[m \in (X \cap Y)]$. Così per MD* varrà $[(m \in (Y \cap X)) \rightarrow (m \in (X \cap Y))]$.

($\leftrightarrow$) Dalla definizione dell'operatore '$\leftrightarrow$' possiamo quindi ricavare $[(m \in (X \cap Y)) \leftrightarrow (m \in (Y \cap X))]$. Per l'assioma 1, regola 3 e 1, varrà anche $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow [(m \in (X \cap Y)) \leftrightarrow (m \in (Y \cap X))]\right]$, donde $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall m[(m \in (X \cap Y)) \leftrightarrow (m \in (Y \cap X))]\right]$ per la regola 5. Per la regola 1 invece si avrà $\forall m[(m \in (X \cap Y)) \leftrightarrow (m \in (Y \cap X))]$, che possiamo riscrivere come "$[(X \cap Y) = (Y \cap X)]$" per la definizione di eguaglianza. Ancora per lo stesso ragionamento poc'anzi applicato, varrà $[(P \rightarrow P) \rightarrow [(X \cap Y) = (Y \cap X)]]$ per l'assioma 1, regola 3 e 1, nonché $[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X \forall Y[(X \cap Y) = (Y \cap X)]]$ in virtù della regola 5 applicata due volte. Per MP infine di dedurrà $\forall X \forall Y[(X \cap Y) = (Y \cap X)]$.

Teorema 14.48 $\vdash_{ZFU_1} \forall X \forall Y \forall Z[((X \cap Y) \cap Z) = (X \cap (Y \cap Z))]$

Dimostrazione

Dobbiamo dunque dimostrare che $\forall m\Big[[m \in ((X \cap Y) \cap Z)] \leftrightarrow [m \in (X \cap (Y \cap Z))]\Big]$, dove X, Y e Z non occorrono come variabili libere. Suddivideremo la dimostrazione nelle sue parti fondamentali.

($\rightarrow$) Sia $\big(m \in ((X \cap Y) \cap Z)\big)$ la nostra ipotesi, in cui m non occorre come variabile libera. Allora $\Big[\big(m \in ((X \cap Y) \cap Z)\big) \rightarrow \big((m \in (X \cap Y)) \wedge (m \in Z)\big)\Big]$ e per MP $\big((m \in (X \cap Y)) \wedge (m \in Z)\big)$. Così per l'assioma 3, regola 3 e 1 vale $\big(m \in (X \cap Y)\big)$ e per l'assioma 4, regola 3 e 1 $(m \in Z)$. Ma $\big[(m \in (X \cap Y)) \rightarrow ((m \in X) \wedge (m \in Y))\big]$, donde $\big((m \in X) \wedge (m \in Y)\big)$ per MP. Di qui, ancora per gli assiomi 3 e 4 e le regole 3 e 1 applicate rispettivamente alla formula $\big((m \in X) \wedge (m \in Y)\big)$, seguirà $(m \in X)$ e $(m \in Y)$. Così per l'assioma 5, regola 3 e 1 applicata due volte, si dedurrà $[(m \in Y) \wedge (m \in Z)]$, ossia $[m \in (Y \cap Z)]$. Inoltre per l'assioma 5, regola 3 e 1 applicata due volte segue $\big[(m \in X) \wedge (m \in (Y \cap Z))\big]$, cioè $\big[m \in (X \cap (Y \cap Z))\big]$. Quindi per MD* $\Big[\big(m \in ((X \cap Y) \cap Z)\big) \rightarrow \big(m \in (X \cap (Y \cap Z))\big)\Big]$.

($\leftarrow$) Sia $\big(m \in (X \cap (Y \cap Z))\big)$ la nostra ipotesi, in cui m non occorre come variabile libera. Allora, ragionando analogamente al caso precedente, $\Big[\big(m \in (X \cap (Y \cap Z))\big) \rightarrow \big((m \in X) \wedge (m \in (Y \cap Z))\big)\Big]$ e per MP $\big((m \in X) \wedge (m \in (Y \cap Z))\big)$. Così per l'assioma 3, regola 3 e 1 vale $(m \in X)$ e per l'assioma 4, regola 3 e 1 $\big(m \in (Y \cap Z)\big)$. Ma $\big[(m \in (Y \cap Z)) \rightarrow ((m \in Y) \wedge (m \in Z))\big]$, donde $\big((m \in Y) \wedge (m \in Z)\big)$ per MP. Di qui, ancora per gli assiomi 3 e 4 e le regole 3 e 1 applicate rispettivamente alla formula $\big((m \in Y) \wedge (m \in Z)\big)$, seguirà $(m \in Y)$ e $(m \in Z)$. Così per l'assioma 5, la regola 3 e 1 applicata due volte, si dedurrà $[(m \in X) \wedge (m \in Y)]$, ossia $[m \in (X \cap Y)]$. Inoltre per l'assioma 5, regola 3 e 1 applicata due volte segue $\big[(m \in (X \cap Y)) \wedge (m \in Z)\big]$, cioè $\big[m \in ((X \cap Y) \cap Z)\big]$. Quindi per MD* $\Big[\big(m \in (X \cap (Y \cap Z))\big) \rightarrow \big(m \in ((X \cap Y) \cap Z)\big)\Big]$.

($\leftrightarrow$) Dalla definizione dell'operatore '$\leftrightarrow$' possiamo quindi ricavare $\Big[\big(m \in ((X \cap Y) \cap Z)\big) \leftrightarrow \big(m \in (X \cap (Y \cap Z))\big)\Big]$. Per l'assioma 1, regola 3 e 1, varrà anche $\Big[(P \rightarrow P) \rightarrow \Big[\big(m \in ((X \cap Y) \cap Z)\big) \rightarrow \big(m \in (X \cap (Y \cap Z))\big)\Big]\Big]$, donde $\Big[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall m\Big[\big(m \in ((X \cap Y) \cap Z)\big) \rightarrow \big(m \in (X \cap (Y \cap Z))\big)\Big]\Big]$ per la regola 5. Per la regola 1 invece si avrà $\forall m\left[\left(m \in ((X \cap Y) \cap Z)\right) \to \left(m \in (X \cap (Y \cap Z))\right)\right]$, che possiamo riscrivere come "$\left[((X \cap Y) \cap Z) = (X \cap (Y \cap Z))\right]$" per la definizione di eguaglianza. Ancora per lo stesso ragionamento poc'anzi applicato, varrà $\left[(P \to P) \to \left[((X \cap Y) \cap Z) = (X \cap (Y \cap Z))\right]\right]$ per l'assioma 1, regola 3 e 1, nonché $\left[(P \to P) \to \forall X \forall Y \forall Z\left[\left(((X \cap Y) \cap Z)\right) = (X \cap (Y \cap Z))\right]\right]$ in virtù della regola 5 applicata tre volte. Per MP infine di dedurrà $\forall X \forall Y \forall Z\left[\left(((X \cap Y) \cap Z)\right) = (X \cap (Y \cap Z))\right]$.

Proviamo ora alcune ulteriori conseguenze circa l'insieme complemento debole.

Teorema 14.49 $\vdash_{ZFU_1} \forall X\left[(X \cap \overline{X}) = (\overline{X} \cap X)\right]$

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare che $\forall m\left[\left(m \in (X \cap \overline{X})\right) \leftrightarrow \left(m \in (\overline{X} \cap X)\right)\right]$, dove X non è una variabile libera. Procederemo scomponendo la dimostrazione nei suoi tratti fondamentali.

($\to$) Sia $\left(m \in (X \cap \overline{X})\right)$ la nostra ipotesi, in cui m non compare come variabile libera. Allora $\left[\left(m \in (X \cap \overline{X})\right) \to \left((m \in X) \wedge (m \in \overline{X})\right)\right]$. Così per MP $\left((m \in X) \wedge (m \in \overline{X})\right)$. Per gli assiomi 3 e 4 e per le regole 3 e 1 applicate rispettivamente due volte, risulterà $(m \in X)$ e $(m \in \overline{X})$. Per l'assioma 5, regole 3 e 1 applicate due volte varrà poi $\left[(m \in \overline{X}) \wedge (m \in X)\right]$, cioè $\left(m \in (\overline{X} \cap X)\right)$. Così per MD* seguirà $\left[\left(m \in (X \cap \overline{X})\right) \to \left(m \in (\overline{X} \cap X)\right)\right]$.

($\leftarrow$) Sia $\left(m \in (\overline{X} \cap X)\right)$ la nostra ipotesi, in cui m non compare come variabile libera. Allora $\left[\left(m \in (\overline{X} \cap X)\right) \to \left((m \in \overline{X}) \wedge (m \in X)\right)\right]$. Così per MP $\left((m \in \overline{X}) \wedge (m \in X)\right)$. Per gli assiomi 3 e 4 e per le regole 3 e 1 applicate rispettivamente due volte, risulterà $(m \in \overline{X})$ e $(m \in X)$. Per l'assioma 5, regole

3 e 1 applicate due volte varrà poi $[(m \in X) \wedge (m \in \overline{X})]$, cioè $\left(m \in (X \cap \overline{X})\right)$. Così per MD* seguirà $\left[\left(m \in (\overline{X} \cap X)\right) \rightarrow \left(m \in (X \cap \overline{X})\right)\right]$.

($\leftrightarrow$) Per la definizione dell'operatore '$\leftrightarrow$' varrà allora $\left[\left(m \in (X \cap \overline{X})\right) \leftrightarrow \left(m \in (\overline{X} \cap X)\right)\right]$. Inoltre per l'assioma 1, regola 3 e 1 si dedurrà $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \left[\left(m \in (X \cap \overline{X})\right) \leftrightarrow \left(m \in (\overline{X} \cap X)\right)\right]\right]$, donde $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall m \left[\left(m \in (X \cap \overline{X})\right) \leftrightarrow \left(m \in (\overline{X} \cap X)\right)\right]\right]$ per la regola 5. Infine per la regola 1 si otterrà $\forall m \left[\left(m \in (X \cap \overline{X})\right) \leftrightarrow \left(m \in (\overline{X} \cap X)\right)\right]$, che possiamo riscrivere come "$[(X \cap \overline{X}) = (\overline{X} \cap X)]$" per la definizione di eguaglianza adottata in ZFU_1. L'ultimo passo da compiere è quello di generalizzare sulla variabile X. Procedendo in modo analogo a quanto fatto poc'anzi, applicheremo l'assioma 1, regola 3 e 1, ottenendo $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow [(X \cap \overline{X}) = (\overline{X} \cap X)]\right]$, donde $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X [(X \cap \overline{X}) = (\overline{X} \cap X)]\right]$ per la regola 5 e $\forall X [(X \cap \overline{X}) = (\overline{X} \cap X)]$ per la regola 1.

Teorema 14.50 $\vdash_{ZFU_1} \forall X [(\overline{X} \cap \overline{X}) = \overline{X}]$

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare che $\forall m \left[\left(m \in (\overline{X} \cap \overline{X})\right) \leftrightarrow (m \in \overline{X})\right]$, dove X non è una variabile libera. Procederemo scomponendo la dimostrazione nei suoi tratti fondamentali.

($\leftarrow$) Sia $\left(m \in (\overline{X} \cap \overline{X})\right)$ la nostra ipotesi, in cui m non compare come variabile libera. Allora $\left[\left(m \in (\overline{X} \cap X)\right) \rightarrow \left((m \in \overline{X}) \wedge (m \in \overline{X})\right)\right]$. Così per MP $\left((m \in \overline{X}) \wedge (m \in \overline{X})\right)$. Per l'assioma 4 e per la regola 3 e 1 si dedurrà $(m \in \overline{X})$ e per MD* $\left[\left(m \in (\overline{X} \cap \overline{X})\right) \rightarrow (m \in \overline{X})\right]$.

($\leftarrow$) Sia $(m \in \overline{X})$ la nostra ipotesi, in cui m non compare come variabile libera. Allora $\left[(m \in \overline{X}) \rightarrow \left((m \in \overline{X}) \wedge (m \in \overline{X})\right)\right]$ per l'idempotenza dell'operatore '$\wedge$' e così per MP $\left((m \in \overline{X}) \wedge (m \in \overline{X})\right)$, cioè $\left(m \in (\overline{X} \cap \overline{X})\right)$. Per MD* seguirà quindi che $\left[(m \in \overline{X}) \rightarrow \left(m \in (\overline{X} \cap \overline{X})\right)\right]$.

($\leftrightarrow$) Per la definizione dell'operatore '$\leftrightarrow$' varrà allora $\left[\left(m \in (\overline{X} \cap \overline{X})\right) \leftrightarrow (m \in \overline{X})\right]$. Inoltre per l'assioma 1, regola 3 e 1 si dedurrà $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \left[\left(m \in (\overline{X} \cap \overline{X})\right) \leftrightarrow (m \in \overline{X})\right]\right]$, donde $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall m \left[\left(m \in (\overline{X} \cap \overline{X})\right) \leftrightarrow (m \in \overline{X})\right]\right]$ per la regola 5. Infine per la regola 1 si otterrà $\forall m \left[\left(m \in (\overline{X} \cap \overline{X})\right) \leftrightarrow (m \in \overline{X})\right]$, che possiamo riscrivere come "$[(\overline{X} \cap \overline{X}) = \overline{X}]$" per la definizione di eguaglianza adottata in ZFU_1. L'ultimo passo da compiere è quello di generalizzare sulla variabile X. Applicando allora l'assioma 1, regola 3 e 1, si ottiene $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow [(\overline{X} \cap \overline{X}) = \overline{X}]\right]$, donde $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X[(\overline{X} \cap \overline{X}) = \overline{X}]\right]$ per la regola 5 e $\forall X[(\overline{X} \cap \overline{X}) = \overline{X}]$ per MP.

Dimostriamo di seguito due importanti teoremi sul concetto di complementazione ottenuto mediante l'uso dell'operatore di negazione forte:

Teoremi 14.51 $\vdash_{ZFU_1} \forall X \forall Y \left[(X \cap Y) = \overline{(\overline{X^*} \cup \overline{Y^*})}^*\right]$

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare che $\forall m \left[(m \in (X \cap Y)) \leftrightarrow \left(m \in \overline{(\overline{X^*} \cup \overline{Y^*})}^*\right)\right]$, dove X e Y non occorrono come variabili libere. Scomporremo la dimostrazione nelle sue parti fondamentali.

($\rightarrow$) Sia $(m \in (X \cap Y))$ la nostra ipotesi, in cui m non occorre come una variabile libera. Allora per le leggi De Morgan, valide per l'operatore '$\neg^*$', e per la regola 3 ad esse applicate, si ha che $[((m \in X) \wedge (m \in Y)) \rightarrow \neg^*((m \notin^* X) \vee (m \notin^* Y))]$, donde $\neg^*((m \notin^* X) \vee (m \notin^* Y))$ per MP. $\left[\neg^*((m \notin^* X) \vee (m \notin^* Y)) \rightarrow \neg^*\left((m \in \overline{X^*}) \vee (m \in \overline{Y^*})\right)\right]$ e per la regola 1 $\neg^*\left((m \in \overline{X^*}) \vee (m \in \overline{Y^*})\right)$, ossia $\left(m \notin^* (\overline{X^*} \cup \overline{Y^*})\right)$. Così per il teorema 4.7, regola 3 e 1 si ottiene $\left[((m \in X) \wedge (m \in Y)) \rightarrow \left(m \notin^* (\overline{X^*} \cup \overline{Y^*})\right)\right]$. Poiché l'ipotesi è uguale per definizione a $((m \in X) \wedge (m \in Y))$, si può dedurre $\left[(m \in (X \cap Y)) \rightarrow \left(m \notin^* (\overline{X^*} \cup \overline{Y^*})\right)\right]$, da cui $\left[(m \in (X \cap Y)) \to \left(m \in \overline{(\overline{X^*} \cup \overline{Y^*})}\right)\right]$ e per MP $\left(m \in \overline{(\overline{X^*} \cup \overline{Y^*})}\right)$. Infine per MD* vale $\left[(m \in (X \cap Y)) \to \left(m \in \overline{(\overline{X^*} \cup \overline{Y^*})}^*\right)\right]$.

(←) Sia $\left(m \in \overline{(\overline{X^*} \cup \overline{Y^*})}^*\right)$ la nostra ipotesi, in cui m non occorre come una variabile libera. Allora per le leggi De Morgan, valide per l'operatore '$\neg^*$', e per la regola 3 ad esse applicate, si ha che $\left[\neg^*\left((m \notin^* X) \vee (m \notin^* Y)\right) \to \left((m \in X) \wedge (m \in Y)\right)\right]$. Poiché l'ipotesi è uguale per definizione a $\neg^*\left((m \notin^* X) \vee (m \notin^* Y)\right)$, si ottiene $\left((m \in X) \wedge (m \in Y)\right)$ per MP, da cui $(m \in (X \cap Y))$. Infine per MD* vale $\left[\left(m \in \overline{(\overline{X^*} \cup \overline{Y^*})}^*\right) \to (m \in (X \cap Y))\right]$.

(↔) In base alla definizione dell'operatore '↔', vale dunque $\left[(m \in (X \cap Y)) \leftrightarrow \left(m \in \overline{(\overline{X^*} \cup \overline{Y^*})}^*\right)\right]$ e per l'assioma 1, regola 3 e 1 $\left[(P \to P) \to \left[(m \in (X \cap Y)) \leftrightarrow \left(m \in \overline{(\overline{X^*} \cup \overline{Y^*})}^*\right)\right]\right]$, donde $\left[(P \to P) \to \forall m \left[(m \in (X \cap Y)) \leftrightarrow \left(m \in \overline{(\overline{X^*} \cup \overline{Y^*})}^*\right)\right]\right]$ per la regola 5. Per MP segue quindi $\forall m \left[(m \in (X \cap Y)) \leftrightarrow \left(m \in \overline{(\overline{X^*} \cup \overline{Y^*})}^*\right)\right]$, che è riscrivibile come "$\left[(X \cap Y) = \overline{(\overline{X^*} \cup \overline{Y^*})}^*\right]$" per la definizione di eguaglianza adottata. Per lo stesso ragionamento allora e cioè per l'assioma 1, regola 3 e 1 vale $\left[(P \to P) \to \left[(X \cap Y) = \overline{(\overline{X^*} \cup \overline{Y^*})}^*\right]\right]$, da cui $\left[(P \to P) \to \forall X \forall Y \left[(X \cap Y) = \overline{(\overline{X^*} \cup \overline{Y^*})}^*\right]\right]$ per doppia applicazione della regola 5. Per MP infine si deduce $\forall X \forall Y \left[(X \cap Y) = \overline{(\overline{X^*} \cup \overline{Y^*})}^*\right]$.

Teorema 14.52 $\vdash_{ZFU_1} \forall X \forall Y \left[(X \cup Y) = \overline{(\overline{X^*} \cap \overline{Y^*})}^*\right]$

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare che $\forall m\left[(m \in (X \cup Y)) \leftrightarrow \left(m \in \overline{\left(\overline{X^*} \cap \overline{Y^*}\right)^*}\right)\right]$, dove X e Y non occorrono come variabili libere. Scomporremo la dimostrazione nelle sue parti fondamentali.

($\rightarrow$) Sia $(m \in (X \cup Y))$ la nostra ipotesi, in cui m non occorre come una variabile libera. Allora per le leggi De Morgan, valide per l'operatore '$\neg^*$', e per la regola 3 ad esse applicate, si ha che $[((m \in X) \vee (m \in Y)) \rightarrow \neg^*((m \notin^* X) \wedge (m \notin^* Y))]$, donde $\neg^*((m \notin^* X) \wedge (m \notin^* Y))$ per MP. $\left[\neg^*((m \notin^* X) \wedge (m \notin^* Y)) \rightarrow \neg^*\left((m \in \overline{X^*}) \wedge (m \in \overline{Y^*})\right)\right]$ e per la regola 1 $\neg^*\left((m \in \overline{X^*}) \wedge (m \in \overline{Y^*})\right)$, ossia $\left(m \notin^* \left(\overline{X^*} \cap \overline{Y^*}\right)\right)$. Così per il teorema 4.7, regola 3 e 1 si ottiene $\left[((m \in X) \vee (m \in Y)) \rightarrow \left(m \notin^* \left(\overline{X^*} \cap \overline{Y^*}\right)\right)\right]$. Poiché l'ipotesi è uguale per definizione a $((m \in X) \vee (m \in Y))$, si può dedurre $\left[(m \in (X \cup Y)) \rightarrow \left(m \notin^* \left(\overline{X^*} \cap \overline{Y^*}\right)\right)\right]$, da cui $\left[(m \in (X \cup Y)) \rightarrow \left(m \in \overline{\left(\overline{X^*} \cap \overline{Y^*}\right)}\right)\right]$ e per MP $\left(m \in \overline{\left(\overline{X^*} \cap \overline{Y^*}\right)}\right)$. Infine per MD* vale $\left[(m \in (X \cup Y)) \rightarrow \left(m \in \overline{\left(\overline{X^*} \cap \overline{Y^*}\right)^*}\right)\right]$.

($\leftarrow$) Sia $\left(m \in \overline{\left(\overline{X^*} \cap \overline{Y^*}\right)^*}\right)$ la nostra ipotesi, in cui m non occorre come una variabile libera. Allora per le leggi De Morgan, valide per l'operatore '$\neg^*$', e per la regola 3 ad esse applicate, si ha che $[\neg^*((m \notin^* X) \wedge (m \notin^* Y)) \rightarrow ((m \in X) \vee (m \in Y))]$. Poiché l'ipotesi è uguale per definizione a $\neg^*((m \notin^* X) \wedge (m \notin^* Y))$, si ottiene $((m \in X) \vee (m \in Y))$ per MP, da cui $(m \in (X \cup Y))$. Infine per MD* vale $\left[\left(m \in \overline{\left(\overline{X^*} \cup \overline{Y^*}\right)^*}\right) \rightarrow (m \in (X \cup Y))\right]$.

($\leftrightarrow$) Per la definizione dell'operatore '$\leftrightarrow$' varrà quindi $\left[(m \in (X \cup Y)) \leftrightarrow \left(m \in \overline{\left(\overline{X^*} \cap \overline{Y^*}\right)^*}\right)\right]$. Per l'assioma 1, regola 3 e 1 varrà anche $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \left[(m \in (X \cup Y)) \leftrightarrow \left(m \in \overline{\left(\overline{X^*} \cap \overline{Y^*}\right)^*}\right)\right]\right]$, donde $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall m\left[(m \in (X \cup Y)) \leftrightarrow \left(m \in \overline{\left(\overline{X^*} \cap \overline{Y^*}\right)^*}\right)\right]\right]$ per la regola 5. Per MP inoltre varrà $\forall m\left[(m \in (X \cup Y)) \leftrightarrow \left(m \in \overline{\left(\overline{X^*} \cap \overline{Y^*}\right)^*}\right)\right]$, che è riscrivibile come "$\left[(X \cup Y) = \overline{\left(\overline{X^*} \cap \overline{Y^*}\right)^*}\right]$". Infine, per lo stesso ragionamento, vale $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \left[(X \cup Y) = \overline{\left(\overline{X^*} \cap \overline{Y^*}\right)^*}\right]\right]$ per l'assioma 1, regola 3 e 1, nonché

$\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X \forall Y \left[(X \cup Y) = \overline{\left(\overline{X^*} \cap \overline{Y^*}\right)^*}\right]\right]$ per la regola 5 applicata due volte.

Per MP infine varrà $\forall X \forall Y \left[(X \cup Y) = \overline{\left(\overline{X^*} \cap \overline{Y^*}\right)^*}\right]$.

10. L'insieme dei sottoinsiemi

10.1 Sesto assioma: l'insieme potenza

In questo paragrafo introdurremo l'assioma detto dell'insieme "potenza". Esso ci servirà per asserire l'esistenza dell'insieme di tutti i sottoinsiemi generabili a partire da un insieme dato in ZFU_1.

In base ai postulati sin qui dati, abbiamo visto come generare quei sottoinsiemi determinabili attraverso l'uso dello schema di comprensione; ma non abbiamo dato indicazioni specifiche a proposito della collezione di tutti i sottoinsiemi che si possono definire a partire da un qualunque insieme già dato.

Sfruttando l'assioma di costruzione dei sottoinsiemi, potremmo tentare infatti di istanziare un predicato del tipo:

$$[\![\mathbb{1}]\!] \quad \exists Y \forall X\big[(X \in Y) \leftrightarrow \forall m\big((m \in Y) \rightarrow (m \subseteq Z)\big)\big]$$

o più semplicemente:

$$[\![\mathbb{2}]\!] \quad \exists Y \forall X[(X \in Y) \leftrightarrow (X \subseteq Z)]$$

dove Z sia in $[\![\mathbb{1}]\!]$ che in $[\![\mathbb{2}]\!]$ è un insieme già ottenuto in precedenza.

Allora dallo schema di comprensione seguirebbe che Y è proprio l'insieme di tutti i sottoinsiemi dell'insieme Z e ciò giustificherebbe l'esistenza dell'insieme in questione. Così non sembrerebbe necessario dover assumere uno specifico assioma.

C'è tuttavia una difficoltà, esaminata ad esempio in Abian[348], che a questo punto del nostro sviluppo assiomatico si porrebbe e rispetto alla quale occorre valutare lo stato attuale delle cose.

Partiamo dall'esame del problema per una teoria di tipo classico. Un sistema, avente a disposizione un assioma di estensionalità e uno di comprensione (limitata) o di rimpiazzamento, è già un sistema molto potente, in quanto potrebbe dedurre, in linea ipotetica, alcuni degli assiomi fin qui assunti, scartando l'ipotesi degli *Urelemente*. Tuttavia una simile teoria potrebbe incorrere in forti limitazioni a proposito dell'assioma che qui stiamo esaminando.

---

[348] Cfr. Abian, A., *Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, *op. cit.*, p. 85

Sia IK un siffatto sistema: per esso potrebbero allora determinarsi tutta una serie di collezioni, corrispondenti ai sottoinsiemi puri sin qui esaminati. Sulla base di questi due assiomi, non è però possibile ancora determinare l'esistenza effettiva di alcun insieme, sebbene la logica soggiacente richieda un dominio interpretativo non-vuoto.

Sia allora $\mathfrak{M}$ un modello il cui dominio di interpretazione Δ, sia tale che $\Delta = \{\emptyset\}$. Allora il modello $\mathfrak{M}_\Delta$ consisterà fondamentalmente di un unico oggetto, cioè a dire $\emptyset$. Così la richiesta di tipo logico, caratterizzante una teoria del tipo IK, risulterebbe soddisfatta. A questo punto però, nel valutare i sottoinsiemi che sarebbe possibile generare a partire dall'applicazione dell'assioma $\boldsymbol{CP}$, si pone una difficoltà. Rispetto ad un modello come $\mathfrak{M}_\Delta$, una valutazione del genere significherebbe considerare tutti i sottoinsiemi di $\emptyset$. Ma l'insieme vuoto non possiede elementi per definizione e così ogni possibile sottoinsieme generabile mediante comprensione risulterebbe per ciò stesso anche vuoto e indistinguibile dall'unico oggetto presente in $\mathfrak{M}$.

A questo punto si riscontrerebbe il problema per cui anche l'insieme di tutti i sottoinsiemi generabili a partire da $\emptyset$, risulterebbe vuoto, visto che non vi sono sottoinsiemi propri di $\emptyset$; mentre la potenza dell'insieme vuoto dovrebbe invece corrispondere in qualche modo all'insieme $\{\emptyset\}$[349].

Per tali ragioni allora risulterebbe necessario assumere un apposito assioma, che stabilisca, anche nel caso specifico di un modello come $\mathfrak{M}_\Delta$, l'esistenza dell'insieme di tutti i sottoinsiemi.

Venendo al caso del nostro sistema formale però, non ci pare che ZFU_1 possa incontrare le stesse difficoltà. A differenza di un ipotetico sistema come IK, la nostra teoria assume esplicitamente l'esistenza dell'insieme vuoto mediante l'assioma $\boldsymbol{O}$ e inoltre assume espressamente anche l'esistenza dell'insieme coppia $\boldsymbol{P}$[350], nonché dell'insieme unione $\boldsymbol{Un}$ e, a partire da essi, è in grado di generare infiniti altri insiemi. Per tale ragione allora non ci pare ammissibile considerare $\mathfrak{M}_\Delta$ un modello di ZFU_1, giacché il dominio di interpretazione Δ risulterebbe insufficiente per interpretare tutti gli insiemi generabili a partire dagli assiomi sin qui enunciati. Infatti, in base al teorema 14.16, risulta possibile provare l'esistenza di $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\left\{\{\{\emptyset\}\}\right\}$, ecc. all'interno di ZFU_1.

Tuttavia, nonostante ci sembri ragionevole superare una difficoltà di questo tipo relativamente al nostro sistema formale, esiste un secondo problema da valutare attentamente. Esso riguarda, in linea di principio, sistemi molto più complessi di IK, analoghi tuttavia a quello che qui intendiamo delineare (ZFU_1).

---

349 Cfr. Abian, A., *Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, *op. cit.*, p. 85

350 In una teoria come IK non sarebbe necessario assumere $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{P}$ come specifici assiomi, in quanto sarebbero deducibili a partire dagli schemi di comprensione (limitata) o di rimpiazzamento.

La difficoltà in questione concerne la possibilità di generare insiemi molto estesi, sebbene non illimitatamente comprensivi.

Il problema dell'espansione degli oggetti insiemistici a nostra disposizione può discutersi come segue: sia IK^* la teoria ottenuta da IK con l'aggiunta degli usuali assiomi impiegati in teoria degli insiemi, cioè:

1) assioma della coppia;

2) assioma dell'unione;

3) schema d'assioma di rimpiazzamento;[351]

4) assioma di scelta;

5) assioma di fondazione.

In una teoria come IK^* potrebbero isolarsi in via ipotetica vari tipi di insiemi, molto differenti tra loro, soprattutto grazie all'applicazione dell'assioma della coppia, a quello dell'unione e a quello di comprensione. Tuttavia in essa non potrebbe dedursi con certezza l'esistenza di alcun insieme, a differenza di quanto accade in ZFU_1, dove l'esistenza di almeno una classe è stata postulata e quella di infinite altre è dimostrabile.

Sarà per questo auspicabile estendere assiomaticamente un sistema come IK^*, mediante l'assunzione dell'assioma dell'infinito[352]. La teoria così risultante la indicheremo qui con 'IK^I'.

Per ottenere collezioni dotate di maggior ampiezza rispetto a quelle così determinabili, occorrerebbe poter disporre in qualche modo di uno strumento generativo come quello impiegato da Cantor[353], che consentiva, mediante esponenziazione, di ottenere insiemi ancor più estesi di quelli di partenza.

In assenza però di un principio del genere, le possibilità deduttive del sistema, in termini di aritmetica cardinale transfinita, risulterebbero troppo ristrette e, ad

[351] Se questo schema d'assioma non sia stato già precedentemente assunto. Da esso potrebbe derivarsi anche lo schema di separazione, che lo renderebbe superfluo.
[352] In alternativa occorrerebbe postulare un assioma del tipo $\exists X(X = X)$, ridondante alla luce dell'assioma dell'infinito da cui esso segue e dal quale è possibile trarre altre importanti conseguenze.
[353] Cantor lo definiva come un "secondo principio di generazione". Cfr. Cantor, G., *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, *op. cit.*, pp. 289 e ss.

esempio, non potrebbe svilupparsi adeguatamente nemmeno un concetto adeguato di «continuo»[354].

La necessità scaturita da tale esigenza impone ad un sistema come IK^I di adottare una formulazione adeguata dell'assioma potenza. Ciò non ammette sostanzialmente deroghe, giacché gli assiomi ammessi per IK^I risulterebbero tutti soddisfacibili all'interno di un modello $\mathfrak{N}$, con dominio di interpretazione Δ', tale che Δ' contenga solo insiemi finiti e insiemi di cardinalità al più numerabile[355]. Un modello come $\mathfrak{N}_{\Delta'}$ consentirebbe di dimostrare dunque la non-derivabilità dell'assioma potenza dagli altri assiomi a meno di una contraddizione, visto che la sua assunzione in una teoria come IK^I non risulterebbe vera in un modello come $\mathfrak{N}_{\Delta'}$, che pure soddisfa i restanti assiomi.

Veniamo allora al caso specifico della nostra teoria. Siccome in ZFU_1 non si hanno esplicite assunzioni esistenziali per quanto riguarda gli *Urelemente* e, dato che gli assiomi di ZFU_1 saranno analoghi a quelli di un sistema come IK^I, è lecito attendersi che un modello come $\mathfrak{N}_{\Delta'}$ possa costituire una realizzazione effettiva anche di ZFU_1. Così per le stesse ragioni esaminate nel caso del sistema IK^I, anche ZFU_1 non può derogare dall'assunzione esplicita di questo assioma, grazie al quale potremo adeguatamente sviluppare la porzione pura della nostra teoria, cui siamo interessati per lo sviluppo del concetto di continuità.

Giungiamo così alla postulazione del seguente:

<u>Assioma dell'insieme potenza</u>. ***P***

$$\forall Z \exists Y \forall X[(X \in Y) \leftrightarrow (X \subseteq Z)]$$

Nell'assioma non compaiono altro che variabili del secondo tipo, quelle occorrenti per classi. Ciò è dovuto alla facile constatazione, per la quale un assioma del genere non può riguardare altro che classi, dal momento che esso fa riferimento a sottoinsiemi di insiemi già dati.

Trattandosi così della determinazione di un insieme Y, tale insieme soggiacerà alla condizione di estensionalità, derivante dall'impiego della relazione di eguaglianza adottata per ZFU_1.

Così come prima e immediata conseguenza dell'assioma appena introdotto, è possibile stabilire il seguente:

---

[354] Cfr. Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 35

[355] *Ibidem*, p. 35, nota 2. Bernays, P., *A System of Axiomatic Set Theory, VI*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 13, n. 2, 1948, pp. 65-79

Teorema 14.53 $\vdash_{ZFU_1} \forall Z \exists_1 Y \forall X[(X \in Y) \leftrightarrow (X \subseteq Z)]$

Dimostrazione

Sia Y_1 un insieme avente come elementi tutti i sottoinsiemi che è possibile generare a partire dall'insieme Z, già precedentemente determinato. Allora sarà possibile verificare che $\forall Z[(Z \in Y) \leftrightarrow (Z \in Y_1)]$ e così, per la definizione di eguaglianza data nella definizione 14.3, risulterà $(Y = Y_1)$.

10.2 Notazione dell'insieme potenza

L'operazione costituita dall'applicazione dell'assioma $\boldsymbol{Pw}$ è spesso denotata in letteratura mediante la simbologia '$\wp(X)$', indicante l'insieme potenza o insieme di tutti i sottoinsiemi, generati a partire da un certo insieme X già determinato.

Adotteremo anche per ZFU_1 tale dicitura e la definiremo ricorsivamente in modo da calcolarne il valore in base al numero di applicazioni.

Chiariremo innanzitutto il concetto di applicazione dell'operazione $\wp(X)$ mediante un esempio e ne daremo di seguito una prima abbreviazione notazionale.

Sia il caso in cui $(X = \emptyset)$ e si consideri la successiva applicazione della funzione in questione iterata tre volte. La sua scrittura darebbe luogo a tre successive eguaglianze di questo tipo:

1) $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$

2) $\wp\big(\wp(\emptyset)\big) = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}$

3) $\wp\Big(\wp\big(\wp(\emptyset)\big)\Big) = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \big\{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\big\}\Big\}$

Allora invece di utilizzare la notazione '$\wp\Big(\wp\big(\wp(\emptyset)\big)\Big)$' possiamo stabilire di abbreviarne la scrittura sostituendola con l'espressione '$\wp^3(\emptyset)$'.

Più in generale, invece di impiegare una scrittura del tipo '$\wp\Big(\ldots\big(\wp(X)\big)\Big)$', per un numero arbitrario di applicazioni, utilizzeremo la notazione '$\wp^0(X)$', per indicare un'applicazione nulla dell'operazione potenza all'insieme X; mentre abbrevieremo n eventuali applicazioni dell'operazione $\wp(X)$, scrivendo semplicemente $\wp^n(X)$.

Sarà allora possibile definire ricorsivamente le applicazioni dell'operazione potenza, nel modo che segue:

Base.

$$\wp^0(X) = X$$

Passo.

$$\wp^{n+1}(X) = \wp\big(\wp^n(X)\big)$$

Facciamo qualche ulteriore considerazione, partendo proprio dall'esempio sopra esaminato. Come si può facilmente notare, il numero di sottoinsiemi e dunque il numero di elementi che è possibile riscontrare a ciascuna applicazione dell'operazione potenza, consente di ottenere una quantità di classi che cresce esponenzialmente ad ogni nuova applicazione di un fattore pari a $2n$, dove n è il numero di sottoinsiemi ottenuto ad una certa applicazione dell'operazione potenza, mentre $2n$ è il numero di sottoinsiemi ottenibili nell'applicazione successiva, per ogni n.

È possibile spiegare questo tipo di crescita, tenendo presente che, se X è un insieme avente n elementi tra loro distinti, allora il numero di combinazioni possibili è esattamente 2^n, dove 2^n è il risultato dato dall'applicazione della formula derivante dal calcolo combinatorio nel caso in cui le due seguenti condizioni dovessero valere:

1) non vi sono sottoinsiemi con gli stessi elementi[356];

2) non vi sono sottoinsiemi con più occorrenze dello stesso elemento[357].

Nel rispetto delle condizioni 1) e 2), si avrebbe che, se X avesse n elementi, allora il numero di sottoinsiemi possibili sarebbe $\binom{n}{k} = 2^n = |\wp(X)|$[358], dove k è il numero di elementi distinti appartenenti a ciascun possibile sottoinsieme.

Ciò è spiegato dal fatto che:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ [359]

[356] Simili collezioni risulterebbe infatti eguali.

[357] In base agli assiomi sin qui dati, non risulta rilevante il numero di occorrenze di uno stesso elemento all'interno di un dato insieme. Cfr. Posa, D., De Iaco, S., Palma, M., *Elementi di calcolo combinatorio e teoria della probabilità*, Giappichelli, Torino, 2009, pp. 7-16

[358] Con '$|\wp(X)|$' si intende il numero cardinale assegnato all'insieme $\wp(X)$. Per il momento non abbiamo esplicitato la nozione di "cardinalità"; sarà sufficiente tuttavia intendere qui il numero che è possibile assegnare all'insieme $\wp(X)$, che per il momento sarà sempre un numero finito.

dove il numero 2^n è allora il risultato dovuto al raggruppamento di n differenti combinazioni, prese k alla volta[360].

Così è possibile osservare che, nel caso si abbiano n elementi in X, tutti distinti tra loro, varranno le seguenti eguaglianze:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$ [361]

dove

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

[359] Nell'espressione $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ il termine indicato con '$\binom{n}{k}$' è generalmente chiamato "coefficiente binomiale".

[360] Cfr. Abian, A., *Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, *op. cit.*, pp. 86-7. Wolf, F., *Number Systems and their Uses*, Xerox, Waltham-Toronto, 1971, pp. 233-41

[361] La ragione intuitiva di ciò è legata al numero di applicazioni che è possibile calcolare in base alle scelte possibili per un dato numero n di elementi distinti in un determinato insieme X. Essendo le scelte possibili 2, cioè a dire $\{\in, \notin\}$, il numero di applicazioni risulterà essere quello derivante da $\{1, \dots, n\} \mapsto \{\in, \notin\}$ e cioè ${}^{\{\in,\notin\}}\{1, \dots, n\}$. A questo punto è possibile osservare che $\left|{}^{\{\in,\notin\}}\{1, \dots, n\}\right| = |\{\in, \notin\}|^{|\{1,\dots,n\}|} = \left|\{\in, \notin\}^{\{1,\dots,n\}}\right| = 2^n$. Cfr. Wolf, F., *Number Systems and Their Uses*, *op. cit.*, pp. 227-8. Abian, A., *Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, *op. cit.*, pp. 86-7

10.3 Prodotto cartesiano. Relazioni. Funzioni

In questo paragrafo desideriamo prendere in considerazione alcune conseguenze derivanti dall'applicazione congiunta degli ultimi assiomi introdotti, cioè a dire $\boldsymbol{CP}$ e $\boldsymbol{Pw}$.

Particolarmente importante per il sistema ZFU_1 risulta la possibilità di definire un oggetto insiemistico di grande rilevanza, denominato normalmente "prodotto cartesiano".

Esso può essere definito in connessione con la definizione di coppia ordinata, precedentemente fornita, per poter poi procedere alla definizione del concetto di relazione prima e di funzione poi.

Questi termini sono occorsi in diverse precedenti occasioni. Tuttavia, non avendo dato elementi sufficienti al riguardo, i concetti riposavano su di un piano eminentemente intuitivo. Mentre ora potremo dimostrare una serie di teoremi, che abiliteranno ZFU_1 ad essere (anche) una teoria degli insiemi vera e propria.

Cominciamo allora dal concetto di "prodotto cartesiano", dato dalla seguente:

Definizione 14.43 $(X \times Y) \overset{\text{def}}{=} \{Z|((Z = \langle m, n\rangle)\wedge(m \in X)\wedge(n \in Y))\}$

Tale definizione è di grande utilità per poter «aggirare» certe restrizioni[362], come quella rappresentata dalla natura estensionale degli insiemi, che non consente di aver a disposizione più oggetti insiemistici dello stesso tipo. La definizione in questione consente di superare tale *impasse* e sarà molto utile per le definizioni delle operazioni cardinali tra insiemi.

Teorema 14.54

$$\vdash_{ZFU_1} \forall X\forall Y\left[[\exists m(m \in X)\wedge\exists n(n \in Y)\wedge(Z = \langle m, n\rangle)] \rightarrow \exists Y_1(Y_1 = (X \times Y))\right]$$

Dimostrazione

Si assuma che $[\exists m(m \in X)\wedge\exists n(n \in Y)\wedge(Z = \langle m, n\rangle)]$, dove non occorrono variabili libere. Allora X e Y sono due insiemi non-vuoti per ipotesi, ottenuti all'interno della nostra teoria. Per l'assioma $\boldsymbol{Un}$, dato che $X \neq^* \emptyset$ e $Y \neq^* \emptyset$ e

[362] Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 41

che esistono almeno due elementi m e n, tali che $m \in X$ e $n \in Y$, allora $[m \in (X \cup Y) \wedge n \in (X \cup Y)]$. Inoltre per l'assioma $\boldsymbol{Pw}$ varrà l'enunciato $\big[[\{m\} \in \wp(X \cup Y)] \wedge [\{m, n\} \in \wp(X \cup Y)]\big]$. Allo stesso modo allora $\big[\{\{m\}, \{m, n\}\} \in \wp^2(X \cup Y)\big]$ e $[\langle m, n\rangle \in \wp^2(X \cup Y)]$ per la definizione 14.24. Se ora si esprime mediante lo schema $\boldsymbol{CP}$ una certa condizione $P(Z)$, dove $[(Z = \langle m, n\rangle) \wedge (m \in X) \wedge (n \in Y)]$, allora $P(Z) \subseteq \wp^2(X \cup Y)$ e $X \times Y$ è proprio l'insieme cercato[363]. Si ottiene allora per l'assioma 14, regola 3 e 1 che $\exists Y_1\big(Y_1 = (X \times Y)\big)$. Applicando poi MD*, si ottiene $\Big[[\exists m(m \in X) \wedge \exists n(n \in Y) \wedge (Z = \langle m, n\rangle)] \rightarrow \exists Y_1\big(Y_1 = (X \times Y)\big)\Big]$. Per l'assioma 1, regola 3 e 1, vale inoltre $\Big[(P \rightarrow P) \rightarrow \Big[[\exists m(m \in X) \wedge \exists n(n \in Y) \wedge (Z = \langle m, n\rangle)] \rightarrow \exists Y_1\big(Y_1 = (X \times Y)\big)\Big]\Big]$, donde $\Big[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X \forall Y \Big[[\exists m(m \in X) \wedge \exists n(n \in Y) \wedge (Z = \langle m, n\rangle)] \rightarrow \exists Y_1\big(Y_1 = (X \times Y)\big)\Big]\Big]$ per doppia applicazione della regola 5. Infine si deduce $\forall X \forall Y \Big[[\exists m(m \in X) \wedge \exists n(n \in Y) \wedge (Z = \langle m, n\rangle)] \rightarrow \exists Y_1\big(Y_1 = (X \times Y)\big)\Big]$ per MP.

Anche in questo caso è possibile generalizzare la definizione 14.43 al fine di semplificare la scrittura, qualora occorresse prendere in considerazione un prodotto cartesiano tra più classi. Ad esempio nel caso elementare di due sole classi eguali tra loro, potremo scrivere 'X^2' in luogo di '$(X \times X)$'.

Sfruttando allora l'utile strumento costituito dalle definizioni ricorsive, stabiliamo che:

Definizione 14.44

$$X^2 \overset{\text{def}}{=} (X \times X)$$

$$X^n \overset{\text{def}}{=} (X^{n-1} \times X)$$

Avendo allora provato l'esistenza del prodotto cartesiano, possiamo procedere alla definizione anche dei due concetti di "relazione" e di "funzione".

[363] Cfr. Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 41

Cominciamo dal concetto di relazione. Esso potrà essere definito in ZFU_1 secondo i criteri standard. Diremo allora “relazione” un insieme ottenuto secondo la seguente:

Definizione 14.45 $Rel^2(Z) \overset{\text{def}}{\equiv} [Z \subseteq (X \times Y)]$

Per “relazione” intenderemo allora un certo sottoinsieme (non-vuoto) del prodotto cartesiano precedentemente definito. Ciò vorrà dire che una relazione è l’insieme i cui membri sono solo quelle coppie ordinate costituite da elementi di X ed elementi di Y, che stanno fra loro nella relazione Z. Se X e Y coincidono, allora $Rel(Z) \overset{\text{def}}{\equiv} [Z \subseteq X^2]$, in base alla definizione 14.44.

Possiamo anche qui generalizzare il concetto espresso dalla definizione 14.44, dal momento che in quel luogo si è definito sostanzialmente solo il caso di un relazione binaria.

Per poter considerare una relazione su n elementi (e definire così il concetto di relazione n-aria), si potrà allora utilizzare la seguente:

Definizione 14.46 $Rel^n(Z) \overset{\text{def}}{\equiv} [Z \subseteq (X_1 \times \ldots \times X_n)]$

Anche in tal caso si potrà osservare che se gli $X_1, \ldots, X_n$ sono tutti fra loro eguali, allora $Rel^n(Z) \overset{\text{def}}{\equiv} [Z \subseteq X^n]$.

Di una relazione possiamo anche indicare con maggior esattezza il “dominio”, il “codominio” e, mediante questi ultimi, definirne il “campo”. Diciamo allora che per “dominio” (‘Δ_1’) di una certa relazione X intenderemo:

Definizione 14.47 $\Delta_1(X) \overset{\text{def}}{\equiv} \{m | \exists n(\langle m, n \rangle \in X)\}$

Diciamo invece che per “codominio” (‘Δ_2’) di una certa relazione X, intenderemo:

Definizione 14.48 $\Delta_2(X) \overset{\text{def}}{\equiv} \{n | \exists m(\langle m, n \rangle \in X)\}$

Sarà allora immediato definire il "campo" della relazione X come:

Definizione 14.49 $\Delta_3(X) \overset{\text{def}}{=} [\{m|\exists n(\langle m,n\rangle \in X)\} \cup \{n|\exists m(\langle m,n\rangle \in X)\}]$ [364]

Infine diremo "relazione inversa" di X, la relazione ottenuta mediante la seguente:

Definizione 14.50 $\breve{X} \overset{\text{def}}{=} \{\langle m_2, m_1\rangle|(\langle m_1, m_2\rangle \in X)\}$

Possiamo a questo punto definire il concetto di "funzione", fondamentale per lo sviluppo della parte pura della teoria ZFU_1, all'interno della quale ricostruire tutto quanto sia normalmente deducibile in teorie come ZF.

Diciamo allora che:

Definizione 14.51

$$Fnz(X) \overset{\text{def}}{=} [Rel(X) \wedge \forall m_1 \forall m_2 \forall m_3 [(\langle m_1, m_2\rangle \in X) \wedge (\langle m_1, m_3\rangle \in X)] \rightarrow$$
$$\rightarrow (m_2 = m_3)]$$

Tale definizione ammette anch'essa una facile generalizzazione, qualora si trattasse di una relazione univoca X tra una n-pla ed un certo $n+1$-esimo elemento, che risulti unico. Come si può osservare si tratta sempre di una relazione binaria, sussistente qui tra un oggetto più complesso come una n-pla e un oggetto del dominio.

Adotteremo nel caso di relazioni univoche (totali) di questo tipo la seguente notazione:

Definizione 14.52 $Fnz(X) \overset{\text{def}}{=} X\colon Z \longrightarrow Y$

[364] Possiamo allora dire che se X è una relazione, allora essa è contenuta o è sottoinsieme del prodotto cartesiano tra il suo dominio ed il suo codominio, ossia: $[X \subseteq (\Delta_1(X) \times \Delta_2(X))]$.

dove $Z = \Delta_1(X)$, $Y = \Delta_2(X)$ e X assume un determinato valore per ogni $m \in \Delta_1(X)$.

Per denotare il "valore" di una funzione X con dominio Z e codominio Y adotteremo d'ora in poi la seguente:

Definizione 14.53 $f(m) \overset{\text{def}}{\equiv} \begin{cases} n, se\ \forall p\big((\langle Y,p\rangle \in X) \to (p = n)\big) \\ \emptyset, altrimenti \end{cases}$[365]

dove si assume al più un valore per la funzione in questione (la funzione potrebbe anche non essere definita per tutti i valori del dominio, se la funzione è parziale).

Possiamo ora definire altri tipi di funzione molto importanti per il nostro sistema formale, soprattutto per quel che riguarderà un adeguato sviluppo della sua parte standard o pura e della nozione di "equinumerosità".

Tra i tipi di funzione che è possibile sviluppare in ZFU_1 vi sono le forme canoniche di funzione "iniettiva", "suriettiva" e "biiettiva".

Diremo che una funzione è "iniettiva", se vale la seguente:

Definizione 14.54

$$[Fnz(X) \wedge In(X)] \overset{\text{def}}{\equiv} \Big[Fnz(X) \wedge \forall m \forall n \Big(\big(f(m) = f(n)\big) \to (m = n)\Big)\Big]$$

La notazione per una funzione del genere sarà:

Definizione 14.55 $In(X) \overset{\text{def}}{\equiv} f\colon Z \mapsto Y$

dove $Z = \Delta_1(X)$ e $Y = \Delta_2(X)$.

Diremo che una funzione è suriettiva, se vale la seguente:

Definizione 14.56

[365] Cfr. Casari, E., *La matematica della verità*, Bollati Boringhieri, Torino, 2006, p. 59

$$[Fnz(X) \wedge Sur(X)] \stackrel{\text{def}}{\equiv}$$
$$\stackrel{\text{def}}{\equiv} \left[Fnz(X) \wedge \forall n \forall m[\forall n \exists m(f(m) = n)]\right]$$

La sua notazione sarà:

Definizione 14.57 $Sur(X) \stackrel{\text{def}}{\equiv} f: Z \twoheadrightarrow Y$

dove $Z = \Delta_1(X)$ e $Y = \Delta_2(X)$.
Diremo infine che una funzione è "biiettiva", se vale la seguente:

Definizione 14.58 $Bi(X) \stackrel{\text{def}}{\equiv} [Fnz(X) \wedge In(X) \wedge Sur(X)]$

La sua notazione sarà:

Definizione 14.59 $Bi(X) \stackrel{\text{def}}{\equiv} f: Z \mapsto\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y$

dove $Z = \Delta_1(X)$ e $Y = \Delta_2(X)$.

10.4 Il concetto di equinumerosità

Disponendo delle definizioni di relazione, di funzione e di alcune particolari caratteristiche fondamentali di queste ultime, come l'iniettività, la suriettività e la biiettività, è possibile introdurre un nuovo concetto, che sarà molto utile per comprendere intuitivamente alcuni fenomeni di cardinalità, validi anche in ZFU_1.

Allo stato attuale della discussione circa il nostro sistema, non si possiedono elementi per poter trattare la natura dei numeri cardinali né l'aritmetica che tra questi potrebbe definirsi in modo canonico, giacché non abbiamo sviluppato una teoria adeguata dei numeri ordinali e definito tra essi quali risultino essere "ordinali iniziali".

Ad ogni modo, alla luce dell'assioma dell'infinito, che sarà introdotto nel prossimo paragrafo e in connessione con quanto detto a proposito della necessità di assumere l'assioma della potenza anche in ZFU_1, possiamo per il momento fissare alcune ulteriori definizioni, al fine di mostrare come la scelta del postulato $\boldsymbol{Pw}$ incida fortemente nella costruzione della parte pura della nostra teoria.

Cominceremo col dire che due insiemi X e Y sono "equinumerosi" se e solo esiste una funzione biiettiva tra loro, ossia:

Definizione 14.60 $Equi(X,Y) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \exists f{:}\, X \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow Y$[366]

Indicheremo due insiemi equinumerosi X e Y nel modo seguente:

Definizione 14.61 $X \approx Y \stackrel{\text{def}}{\equiv} Equi(X,Y)$

Se tale condizione non dovesse verificarsi, allora possono esaminarsi altre due codizioni.

Nella prima X ha un numero di oggetti inferiore o uguale a quello dell'insieme Y: allora ogni elemento di X avrà una sola immagine in Y, senza per questo

[366] Casari, E., *La matematica della verità*, *op. cit.*, pp. 68-9. Può essere sufficiente anche assumere semplicemente l'esistenza di una funzione iniettiva da X in Y, che viene talvolta detta funzione "uno a uno". Qui comunque non abbiamo assunto riferimenti espliciti ai numeri cardinali e dunque agli "ordinali iniziali". In tal caso occorrerebbe impiegare l'assioma di scelta per dimostrare che ogni insieme ammette un isomorfismo con un unico numero ordinale e che dunque possiede anche una determinata cardinalità. Tuttavia preferiamo per il momento muoverci lungo questa linea puramente intuitiva, per la quale non possiamo pretendere un adeguato rigore.

escludere che in Y vi siano altri elementi che non siano immagine di alcun elemento in X.

Sfruttando allora la definizione di iniettività, possiamo stabilire che:

Definizione 14.62 $X \preccurlyeq Y \overset{\text{def}}{=} \exists f{:}\, X \mapsto Y$[367]

Il caso di una stretta inferiorità dal punto di vista degli elementi contenuti in X e che stiamo solo intuitivamente delineando, potrebbe essere intesa in questi due modi:

Definizione 14.63 $X \prec Y \overset{\text{def}}{=} [(\exists f{:}\, X \mapsto Y) \wedge (\neg \exists g{:}\, Y \mapsto X)]$

Definizione 14.64 $X \prec Y \overset{\text{def}}{=} [(\exists f{:}\, X \mapsto Y) \wedge (\neg \exists g{:}\, X \twoheadrightarrow Y)]$[368]

Tali definizioni poggiano unicamente sul concetto di funzione dato nel paragrafo precedente e non intendono sostituire le comuni strutture mediante le quali si giunge a parlare di cardinalità vera e propria. Tuttavia ciò è comunque di un certo interesse per meglio apprezzare le possibilità acquisite da ZFU_1 grazie all'introduzione dell'assioma $\boldsymbol{Pw}$ e grazie soprattutto all'assioma che introdurremo nel prossimo paragrafo.

[367] Casari, E., *La matematica della verità*, *op. cit.*, p. 69
[368] *Ibidem*, p. 70

11. Le collezioni infinite

11.1 Settimo assioma: l'insieme dell'infinito

Sin qui abbiamo discusso di collezioni sufficientemente limitate relativamente alla loro estensione. Abbiamo cioè mostrato che gli insiemi che è possibile fabbricare a partire dagli assiomi fin accettati sono tutti limitatamente estesi e nessuno di essi possiede una quantità illimitata o infinita, intuitivamente parlando, di elementi.

Tale situazione non può essere dunque mutata senza aggiungere qualche ulteriore postulato. In particolare sarà nostro compito qui dotare ZFU_1 di un assioma dell'infinito adeguato, che consenta il normale sviluppo della parte standard della teoria, quella cioè relativa agli insiemi puri.

Senza tale assioma infatti non sarebbe possibile sviluppare alcuna teoria dei cardinali infiniti e questo, entro certi limiti, creerebbe qualche problema anche alla parte non-standard del nostro sistema formale.

Da un punto di vista assiomatico, la necessità di un simile postulato è dovuta ai fatti seguenti:

Definizione 14.65[369] $Fin^*(X) \stackrel{\text{def}}{=} Li(X)$

Definizione 14.66[370] $ErFin^* \stackrel{\text{def}}{=}$

$$\stackrel{\text{def}}{=} (X)\left[Fin^*(X) \wedge Fin^*\left(\bigcup X\right) \wedge Fin^*\left(\bigcup\left(\bigcup X\right)\right) \wedge \ldots \wedge Fin^*\left(\bigcup\left(\ldots \bigcup X\right)\ldots\right)\right]$$

Una simile ontologia non contrasta affatto con quella sinora esaminata, in quanto tutti gli insiemi che è possibile fin qui costruire sono o di tipo puro o di tipo non-puro (cioè contengono *Urelemente*). Ad ogni modo non abbiamo fatto presupposizioni circa gli elementi di queste ultime classi e, per quanto ne sappiamo, potremmo anche non disporne.

---

[369] Diciamo che l'insieme X è finito, in senso intuitivo ('Fin^*'), se esso ha un numero limitato di elementi.

[370] Diciamo che l'insieme X è ereditariamente finito, in senso intuitivo ('$ErFin^*$'), se i suoi membri sono collezioni finite, i membri dei suoi membri sono anch'esse collezioni finite e così via. Cfr. Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 44

Avendo però assunto esplicitamente l'esistenza dell'insieme (fortemente) vuoto, ed avendo fatto sì che tutti gli ulteriori insiemi venissero costruiti a partire dagli insiemi dati, abbiamo visto come si potessero fabbricare *singletons*, coppie (non-ordinate) e più in generale collezioni contenenti n elementi. Ciascuno di tali insiemi aveva però carattere limitato, poiché ognuno di essi conteneva una quantità comunque finita di elementi, così come finiti risultavano essere i rispettivi elementi e gli elementi degli elementi di ciascuna di tali collezioni.

Pertanto gli assiomi sin qui dati sono sostanzialmente compatibili con la condizione di "finita ereditarietà" sopra descritta, valida per tutti gli insiemi generabili a partire da essi, e non è dunque possibile immaginare di dedurre l'esistenza di un insieme che violi tale condizione (cioè dimostrare l'esistenza un insieme infinito), dato che questo costituirebbe la negazione della situazione prima descritta[371].

Per ragioni analoghe a quelle normalmente riscontrabili nel caso classico, anche ZFU_1 ci pare soggiacere a tale limitazione, almeno in base alle indicazioni assiomatiche sin qui delineate e dovremo per ciò trovare qualche postulato sufficiente a sviluppare la porzione transfinita della teoria.

Restando su di un piano intuitivo, il nostro obiettivo è quello di sviluppare la comune nozione di numero reale. Per poter fare ciò adeguatamente, abbiamo bisogno di un assioma dell'infinito, dotato di una certa efficacia. Sin qui infatti potrebbero trattarsi i numeri naturali o i numeri razionali (in una certa misura) ma non quelli reali[372]. Tale limite è conseguenza diretta degli assiomi sin qui adottati, analoghi a quelli di altre teorie classiche (come appunto ZF), a partire dai quali non si riesce a costruire quelle collezioni con infiniti elementi, fondamentali per il recupero dell'analisi.

Esistono numerose formulazioni dell'assioma dell'infinito. Fra di esse esistono ovviamente differenti tipi di dipendenza logica, nel senso che esistono formulazioni dotate di una potenza teorica, tale da consentire la derivazione di certe altre forme, in congiunzione agli assiomi sin qui dati.

In aggiunta al potente assioma di rimpiazzamento, che non abbiamo ancora dato, tutte queste forme risultano però essere logicamente equivalenti e dunque il problema di scegliere l'assioma dal quale partire è un problema relativamente apparente.

Normalmente esistono due vie, legate a come si vuol immaginare la struttura dei numeri naturali, una volta che li si sia trasposti in termini insiemistici. La

---

[371] Cfr. Bernays, P., *A System of Axiomatic Set Theory, VI*, *op. cit.* Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 44

[372] Cfr. Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 45: «Dealing with natural numbers without having the set of all natural numbers does not cause more inconvenience than, say, dealing with sets without having the set of all sets». Cfr. anche Quine, W., *Set Theory and Its Logic*, Harvard University Press, Cambridge, 1963, p. 119

differenza sostanziale consiste nel considerarli oggetti di tipo transitivo oppure no, cioè come collezioni dei propri predecessori oppure no.

Queste due concezioni sono riferibili rispettivamente a von Neumann[373] e a Zermelo[374]. Mentre per il primo l'insieme dei numeri naturali poteva essere pensato partendo da una collezione che includesse lo '0', denotante '$\emptyset$' e da quegli elementi tali che per ogni n, $n+1$ denotava l'insieme $(n \cup \{n\})$[375], per l'altro $\boldsymbol{N}$ poteva essere immaginato come l'insieme avente come membri '0', denotante anche qui '$\emptyset$', e tale che se n apparteneva a tale insieme, allora anche $\{n\}$ era sua elemento.

Le due collezioni sono allora così rappresentabili:

$$vonN(X) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\}, \ldots\Big\}$$[376]

$$Zer(X) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \Big\{\{\{\emptyset\}\}\Big\}, \ldots\Big\}$$[377]

Concettualmente la differenza sta nel fatto che nel primo caso, immaginando un insieme infinito come quello di von Neumann, si finisce per identificare i numeri naturali con gli "ordinali finiti", mentre nell'altro caso questo non accade.

La definizione ci pare più intuitiva e, relativamente a questo assioma, quello dell'infinito, ci discosteremo da quello assunto originariamente da Zermelo per adottare una versione che tenga conto della concezione neumanniana.

La ragione di ciò può essere rintracciata nel fatto che, a livello finito, il concetto di "ordinalità" e quello di "cardinalità" coincidono[378], per così dire, e

373 Neumann, J. von, *Zur Einführung der transfiniten Zahlen*, «Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio scientiarum mathematicarum», vol. 1, 1923, pp. 199-208, in Neumann, J. von, *Collected Works*, vol. 1, a cura di A. H. Taub, Pergamon, Oxford-New York-Toronto-Sydney-Paris-Frankfurt, 1961, pp. 24-34

374 Zermelo, E., *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I*, *op. cit.*

375 Ad esempio per von Neumann $n = \{0,1,2,3, \ldots, n-2, n-1\}$.

376 Con '$vonN(X)$' si intende "X è un insieme con un numero illimitato di elementi, costruiti nel senso di von Neumann".

377 Con '$Zer(X)$' si intende "X è un insieme con un numero illimitato di elementi, costruiti nel senso di Zermelo".

378 Nell'insieme pensato da von Neumann accade che ogni due elementi differenti dell'insieme, l'uno possiede l'altro non solo come membro ma anche come sottoinsieme. Fatto questo che stabilisce tra essi anche un ordine. Pertanto la relazione fondamentale '$\in$' coincide con '$<$' per i numeri ordinali così definiti. Invece tra due insiemi differenti dell'insieme immaginato da Zermelo, tali che l'uno sia membro dell'altro, non accade che l'insieme-elemento sia anche sottoinsieme della classe che lo contiene. Infatti $\{\emptyset\} \in \big\{\{\emptyset\}\big\}$ ma $\emptyset \notin^{*} \big\{\{\emptyset\}\big\}$. Un ulteriore vantaggio (perlopiù storico-teorico), riscontrato da Ebbinghaus (cfr. Ebbinghaus, H.-D. *et alii*,

pertanto ci pare più naturale la corrispondenza tra i numeri naturali e gli insiemi individuati da von Neumann, poiché questi ne costituirebbero immediatamente anche una misura cardinale abbastanza «naturale»; mentre, nel caso degli insiemi individuati da Zermelo, tale aspetto assume un'importanza secondaria e l'accento spostato sulla progressione con cui si succedono fondamentalmente gli elementi, espressa dal fatto che se X appartiene all'insieme infinito (di Zermelo), allora anche $\{X\}$ lo è[379].

Il nostro assioma allora sarà così formulato:

Assioma dell'infinito. $\boldsymbol{I}$ $\exists X\big[(\emptyset \in X) \wedge \forall Z\big((Z \in X) \rightarrow (Z \cup \{Z\} \in X)\big)\big]$

Esistono comunque altre formulazioni ancora, attraverso cui dare l'assioma dell'infinito. Tuttavia in presenza del potente assioma di rimpiazzamento, che verrà dato in seguito, tutte queste forme risulteranno tra loro equivalenti[380] e dunque non discuteremo oltre qui le differenze specifiche[381], accontentandoci dell'assioma $\boldsymbol{I}$.

Ci pare importante però sottolineare che l'insieme in questione è un insieme puro. Esso infatti viene costruito partendo dall'insieme fortemente vuoto, che è un insieme puro, e iterando certe operazioni a partire da esso. Così nell'insieme infinito sopra dato, non vi sono che insiemi puri.

Sebbene ciò non fornisca nuovi strumenti alla parte non-standard, la sua postulazione in questi termini sarà per noi molto importante nella parte successiva del lavoro. Nostro compito è qui dimostrare la possibilità di definire adeguatamente il concetto di "numero reale" anche all'interno di ZFU_1.

Zahlen, *op. cit.*, p. 362), è poi la maggior vicinanza dell'idea di von Neumann a quella originaria di Cantor (cfr. Cantor, G., *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, *op. cit.*, p. 289-92). Cfr. Lombardo Radice, L., *L'infinito*, Editori Riuniti, Roma, 1981; 1983[3], pp. 72-9

379 I numeri naturali non sono allora identificati con gli ordinali finiti. Per Zermelo i numeri naturali sono da immaginarsi come segue: $0 = \emptyset, 1 = \{0\}, 2 = \{1\}, 3 = \{2\}, \dots, n-1 = \{n-2\}, n = \{n-1\}, \dots$ Cfr. Ebbinghaus, H.-D., *et alii*, *Zahlen*, *op. cit.*, pp. 361-2. Weyl, H., *Über die Definition der mathematischen Grundbegriffe*, *op. cit.*, p. 303: «Dedekinds berühmte Schrift: *Was sind und was sollen die Zahlen?* bezeichnete einen höchst bedeutsamen Schritt in dieser Richtung, und neuerdings hat Zermelo durch eine an sich zwar willkürliche, aber doch zweckmäßige Definition den Zahlenbegriff zu einem logisch eindeutig determinierten erhoben, in dem als *0* diejenige einzige Menge eingeführt wird, die kein Element enthält – ihre Existenz ist durch ein besonders Axiom postuliert – darauf *1* als die von dem einzigen Ding *0* gebildete Menge, *2* als die von dem einzigen Element gebildete Menge usf».

380 Cfr. Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, pp. 48-9

381 Un'esauriente trattazione della questione è rintracciabile in: Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, pp. 44-9

Per giungere a tale obiettivo, dovremo però dimostrare alcune caratteristiche fondamentali dell'insieme postulato mediante $\boldsymbol{I}$. La prima concerne la sua unicità, per provare la quale occorre qui definire il concetto di "minimalità".

Diciamo allora che un insieme X è "minimale" se:

Definizione 14.67 $Min(X) \stackrel{\text{def}}{=} [(Y = \{Z_1, \ldots, Z_n\}) \wedge (\bigcap Y = Z_i)]$

Possiamo provare congiuntamente la condizione di unicità e di minimalità dell'insieme X postulato dall'assioma $\boldsymbol{I}$:

Teorema 14.55

$$\vdash_{ZFU_1} \exists_1 X\big[(\emptyset \in X) \wedge \forall Z\big((Z \in X) \to (Z \cup \{Z\} \in X)\big)\big] \wedge Min(X)$$

Dimostrazione[382]

Le condizioni fondamentali che determinano l'insieme X sono due: 1) $\emptyset \in X$; 2) $[(Z \in X) \to (Z \cup \{Z\} \in X)]$. Sia Y un insieme che soddisfa le medesime condizioni e che esiste per l'assioma $\boldsymbol{I}$. Per l'assioma $\boldsymbol{Pw}$ possiamo considerare tutti quei sottoinsiemi di Y che soddisfano le condizioni 1) e 2). Esso sarà allora un elemento di $\wp(Y)$, che come tale esisterà per l'assioma di comprensione. Sia esso l'insieme Y_1. Considerando il più piccolo sottoinsieme di Y_1, che soddisfa le condizioni 1) e 2), è possibile verificare che esso è eguale ad X, in virtù del fatto che contengono gli stessi elementi. Giacché $\emptyset$ e $(Z \cup \{Z\})$ appartengono ad ogni elemento di Y_1, a maggior ragione essi apparterranno a $\bigcap Y_1$. Allora in virtù dell'eguaglianza e dell'assioma $\boldsymbol{E}$, vale anche che $[(\emptyset \in X) \wedge (Z \cup \{Z\} \in X)]$. La minimalità di X può allora dimostrarsi così: sia Y_2 un insieme anch'esso soddisfacente le condizioni 1) e 2). Allora anche $(X \cap Y_2)$ soddisferà le medesime proprietà, in base a quanto sinora affermato e varrà pertanto che $[(X \cap Y_2) \subseteq X \subseteq Y]$. Perciò $[(X \cap Y_2) \in Y_1]$ e dunque $[X \subseteq (X \cap Y_2)]$ e $(X \subseteq Y_2)$. L'unicità a questo punto deriva dal fatto che per qualunque altro insieme Y_3 soddisfacente le condizioni 1) e 2), varrà che $[(X \subseteq Y_3) \wedge (Y_3 \subseteq X)]$ e dunque $X = Y_3$ per il teorema 14.7, regola 3 e 1.

[382] Cfr. Abian, A., *Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, *op. cit.*, pp. 102-3

Diamo di seguito alcune definizioni per denotare più agevolmente gli insiemi così introdotti.

Innanzitutto, in virtù dell'unicità dell'insieme infinito X, possiamo introdurre una nuova costante individuale 'ω', che soddisferà la seguente proprietà:

$$(X = \omega) \wedge \left[(\emptyset \in \omega) \wedge \forall Z \left((Z \in \omega) \to \left((Z \cup \{Z\}) \in \omega \right) \right) \right]$$

Fisseremo allora l'uso della nuova costante individuale mediante il seguente:

Assioma dell'infinito. $\boldsymbol{I}^*$

$$\left[(\emptyset \in \omega) \wedge \forall Z \left((Z \in \omega) \to (Z \cup \{Z\} \in \omega) \right) \right]$$

Inoltre diremo che ciascun elemento di ω diverso da $\emptyset$ è un "successore":

Definizione 14.68 $Z^+ \overset{\text{def}}{=} (Z \cup \{Z\})$

Definizione 14.69[383] $n^+ \overset{\text{def}}{=} Z^+$

Allora ω risulterà essere l'insieme contenente lo 0 e tutti i suoi successori, proprio come accade per l'insieme di tutti i numeri naturali. È plausibile dunque pensare o interpretare l'insieme ω come $\boldsymbol{N}$. Ciò dipende dalla validità del seguente enunciato:

Teorema 14.56 $\vdash_{ZFU_1} \forall X \left[\left[(X \subseteq \omega) \wedge (\emptyset \in X) \wedge \forall Z (Z^+ \in X) \right] \to (X = \omega) \right]$

Dimostrazione

Sia per ipotesi $[(X \subseteq \omega) \wedge (\emptyset \in X) \wedge \forall Z (Z^+ \in X)]$, dove non occorrono variabili libere. Allora varrà per ipotesi che $(X \subseteq \omega)$ e, per il teorema 14.55 $(\omega \subseteq X)$.

[383] Utilizziamo qui 'n^+' per indicare il numero naturale successore del numero naturale 'n'.

Così per il teorema 14.7, regola 3 e 1, varrà $(X = \omega)$. Per MD* si dedurrà quindi che $\left[[(X \subseteq \omega) \wedge (\emptyset \in X) \wedge \forall Z(Z^{+} \in X)] \rightarrow (X = \omega)\right]$ e, per l'assioma 1, regola 3 e 1, $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \left[[(X \subseteq \omega) \wedge (\emptyset \in X) \wedge \forall Z(Z^{+} \in X)] \rightarrow (X = \omega)\right]\right]$. Infine per la regola 5 si avrà che $\left[(P \rightarrow P) \rightarrow \forall X\left[[(X \subseteq \omega) \wedge (\emptyset \in X) \wedge \forall Z(Z^{+} \in X)] \rightarrow (X = \omega)\right]\right]$ e per la regola 1 $\forall X\left[[(X \subseteq \omega) \wedge (\emptyset \in X) \wedge \forall Z(Z^{+} \in X)] \rightarrow (X = \omega)\right]$.

Se interpretiamo effettivamente ω come l'insieme dei numeri naturali, allora ogni suo sottoinsieme contenente lo 0 (cioè $\emptyset$) ed ogni suo successore (cioè Z^{+}, per ogni Z) sarà uguale ad ω e dunque all'insieme di tutti i numeri naturali.

Il teorema 14.56 è talvolta chiamato anche teorema di "induzione finita" o "matematica"[384].

Disponendo di una definizione per lo 0, per ciascun successore Z^{+} e per l'induzione finita, garantita dal teorema 14.56, possiamo osservare come la postulazione di ω ci consenta un primo approccio effettivo all'universo dei numeri naturali.

Senza pretese di rigore, ci limitiamo ad osservare infatti che gli elementi sin qui disposti soddisfano i requisiti dati da una terna di Peano[385], così riassumibili:

1) ***N*** è l'insieme dei numeri naturali;

2) 0 è un numero naturale;

3) ogni successore è un numero naturale.

Dai tre concetti primitivi sopra esposti, cioè quello di "numero naturale", "primo elemento" e "successore di un qualunque altro elemento", Peano formulò i suoi famosi celebri assiomi, che così riassumiamo[386]:

---

[384] Cfr. Abian, A., *Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, *op. cit.*, p. 105

[385] Peano, G., *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Bocca, Torino, 1889, pp. 83-97. Talvolta tali assiomi sono anche detti di Dedekind-Peano o di Grassmann-Dedekind-Peano. Cfr. Wang, H., *The Axiomatization of Arithmetic*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 22, n. 2, 1957, pp. 145-58

[386] Cfr. Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 48, nota 1

1) $\forall n(0 \neq^* n^+)$;[387]

2) $\forall n[(n \neq^* 0) \rightarrow \exists n_1({n_1}^+ = n)]$;

3) $\forall X\big[[(X \subseteq \boldsymbol{N}) \wedge (\emptyset \in X) \wedge \forall Z(Z^+ \in X)] \rightarrow (X = \boldsymbol{N})\big]$

L'assioma 1) afferma che lo 0 non è successore di alcun numero e dunque non ammette nemmeno un immediato predecessore. Esso costituisce l'elemento di partenza.

L'assioma 2) dice che ogni elemento di $\boldsymbol{N}$, diverso dallo zero, è successore di almeno un altro numero naturale.

Infine l'assioma 3) costituisce il teorema di induzione matematica sopra visto.

Accettando di parlare di sottoinsiemi di $\boldsymbol{N}$, piuttosto che di proprietà di numeri naturali, è possibile esaminare anche all'interno di ZFU_1 l'aritmetica di Peano al primo ordine e verificare come gli usuali assiomi adottati per essa[388] siano tutti soddisfacibili. A tale scopo sarà necessario provare alcuni fondamentali teoremi, come quello di ricorsione generalizzata, mediante il quale risulterà possibile definire ricorsivamente le operazioni di base tra numeri naturali e verificarne certe rilevanti proprietà.

Tuttavia qui non ci inoltreremo in tali questioni, per le quali è possibile consultare appropriate monografie[389]; ci limiteremo invece a constatare come la costruzione dei comuni sistemi numerici possa essere sviluppata in maniera standard anche all'interno del nostro sistema formale, sebbene finora sia stato possibile costruire (intuitivamente) solo $\boldsymbol{N}$. Occorreranno ulteriori accorgimenti ed ulteriori teoremi per mostrare che in ZFU_1 è possibile dare un concetto di Continuo soddisfacente o, se non altro, non meno adeguato di quello comunemente trattato in sistemi come ZF.

Per il momento definiremo meglio i due concetti di "finito" e di "infinito", che a questo punto risulteranno più chiari alla luce di quanto detto:

---

[387] Dove 'n' è un numero naturale.

[388] Cfr. Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, *op. cit.*, pp. 154-5. Ebbinghaus, H.-D., *et alii*, *Zahlen*, *op. cit.*, pp. 18-9

[389] Cfr. Landau, E., *Grundlagen der Analysis*, Akademische Verlagsesellschaft, Leipzig, 1930; Chelsea Publishing, New York, 1948, pp. 1-18. Mendelson, E., *Foundations of Analysis and Number Systems*, Academic Press, New York 1973; Dover, New York, 2001, pp. 53-83 . Abian, A., *Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, *op. cit.*, pp. 205-11. Feferman, S., *The Number Systems*, Chelsea, New York, 1964; 1989[2], pp. 64-83. Ebbinghaus, H.-D., *et alii*, *Zahlen*, *op. cit.*, pp. 14-9. Panza, M., *Nombres: éléments de mathématiques pour philosophes*, Diderot, Lyon, 1999; ENS, Lyon, 2007[2], pp. 81-142. Hutton, R., *Number Systems, an Intuitive Approach*, Intext, Scranton-Toronto-London, 1971, pp. 26-184. Wolf, F., *Number Systems and their Uses*, *op. cit.*, pp. 115-241

Definizione 14.70 $Fin(X) \overset{\text{def}}{\equiv} [(X \approx Y) \wedge (Y \subset \omega)]$

Definizione 14.71 $Inf(X) \overset{\text{def}}{\equiv} \neg^{*} Fin(X)$

La definizione 14.70 dice che un insieme X è finito se esiste una biiezione con un sottoinsieme di ω e cioè, intuitivamente parlando, con un insieme naturale, che ne determinerà anche la "cardinalità"[390].

La definizione 14.71 invece afferma che un insieme è infinito se esso non ha alcuna corrispondenza biunivoca con alcun elemento di ω.

Come vedremo, anche in ZFU_1 esistono vari gradi di "infinità", a seconda che corrispondenze biiettive siano ammissibili tra un certo insieme X e l'insieme ω o tra X ed insiemi eventualmente più grandi.

Per poter verificare ciò e procedere alla costruzione di $\boldsymbol{R}$, è necessario a questo punto provare che esistono insiemi più estesi di ω.

[390] Questa strategia corrisponde grosso modo alla prima delle vie indicate da Beth per definire un insieme "finito" e ci pare concordare con la scelta dell'assioma $\boldsymbol{I}$. Cfr. Beth, E., *Les fondements logique des mathématiques*, *op. cit.*, p. 141 : «Partant d'une définition inductive de la notion d'un nombre naturel ou fini, on peut définir les ensembles finis comme les ensembles dont le nombre cardinal ou le nombre ordinal est un nombre fini». A questo stadio dello sviluppo assiomatico di ZFU_1 non è possibile adottare, senza perdita di generalità, alcune delle classiche definizioni di "infinito" (per esempio quella di Dedekind), poiché in talune gioca un ruolo essenziale l'assioma di scelta, di cui non abbiamo ancora trattato. Cfr. Tarski, A., *Sur les ensembles finis*, «Fundamenta Mathematicae», vol. 6, 1924, pp. 45-95 ; in Tarski, A., *Collected Papers*, vol. 1, a cura di S. Givant, R. McKenzie, Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgart, 1986, pp. 67-117

11.2 Il concetto di Continuo

11.2.1 Il teorema di Cantor

Per poter definire adeguatamente il concetto di Continuo, avevamo assunto l'assioma $\boldsymbol{Pw}$. Tuttavia avevamo anche osservato come esso non fosse di per sé sufficiente a dotare ZFU_1 di un'appropriata nozione di infinito, che non poteva essere data sulla base degli assiomi scelti a meno dell'assioma dell'infinito.

Senza un adeguato concetto di infinito del resto non è possibile discutere dei numeri reali come normalmente avviene. La postulazione allora dell'assioma $\boldsymbol{I}$ consente un notevole salto di qualità al sistema che qui stiamo presentando.

Finora non abbiamo definito i concetti di "numero ordinale" né quello di "numero cardinale". Ci siamo invece limitati ad una considerazione di tipo intuitivo ed abbiamo dato alcune definizioni, concernenti il concetto primitivo di "equinumerosità" tra insiemi.

Sfruttando ancora questo tipo di concetto, dimostreremo che è possibile discutere all'interno di ZFU_1 un concetto di Continuo analogo a quello classico. La nozione di "equinumerosità" è ancora troppo vaga per parlare di rapporti di grandezza tra cardinali. Ma sarà sufficiente per apprezzare il seguente:

Teorema 14.57 $\vdash_{ZFU_1} \forall X\big(X \prec \wp(X)\big)$[391]

Dimostrazione

Possiamo considerare due casi: il primo riguarda quello in cui X è un insieme finito; l'altro quello in cui X risulta infinito. Sappiamo dall'assioma $\boldsymbol{Pw}$ che il numero dei sottoinsiemi possibili per un dato insieme X è $2^{|X|}$. Così, nel caso in cui $Fin(X)$ sia vero, il teorema segue banalmente per ovvie considerazioni di tipo aritmetico: infatti è vero che $\forall n \in \boldsymbol{N}(2^n > n)$[392]. Consideriamo invece il caso più interessante e meno intuitivo, in cui valga l'ipotesi $Inf(X)$. Per mostrare la validità dell'enunciato in questione, occorrerà allora provare che esiste un'iniezione da X in $\wp(X)$ e che non esiste alcuna suriezione da X su

---

[391] Questo teorema è generalmente noto come "teorema di Cantor". Cfr. Cantor, G., *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*, «Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung», vol. 1, 1891, pp. 75-8. Cantor, G., *Gesammelte Abhandlungen*, *op. cit.*, pp. 278-81

[392] Per induzione: sia $|X| = 0$ e $\wp(X) = 2^0 = 1$. Ma $1 > 0$. Sia per ipotesi $|\wp(X)| = n$: allora $|\wp(X)| = 2^n$ e $n < 2^n$, per qualunque numero naturale n assegnato all'insieme X.

$\wp(X)$. Procederemo innanzitutto alla dimostrazione dell'esistenza di una funzione iniettiva del tipo considerato: sia data una funzione f, tale che $\Delta_1(f) = X$ e $f(m) = \{m\}$, per ogni $m \in X$. Allora $\Delta_2(f) = X_1$ e $X_1 = \{\{m\} | \forall m \in X(f(m) = \{m\})\}$. La funzione così definita porrà in corrispondenza ogni elemento di X col proprio *singleton*. Siccome ciascuno di tali *singletons* esiste per l'assioma della coppia ed è unico per l'estensionalità, esso sarà elemento di $\wp(X)$ (cioè $(X_1 \subseteq \wp(X))$). Inoltre una tale funzione risulta essere iniettiva, in quanto $\forall q_1 \in X \forall q_2 \in X[(f(q_1) = f(q_2)) \rightarrow (q_1 = q_2)]$. Così: $f: X \mapsto \wp(X)$ e per la definizione 14.60 $(X \preccurlyeq \wp(X))$. Si consideri ora l'insieme $X_2 = \{m | (m \in X_2) \wedge (m \notin^* g(m))\}$. Tale insieme è definito partendo dall'ipotesi secondo cui esiste una funzione suriettiva g da X su $\wp(X)$[393] e prendendo come condizione di definizione per l'insieme X_2 quella per la quale ad esso appartengono tutti quegli elementi di X che non appartengono all'elemento di $\wp(X)$ associato dalla funzione g. Così $(X_2 \subseteq X)$ e dunque $(X_2 \in \wp(X))$; ma allora lo stesso X_2 dovrà avere almeno un elemento in X nella corrispondenza stabilita da g. Sia tale elemento p. È possibile osservare a questo punto che o $(p \in X_2)$ o $(p \notin^* X_2)$. Ipotizziamo il primo caso e cioè $(p \in X_2)$: allora, per la proprietà che definisce X_2, seguirà $(p \notin^* X_2)$ e dunque $[(p \in X_2) \rightarrow (p \notin^* X_2)]$ per MD*. Supponiamo invece che $(p \notin^* X_2)$: allora, sempre per la proprietà che definisce X_2, seguirà $(p \in X_2)$. Ancora per MD* si avrà $[(p \notin^* X_2) \rightarrow (p \in X_2)]$ e, per la definizione dell'operatore '$\leftrightarrow$', $[(p \in X_2) \leftrightarrow (p \notin^* X_2)]$. Inoltre, per la tautologia $[(A \leftrightarrow \neg^* A) \rightarrow (A \wedge \neg^* A)]$ e la regola 3 ad essa applicata, si avrà $[[(p \in X_2) \leftrightarrow (p \notin^* X_2)] \rightarrow [(p \in X_2) \wedge (p \notin^* X_2)]]$, donde $[(p \in X_2) \wedge (p \notin^* X_2)]$ per MP. Una simile contraddizione non è però sostenibile all'interno del sistema ZFU_1 e così occorre respingere l'ipotesi di partenza, in base alla quale si era assunta l'esistenza di una funzione suriettiva g da X su $\wp(X)$[394]. Avendo precedentemente dimostrato l'esistenza di una funzione iniettiva, risulta allora che: $(\exists f: X \mapsto \wp(X)) \wedge (\neg^* \exists g: X \twoheadrightarrow \wp(X))$, in virtù dell'assioma 5, regola 3 e 1, applicata due volte. Infine in base alla definizione 14.62 è vero che $(X \prec \wp(X))$ e ciò per un qualunque insieme infinito X, reiterando il medesimo ragionamento. Così $\forall X(X \prec \wp(X))$.

[393] Se ciò fosse vero, allora si potrebbe immaginare che ciascun elemento di X sia posto in corrispondenza biiettiva con un elemento di $\wp(X)$ e che i due insiemi siano per ciò equinumerosi.
[394] Avendo adoperato l'operatore di negazione forte, ciò equivale ad affermare che nessuna funzione suriettiva è possibile tra X e $\wp(X)$, cioè che: $\forall g \neg^*: X \twoheadrightarrow \wp(X)$.

Relativizzando il caso del teorema 14.57 al caso dell'insieme infinito ω, postulato con $\boldsymbol{I}^*$, è possibile dunque affermare che:

Teorema 14.58 $\vdash_{ZFU_1} \big(\omega \prec \wp(\omega)\big)$

Dimostrazione

Per il teorema 14.57 vale $\forall X\big(X \prec \wp(X)\big)$. Così per l'assioma 13 e la regola 3 si avrà che $\forall X\big(X \prec \wp(X)\big) \rightarrow \big(\omega \prec \wp(\omega)\big)$, donde $\big(\omega \prec \wp(\omega)\big)$ per MP.

In base ai teoremi 14.57-58 è possibile osservare che esiste tutta una gerarchia di nuovi insiemi, ciascuno più esteso dell'altro, pur essendo questi ultimi tutti di grandezza infiniti. Infatti varrà che $\omega \prec \wp(\omega)$, $\wp(\omega) \prec \wp\big(\wp(\omega)\big)$, $\wp\big(\wp(\omega)\big) \prec \wp\Big(\wp\big(\wp(\omega)\big)\Big)$, e così via[395].

Per lo sviluppo del concetto di Continuo, sarà per noi interessante considerare i due insiemi ω e $\wp(\omega)$. Diremo allora che un insieme è "numerabile", se:

Definizione 14.72 $Num(X) \stackrel{\text{def}}{=} (X \approx \omega)$

Mentre un insieme X non in corrispondenza biiettiva con ω o con un suo elemento si dirà "più che numerabile":

Definizione 14.73 ${}^{+}Num(X) = \neg^{*}Num(X)$

Possiamo allora dire che l'insieme $\wp(\omega)$ è un insieme più che numerabile in base al teorema 14.58 e alla definizione 14.73. L'esistenza e la notevole estensione di un insieme come $\wp(\omega)$ consentono allora di sviluppare adeguatamente la nozione di Continuo, così come in altre teorie.

[395] Esiste tuttavia un limite a tale progressione, che non è possibile superare, se non facendo ricorso ancora una volta all'assioma di rimpiazzamento.

11.2.2 Elementi sulla costruzione di R

Lo sviluppo del concetto di continuità passa attraverso la definizione del campo dei numeri reali. Avendo mostrato la definibilità insiemistica dei numeri naturali, possiamo ora passare a quella dei numeri reali procedendo per gradi. Possiamo cioè procedere in ZFU_1 alla definizione degli altri sistemi numerici ($\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$), derivanti dall'estensione di $\boldsymbol{N}$ mediante opportune definizioni e giungere alla nozione di numero reale ($\boldsymbol{R}$)[396].

Non procederemo in dettaglio ma esibiremo quegli elementi fondamentali, attraverso cui è possibile sviluppare i sistemi numerici menzionati. Cominceremo dalla nozione di "partizione" di un insieme X, così definibile:

Definizione 14.74

$$Part(Y,X) \stackrel{\text{def}}{=} [\exists Y(X \neq^* \emptyset) \wedge (Y = \{X_1, \dots, X_n\}) \wedge (X_1 \subseteq X) \wedge \dots \wedge (X_n \subseteq X) \wedge$$
$$\wedge \forall Z[(Z \in Y) \rightarrow (Z \neq^* \emptyset)] \wedge \left(\bigcup Y = X\right) \wedge$$
$$\wedge \forall Z_1 \in X \forall Z_2 \in X(Z_1 \neq^* Z_2) \rightarrow (Z_1 \cap Z_2 = \emptyset)]$$

Diciamo allora che una "classe d'equivalenza" è un elemento di una determinata partizione, ossia:

Definizione 14.75 $ClEq(Z) \stackrel{\text{def}}{=} \exists Y[Part(Y,X) \wedge (Z \in Y)]$

Servendoci del concetto di relazione e di prodotto cartesiano introdotti nel paragrafo 10.3 di questo capitolo, diciamo che una relazione $\big(X \subseteq (Y \times Y)\big)$, per $Y \neq^* \emptyset$, si dice "riflessiva", "simmetrica", "transitiva" se si verificano rispettivamente le seguenti condizioni[397]:

Definizione 14.76 $rifl(X) \stackrel{\text{def}}{=} \forall p[(p \in Y) \rightarrow (\langle p,p \rangle \in X)]$

[396] Cfr. Hutton, R., *Number Systems, an Intuitive Approach*, *op. cit.*, p. ix
[397] Cfr. Abian, A., *Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, *op. cit.*, pp. 201-4

Definizione 14.77

$$simm(X) \overset{\text{def}}{=} \forall p \forall q \big[[(p \in Y) \wedge (q \in Y)] \rightarrow [(\langle p, q\rangle \in X) \rightarrow (\langle q, p\rangle \in X)]\big]$$

Definizione 14.78

$$trans(X) \overset{\text{def}}{=} \forall p_1 \forall p_2 \forall p_3 \Big[[(p_1 \in Y) \wedge (p_2 \in Y) \wedge (p_3 \in Y)] \rightarrow$$
$$\rightarrow \big[[(\langle p_1, p_2\rangle \in X) \wedge (\langle p_2, p_3\rangle \in X)] \rightarrow (\langle p_1, p_3\rangle \in X)\big]\Big]$$

Una relazione Y su di un certo insieme $X \neq^* \emptyset$ si dirà "di equivalenza" se la seguente definizione è rispettata:

Definizione 14.79

$$RelEq(Y, X) \overset{\text{def}}{=} \forall Y\big[Rel(Y) \wedge \big(Y \subseteq (X \times X)\big)\big] \wedge rifl(Y) \wedge simm(Y) \wedge trans(Y)$$

Vale che ogni partizione Y di un insieme non-vuoto X dà luogo ad una relazione di equivalenza Y' e viceversa[398].

Se c'è un insieme X, tale che $X \neq^* \emptyset$ e Y è una partizione di X, allora le classi di equivalenza appartenenti a tale partizione saranno tra loro fortemente disgiunte e caratterizzabili da un loro unico elemento, diciamo un "rappresentante" di quella classe. Così se r è un elemento di una classe di equivalenza, corrispondente ad una certa relazione di equivalenza Y' in X, allora la classe di equivalenza a cui appartiene r sarà definita come segue[399]:

Definizione 14.80 $[r] \overset{\text{def}}{=} \{p | (p \in X) \wedge (\langle r, p\rangle \in Y')\}$[400]

Per l'insieme di tutte le classi di equivalenza adotteremo invece la seguente definizione[401]:

---

398 Abian, A., *Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, *op. cit.*, p. 203
399 *Ibidem*, p. 204
400 Qui 'r' sta per un determinato individuo, una costante individuale.
401 Abian, A., *Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, *op. cit.*, p. 204

Definizione 14.81 $Y_{/X} \overset{\text{def}}{=} \{Z|(ClEq(Z)) \wedge (Z \in Part(X))\}$

Con tali strumenti a disposizione potremmo allora intuitivamente definire l'anello commutativo[402] $\boldsymbol{Z}$ in questo modo: sia X_1 una relazione sull'insieme ω $(Rel(X_1) \wedge X_1 \subseteq (\omega \times \omega))$, tale che:

$$\forall n_1 \forall n_2 \forall m_1 \forall m_2 [[\langle\langle n_1, n_2\rangle, \langle m_1, m_2\rangle\rangle \in X_1] \leftrightarrow [(n_1 + m_2) = (m_1 + n_2)]]$$

Una relazione siffatta è una relazione di equivalenza, dal momento che essa risulta dimostrabilmente riflessiva, simmetrica e transitiva.

Possiamo allora rappresentare insiemisticamente un numero intero come una classe di equivalenza della partizione generata dalla relazione di equivalenza X_1 nell'insieme $(\omega \times \omega)$.

Così, in base alla notazione sopra introdotta, è possibile interpretare $\boldsymbol{Z}$ come come $(\omega \times \omega)_{/X_1}$ ed un singolo numero intero come $[\langle m, n\rangle]$:

Definizione 14.82 $\boldsymbol{Z} \overset{\text{def}}{=} (\omega \times \omega)_{/X_1}$

---

[402] $\boldsymbol{Z}$ soddisfa infatti le seguenti 9 condizioni:

1) $\forall m \forall n \forall p \left[\left(m + (n + p) = \left((m + n) + p\right)\right)\right]$
2) $\forall m \forall n[(m + n) = (n + m)]$
3) $\forall m[(m + 0) = m]$
4) $\forall m \exists n[(m + n) = 0]$
5) $\forall m \forall n \forall p \left[\left(m \times (n \times p) = \left((m \times n) \times p\right)\right)\right]$
6) $\forall m \forall n \forall p \left[\left(m \times (n + p) = \left((m \times n) + (m \times p)\right)\right)\right]$
7) $\forall m \forall n \forall p \left[\left((n + p) \times m = \left((n \times m) + (p \times m)\right)\right)\right]$
8) $\forall m \exists n[(m \times n) = (n \times m) = m]$
9) $\forall m \forall n[(m \times n) = (n \times m)]$

Inoltre si dice che $\boldsymbol{Z}$ è un "dominio di integrità" poiché esso soddisfa anche la condizione 10):

10) $\forall m \forall n[((m \neq 0) \wedge (n \neq 0)) \rightarrow ((m \times n) \neq 0)]$

Definizione 14.83 $NumIn(m) \stackrel{\text{def}}{=} \langle m,n\rangle_{/X_1} = [\langle m,n\rangle]$[403]

Trascureremo anche qui la definizione delle operazioni sul sistema numerico $\boldsymbol{Z}$ e la dimostrazione delle relative importanti proprietà, per procedere alla costruzione intuitiva del sistema $\boldsymbol{Q}$. Osserviamo soltanto che: *i)* $\boldsymbol{Z}$ è linearmente ordinato[404], così come $\boldsymbol{N}$; *ii)* in $\boldsymbol{Z}$ i numeri naturali saranno identificabili con le classi di equivalenza $\langle m,n\rangle$, in cui $m \geq n$; *iii)* l'estensione ottenuta consente intuitivamente di generalizzare l'operazione di sottrazione, che in $\boldsymbol{N}$ non era sempre possibile.

Veniamo ora al campo[405] $\boldsymbol{Q}$. Possiamo allora definire una relazione X_2 sull'insieme $(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Z})$ $\Big(Rel(X_2) \wedge X_2 \subseteq \big(\boldsymbol{Z} \times (\boldsymbol{Z} - \{\emptyset\})\big)\Big)$, tale che:

$$\forall n_1 \forall n_2 \forall m_1 \forall m_2 \big[[\langle\langle n_1,n_2\rangle,\langle m_1,m_2\rangle\rangle \in X_2] \leftrightarrow [(n_1 \cdot m_2) = (m_1 \cdot n_2)]\big]$$

Analogamente al caso dei numeri interi possiamo definire l'insieme dei numeri razionali ed ogni singolo numero razionale in questo modo:

Definizione 14.84 $\boldsymbol{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \big(\boldsymbol{Z} \times (\boldsymbol{Z} - \{\emptyset\})\big)_{/X_2}$

---

403 Per le definizioni qui adottate e per la dimostrazione delle importanti proprietà dell'anello commutativo $\boldsymbol{Z}$, qui solo schizzato, rinviamo a: Abian, A., *Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, *op. cit.*, pp. 201-19. Mendelson, E., *Number Systems and the Foundations of Analysis*, *op. cit.*, pp. 86 e ss.

404 Cioè è possibile definire in $\boldsymbol{Z}$ una relazione K, tale che $(\langle m,n\rangle \in K) \leftrightarrow \big((n-m) \in \boldsymbol{N}\big)$. Allora possiamo pensare alla relazione K come alla relazione '≤'. Così essa soddisferà in $\boldsymbol{Z}$ le seguenti condizioni:

1) $\forall m[m \leq m]$
2) $\forall m \forall n\big[\big((m \leq n) \wedge (n \leq m)\big) \rightarrow (m = n)\big]$
3) $\forall m \forall n \forall p\big[\big((m \leq n) \wedge (n \leq p)\big) \rightarrow (m \leq p)\big]$
4) $\forall m \forall n\big[\big((m \leq n) \vee (n \leq m)\big)\big]$

Cfr. Ebbinghaus, H.-D., *et alii*, *Zahlen*, *op. cit.*, p. 21

405 $\boldsymbol{Q}$ è un "campo" in quanto soddisfa le proprietà 1)-10) viste per i domini di integrità e in aggiunta soddisfa due ulteriori proprietà:

11) $\forall m\big[(m \neq 0) \rightarrow \exists n\big((m \times n) = 1\big)\big]$
12) $[0 \neq 1]$

Definizione 14.85 $NumRaz(m) \stackrel{\text{def}}{=} \langle m,n\rangle_{/X_2} = [\langle m,n\rangle]$

Anche qui si possono dimostrare le comuni proprietà dell'aritmetica razionale ed alcune rilevanti proprietà che rendono $\boldsymbol{Q}$ un campo incompleto[406]. Rinviamo tale discussione ai luoghi già indicati[407]. Ci limitiamo a segnalare soltanto che: *i)* $\boldsymbol{Q}$ è numerabile; *ii)* $\boldsymbol{Q}$ è totalmente ordinato[408], così come $\boldsymbol{Z}$; *iii)* in esso i numeri interi saranno rappresentati da quelle classi di equivalenza $\langle m,n\rangle$, in cui $n = 1$; *iv)* la sua definizione consente intuitivamente di generalizzare l'operazione di divisione, non sempre possibile in $\boldsymbol{Z}$.

Passiamo quindi alla definizione di numero reale, che risulterà utile per comprendere il concetto di continuità in relazione ad alcune definizioni, di cui ci serviremo nei capitoli successivi.

Il passaggio ad $\boldsymbol{R}$ è dovuto alla necessità di definire adeguatamente la nozione di continuità in maniera da ottenere un campo (archimedeo[409]) completo[410], privo di «lacune» (o *gaps*), che un campo come $\boldsymbol{Q}$ invece presenta[411] nonostante la propria densità[412].

L'introduzione mediante definizione degli elementi di $\boldsymbol{R}$ può avvenire in vari modi: definendo ad esempio le successioni di Cauchy oppure utilizzando il metodo delle sezioni di Dedekind. Noi qui seguiremo quest'ultima strategia.

---

406 $\boldsymbol{Q}$ è incompleto poiché in esso esistono dei *gaps*, cioè delle "lacune".

407 Cfr. Abian, A., *Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, *op. cit.*, pp. 201-19 e Mendelson, E.,

408 Cioè è possibile definire in $\boldsymbol{Q}$ una relazione K', tale che $(\langle m,n\rangle \in K') \leftrightarrow \big((n-m) \in \boldsymbol{Q}^+\big)$, dove '$\boldsymbol{Q}^+$' sta per l'insieme dei numeri razionali maggiori di zero più lo 0. Allora possiamo pensare alla relazione K' come alla relazione '$\leq$'. Così anch'essa soddisferà in $\boldsymbol{Q}$ le seguenti condizioni:

1) $\forall m[m \leq m]$
2) $\forall m \forall n\big[\big((m \leq n) \wedge (n \leq m)\big) \rightarrow (m = n)\big]$
3) $\forall m \forall n \forall p\big[\big((m \leq n) \wedge (n \leq p)\big) \rightarrow (m \leq p)\big]$
4) $\forall m \forall n\big[\big((m \leq n) \vee (n \leq m)\big)\big]$

Cfr. Ebbinghaus, H.-D., *et alii*, *Zahlen*, *op. cit.*, p. 23

409 Un campo si dice "archimedeo" se e solo se: $\forall m \forall n\Big[\big((0 < m) \wedge (0 < n)\big) \rightarrow \exists p\Big((p \in$ $\boldsymbol{N} \wedge p \times m > n$. Tal proprietà è dimostrabile già per il campo $\boldsymbol{Q}$.

410 Un campo si dice completto se e solo se non esistono in esso delle lacune.

411 Un *gap* è banalmente costituito da $\sqrt{2}$, che non può mai essere uguale ad un numero razionale. Cfr. Mendelson, E., *Number Systems and the Foundations of Analysis*, *op. cit.*, pp. 186-90

412 L'insieme $\boldsymbol{Q}$ si dice "denso" poiché $\forall m \forall n\big[[(m \in \boldsymbol{Q}) \wedge (n \in \boldsymbol{Q}) \wedge (m < n)] \rightarrow \exists p[(p \in$ $\boldsymbol{Q} \wedge m < p < n$.

Per eliminare la presenza di *gaps* in $\boldsymbol{Q}$, determineremo in esso dei tagli, detti "tagli di Dedekind", costituiti da coppie ordinate $\langle X, Y\rangle$, dove X e Y sono sottoinsiemi di $\boldsymbol{Q}$ e le seguenti tre condizioni fondamentali sono soddisfatte:

1) $[(X \neq^* \emptyset) \wedge (Y \neq^* \emptyset)]$

2) $[(X \cup Y) = \boldsymbol{Q}]$

3) $\big[\big((m \in X) \wedge (n \in Y)\big) \rightarrow (m < n)\big]$

Definizione 14.86

$$Cut(\langle X, Y\rangle) \stackrel{\text{def}}{=} [[(X \neq^* \emptyset) \wedge (Y \neq^* \emptyset)] \wedge [(X \cup Y) = \boldsymbol{Q}] \wedge \wedge \big[\big((m \in X) \wedge (n \in Y)\big) \rightarrow (m < n)\big]\big]$$ [413]

Si osservino ora le seguenti definizioni[414]:

Definizione 14.87 $UppB(n, X) \stackrel{\text{def}}{=} \forall m[(m \in X) \rightarrow (m \leq n)]$[415]

Definizione 14.88 $LowB(n, X) \stackrel{\text{def}}{=} \forall m[(m \in X) \rightarrow (n \leq m)]$[416]

Definizione 14.89 $Babov(X) \stackrel{\text{def}}{=} \exists n[UppB(n, X)]$[417]

Definizione 14.90 $Bbel(X) \stackrel{\text{def}}{=} \exists n LowB(n, X)$[418]

Definizione 14.91 $Bounded(X) \stackrel{\text{def}}{=} [Babov(X) \wedge Bbel(X)]$[419]

---

[413] Con '$Cut(\langle X, Y\rangle)$' intenderemo dire che la coppia ordinata $\langle X, Y\rangle$ è un taglio in $\boldsymbol{Q}$.
[414] Cfr. Mendelson, E., *Number Systems and the Foundations of Analysis*, *op. cit.*, pp. 193-4
[415] n è un "*upper bound*" dell'insieme di razionali X.
[416] n è un "*lower bound*" dell'insieme di razionali X.
[417] L'insieme di razionali X è superiormente limitato dall'elemento n.
[418] L'insieme di razionali X è inferiormente limitato dall'elemento n.

Definizione 14.92 $Max(n,X) \stackrel{\text{def}}{=} \left[(n \in X) \wedge \forall m\big((m \in X) \to (m \leq n)\big)\right]$[420]

Definizione 14.93 $Min(n,X) \stackrel{\text{def}}{=} \left[(n \in X) \wedge \forall m\big((m \in X) \to (n \leq m)\big)\right]$[421]

In base alle definizioni 14.87-93 è possibile ora definire i concetti di "*least upper bound*"[422] e di "*greatest lower bound*"[423] di un certo sottoinsieme X di $\boldsymbol{Q}$:

Definizione 14.94

$$lub(n,X) \stackrel{\text{def}}{=} \left[UppB(n,X) \wedge \forall m\big(UppB(m,X) \to (n \leq m)\big)\right]$$

Definizione 14.95

$$glb(n,X) \stackrel{\text{def}}{=} \left[LowB(n,X) \wedge \forall m\big(LowB(m,X) \to (m \leq n)\big)\right]$$

Alcune proprietà di cui godono i sottoinsiemi dotati di lub o di glb sono[424]:

1) l'unicità del lub o del glb;
2) la possibilità per l'estremo superiore o inferiore di appartenere o meno all'insieme;
3) la diversità dell'insieme dall'insieme vuoto;
4) l'essere superiormente o inferiormente limitati;

---

[419] L'insieme di razionali X è limitato se e solo se esso è inferiormente e superiormente limitato.
[420] n è l'elemento massimo dell'insieme di razionali X.
[421] n è l'elemento minimo dell'insieme di razionali X.
[422] Anche detto "estremo superiore" dell'insieme di razionali X.
[423] Anche detto "estremo inferiore" dell'insieme di razionali X.
[424] Cfr. Mendelson, E., *Number Systems and the Foundations of Analysis*, *op. cit.*, pp. 199-201

5) la coincidenza tra l'elemento massimo o minimo rispettivamente con il lub o con il glb.

Si dice allora che il campo ordinato[425] $\boldsymbol{R}$ ha la "proprietà del lub" se e solo se ogni sottoinsieme non-vuoto di $\boldsymbol{R}$ che è superiormente limitato possiede un lub. Mentre si dice che il campo ordinato $\boldsymbol{R}$ ha la "proprietà del glb" se e solo se ogni sottoinsieme non-vuoto di $\boldsymbol{R}$ che è inferiormente limitato possiede un glb.

Così $\boldsymbol{R}$ è un campo ordinato che possiede la proprietà del lub se e solo se $\boldsymbol{R}$ possiede la proprietà del glb [426].

Diciamo allora che è possibile definire una relazione di equivalenza X_3 nell'insieme $(\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{Q})$ $\big(Rel(X_3) \wedge X_3 \subseteq (\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{Q})\big)$, definendo come equivalenti due tagli di Dedekind se:

$$\begin{gathered}\forall X_1 \forall X_2 \forall Y_1 \forall Y_2 \big[[\langle\langle X_1, Y_1\rangle, \langle X_2, Y_2\rangle\rangle \in X_3]\big] \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \Big[\Big[\Big(\big(\langle X_1, Y_1\rangle \in (\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{Q})\big) \wedge \big(\langle X_2, Y_2\rangle \in (\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{Q})\big)\Big) \wedge \\ \wedge [Cut(\langle X_1, Y_1\rangle) \wedge Cut(\langle X_2, Y_2\rangle)] \wedge \\ \wedge \big[[\forall m_1 \in X_1 \forall n_2 \in Y_2 (m_1 \leq n_2)] \wedge [\forall m_2 \in X_2 \forall n_1 \in Y_1 (n_1 \geq m_2)]\big]\Big]\end{gathered}$$

Allora $\boldsymbol{R}$ sarà l'insieme di tutte le classi di equivalenza ottenute con riferimento alla relazione di equivalenza X_3:

Definizione 14.96 $\boldsymbol{R} \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{Q})_{/X_3}$

---

[425] Cioè è possibile definire in $\boldsymbol{R}$ una relazione K'', corrispondente alla relazione insiemistica '$\subseteq$', in maniera tale che per due semirette destre Y_1 e Y_2 $(\langle Y_1, Y_2\rangle \in K'') \leftrightarrow (Y_1 \subseteq Y_2)$. Allora possiamo pensare alla relazione K'' come alla relazione '$\leq$'. Così anch'essa soddisferà in $\boldsymbol{R}$ le seguenti condizioni:

1) $\forall m[m \leq m]$
2) $\forall m \forall n\big[\big((m \leq n) \wedge (n \leq m)\big) \rightarrow (m = n)\big]$
3) $\forall m \forall n \forall p\big[\big((m \leq n) \wedge (n \leq p)\big) \rightarrow (m \leq p)\big]$
4) $\forall m \forall n\big[\big((m \leq n) \vee (n \leq m)\big)\big]$

Cfr. Ebbinghaus, H.-D., *et alii*, *Zahlen*, *op. cit.*, p. 37

[426] Cfr. Mendelson, E., *Number Systems and the Foundations of Analysis*, *op. cit.*, pp. 199 e ss.

Un numero reale m, tale cioè che $m \in \boldsymbol{R}$, sarà allora identificato con la classe di equivalenza corrispondente al taglio:

Definizione 14.97 $Real(m) \stackrel{\text{def}}{=} \langle X, Y \rangle_{/X_3} = [\langle X, Y \rangle]$

Anche per il campo reale $\boldsymbol{R}$, definito mediante i tagli di Dedekind, sarà possibile sviluppare la relativa aritmetica e mostrarne le proprietà fondamentali mediante opportuni teoremi. Tralasceremo queste prove per mostrare invece come il sistema numerico così elaborato costituisca un campo ordinato "completo".

Per far questo sarà sufficiente provare che $\boldsymbol{R}$ ha la proprietà del lub.

Teorema 14.59 $\vdash_{ZFU_1} (\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{Q})_{/X_3}$ è un campo ordinato completo se e solo se $(\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{Q})_{/X_3}$ ha la proprietà del lub (o equivalentemente $(\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{Q})_{/X_3}$ ha la proprietà del glb)[427].

Dimostrazione

($\rightarrow$) Supponiamo per ipotesi che $(\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{Q})_{/X_3}$ sia completo e cioè che esso non abbia *gaps*. Supponiamo ancora di considerare un sottoinsieme di razionali X, tale che $\lfloor X \neq^* \emptyset \rfloor$ e X sia superiormente limitato. Occorre provare che X possiede un lub. Definiamo l'insieme Y come $Y = \{m | (m \in \boldsymbol{Q}) \wedge \exists n((n \in \boldsymbol{Q}) \wedge (m \leq n))\}$ e l'insieme Y' come $Y' = \boldsymbol{Q} - Y$. Allora tutti i razionali in Y sono elementi minori o uguali a qualche elemento di X. Inoltre $(X \subseteq Y)$ e $UppB(n, X) = UppB(n, Y)$, per ogni n. La coppia ordinata $\langle Y, Y' \rangle$ soddisfa i criteri mediante cui si definisce un taglio di Dedekind e così $\langle Y, Y' \rangle$ è un taglio in $(\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{Q})_{/X_3}$. Poiché $(\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{Q})_{/X_3}$ è completo per ipotesi si potranno valutare due casi: *i)* Y possiede un elemento massimo p, che è anche il lub di Y. Poiché $(X \subseteq Y)$ allora tale elemento è anche il lub di X; *ii)* Y' ha un elemento minimo q cosicché Y non ha massimo. Allora tale elemento è ancora un lub di X. Si assuma che p_1 sia un *upper bound* di X; allora esso sarà un *upper bound* anche di Y, il quale non possiede massimo in tal caso. Così $(p_1 \in Y')$ e poiché Y' possiede un elemento minimo q, allora varrà che $(q \leq p_1)$. Così sia nel caso *i)* sia nel caso *ii)* X ammette un lub.

[427] Mendelson, E., *Number Systems and the Foundations of Analysis*, *op. cit.*, pp. 202-3

($\leftarrow$) Supponiamo per ipotesi che $(\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{Q})_{/X_3}$ abbia la proprietà del lub e sia $\langle Y, Y' \rangle$ un taglio in $(\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{Q})_{/X_3}$. Occorre allora provare che $\langle Y, Y' \rangle$ non è un *gap*. Ciò è facilmente dimostrabile poiché Y è superiormente limitato in quanto ogni elemento in Y' è un *upper bound* di Y. Pertanto l'insieme Y possiede un lub e dunque $\langle Y, Y' \rangle$ non è un *gap*.

Per la definizione 14.97 segue allora che $\boldsymbol{R}$ è completo.

12. Ottavo assioma: lo schema di rimpiazzamento

12.1 Limiti nella gerarchia transfinita

Abbiamo visto come grazie all'introduzione dell'assioma dell'infinito $\boldsymbol{I}$ e dell'insieme potenza $\boldsymbol{Pw}$ sia possibile generare tutta una serie di collezioni molto grandi, tali che l'una sia più numerosa dell'altra, poiché la cardinalità (intuitivamente parlando) di ciascuno di tali insiemi, è strettamente inferiore a quella del rispettivo insieme potenza.

I risultati ottenibili sulle collezioni infinite di questo tipo in un sistema classico come ZF, saranno tutti dimostrabili anche all'interno di ZFU_1 poiché si è considerato l'insieme infinito come una collezione generata a partire dall'insieme fortemente vuoto e contenente tutti quegli insiemi da esso generabili mediante un certo tipo di successione (quella di von Neumann).

In tal modo allora si è dato corso ad una gerarchia puramente insiemistica, che come tale esclude la presenza di *Urelemente*. Essendo del resto gli individui non-insiemistici gli unici oggetti a proposito dei quali si sia lasciata aperta l'ipotesi di eventuali inconsistenze, risulta la necessaria coerenza della gerarchia transfinita fin qui delineata. Infatti gli insiemi che non dovessero avere come propri elementi degli *Urelemente* inconsistenti, non potrebbero essere definiti da condizioni che facciano uso della negazione debole, attraverso cui veicolare e tollerare potenziali contraddizioni.

Nonostante ciò, a questo stadio dello sviluppo del nostro sistema formale, non abbiamo ancora sufficienti strumenti per sviluppare tutto l'universo transfinito che Cantor aveva pensato. I limiti che si incontrano a questo livello sono sostanzialmente i medesimi che è possibile incontrare in sistemi di tipo classico. Così per superare tale *impasse*, occorre assumere ancora qualche altro postulato, secondo le indicazioni fornite in proposito e indipendentemente da Fraenkel[428] e da Skolem[429].

La difficoltà principale[430] è intuitivamente legata alla possibilità di costruire un insieme del tipo $\bigcup X$ dove:

$$[\![*]\!] \ X = \{\wp^0(\omega), \wp^1(\omega), \wp^2(\omega), \wp^3(\omega), \dots, \wp^n(\omega), \dots\}$$

[428] Fraenkel, A., *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*, *op. cit.*
[429] Skolem, T., *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre*, *op. cit.*
[430] Cfr. Casari, E., *Questioni di filosofia della matematica*, *op. cit.*, pp. 45-6

Un insieme come X possiede una quantità numerabile di elementi, ciascuno dei quali, per un apice $n > 0$, ha una quantità più che numerabile di elementi. Considerando allora la riunione di X, cioè:

$$⟦♦⟧ \quad \bigcup X = \bigcup \{ \wp^0(\omega), \wp^1(\omega), \wp^2(\omega), \wp^3(\omega), \ldots, \wp^n(\omega), \ldots \}$$

si ottiene un nuovo insieme, la cui estensione è maggiore di quella di ogni suo elemento, nel senso che non è possibile provare l'equinumerosità fra $\bigcup X$ ed uno qualsiasi degli elementi di X. Gli insiemi che è possibile costruire all'interno del sistema fin qui schizzato non possono però in alcun modo coincidere con l'oggetto considerato.

Per mostrare ciò, sarà sufficiente considerare un'estensione X_1 dell'insieme X di questo tipo:

$$⟦♦♦⟧ \quad X_1 = \{ \wp^0(\omega), \ldots, \wp^{\omega}(\omega), \wp^{\omega+1}(\omega), \wp^{\omega+2}(\omega), \ldots, \wp^{\omega+n}(\omega) \}$$

dove chiaramente $\wp^{\omega+m+1}(\omega) = \wp\left(\wp^{\omega+m}(\omega) \right)$, per ogni m.

Prendendo l'insieme-riunione di X_1, cioè:

$$\bigcup X_1 = \bigcup \{ \wp^0(\omega), \ldots, \wp^{\omega}(\omega), \wp^{\omega+1}(\omega), \wp^{\omega+2}(\omega), \ldots, \wp^{\omega+n+1}(\omega) \}$$

si ottiene un insieme sufficientemente esteso da verificare tutti gli assiomi sin qui adottati, compreso quello dell'infinito, qualora non dovessero esservi *Urelemente*. Inoltre $\bigcup X_1 = \bigcup X$[431] e così entrambe le collezioni costituiscono un possibile universo insiemistico puro. Per questo motivo se $\bigcup X_1$ fosse effettivamente dimostrabile all'interno di ZFU_1, allora ZFU_1 dovrebbe dimostrare l'esistenza della classe universale, cosa questa che è stata (fortemente) negata dal teorema 14.31. Così l'insieme X indicato in $⟦*⟧$ non può essere derivato a partire dagli assiomi fin qui dati a meno di una contraddizione trivializzante.

[431] Infatti $\bigcup X = \bigcup_{Y \in X} Y$ e $\bigcup X_1 = \bigcup_{Y \in X_1} Y$. Ma $\left(\omega = (\omega + m) \right)$ e così $\bigcup X = \bigcup X_1$.

12.2 Formulazione del rimpiazzamento

Per poter riabilitare la gerarchia transfinita in tutta la naturale estensione immaginata da Cantor, formuleremo un assioma, che sia in grado di incrementare la potenza deduttiva del nostro sistema formale. Tale assioma verrà indicato come "assioma di rimpiazzamento"[432].

Così come per il caso della comprensione, anche questo postulato risulterà essere uno schema d'assiomi piuttosto che un assioma effettivo della nostra teoria. Tuttavia utilizzeremo equivalentemente i termini "assioma" e "schema d'assiomi", qualora il contesto non renda opaca tale distinzione.

Il suo enunciato sarà così determinato:

Schema d'assioma di rimpiazzamento. ***R***

$$\forall Y \forall X \left[In(Y) \rightarrow \exists Z \forall m \left[(m \in Z) \leftrightarrow \exists n \left((\langle n, m \rangle \in Y) \wedge (n \in X) \right) \right] \right]$$

Tale schema asserisce sostanzialmente che se X è un insieme contenente un certo numero di oggetti, allora, presa una determinata condizione funzionale Y su X, esisterà quell'insieme contenente esattamente le immagini di tutti quegli elementi di X che soddisfano la condizione considerata.

Più semplicemente, se il dominio di una funzione è un insieme, allora anche il codominio della funzione sarà un insieme[433].

Occorrerà però qualche ulteriore chiarimento a proposito di questo schema. Si è infatti postulato nella protasi che Y sia una relazione funzionale iniettiva, tale cioè che ad elementi distinti del dominio, essa associ elementi distinti del codominio. Una simile restrizione (quella individuante una condizione funzionale) non è eliminabile per le ragioni già esaminate a proposito dello schema di comprensione, in quanto ciò indurrebbe contraddizioni insostenibili per il sistema. Così ad esempio se svincolassimo lo schema ***R*** dalla condizione strutturale di funzionalità, potremmo considerare anche un'istanza in cui sia presente una relazione quale '$\subseteq$'. Il predicato binario '$\subseteq$' non è un funzionale poiché un

---

[432] Traduzione del tedesco "*Ersetzungsaxiom*", utilizzato per la prima volta da Fraenkel nel 1922. Cfr. Fraenkel, A., *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*, *op. cit.*, p. 231. La gestazione di questo principio è fatta risalire da Fraenkel addirittura allo stesso Cantor e a Mirimanoff. Cfr. Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 50, nota 3

[433] *Ibidem*, pp. 50-1

insieme potrebbe essere sottoinsieme di differenti insiemi. Così se immaginassimo di rimuovere la condizione di funzionalità dall'assioma $\boldsymbol{R}$, consentendo alla relazione '$\subseteq$' di venir impiegata, potremmo trovarci a considerare un predicato analogo a quello già visto a proposito del postulato dei sottoinsiemi, cioè:

$$[\![\S]\!]\ \ Z = \{Y | \exists X[(X \in \{\emptyset\}) \wedge (X \subseteq Y)]\}$$

In una simile classe, determinata da una condizione non-funzionale, si troverebbero allora ad appartenere tutti gli elementi, giacché mediante $[\![\S]\!]$ si asserisce l'esistenza della classe di tutti quegli insiemi, di cui $\emptyset$ è sottoinsieme. Essendo ciò vero per ogni classe, in base al teorema14.5, Z risulterebbe essere la classe universale, contro il teorema 14.31.

Analogamente poi al caso del postulato di comprensione, anche qui abbiamo dato una formulazione tutto sommato debole, in quanto $\boldsymbol{R}$ risulta espresso senza ricorrere ad eventuali parametri.

È sufficiente però osservare quanto detto a proposito dello schema di comprensione, il quale può essere ristabilito nella sua formulazione forte, in concomitanza con gli assiomi $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Un}$, $\boldsymbol{Pw}$[434].

Il vincolo imposto dalla necessità di individuare una condizione funzionale non diminuisce il potere deduttivo dell'assioma, poiché grazie a $\boldsymbol{CP}$ e $\boldsymbol{Pw}$ è possibile ottenere anche una condizione funzionale di tipo non-iniettivo[435] seppur sempre funzionale.

---

[434] Tale formulazione corrisponderebbe allora ad uno schema d'assioma del tipo: $\forall Y \forall X \left[In(Y) \rightarrow \forall p_1 \dots \forall p_k \exists Z \forall m\left[(m \in Z) \leftrightarrow \exists n\left((\langle n, m\rangle \in Y) \wedge (n \in X)\right)\right]\right]$, dove $n, m, p_1, \dots, p_k$ sono le uniche variabili libere occorrenti nella condizione funzionale Y.

[435] Cfr. Cfr. Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 51, nota 2

12.3 La schematicità di R

Il postulato di rimpiazzamento non è di per sé un assioma quanto piuttosto uno schema, cioè a dire un insieme di assiomi, ciascuno determinato da una certa condizione. Ognuno di essi è tenuto assieme dalle caratteristiche strutturali comuni ad ogni singolo assioma.

Analogamente allora al caso dello schema per la costruzione dei sottoinsiemi, sarà importante precisare quali condizioni funzionali siano istanziabili a partire da esso.

A tale riguardo adotteremo delle misure restrittive parzialmente analoghe al caso dello schema $\boldsymbol{CP}$. Diremo che le condizioni funzionali in $\boldsymbol{R}$ saranno determinate in base alle seguenti clausole:

1) $Y(m,n)$ è definito da un'espressione finita;

2) $Y(m,n)$ è un funzionale in m;

3) $Y(m,n)$ è un funzionale definito a partire da proposizioni atomiche del tipo $m \in Y$;

4) $Y(m,n)$ è un funzionale definito con l'uso dei seguenti connettivi logici:

   4.1) ($\wedge$): espressioni del tipo $(m \in Z) \wedge (n \in Z)$;

   4.2) ($\vee$): espressioni del tipo $(m \in Z) \vee (n \in Z)$;

   4.3) ($\rightarrow$): espressioni del tipo $(m \in Z) \rightarrow (n \in Z)$;

   4.4) ($\neg$): espressioni del tipo $\neg(x \in Z)$, dove α è una formula costruita a partire dai criteri 4.1)-4.4);

   4.5) ($\leftrightarrow$): espressioni del tipo $(m \in Z) \leftrightarrow (n \in Z)$, ottenibili per definizione da $\big[[(m \in Z) \rightarrow (n \in Z) \wedge [(n \in Z) \rightarrow (m \in Z)]\big]$;

5) ($\forall$): espressioni del tipo $\forall m\alpha$, dove α è una matrice costruibile a partire dai criteri 1)-4);

6) (∃): espressioni del tipo $\exists m\alpha$, dove α è una matrice costruibile a partire dai criteri 1)-4);

7) Nient'altro è una condizione funzionale in m.

Come fatto a proposito del postulato di costruzione (limitata) per classi, possiamo porre anche qui la questione se un simile schema possa essere sostituito da un insieme finito di enunciati, comunque grande.

Nel caso concernente $\boldsymbol{CP}$ avevamo intuitivamente osservato come ciò non fosse possibile. Altrettanto negativa è la risposta nel caso di $\boldsymbol{R}$, analogamente del resto al caso classico (ZF).

La ragione di questo fatto è legata alla non-finita-assiomatizzabilità dello stesso schema $\boldsymbol{CP}$. Infatti se $\boldsymbol{R}$ fosse finitamente assiomatizzabile, allora $\boldsymbol{CP}$ dovrebbe derivare da un numero finito di postulati, in contraddizione con i risultati di Montague, che discuteremo brevemente in seguito[436].

[436] Cfr. Montague, R., *Fraenkel's Addition to the Axioms of Zermelo*, *op. cit.*

13. Il problema della scelta

13.1 Limiti nella costruzione di insiemi

Nella costruzione delle classi abbiamo avuto modo di osservare come gli assiomi introdotti sino allo schema di rimpiazzamento $\boldsymbol{R}$ fornissero dei buoni criteri per ottenere collezioni sufficientemente complesse. Tuttavia tali criteri non erano sufficienti a generare tutto il complesso universo immaginato da Cantor ed è stato necessario adottare un ulteriore postulato per garantire la presenza di collezioni, la cui estensione risultava inaccessibile a partire dai postulati precedentemente forniti.

Un caso analogo, per così dire, può essere rappresentato dagli "insiemi di scelta". Non sempre infatti è possibile stabilire con assoluta certezza l'esistenza di certi particolari insiemi, la cui presenza è pure importante sotto molti punti di vista. Nel caso della teoria degli insiemi per esempio la possibilità di poter asserire con certezza l'esistenza di simili classi consente notevoli semplificazioni nello sviluppo dell'aritmetica transfinita, sia ordinale sia cardinale, che altrimenti non sarebbe possibile ottenere.

Per concedere al sistema ZFU_1 un'efficacia espressiva pari a quella del sistema classico ZF, occorrerà discutere anche qui le linee fondamentali delle difficoltà, che questo assioma consente di superare.

In questo paragrafo dovremo esaminare e formulare un importante postulato, meglio noto come "assioma della scelta"[437].

Ci sono vari modi di approcciare alla sua formulazione, prediligendo ad esempio la nozione di funzione piuttosto che il concetto di "insieme-selezione"[438]. Le due formulazioni che se ne ricavano sono comunque dimostrabilmente equivalenti sulla base degli assiomi fin qui assunti.

Trattando propriamente di teoria degli insiemi, scegliamo di affrontare la questione partendo dal concetto di insieme-selezione.

I limiti che occorre trattare a questo punto dello sviluppo assiomatico sono di due tipi:

---

[437] Zermelo fu il primo a formularlo esplicitamente nel 1904. Per quanto ne sappiamo, egli utilizzò la celebre denominazione "*Axiom der Auswahl*" soltanto in seguito nel 1908. Cfr. Zermelo, E., *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann*, «Mathematische Annalen», vol. 59, 1904, pp. 514-6. Zermelo, E., *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, *op. cit.*, p. 266

[438] Come afferma Fraenkel, la dicitura "scelta" così come "insieme-selezione" è dovuta ancora a Zermelo e alla formulazione intuitiva («psychological») che ne diede per chiarire meglio il funzionamento dell'*Auswahlaxiom*. Cfr. Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 55

1) dato un insieme finito di classi non-vuote finite, a due a due disgiunte, se nessuna di tali classi è a sua volta vuota, allora esiste almeno un insieme-selezione per quel dato insieme;

2) dato un insieme infinito di classi non-vuote infinite, a due a due disgiunte, se nessuna di tali classi è a sua volta vuota, allora esiste almeno un insieme-selezione per quel dato insieme.

Nel caso di un insieme del tipo considerato in 1), si può immaginare una classe X del tipo:

$$X = \{\{m_1, m_2\}, \{m_3, m_4\}, \{m_5, m_6, m_7\}\}$$

Se i vari elementi m sono classi "pure" od *Urelemente*, allora gli elementi di X saranno fra loro anche disgiunti, nel senso che $[(\{m_1, m_2\} \cap \{m_3, m_4\}) = \emptyset]$, $[(\{m_1, m_2\} \cap \{m_5, m_6, m_7\}) = \emptyset]$ e $[(\{m_3, m_4\} \cap \{m_5, m_6, m_7\}) = \emptyset]$.

Osservando inoltre che $(\emptyset \notin^* X)$, è possibile impiegare gli assiomi fin qui dati per determinare un insieme Z, così costituito:

$$Z = \{m_1, m_3, m_6\}$$

La sua esistenza sarebbe giustificata dall'applicazione dello schema $\boldsymbol{CP}$ e dell'assioma $\boldsymbol{Un}$, sfruttando i quali è possibile isolare Z in $\bigcup X$ mediante il seguente predicato:

$$Z = \left\{n \middle| \left(n \in \bigcup X\right) \wedge \big((n = m_1) \vee (n = m_3) \vee (n = m_6)\big)\right\}$$

La caratteristica fondamentale dell'insieme Z è quella di avere uno ed un solo elemento in comune con ciascun elemento di X. Un insieme che abbia tale proprietà, si dice essere un "insieme-selezione" di X.

Certamente Z non è l'unico insieme-selezione di X poiché si potrebbero considerare anche classi come $\{m_2, m_4, m_5\}$ o $\{m_2, m_3, m_7\}$ quali insiemi-selezione.

Ciò che accomuna insiemi del tipo $\{m_1, m_3, m_6\}$, $\{m_2, m_4, m_5\}$, $\{m_2, m_3, m_7\}$ è il fatto di scegliere da ciascun insieme in X un unico elemento.

Tale caratteristica può essere meglio apprezzata applicando lo schema di rimpiazzamento e l'assioma $\boldsymbol{Un}$, indicando la scelta come:

$$Z = \left\{m \middle| \left(m \in \bigcup X\right) \wedge F(Y, m)\right\}$$

dove $(Y \in X)$. Allora per esempio, $\big[F(Y, m) \leftrightarrow [(f(Y_1) = m_1) \vee (f(Y_2) = m_3) \vee (f(Y_3) = m_6)]\big]$. L'insieme-selezione può dunque essere visto anche come l'applicazione di una "funzione di scelta" dell'insieme X, che ad ogni elemento Y di X faccia corrispondere un unico elemento di Y (cioè $f(Y) \in Y$).

Rispetto al caso 1), concernente le sole classi finite, le difficoltà di costruzione per gli insiemi-selezione non riguardano allora specifiche carenze da parte dei postulati sin qui ammessi. Abbiamo infatti osservato come sia sufficiente applicare un'istanza dello schema $\boldsymbol{CP}$ (o dello schema $\boldsymbol{R}$) e l'assioma $\boldsymbol{Un}$ per determinare i possibili selettori di X. Essendo inoltre $\bigcup X$ un insieme limitato, è possibile calcolare tutte le possibili combinazioni soddisfacenti la condizione fondamentale di selezione, senza per ciò dover fare ulteriori assunzioni. Nel caso allora di insiemi la cui riunione abbia cardinalità finita, è possibile costruire tutti gli insiemi-selezione senza particolari difficoltà.

Ciò che resta tuttavia indeterminato è la presenza di $\emptyset$ in X. Se infatti valesse $(\emptyset \in X)$, X non avrebbe alcun insieme di scelta. Se invece valesse $(X = \emptyset)$, allora l'unico insieme-selezione di X sarebbe $\emptyset$.

Veniamo al caso 2). Possiamo immaginare allora una classe X_1 con una quantità numerabile di elementi, ciascuno dei quali abbia a sua volta un numero illimitato di elementi. Sia allora:

$$X_1 = \big\{\{m_1, m_2, n_1, \dots\}, \{m_4, m_7, n_2\}, \{m_{11}, n_9, p_1\}, \dots\big\}$$

tale che $\forall Y_1 \in X_1 \forall Y_2 \in X_1 [(Y_1 \cap Y_2) = \emptyset]$ e che $(\emptyset \notin^* X)$. Allora non sarà possibile determinare in linea generale l'esistenza dell'insieme di tutti gli insiemi-selezione. Ciò è dovuto a due fatti in particolare:

1) non è sempre possibile scrivere una singola formula, che indichi quale elemento scegliere da ciascun Y_k[439] per un dato X di taglia illimitata;

2) non è possibile garantire la non-vacuità dell'insieme di tutti gli insiemi di scelta di un certo X di taglia illimitata, giacché nulla esclude la presenza di $\emptyset$ in X.

Tralasciando casi particolari, per i quali sarebbe ammissibile l'esistenza di un insieme selezione, come ad esempio nel caso $X = \{\{m_1, n_1\}, \{m_2, n_2\}, \{m_2, n_2\}, \ldots\}$, in cui $(\emptyset \notin^* X)$, tutto ciò che gli assiomi fin qui adottati potrebbero assicurare, sarebbe l'esistenza di un insieme-selezione Z, tale che:

$$\forall Y_1 \forall Y_2 \left[\left[\left((Y_1 \in X_1) \wedge (Y_2 \in X_1) \right) \wedge \left((Y_1 \cap Y_2) = \emptyset \right) \right] \right.$$
$$\left. \rightarrow \exists Z \forall m \left[(m \in Z) \leftrightarrow \left[\left(m \in \bigcup X \right) \wedge \forall Y_k \left((Y_k \cap Z) = \{m\} \right) \right] \right] \right]$$

Z è allora isolato utilizzando soltanto l'assioma $\boldsymbol{Un}$ e lo schema $\boldsymbol{CP}$. A questo punto, impiegando anche l'assioma $\boldsymbol{Pw}$, potremmo derivare l'esistenza dell'insieme degli insiemi-selezione di X, che indicheremo con 'Z^{Sc}', ponendo:

$$Z^{Sc} = \left\{ Z \middle| \left[\left(Z \in \bigcup \wp(X) \right) \wedge \forall Y_k \left((Y_k \cap Z) = \{m\} \right) \right] \right\}$$

Il limite, che in tal caso si può rilevare, consiste nel fatto che l'esistenza effettiva dell'insieme Z^{Sc} non è garantita da alcun assioma a nostra disposizione, poiché nulla esclude che $(\emptyset \in X)$. Dai postulati sinora dati, può dedursi l'esistenza dell'insieme Z^{Sc}; ma non può dedursi l'esistenza di un insieme-selezione tale che $(\emptyset \in X)$. Se questo fosse il caso, allora $Z^{Sc} = \emptyset$.

[439] Cfr. Abian, A., *Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, *op. cit.*, p. 114

13.2 Nono assioma: l'insieme selezione

Per superare le difficoltà esaminate nel paragrafo precedente, connesse fondamentalmente agli insiemi infiniti con elementi illimitati, è necessaria la postulazione di uno specifico assioma, detto "assioma di scelta".

Esso sarà formulato tenendo conto delle indicazioni riportate nei paragrafi immediatamente precedenti come segue:

Assioma della scelta. ***S***

$$\forall X\left[\forall Y\forall Z\left[\big((Y\in X)\wedge(Z\in X)\wedge(Y\neq^{*}Z)\big)\rightarrow\right.\right.$$
$$\left.\rightarrow\exists m\Big((m\in Y)\wedge\forall n\big((n\notin^{*}Y)\vee(n\notin^{*}Z)\big)\Big)\right]\rightarrow$$
$$\left.\rightarrow\exists W\forall Y\big[(Y\in X)\leftrightarrow\exists p\forall q\big((q\in W)\wedge(q\in Y)\big)\leftrightarrow(p=q)\big]\right]$$

14. Il problema della fondazione

14.1 Gli insiemi "straordinari"

Come ultimo assioma discuteremo qui un postulato, che ci consentirà di eliminare dalla teoria ZFU_1 certi particolari oggetti.

Nel sistema originario di Zermelo non venivano escluse alcune particolari classi, la cui peculiarità era quella di appartenere a se stesse. Inversamente dunque a quanto accadeva per gli elementi della classe di Russell, che conteneva quegli insiemi che non si appartenevano come elementi, tali collezioni potevano soddisfare la condizione opposta, cioè quella di contenersi come elementi.

La loro presenza non comportava particolari problemi, sebbene risultasse superflua per lo sviluppo dei concetti matematici[440]. Per tali ragioni probabilmente la formulazione del sistema Z data nel 1908 non ne escludeva esplicitamente l'esistenza, benché Zermelo fosse consapevole di poter eventualmente annoverare nel dominio di riferimento insiemi così insoliti e controintuitivi.

Uno dei primi a porre maggiore attenzione a questi particolari insiemi e a notarne le insolite conseguenze fu il matematico russo Dmitry Mirimanoff[441].

Questi distinse due tipologie di insiemi tra quelli generabili a partire dal sistema Z, che qui dovremo brevemente discutere: gli insiemi di "primo tipo", cioè quelli che si distinguono da ciascuno dei propri elementi, da quelli di "secondo tipo", che invece possiedono un elemento identico all'insieme stesso[442]. Considerando le conseguenze degli insiemi di questi due tipi, egli operò una distinzione tra insiemi "ordinari" e insiemi "straordinari"[443].

Mentre i primi erano ben noti e, in conseguenza delle loro importanti applicazioni, erano stati studiati con maggior attenzione, i secondi erano stati invece trascurati – per quanto ne sappiamo – poiché giocavano un ruolo marginale rispetto agli obiettivi che si tentava allora di raggiungere.

---

[440] Cfr. Zermelo, E., *Untersuchengen über die Grundlagen der Mengenlehre, I*, *op. cit.*, p.

[441] Mirimanoff, D., *Les Antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles*, «Enseignement Mathématique», vol. 19, 1917, pp. 37-52. Mirimanoff, D., *Remarques sur la théorie des ensembles et les antinomies cantoriennes, I & II*, «Enseignement Mathématique», vol. 19, 1917, pp. 209-17 ; *Ibidem*, vol. 21, 1920, pp. 29-52

[442] Mirimanoff parlava di «ensembles de première sorte» e di «ensembles de deuxième sorte». Cfr. Mirimanoff, D., *Les Antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles*, *op. cit.*, pp. 39-40

[443] Mirimanoff faceva osservare che le due nozioni di "insieme di secondo tipo" e "insieme straordinario" non erano affatto equivalenti, giacché catene discendenti infinite potevano generarsi anche a partire da insiemi di primo tipo. *Ibidem*, p. 42

La loro esclusione definitiva avvenne ad opera di Zermelo nel 1930[444], dopo che Von Neumann aveva utilizzato proprio il modello degli insiemi "ordinari" o "ben-fondati" per mostrare la consistenza degli assiomi sino ad allora utilizzati[445].

Di conseguenza oggi il sistema ZF ammette esplicitamente tale assioma e dovremo pertanto valutare se accettare o meno questo stesso postulato anche in ZFU_1. Per far ciò riteniamo sia utile discuterne brevemente le ragioni.

La presenza di insiemi X, tali che possano appartenere a se stessi, cioè $X \in X$, può ingenerare circostanze indesiderabili, come ad esempio la presenza di "catene discendenti".

Mirimanoff illustrò il problema come segue:

> «È noto che Russell distingue due tipi di insiemi: un insieme E è di primo tipo se esso differisce da ciascuno dei suoi elementi. Un insieme E è di secondo tipo se esso contiene un elemento che non è differente da E. […] Siano E un insieme, E' uno dei suoi elementi, E'' un elemento qualunque di E' e così via. Chiamo *discendente* la sequenza di passaggi da E a E', da E' a E'' ecc. Tale sequenza ha fine quando si incontra un elemento indecomponibile. In tal caso essa è finita; ma potrebbe non esserlo, fatto che si verifica per ogni insieme del secondo tipo […]. Dirò un insieme *ordinario*, se esso dà origine soltanto a sequenze discendenti finite; dirò invece un insieme *straordinario*, se tra le sue sequenze ce ne sono alcune che sono infinite. Ogni insieme del secondo tipo è un insieme straordinario, sebbene le due nozioni non siano equivalenti poiché una sequenza discendente infinita può presentarsi anche in un insieme di primo tipo»[446].

Il problema, che Mirimanoff stava qui affrontando[447], può essere così rappresentato nella nostra teoria:

---

[444] Cfr. Zermelo, E., *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche*, *op. cit.* In tale lavoro Zermelo introdusse la denominazione di "*Axiom der Fundierung*".

[445] Procedendo per grosse linee, nel 1925 Von Neumann formulò esplicitamente l'assioma di fondazione, che escludeva la presenza di elementi che si autoappartenessero, e nel 1929 costruì un modello interno a partire da esso, ottenuto relativizzando le variabili insiemistiche agli oggetti descritti da tale postulato. Definendo una serie di nozioni-chiave, come quella di *rank* (per altro già presa in considerazione dallo stesso Mirimanoff) per un dato insieme, egli riuscì a fornire elementi sufficienti per sostenere che anche la teoria Z, integrata dai suggerimenti di Fraenkel e Skolem (ZF), era coerente pur emendata dell'esistenza di queste speciali classi. Cfr. Neumann, J. von, *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», vol. 154, 1925, pp. 219-40; *Corrections*, vol. 155, 1926, p. 128. Neumann, J. von, *Über eine Widerspruchfreiheitsfrage der axiomatischen Mengenlehre*, *op. cit.* Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 100

[446] Mirimanoff, D., *Les Antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles*, *op. cit.*, p. 42

[447] Il nodo cruciale del lavoro («le problème fondamental»), che Mirimanoff presentò nel 1917 e che tangenzialmente toccava il problema della fondazione, era in realtà questo: « Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble d'individus existe? ». *Ibidem*, p. 38

$$X_{n+1} \in X_n \in \cdots \in X_2 \in X_1 \in X$$

dove $X, X_1, X_2, \dots$ sono tutti insiemi non necessariamente distinti tra loro o da X[448].

Insiemi di tipo straordinario sono allora insiemi X e Y, tali che $X \in X$, $Y \in Y$ oppure $[(X \in Y) \wedge (Y \in X)]$[449].

Tali insiemi sono oggi indicati come "insiemi non-ben-fondati" e costituiscono come noto un universo di discorso altrettanto possibile[450].

Tuttavia dobbiamo interrogarci qui sulla loro eventuale utilità all'interno del tipo di discorso che stiamo qui affrontando. L'idea intorno alla quale abbiamo cercato di sviluppare il nostro sistema formale è quella concernente la costruzione di un sistema in grado di dedurre tutto quanto normalmente deducibile nella teoria classica ZF da una parte[451]; dall'altra invece, ammettendo la possibilità degli *Urelemente*, abbiamo cercato di edificare una teoria, che consentisse lo studio delle proprietà del materiale ammesso come *stock* iniziale, primitivo, adoperando il linguaggio ed i concetti dell'insiemistica.

In base a queste due considerazioni allora non riteniamo di particolare utilità l'impiego di insiemi straordinari né per il discorso puramente insiemistico, dal quale sono peraltro in genere esplicitamente esclusi; né dal punto di vista individuale, dal momento che gli insiemi (di *Urelemente*) intervengono, intuitivamente, nella misura in cui possono essere ragionevolmente considerati come l'estensione di qualche predicato. Infine ci preme escludere la possibilità che possano essere considerati come individui del nostro dominio di discorso oggetti come quelli presi in considerazione da Quine. Dal nostro punto di vista gli *Urelemente* risultano di un certo interesse, se pensati come oggetti del mondo

---

[448] Cfr. Casari, E., *Questioni di filosofia della matematica*, *op. cit.*, p. 46 e pp. 51-2

[449] Cfr. Ferreirós, J., *The Labyrinth of Thought*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1999; 2007^2, p. 370

[450] Cfr. Aczel, P., *Non-Well-Founded Sets*, *op. cit.*

[451] Dal punto di vista della deducibilità degli enti matematici fondamentali, la presenza di insiemi straordinari non avrebbe conseguenze disastrose. Tuttavia risulterebbe modificata la struttura gerarchica dell'intera teoria, che invece noi vorremmo qui determinare in modo canonico (cfr. Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 87). In un certo senso, essa dovrà corrispondere ad un universo "tipato", che – come noto – esclude di per sé livelli in cui ci siano insiemi che appartengono a se stessi. La forte somiglianza tra la concezione di un sistema teorico del genere e la "teoria dei tipi" russelliana è stata ben evidenziata da Dana Scott: «The truth is that there is only one way of avoiding the paradoxes: namely, the use of some form of the *theory of types*. That was at the basis of both Russell's and Zermelo's intuitions. Indeed the best way to regard Zermelo's theory is as a simplification and extension of Russell's. We mean Russell's *simple* theory of types, of course). The simplification was to make the types *cumulative*. […] Now Russell made his types *explicit* in his notation and Zermelo left them *implicit*». Cfr. Dana Scott, S., *Axiomatizing Set Theory*, *op. cit.*, p. 208

empirico o matematico e non come oggetti insiemistici *tout court*, dotati di speciali caratteristiche.

Così, sebbene non vi sia alcuna ragione teorica generale per determinare l'esclusione delle classi straordinarie, saranno motivi puramente circostanziali a farci propendere qui per un loro abbandono, dal momento che per il nostro discorso essi non costituirebbero una vantaggiosa risorsa.

14.2 Decimo assioma: gli insiemi regolari

Passeremo ora alla formulazione di un apposito assioma, il cui compito sarà quello di veicolare formalmente l'idea per la quale non ci sono classi straordinarie in ZFU_1.

Talvolta esso è indicato anche con la denominazione di "assioma di regolarità" ed ha la specifica funzione di escludere la presenza di catene discendenti infinite, come quelle viste nel paragrafo precedente.

Assioma di regolarità. ***F***

$$\forall X\left[(X \neq^* \emptyset) \rightarrow \exists Y\big[(Y \in X) \wedge \neg^* \exists n\big((n \in X) \wedge (n \in Y)\big)\big]\right]$$

L'assioma sopra formulato asserisce in sostanza che non esiste alcun insieme avente qualche elemento in comune con qualcuno dei suoi elementi.

L'efficacia dell'assioma di regolarità è concretamente dimostrata in base al seguente teorema:

Teorema 14.70[452]

$$\vdash_{ZFU_1} \neg^* \exists s\big[\big(s = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_k, Y_{k+1}, \ldots)\big) \wedge (Y_{i+1} \in Y_i)_{(om\ i \geq 1)}\big]$$

Dimostrazione[453]

Ammettiamo per assurdo a questo punto che esista comunque una sequenza s del tipo $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k, Y_{k+1}, \ldots)$, tale che per ogni $i \geq 1$, valga $(Y_{i+1} \in Y_i)$. Allora si avrà una catena discendente infinita, del tipo $(Y_{i+1} \in Y_i, \ldots, Y_{k+1} \in Y_k, \ldots, Y_2 \in Y_1)$, dove $i > k$. Ora sia X l'insieme contenente tutti gli elementi della successione, tale per cui $X = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k, Y_{k+1}, \ldots\}$. In base all'assioma ***F*** vale allora che $\exists Y \in X[(Y \cap X) = \emptyset]$, fatto questo che contraddice

[452] Sarebbe possibile utilizzare come assioma ***F*** anche questo tipo di enunciato poiché, in congiunzione con l'assioma di scelta, esso implica l'assioma di regolarità. Cfr. Mendelson, E., *The Axiom of Fundierung and the Axiom of Choice*, «Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung», vol. 4, 1958, pp. 67-70

[453] Cfr. Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 90. Casari, E., *Questioni di filosofia della matematica*, *op. cit.*, p. 52

fortemente il caso in cui $Y = Y_k$, per $k \geq 1$, dal momento che $[Y_{k+1} \in (Y \cap X)]$. Così per riduzione all'assurdo, varrà $\neg^* \exists s\big[\big(s = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k, Y_{k+1}, \dots)\big) \wedge (Y_{i+1} \in Y_i)_{(om\, i \geq 1)}\big]$.

Possiamo a questo punto osservare quanto segue:

Teorema 14.71 $\vdash_{ZFU_1} \forall X(X \notin^* X)$

Dimostrazione

Sappiamo che ciò è vero se $(m = \emptyset)$[454] per l'assioma $\boldsymbol{O}$. Dobbiamo allora mostrare che l'enunciato è vero in generale per ogni classe X. Possiamo ragionare per assurdo e ammettere che non sia così ed ipotizzare l'esistenza di un X, tale che $X \in X$. Tuttavia per l'assioma $\boldsymbol{F}$ varrebbe che $\neg^* \exists Y\big((Y \in X) \wedge (Y \in X)\big)$, in quanto si è assunto che $X \in X$ e per l'assioma di regolarità nessun insieme ha qualche elemento in comune con un proprio elemento. Così $\forall Y\big(Y \notin^* (X \cap X)\big)$ e cioè $\forall Y(Y \notin^* X)$, dato che $(X \cap X) = X$. Ma ciò contraddice il fatto che $\exists Y(Y \in X)$, derivabile dall'ipotesi $(X \in X)$ per l'assioma 14, regola 3 e 1. Così varrà che $\neg^* \exists X(X \in X)$, ossia $\forall X(X \notin^* X)$.

In base al teorema 14.71 possiamo a questo punto escludere dal nostro sistema formale anche la presenza degli individui di Quine, questione questa che avevamo lasciata ancora non completamente decisa.

[454] Essendo $\emptyset$ fortemente vuoto, anche qui non potrà mai verificarsi che $(\emptyset \in \emptyset)$.

14.3 La non-trivialità di ZFU_1 e la "gerarchia cumulativa"

Per comprendere meglio la struttura dell'universo che intendiamo descrivere mediante il nostro sistema formale, passeremo ora alla definizione della nozione di "gerarchia cumulativa".

A tale scopo introdurremo alcune fondamentali definizioni a proposito del concetto di "numero ordinale", che sarà di grande utilità nel caso in esame.

Come si potrà osservare, la scelta degli assiomi adottati per ZFU_1 risulterà sufficiente anche alla maggior parte degli scopi matematici.

Sulla base di tali considerazioni discuteremo infine del problema della non-trivialità di ZFU_1.

14.3.1 Gli insiemi ordinali e la loro aritmetica

Introdurremo di seguito le definizioni di "numero ordinale", indicandone senza scendere nei dettagli le principali operazioni aritmetiche.

Cominceremo col dare alcune definizioni in parte già osservate nel paragrafo 11 di questo capitolo e qui presentate in termini puramente insiemistici. Diciamo innanzitutto che un insieme X è linearmente ordinato, se esso è ordinato da una relazione Y ('$<$'), che rispetti le proprietà della seguente:

Definizione 14.98 $LinOr(X,Y) \overset{\text{def}}{=} \forall m \forall n \forall p\big[[(m \in X) \wedge (n \in X) \wedge (p \in X)] \wedge$

i. $(\langle m,m\rangle \in Y) \wedge$
ii. $\big[\big((\langle m,n\rangle \in Y) \wedge (\langle n,m\rangle \in Y)\big) \rightarrow (m = n)\big] \wedge$
iii. $\big[\big((\langle m,n\rangle \in Y) \wedge (\langle n,p\rangle \in Y)\big) \rightarrow (\langle m,p\rangle) \in Y\big] \wedge$
iv. $[(\langle m,n\rangle \in Y) \vee (\langle n,m\rangle \in Y)]\big]$

Diciamo poi[455] che una funzione $f{:}\,X \rightarrow Z$ preserva l'ordine se, dati due insiemi parzialmente ordinati[456] $\langle X,<\rangle$ e $\langle Z,<\rangle$, si ha che:

Definizione 14.99 $PresOr(f) \overset{\text{def}}{=} \forall m \forall n\big[(m < n) \rightarrow \big(f(m) < f(n)\big)\big]$

Se gli insiemi X e Z sono linearmente ordinati, allora una funzione f, tale che $f{:}\,X \rightarrow Z$, viene anche detta "crescente", se:

Definizione 14.100 $Cresc(f) \overset{\text{def}}{=} [LinOr(f) \wedge PresOr(f)]$

Per determinare un buon ordine dato dalla relazione Y sull'insieme X, diciamo infine che:

[455] Cfr. Jech, T., *Set Theory*, Springer, Berlin, 1978; 2003[3], pp. 17-24

[456] Un insieme si dice "parzialmente ordinato" se non vale la quarta condizione individuata nella definizione 14.98.

Definizione 14.101[457]

$$BeOr(X) \overset{\text{def}}{=} \forall Z\big[[(Z \subseteq X) \wedge (Z \neq^* \emptyset)] \rightarrow \exists m \in Z \forall n \in Z[(m \neq^* n) \rightarrow (\langle m, n\rangle \in Y \wedge \langle n, m\rangle \notin^* Y)]\big]$$

Siano W_1 e W_2 due insiemi bene-ordinati. Allora essi possono essere confrontati in base alla loro lunghezza e i numeri ordinali potranno allora essere introdotti come tipi d'ordine di insiemi bene-ordinati.

È possibile così provare che l'unico automorfismo[458] di un insieme bene-ordinato è l'identità e che due insieme isomorfi ammettono un unico isomorfismo ($W_1 \cong W_2$).

Se definiamo ora il concetto di "segmento iniziale X di un insieme bene-ordinato W", come:

Definizione 14.102 $SegIn(X, W) \overset{\text{def}}{=} [X = \{m \in W | m < X\}]$

allora possiamo facilmente osservare come nessun insieme bene-ordinato sia isomorfo ad un proprio segmento iniziale. Inoltre, dati due insiemi bene-ordinati W_1 e W_2, vale il seguente principio di tricotomia:

$$[(W_1 \cong W_2) \vee (W_1 \lesssim W_2) \vee (W_1 \gtrsim W_2)]$$

dove $W_1 \lesssim W_2$ va inteso come l'esistenza di un isomorfismo tra W_1 ed un segmento iniziale di W_2 e $W_1 \gtrsim W_2$ come $W_2 \lesssim W_1$.

Così se W_1 e W_2 sono isomorfi, allora si dice che essi hanno lo stesso tipo d'ordine.

La relazione '$<$' che ordina tali insiemi è allora data direttamente dalla relazione fondamentale presa sul dominio e cioè da '$\in$'. Così $W_1 < W_2$ se e solo se $W_1 \in W_2$.

---

[457] Ogni sottoinsieme non-vuoto dell'insieme X ha un elemento minimo.

[458] Si dice "isomorfismo" un morfismo $f: X \rightarrow Y$, tale che esiste un morfismo inverso $f^{-1}: Y \rightarrow X$, per cui la composizione $ff^{-1} = Id_X$ e $f^{-1}f = Id_Y$ $\big((f^{-1}(m) = n) \overset{\text{def}}{=} f(n) = m\big)$. Un "endomorfismo" è un morfismo $f: X \rightarrow X$. Un "automorfismo" è allora un morfismo $f: X \rightarrow X$, tale che esso risulti endomorfo ed isomorfo.

Diciamo infine che un insieme è "transitivo" se:

Definizione 14.103 $Tr(X) \overset{\text{def}}{=} (\bigcup X \subseteq X)$

L'insieme X è allora un "numero ordinale" se:

Definizione 14.104 $Ord(X) \overset{\text{def}}{=} [BeOr(X) \wedge Tr(X)]$

Diamo di seguito alcune proprietà fondamentali dei numeri ordinali[459]:

i) $Ord(\emptyset)$
ii) $[Ord(X) \wedge (Y \in X)] \rightarrow Ord(Y)$
iii) $[Ord(X) \wedge Ord(Y) \wedge (X \neq^* Y) \wedge (X \subseteq Y)] \rightarrow (X \in Y)$
iv) $[Ord(X) \wedge Ord(Y)] \rightarrow [(X \subseteq Y) \vee (Y \subseteq X)]$

Vale inoltre l'enunciato secondo cui ogni insieme bene-ordinato è isomorfo ad un unico numero ordinale[460].

Possiamo a questo punto precisare meglio alcune nozioni utilizzate nella costruzione intuitiva dei vari sistemi numerici.

Diciamo che un numero ordinale è "limite" se:

Definizione 14.105 $Lim(X) \overset{\text{def}}{=} [Ord(X) \wedge (X = \bigcup X)]$[461]

dove $[\bigcup X = sup\{Y | Y < X\}]$ e $(sup\{Y | Y < X\} = n) \overset{\text{def}}{=} \mu_X \Big((n \in X) \wedge \big(\forall m \in X (m \leq n)\big)\Big)$[462] (*least upper bound*).

[459] Cfr. Jech, T., *Set Theory*, *op. cit.*, p. 19
[460] *Ibidem*, p. 20
[461] $\emptyset$ è anch'esso un ordinale limite poiché $sup(\emptyset) = \emptyset$.
[462] Dove 'μ_X' sta ad indicare il più piccolo X, che soddisfa tali condizioni.

Definiamo di seguito l'aritmetica dei numeri ordinali, partendo dalla dimostrazione del teorema di ricorsione transfinita, che includerà il caso della ricorsione finita, accennato in precedenza.

Abbreviando con 'X^{Or}' il fatto che X sia un numero ordinale, stabiliamo che:

Teorema 14.73[463] $\vdash_{ZFU_1} \big[[G = \{\langle X, Y\rangle |$

i) $[(X = \emptyset) \wedge (Y = f^0)] \vee$

ii) $\left[(X \neq^* \emptyset) \wedge \left(sup(\Delta_1(X)) \neq^* \Delta_1(X)\right) \wedge \left(Y = H\left(X\left(sup(\Delta_1(X))\right)\right)\right)\right] \vee$

iii) $\left[(X \neq^* \emptyset) \wedge \left(sup(\Delta_1(X)) = \Delta_1(X)\right) \wedge (Y = \bigcup \Delta_2(X))\right]\big\} \wedge$

iv) $\wedge \left[\forall X \left(Ord(X) \rightarrow \left(F(X) = G(F \upharpoonright X)\right)\right)\right]\Big] \rightarrow$

$\rightarrow \exists_1 F[$

i) $[(F(\emptyset) = a) \wedge$

ii) $\left(F(X^+) = H\left(F(X)\right)\right) \wedge$

iii) $\left((F(X) = \bigcup_{Z<X} F(Z)) \wedge Lim(X)\right)]$

Dimostrazione

Si assuma che G sia la classe sopra descritta ed F sia ristretta nel modo indicato. Allora si può osservare che $F(\emptyset) = G(F \upharpoonright \emptyset) = G(\emptyset) = f^0$[464]. Così $F(\emptyset) = f^0$. Inoltre $F(X^+) = G(F \upharpoonright X^+)$ e poiché $\Delta_1(F \upharpoonright X^+) = X^+$ e $sup(X^+) = X \neq^* X^+$, si ha che: $G(F \upharpoonright X^+) = H\left((F \upharpoonright X^+)(sup(X^+))\right) = H(F(X))$, cioè $F(X^+) = H(F(X))$. Infine $F(X) = G(F \upharpoonright X)$ e $\left(Lim(X) \wedge (X \neq^* \emptyset)\right)$. Quindi $\Delta_1(F \upharpoonright X) = X$ e $sup(X) = X$. Così $G(F \upharpoonright X) = \bigcup \Delta_2(F \upharpoonright X) = \bigcup_{Z<X} F(Z)$, cioè $F(X) = \bigcup_{Z<X} F(Z)$. Giacché per induzione è possibile assicurare l'unicità della funzione F, è possibile allora utilizzare MD* per asserire l'enunciato della tesi.

---

[463] Cfr. Takeuti, G., Zaring, W., *Introduction to Set Theory*, Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1971, p. 43

[464] $(F \upharpoonright X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle m, n\rangle \in F | (m \in X)\}$.

Utilizzando il teorema di ricorsione transfinita, è possibile ora dare ricorsivamente i lineamenti dell'aritmetica ordinale, tralasciandone le dimostrazioni[465]:

1) somma di due ordinali W_1 e W_2 $(W_1 +_0 W_2)$:

Definizione 14.106

$$(W_1 +_0 \emptyset) = W_1$$

$$\left(W_1 +_0 {W_2}^{+}\right) = (W_1 +_0 W_2)^{+}$$ [466]

$$(W_1 +_0 W_2) = \bigcup_{W_k < W_2} W_1 +_0 W_k$$ [467]

2) prodotto di due ordinali W_1 e W_2 $(W_1 \times_0 W_2)$:

Definizione 14.107

$$(W_1 \times_0 \emptyset) = \emptyset$$

$$\left(W_1 \times_0 {W_2}^{+}\right) = \left((W_1 \times_0 W_2) +_0 W_1\right)$$ [468]

$$(W_1 +_0 W_2) = \bigcup_{W_k < W_2} W_1 \times_0 W_k$$ [469]

3) esponenziazione di due ordinali W_1 e W_2 $\left({W_1}^{W_2}\right)$:

[465] Rinviamo per le prove e le consuete proprietà ancora a: Takeuti, G., Zaring, W., *Introduction to Set Theory*, *op. cit.*, pp. 49-62

[466] Per ogni W_2.

[467] $Lim(W_2) \wedge (W_2 \neq^* \emptyset)$.

[468] Per ogni W_2.

[469] $Lim(W_2) \wedge (W_2 \neq^* \emptyset)$.

Definizione 14.108

$$W_1^{\emptyset} = \{\emptyset\}$$

$$W_1^{W_2} = \left(\left(W_1^{W_2}\right) \times_0 W_1\right)$$ [470]

$$(W_1 +_0 W_2) = \bigcup_{W_k < W_2} W_1^{W_k}$$ [471]

[470] Per ogni W_2.
[471] $Lim(W_2) \wedge (W_2 \neq^* \emptyset)$.

14.3.2 Gli "ordinali iniziali" come cardinali

In base agli assiomi sin qui assunti, sappiamo che ogni insieme puro può essere bene ordinato e che due insiemi sono equinumerosi, se fra di essi esiste una funzione biiettiva.

Disponendo del concetto di numero ordinale, definiremo il concetto di numero cardinale come segue: diciamo che un cardinale è un numero ordinale che non è equinumeroso con nessun ordinale minore di esso. Tali ordinali sono anche detti "ordinali iniziali".

Ora se un insieme W è un insieme bene-ordinato, allora esiste un X, tale che $Ord(X)$ e $(W \approx X)$.

Definizione 14.109 $Card(W) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \mu_{X^{Or}}[BeOr(W) \wedge (W \approx X)]$[472]

Possiamo ora precisare meglio i concetti di "finito" e "infinito", tenendo conto di quanto è stato precedentemente affermato a proposito dei numeri naturali. Ogni numero naturale sarà un elemento dell'ordinale ω_0 ed ogni insieme in corrispondenza biiettiva con un suo segmento iniziale sarà finito. Se un insieme non ($\neg^*$) è finito, allora esso sarà infinito, cioè in corrispondenza biiettiva con ω_0 o con un ordinale maggiore di ω_0.

L'ordinale ω è allora il più piccolo cardinale infinito e tutti i cardinali infiniti sono ordinali limiti. Quegli ordinali, che sono anche cardinali, verranno detti "*Alephs*" ('ℵ'). La gerarchia di cardinali infiniti può essere allora così stabilita:

Definizione 14.110

$$\aleph_0 = \omega_0 = \omega$$

$$\aleph_{n+1} = \omega_{n+1} = \aleph_n^+$$

$$\aleph_\lambda = \omega_\lambda = sup\{\omega_\kappa | \kappa < \lambda\}$$[473]

[472] Cfr. Jech, T., *Set Theory*, *op. cit.*, p. 29

[473] Per $Lim(\lambda)$.

È possibile a questo punto sviluppare tutta l'aritmetica cardinale finita e transfinita, come avviene normalmente nei sistemi classici.

Infine si può osservare che se si definisce ricorsivamente la funzione "*Beth*" come:

Definizione 14.111

$$\beth_0 = \aleph_0$$

$$\beth_{n+1} = 2^{\aleph_n}$$

$$\beth_\lambda = sup\{\beth_\kappa | \kappa < \lambda\}$$[474]

allora si può valutare anche in ZFU_1 l'ipotesi cantoriana del continuo (CH), corrispondente all'affermazione:

$$(CH)\ \aleph_1 = \beth_1 = 2^{\aleph_0}$$

La versione generalizzata di tale ipotesi (GCH) sarà allora equivalente all'affermazione:

$$(GCH)\ \forall n[\beth_n = 2^{\aleph_{n-1}} = \aleph_n]$$

[474] Per $Lim(\lambda)$.

14.3.3 La gerarchia cumulativa

Avendo ammesso l'assioma di fondazione, è possibile a questo punto delineare la struttura fondamentale dell'universo descritto da un sistema come ZFU_1.

Considerando il fatto che la teoria non esprime la necessità dell'esistenza di individui non-insiemistici, riteniamo ragionevole immaginare un universo alla cui base possano trovarsi o meno elementi insiemisticamente indecomponibili.

In generale quindi possiamo immaginare l'universo come strutturato in livelli (*layers*) o strati: alla base di tale universo possono collocarsi gli eventuali oggetti primitivi[475]. Al livello successivo si incontreranno gli insiemi più elementari, quelli che contengono *Urelemente*. Al terzo livello si potranno poi collocare tutti quegli insiemi generabili a partire dai primi due livelli precedentemente realizzati, la cui esistenza sia già stata provata e assicurata dal fatto che essi si trovano entro gli strati precedentemente generati e così via.

Indipendentemente dalla presenza o meno degli individui non-insiemistici, entro il secondo livello sarà sempre e comunque presente l'insieme (fortemente) vuoto, la cui esistenza è stata fin qui espressamente postulata. Così nello strato successivo si troverà certamente anche l'insieme puro $\{\emptyset\}$; proseguendo si incontrerà allo stesso modo la collezione $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e così via.

Reiterando transfinitamente il processo si giungerà al livello ω-esimo, dove sarà possibile trovare l'insieme infinito, esplicitamente postulato dall'assioma $\boldsymbol{I}$. Questo corrisponde – secondo il ragionamento che abbiamo già avuto modo di seguire – all'insieme dei numeri naturali; così sarà possibile collocare nei vari livelli anche l'insieme di tutti i numeri interi, di tutti i numeri razionali e, procedendo nella costruzione degli strati, anche di tutti i numeri reali.

Gli strati vengono intuitivamente costruiti mediante l'operazione potenza, applicando la quale è possibile passare da un livello all'altro, collocando di volta in volta gli oggetti costruiti entro uno strato appropriato.

Percorrendo i singoli livelli non si incontrerà mai un insieme che appartenga a se stesso, poiché intuitivamente ogni insieme appartenente ad un certo livello è stato costruito col materiale preso dagli strati ad esso inferiori.

Il fatto che non sia mai possibile incontrare ad una certa altezza un insieme non-ben-fondato, fa sì che nell'universo non esistano catene discendenti infinite. Ciò è assicurato – come abbiamo visto – dall'assioma di regolarità poiché una costruzione basata sui criteri appena visti esclude la formazione di collezioni straordinarie in un qualunque passo della ricorsione che andremo a definire.

---

[475] Cfr. Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, pp. 87-8

L'universo così generato è costituito da una successione di stratificazioni che, in un certo senso, gli conferiscono anche un buon ordine. Perciò, considerata una certa proprietà, sarà sempre possibile trovare il più piccolo livello, al quale apparterranno tutti gli oggetti che verificheranno quella determinata proprietà.

Definiamo con maggior precisione i concetti sopra esposti in modo intuitivo. Sia R la funzione definita induttivamente su tutti gli ordinali, in maniera tale che:

$$R(X^{Or}) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\bigcup_{Y^{Or}<X^{Or}} \left(\wp\left(R(Y^{Or})\right)\right) \right]$$

Così ad esempio se non dovessero darsi *Urelemente*[476], i vari strati della teoria potrebbero corrispondere semplicemente alla seguente gerarchia[477]:

$$\left[R(0) = \bigcup \emptyset = \emptyset \right]$$

$$\left[R(1) = \bigcup_{0<1} \left(\wp\left(R(0)\right)\right) = \bigcup \{\wp(\emptyset)\} = \wp(\emptyset) = \{\emptyset\} \right]$$

$$\left[R(2) = \bigcup_{0,1<2} \left(\wp\left(R(1)\right)\right) = \left(\wp(\emptyset) \cup \wp(\{\emptyset\}) \right) = \left(\{\emptyset\} \cup \left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\} \right) = \left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\} \right]$$

$$\begin{aligned} \Bigg[R(3) = \bigcup_{0,1,2<3} \left(\wp\left(R(2)\right)\right) &= \left(\wp(\emptyset) \cup \wp(\{\emptyset\}) \cup \wp\left(\left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\}\right) \right) = \\ &= \left(\{\emptyset\} \cup \left\{\{\emptyset\}\right\} \cup \left\{\emptyset, \{\emptyset\}, \left\{\{\emptyset\}\right\}, \left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\}\right\} \right) = \\ &= \left\{\emptyset, \{\emptyset\}, \left\{\{\emptyset\}\right\}, \left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\}\right\} \Bigg] \end{aligned}$$

……………………………………………………………………………

476 Cfr. Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 94

477 Si partirebbe in tal caso dall'insieme vuoto poiché la base sarebbe priva di *Urelemente* ed il primo oggetto incontrato nella ricorsione sarebbe proprio la classe nulla.

Mentre se dovessero esservi *Urelemente*, allora oltre alla gerarchia sopra illustrata, che sarebbe comunque determinabile, si avrebbe un universo rappresentabile in questo modo:

$$[R'(0) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}]$$

$$\left[R'\left(X^{Or^+}\right) = \wp\left(R'(X^{Or})\right)\right]$$

$$R'(Y^{Or}) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\bigcup_{X^{Or}<Y^{Or}} \left(R'(X^{Or})\right)\right]$$

se Y^{Or} è un ordinale limite.

Segue anche che per ciascun $R(Y^{Or})$ valgono le seguenti proprietà:

1) $Trans\left(R(Y^{Or})\right)$;

2) $(X^{Or} < Y^{Or}) \to \left[\left(R(Y^{Or}) \in R(Y^{Or})\right) \wedge \left(R(X^{Or}) \subseteq R(Y^{Or})\right)\right]$;

3) $\left(Z \in R(Y^{Or})\right) \leftrightarrow \left(Z \subseteq R(Y^{Or})\right)$.

Possiamo definire a questo punto la funzione ρ, detta anche "*rank*", cui prima abbiamo fatto solo riferimento.

Diremo che un insieme Y è ben-fondato se è membro o sottoinsieme di qualche strato $R(X^{Or})$, per qualche ordinale X. Chiameremo "*rank*" di un insieme ben-fondato Y il più piccolo ordinale X, tale che $\left(Y \subseteq R(X^{Or})\right)$.

Varranno allora le seguenti proprietà per la funzione *rank*:

1) $[(\rho(X) \leq Y^{Or})] \leftrightarrow \left(X \subseteq R(Y^{Or})\right)$;

2) $[(\rho(X) < Y^{Or})] \leftrightarrow \left(X \in R(Y^{Or})\right)$;

3) $\left[(Y \in X) \wedge WF(Y)\right.$[478]$\left.\right] \rightarrow [\rho(Y) < \rho(X)]$;

4) $\forall Z[(Z \in X) \wedge WF(Z)] \rightarrow WF(X)$.

[478] Con '$WF(Y)$' intendiamo che Y è ben-fondato (*well-founded*).

14.4 Non-trivialità relativa del sistema ZFU_1

In questo paragrafo esamineremo una dimostrazione di consistenza o, meglio, non-trivialità "relativa" per il sistema formale fin qui delineato.

Non possiamo infatti discutere di una prova di coerenza assoluta o interna al sistema stesso poiché il sistema in questione è anch'esso sufficientemente potente. Come visto, esso è in grado di sviluppare sostanzialmente l'aritmetica di Peano e ciò fa sì che la teoria ZFU_1 appartenga a quella classe di sistemi formali soggetti al primo e al secondo teorema di Gödel[479].

La dimostrazione che qui forniremo sarà dunque una prova di coerenza (non-trivialità) relativa, ossia si tratterà di una dimostrazione che riduca il caso della coerenza (non-trivialità) della teoria ZFU_1 a quella di qualche altro sistema formale.

La teoria che prenderemo in considerazione sarà ancora una volta ZF. Per quest'ultima valgono i due teoremi di Gödel e pertanto anch'essa non può ritenersi al riparo da contraddizioni in senso assoluto: tuttavia essa è al sicuro dalle antinomie che l'applicazione del principio di comprensione, ristretto nel senso di Zermelo, è in grado di eliminare.

Il fatto di considerare ZF un sistema formale coerente e dunque affidabile è pertanto un atto di fiducia nella ragionevolezza e nell'evidenza dei suoi postulati.

Ciò che è importante valutare ai fini della nostra dimostrazione è che dalla base assiomatica delineata per ZFU_1 non risulta alcuna condizione specifica a favore dell'esistenza o della non-esistenza degli *Urelemente*. Tuttavia la presenza o meno di individui non-insiemistici, contraddittori o meno, può costituire uno scarto di fondamentale importanza per il nostro discorso. Intuitivamente, se questi ultimi risultassero assenti, allora verrebbero meno anche tutte le possibili condizioni di inconsistenza, dal momento che gli *Urelemente* sono stati caricati della possibilità di introdurre quelle antinomie, in grado di perturbare il discorso formale altrimenti classico. Lo schema di comprensione $\boldsymbol{CP}$ funziona in maniera tale da consentire l'uso della negazione debole soltanto per quei predicati definiti a partire da una relazione di appartenenza tra un *Urelement* ed una classe del secondo strato. Così se non vi fossero individui primitivi *tout court*, allora non dovrebbero esserci nemmeno predicati potenzialmente antinomici da attribuire, poiché mancherebbero quegli specifici oggetti, sui quali è stata idealmente scaricata la responsabilità di possibili contraddizioni.

[479] Gödel, K., *Über formal unentscheidbare Sätze der „Principia Mathematica" und verwandter Systeme I*, *op. cit.* Gentzen ha comunque dimostrato che, con strumenti non riconducibili all'interno di $\boldsymbol{PA}$, l'aritmetica formale è consistente. Cfr. Gentzen, G., *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*, «Mathematische Annalen», vol. 112, 1936, pp. 493-565

Intuitivamente possiamo allora osservare due casi per il nostro discorso:

1) modelli con *Urelemente* (eventualmente inconsistenti);

2) modelli privi di *Urelemente* (e dunque consistenti *a priori*).

Nel caso 1), il fatto che in un certo modello vi siano oggetti insiemisticamente indecomponibili, non è di per sé una ragione sufficiente per credere nella presenza di contraddizioni ingenerate da questi ultimi. Ciò dipende da singoli casi, su cui la teoria non fa alcun tipo di assunzione. Ad ogni modo la possibilità di poter costruire tutte le collezioni normalmente deducibili nei sistemi classici resterebbe inalterata e dunque ZFU_1 potrebbe costruire tutta quella parte di universo ottenibile mediante gli assiomi di ZF. Sarebbe sufficiente considerare la porzione standard della gerarchia cumulativa, quella costituita cioè dagli insiemi puri costruibile mediante la funzione 'R', per verificare il fatto che a partire dall'insieme vuoto, reiterando l'operazione potenza, si trovano collocati nei vari strati esattamente le classi che è possibile ottenere in ZF.

Nel caso 2) invece, l'assenza di *Urelemente*, consentirebbe una netta semplificazione: se infatti non esistessero oggetti non-insiemistici, allora i predicati istanziabili da $\boldsymbol{CP}$ sarebbero tutti in un certo senso di tipo classico poiché, per ciascuna condizione d'appartenenza elementare, varrebbe $(m \in X)$ oppure la sua negata forte[480], cioè $(m \notin^* X)$, per qualche m e qualche X, dove la

[480] In base alla formulazione dello schema $\boldsymbol{CP}$ una formula α del tipo "$\neg(X \in Y)$" non è direttamente istanziabile da esso. Nessuna condizione che riguardi rapporti di appartenenza fra insiemi può essere negato mediante il semplice uso della negazione primitiva del nostro sistema formale. Non è cioè possibile derivare dallo schema di comprensione adottato l'esistenza di un insieme che non appartenga debolmente poiché varrà fondamentalmente la condizione di stabilità per essi, tacitamente assunta. Così $ZFU_1 \nvdash \neg(X \in Y) \wedge (X \in Y)$, per alcun X e per alcun Y. Ora sappiamo che in un sistema formale come ZFU_1 possono considerarsi tre condizioni: 1) è vera una formula α; 2) è vera una formula $\neg\alpha$; 3) è vera una formula α e può essere vera la condizione di stabilità per essa, cioè è vero che α°. Le condizioni 1) e 2) non si escludono a vicenda e potrebbero essere entrambe vere, come ad esempio nel caso di quei modelli detti "singolari". La condizione 3) invece ristabilisce delle condizioni di verità di tipo classico, in quanto essa fa sì che non possano mai essere vere tanto α quanto $\neg\alpha$ ma solo una delle due. L'eventualità quindi di avere un modello che soddisfi sia una formula che la sua negata riposa innanzitutto sulla possibilità di esprimere tale negazione mediante il funtore di negazione debole: infatti se avessimo la verità di una formula α equivalente a $\neg\beta$, per la quale valesse la condizione di stabilità (β°), allora avremmo per definizione la verità anche della formula $\neg^*\beta$, che escluderebbe la compossibilità di β. Non potendo quindi contrapporre ad una qualche formula del tipo $(X \in Y)$ semplicmente la sua negata debole, poiché ciò sarebbe contrario alle regole di definizione per le condizioni predicative istanziabili dal postulato $\boldsymbol{CP}$ e potendo considerare soltanto condizioni per cui $(X \in Y)$ o $\neg^*(X \in Y)$, allora in ZFU_1 si potrebbe valutare semplicemente il caso in cui $(X \in Y)$ o $\neg^*(X \in Y)$, così come si verificherebbe nel caso di un sistema su base logica classica.

variabile m occorrerebbe necessariamente per qualche altro determinato insieme diverso da X. Ciò consentirebbe il completo ripristino delle condizioni formali classiche, facendo sì che, in un certo senso, ZFU_1 «collassi» su ZF. In tal caso esisterebbe almeno un modello $\mathfrak{M}$ vero tanto di ZF quanto di ZFU_1.

Cercando di giustificare e precisare formalmente i ragionamenti sopra esposti, proveremo quanto segue:

Metateorema 14.2 $[non\ Triv(ZFU_1)]\ aeq\ [non\ Triv(ZF)]$

Dimostrazione

Scomporremo la dimostrazione nelle sue due parti fondamentali.

($\Rightarrow$) Il sistema ZF è una sottoteoria di ZFU_1, cioè $ZF \dot{\subseteq} ZFU_1$. Per provare questo fatto è sufficiente considerare le formule di ZF con riferimento alle formule di ZFU_1 in cui occorrono variabili per elementi o variabili per insiemi. In tal caso tutti gli assiomi di ZF ne sarebbero immediate conseguenze. Infatti tutti i predicati istanziabili da $\boldsymbol{CP}$ sarebbero espressi mediante formule che fanno uso al più del funtore di negazione forte e dunque per ogni formula di ZF si avrebbe un criterio di traducibilità tale che ad ogni formula ottenuta mediante l'uso di funtori logici quali $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, corrisponderebbero le analoghe formulazioni in ZFU_1; mentre per le formule negate in ZF, corrisponderebbero le formule negate dal funtore $\neg^*$. Ciò significa che, nel caso di appartenenza tra classi, si escluderebbe la possibilità di antinomie per esse. Dunque $ZFU_1 \vdash ZF$ e così $[(non\ Triv\ ZFU_1)\ seq\ (non\ Triv\ ZF)]$.

($\Leftarrow$) Per dimostrare l'inverso, occorrerà tener presente il fatto che $[(non\ Triv\ ZFU)\ aeq\ (non\ Triv\ ZF)]$[481]. Ora il sistema ZFU potrebbe essere riguardato dal punto di vista di ZFU_1 come equivalente alla stessa teoria con in più l'assioma di non contraddizione o, equivalentemente, come quella teoria ottenibile assumendo la stabilità come ipotesi generalizzata delle sue formule atomiche[482]. Potremmo indicare questa teoria come ZFU_0 e stabilire dunque che $[(non\ Triv\ ZFU_0)\ aeq\ (non\ Triv\ ZF)]$. Sappiamo inoltre che il sistema ZFU_1 è più debole del sistema ZFU_0 in quanto i calcoli logici che sono alla loro base sono tali che C_0^* contiene C_1^* e così non tutti i teoremi deducibili da

[481] Cfr. Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, *op. cit.*, p. 24, nota 1. Mostowski, A., *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip*, *op. cit.* Lévy, A., *The Interdependence of Certain Consequences of the Axiom of Choice*, «Fundamenta Mathematica», vol. 54, 1964, pp. 135-57. Rieger, *A Contribution to Gödel's Axiomatic Set Theory, I*, *op. cit.*

[482] Per l'assioma 10) di C_1^* lo sarebbero allora anche tutte le altre formule.

ZFU_0 sono per questo anche teoremi di ZFU_1. Essi sono dimostrabili in ZFU_1, se si assume la stabilità delle componenti quantificazionalmente prime di tali formule così come delle formule occorrenti nell'insieme delle eventuali ipotesi da cui essi dipendono. Ciò significa dunque che ZFU_1 deduce di fatto meno teoremi di ZFU_0, poiché in linea generale esistono teoremi di ZFU_0 che non sarebbero validi in ZFU_1, a meno delle ipotesi di stabilità prima viste. Pur potendo quindi «simulare» al proprio interno tutto quanto accade normalmente in ZFU_0, una volta che sia stabilito un criterio di traducibilità adeguato fra le due teorie, ZFU_1 resta di fatto una teoria più debole di ZFU_0. Così $[(non\ Triv\ ZFU_0)\ seq\ (non\ Triv\ ZFU_1)]$. Abbiamo però anche detto che vale l'implicazione metateorica $[(non\ Triv\ ZF)\ seq\ (non\ Triv\ ZFU_0)]$ e dunque vale che $[(non\ Triv\ ZF)\ seq\ (non\ Triv\ ZFU_1)]$.
(⇔) Considerando i risultati ottenuti nei punti (⇒) e (⇐), possiamo infine asserire che $[non\ Triv(ZFU_1)\ aeq\ non\ Triv(ZF)]$.

Questo metateorema ci consente allora di dire che ZFU_1 è un sistema non-triviale adeguato alla costruzione di teorie inconsistenti non-banali fondate su di esso.

14.5 Sulla non-finita assiomatizzabilità di ZFU_1

Chiuderemo questa trattazione sugli assiomi completando brevemente il discorso che avevamo introdotto a proposito dello schema di comprensione e di rimpiazzamento circa l'impossibilità di sostituirli con un numero finito di assiomi.

Come già accennato, lo schema $\boldsymbol{CP}$, così come del resto lo schema $\boldsymbol{R}$, non sono dei veri e propri assiomi, quanto piuttosto degli schemi o degli insiemi di assiomi, che rispettano certe caratteristiche strutturalmente comuni.

Il quesito che si può porre a questo punto è in qualche modo analogo a quello che fu discusso da Montague[483] per ZF: esiste un insieme finito di assiomi con cui sostituire eventualmente lo schema di comprensione? O ancora: è ZF un sistema finitamente assiomatizzabile? La domanda non è priva di conseguenze ed è sufficiente considerare semplicemente lo schema di comprensione.

La questione ammette una risposta negativa e fa sì che un sistema come ZF risulti un'estensione nient'affatto banale dell'originario sistema Z.

Ricostruendo sinteticamente il ragionamento che è alla base di una simile dimostrazione, cercheremo qui di ridurre il quesito analogo per il nostro sistema formale a quello per la teoria ZF, per la quale – come detto – non esiste alcuna base finitamente assiomatizzabile, che possa restituire al sistema così ottenuto tutta la potenza derivante dallo schema di isolamento.

Il teorema che interessa ZF è il seguente:

Metateorema (Montague) Se ZF è consistente, allora esso non è finitamente assiomatizzabile.

Dimostrazione[484]

Sia per assurdo ZF una teoria finitamente assiomatizzabile. Allora esisterà una congiunzione finita di tutti i suoi assiomi, del tipo $(Ax_1 \wedge \ldots \wedge Ax_n)$. In base al teorema di riflessione, applicato all'universo vero e proprio V, esisterà un certo segmento dell'universo nel quale tale congiunzione risulterà vera. Sia ρ un ordinale, tale che nel segmento V_ρ risulti vera la congiunzione d'assiomi ipoteticamente determinata, ossia:

[483] Cfr. Montague, R., *Fraenkel's Addition to the Axioms of Zermelo*, *op. cit.*

[484] Seguiremo qui la dimostrazione di Hinman, alla quale rinviamo per maggiori dettagli sugli argomenti utilizzati nella prova. Cfr. Hinman, P., *Fundamentals of Mathematical Logic*, A K Peters, Wellesley, 2005, pp. 547-8

$$ZF \vdash \exists\rho[(Ax_1\wedge\ldots\wedge Ax_n)^{V_\rho} \leftrightarrow (Ax_1\wedge\ldots\wedge Ax_n)^V]$$

Poiché in ZF si deduce tale congiunzione e $[(Ax_1\wedge\ldots\wedge Ax_n) \leftrightarrow (Ax_1\wedge\ldots\wedge Ax_n)^V]$, allora:

$$ZF \vdash \exists\rho\left[(Ax_1\wedge\ldots\wedge Ax_n)^{V_\rho} \leftrightarrow \forall\sigma < \rho\big(\neg^*(Ax_1\wedge\ldots\wedge Ax_n)\big)^{V_\sigma}\right]$$

V_ρ sarebbe allora un modello di un simile ZF e dunque ogni teorema α del sistema risulterebbe vero nel modello costituito da V_ρ. Allora per ogni teorema α, α^{V_ρ} e in particolare:

$$[(\exists\sigma(Ax_1\wedge\ldots\wedge Ax_n)^{V_\sigma})^{V_\rho}] \leftrightarrow \left[\exists\sigma \in V_\rho\left((Ax_1\wedge\ldots\wedge Ax_n)^{({V_\sigma}^{V_\rho})}\right)\right]$$

Se ciò fosse vero, allora $\left[\left(\sigma \in V_\rho\right) \to (\sigma < \rho)\right]$ e poiché la funzione *rank* di ZF è V_ρ-assoluta, si avrebbe che $\left[(V_\sigma)^{V_\rho} = \left(V_\sigma \cap V_\rho\right) = V_\sigma\right]$. Quindi:

$$ZF \vdash \left[\big((\exists\sigma < \rho)(Ax_1\wedge\ldots\wedge Ax_n)\big)^{V_\sigma}\right]$$

contrariamente alla scelta di ρ come il più piccolo ordinale in grado di definire la porzione di unniverso, all'interno della quale verificare la congiunzione di un numero finito di assiomi per ZF. Supponendo ZF coerente, occorrerà allora respingere l'ipotesi per cui esista un insieme finito di assiomi con cui rimpiazzare lo schema di comprensione.

Limitandoci al caso dello schema di comprensione o di isolamentento possiamo stabilire il seguente:

Metateorema 14.3 ZFU_1 non è un sistema finitamente assiomatizzabile.

Dimostrazione

Avendo precedentemente dimostrato che $ZF \dot\subseteq ZFU_1$, e cioè che ZF è una sottoteoria di ZFU_1, la restrizione dimostrata da Montague varrà allora anche per il sistema formale qui in discussione. Se così non fosse infatti ZFU_1 sarebbe una teoria finitamente assiomatizzabile e ZF sarebbe allora conseguenza di un numero finito di assiomi contro il metateorema di Montague.

15. Sinossi degli assiomi propri del sistema formale ZFU_1

Definizione di eguaglianza

$$\big[(X = Y) \overset{\text{def}}{\equiv} [\forall Z(Z \in X \leftrightarrow Z \in Y)]\big] \vee [(x = y) \overset{\text{def}}{\equiv} \forall Z(x \in Z \leftrightarrow y \in Z)]$$

Assiomi propri

1) Assioma di estensionalità. $\boldsymbol{E}$

$$\forall X \forall Y \forall Z\big[[(X \in Z) \wedge (X = Y)] \to (Y \in Z)\big]$$

2) Assioma dell'insieme vuoto. $\boldsymbol{O}$

$$\exists Y \forall m(m \notin^* Z)$$

3) Assioma della coppia. $\boldsymbol{C}$

$$\forall m \forall n \exists Z \forall p\big[(p \in Z) \leftrightarrow [(p = m) \vee (p = n)]\big]$$

4) Assioma dell'unione. $\boldsymbol{Un}$

$$\forall X \exists Y \forall m\big[(m \in Y) \leftrightarrow \exists Z[(m \in Z) \wedge (Z \in X)]\big]$$

5) Schema di comprensione. $\boldsymbol{CP}$

$$\forall Z \exists Y \forall m\Big[(m \in Y) \leftrightarrow \big[(m \in Z) \wedge \big(P(m)\big)\big]\Big]$$

6) Assioma dell'insieme potenza. $\boldsymbol{Pw}$

$$\forall Z\exists Y\forall X[(X\in Y)\leftrightarrow(X\subseteq Z)]$$

7) Assioma dell'infinito. ***I***

$$\exists X\big[(\emptyset\in X)\wedge\forall Z\big((Z\in X)\to(Z\cup\{Z\}\in X)\big)\big]$$

8) Schema di rimpiazzamento. ***R***

$$\forall Y\forall X\Big[In(Y)\to\exists Z\forall m\big[(m\in Z)\leftrightarrow\exists n\big((\langle n,m\rangle\in Y)\wedge(n\in X)\big)\big]\Big]$$

9) Assioma di scelta. ***S***

$$\begin{aligned}\forall X\Big[\forall Y\forall Z\Big[\big((Y\in X)\wedge(Z\in X)\wedge(Y\neq^{*}Z)\big)\to\\ \to\exists m\Big((m\in Y)\wedge\forall n\big((n\notin^{*}Y)\vee(n\notin^{*}Z)\big)\Big)\Big]\to\\ \to\exists W\forall Y\big[(Y\in X)\leftrightarrow\exists p\forall q\big((q\in W)\wedge(q\in Y)\big)\leftrightarrow(p=q)\big]\Big]\end{aligned}$$

10) Assioma di regolarità. ***F***

$$\forall X\Big[(X\neq^{*}\emptyset)\to\exists m\big[(m\in X)\wedge\neg^{*}\exists n\big((n\in X)\wedge(n\in m)\big)\big]\Big]$$

XV. Il concetto di "regione"

1. La regione come insieme di Urelemente

Dagli assiomi e dalle definizioni di questo capitolo si può forse comprendere meglio il ruolo giocato dalle contraddizioni ammesse in maniera limitata in un sistema come ZFU_1.

In esso abbiamo cercato di formalizzare l'idea concernente la trattazione di *Urelemente* contraddittori, tali cioè che gli individui eventualmente presenti possano appartenere ed eventualmente non appartenere ad uno stesso insieme, nel senso indicato. Considerando la costruzione dell'universo, si è potuto osservare che le contraddizioni sono riconducibili allo strato uno, quello in cui si trovano gli insiemi di *Urelemente*. Ciò è dovuto al fatto che sono gli individui primitivi, presenti eventualmente al livello zero, ad avere caratteri potenzialmente antinomici. L'idea-guida è stata dunque quella di delimitare tale circostanza in maniera tale che le contraddizioni fossero fondamentalmente legate al rapporto di appartenenza tra un oggetto primitivo ed un insieme del primo livello. Mentre negli altri strati successivi ciò non avrebbe dovuto trovar spazio, in virtù dello schema $\boldsymbol{CP}$, in base al quale si possono dare fra classi solo relazioni di appartenenza di tipo classico, in quanto o un insieme appartiene ad un altro oppure esso non gli appartiene in senso forte, con l'esclusione *tout court* dunque di una debole non-appartenenza.

Per spiegare meglio tale concezione, discuteremo di seguito alcune definizioni, che rendono esplicito il contesto eventualmente antinomico a cui abbiamo pensato.

A tale scopo introdurremo la nozione di "regione" per operare una distinzione di fondo tra insiemi di insiemi ed insiemi di *Urelemente*.

Attraverso il concetto di regione che qui verrà presentato, cercheremo inoltre di offrire uno strumento concreto, con cui provare ad interpretare e trattare specifici casi, nei quali la presenza di contraddizioni abbia un significato positivo ben determinato.

In connessione a tali circostanze considereremo certi casi che ci sono sembrati resistere alla trattazione classica e che riteniamo possano essere più facilmente studiati con gli strumenti teorici che qui abbiamo cercato di approntare.

Fisseremo per ciò alcune definizioni, che in quanto tali non avranno *a priori* alcun carattere costrittivo nei confronti del sistema: una definizione infatti non è mai di per sé vera o falsa. Essa si limita piuttosto ad abbreviare la scrittura di certe formule e a definire, appunto, le caratteristiche di ipotetici oggetti, senza per questo forzare in alcun modo il sistema ad ammetterne analiticamente l'esistenza.

Cominceremo la nostra discussione valutando innanzitutto il concetto di "regione", che prendiamo in prestito nelle sue linee originarie dalla riflessione di Isaac Husik[485]. Procederemo quindi ad una sua rapida disamina, per poi passare alla formalizzazione di questa idea secondo i criteri che ci sono sembrati più adeguati agli obiettivi del nostro studio.

[485] Cfr. Husik, I., *Aristotle on the Law of Contradiction and the Basis of the Syllogism*, «Mind», vol. 15, n. 58, 1906, pp. 215-22

2. *Le radici della nozione di "regione"*

Per quanto ne sappiamo, la nozione di "regione" venne discussa per la prima volta in un articolo del matematico e storico della filosofia ebraica Isaac Husik[486], risalente al 1906[487].

In esso lo studioso attaccava il principio di non-contraddizione aristotelico, che egli reputava inadeguato a descrivere la realtà delle cose, ed introduceva la nozione di "regione" come concetto utile alla delimitazione delle sue possibili applicazioni. Convinzione dell'autore era tra l'altro che il principio in questione non fosse nemmeno alla base di tutta la sillogistica e che questa ne dipendesse nelle sue dimostrazioni soltanto in parte.

Husik apriva il suo articolo formulando così il celebre principio aristotelico:

> «Una forma del principio di non-contraddizione è – *una cosa non può avere attributi opposti nello stesso tempo*»[488].

L'autore chiariva poi i termini della sua definizione, affermando che esempi di "attributi opposti" erano:

> «bianco–non-bianco; buono–non-buono; vero–non-vero, in generale A–non-A»[489]

Lo storico della filosofia aveva sostenuto che il principio di non-contraddizione non poteva essere utilizzato in generale a causa del modo in cui veniva intesa la negazione di un certo enunciato. Egli sosteneva che dire di una cosa m che era non-X, significava dire che m aveva qualunque altro attributo all'infuori di quello espresso da X. Così l'eventualità che ad m potesse essere attribuito anche il predicato espresso da X risultava impossibile a causa del principio in questione, contro l'evidenza dei fatti:

> «Il secondo [termine] di ciascuna coppia non va inteso così da includere ogni altra cosa nell'universo tranne il primo; poiché in quel caso la legge di non-contraddizione

---

[486] Husik nacque nei pressi di Kiev nel 1876. Nel 1888 si spostò a Philadelphia, dove ricevette i primi rudimenti da suo padre (Wolf Husik) e dal rabbino Sabato Morais. Negli stati Uniti Husik frequentò dapprima la Central High School e successivamente l'Università della Pennsylvania, dove conseguì una laurea in Matematica e in seguito un dottorato in Filosofia, concentrando i propri studi sui classici della filosofia ebraica e su Aristotele. Morì prematuramente all'età di 63 anni (1939).

[487] Husik, I., *Aristotle on the Law of Contradiction and the Basis of the Syllogism*, *op. cit.*

[488] *Ibidem*, p. 215

[489] *Ibidem*, p. 215

non sarebbe vera, giacché una cosa può essere allo stesso tempo bianca e non-bianca; per esempio, essa potrebbe essere bianca e dura»[490].

In base a questa distinzione Husik introdusse un espediente, che consentiva di precisare meglio la restrizione da osservare sull'universo e riabilitare opportunamente il principio di non contraddizione. Tale restrizione era ciò che egli definì una "regione":

«Il [termine] negativo non-A deve essere ristretto nel suo significato agli attributi interni alla *regione* di A; così non-bianco è ristretto a tutti i colori, con l'eccezione del bianco; non-triangolare a tutte le figure tranne il triangolo. […] Se designiamo il numero di questi incompatibili con n e poniamo uno qualunque di essi, diciamo A, allora tutti gli altri $n - 1$ modi costituiscono non-A; l'intero numero di incompatibili costituisce allora una regione»[491].

L'idea di "regione" veniva specificata meglio nelle due affermazioni che seguivano, nelle quali egli dichiarava cosa si potesse trovare all'interno di una regione e cosa effettivamente ne costituisse una:

«All'interno di una regione perciò gli individui che la costituiscono sono incompatibili. Ma cosa costituisce una regione? Negli esempi di sopra, il colore è una regione, la figura un'altra; e la regione è denotata da un termine generale»[492].

Da tali premesse Husik ricavava un ulteriore considerazione, probabilmente stimolata dalla crescente attenzione richiamata sulla *Mengenlehre* cui Cantor aveva dato vita, consistente nel raffronto tra la «nozione di classe» e quella di regione. Infatti sebbene il concetto di regione, così come quello di classe, scaturissero per il filosofo di Philadelphia dall'assunzione di un termine generale, sotto cui collocare tutti quegli oggetti che soddisfacevano una certa proprietà, essi erano distinti per il fatto che la nozione di classe non era sufficiente di per sé a determinare i motivi per i quali, all'interno di una data regione, certi membri potessero essere tra loro incompatibili:

«D'altra parte si può facilmente capire come nonostante ciò che io ho chiamato regione e ciò che è noto come classe (*class notion*) passino qui sotto lo stesso nome – colore o figura – essi non sono identici. L'origine della nozione di classe, come abbiamo detto, è la similarità degli individui che la compongono; tuttavia tale similarità non può costituire una spiegazione della loro incompatibilità, che li rende membri della medesima regione. […] Non è in virtù della loro similarità […] che ci

[490] Husik, I., *Aristotle on the Law of Contradiction and the Basis of the Syllogism*, *op. cit.*, p. 215
[491] *Ibidem*, pp. 215-6
[492] *Ibidem*, p. 215

porta a sussumerli sotto lo stesso termine generale […], che essi sono incompatibili. Inoltre non tutte le nozioni di classe consistono di incompatibili»[493].

Husik riteneva dunque che la nozione di "classe", verosimilmente quella definita da Cantor[494], e la nozione di "regione" da lui stesso elaborata non potessero considerarsi sullo stesso piano, dal momento che la prima non sarebbe stata in grado di determinare analiticamente la possibile conflittualità, esistente tra gli elementi di una certa regione. I membri di una classe sono tali infatti in virtù di una proprietà comunemente attribuita; da ciò tuttavia – sosteneva il filosofo americano – non sarebbe stato possibile reperire elementi sufficienti per spiegarne l'intrinseca incompatibilità sussistente. L'unica possibilità che si sarebbe avuta per determinare con certezza l'opposizione o l'incompatibilità tra termini, dovuta senz'altro all'attribuzione di qualità che non avrebbero potuto coesistere tra loro, sarebbe stata allora quella di determinare le possibili opposizioni mediante una ricognizione di tipo empirico, cioè attraverso una forma di giudizio formulato *a posteriori*.

Alla domanda: «È possibile determinare *a priori* quali attributi siano incompatibili?»[495], Husik rispondeva affermando che:

«Anche se potessimo essere giustificati nel dire che tutti gli attributi dello stesso senso sono incompatibili, la verità dell'affermazione potrebbe essere determinata soltanto attraverso l'esperienza»[496].

Per Husik infatti valeva che:

«Qualità, intensità, tono appartengono tutti al senso dell'udito ed essi sono compatibili; colore e figura (piana) appartengono al senso della vista ed essi pure non sono incompatibili. Perciò siamo giustificati ad asserire che soltanto l'esperienza può dirci quali attributi siano incompatibili e quali no. Se così fosse, positivo e negativo potrebbero essere nient'altro che nomi di modi della coscienza, nei quali si riscontra incompatibilità. […] La definizione di regione sarebbe allora un aggregato di modi incompatibili della coscienza; ed è chiaro che l'esperienza soltanto costruisce queste regioni per noi»[497].

---

[493] Husik, I., *Aristotle on the Law of Contradiction and the Basis of the Syllogism*, *op. cit.*, p. 215

[494] Cantor definiva un insieme in questo modo: «Unter einer „Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung *M* von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten *m* unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente" von *M* genannt werden) zu einem Ganzen». Cfr. Cantor, G., *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, *op. cit.*, p. 282

[495] Husik, I., *Aristotle on the Law of Contradiction and the Basis of the Syllogism*, *op. cit.*, p. 215

[496] *Ibidem*, p. 215

[497] *Ibidem*, pp. 215-6

3. *Osservazioni al concetto di regione in Husik*

Prima di passare alla presentazione formale del concetto di "regione", per come lo intenderemo noi, desideriamo dare alcuni chiarimenti in modo informale.

A tale scopo ci serviremo di un rapido raffronto col concetto di regione dato da Husik e sopra discusso. Attraverso tali osservazioni saremo in grado di circoscrivere probabilmente meglio la nozione che qui intendiamo formulare, riducendo per quanto possibile eventuali fraintendimenti.

La nozione di regione, così come presentata da Husik, non coinciderà che parzialmente con quella che noi qui cercheremo di descrivere.

I punti, rispetto ai quali divergeremo, sono così riassumibili:

1) la definizione di contraddizione;

2) la definizione di complementazione;

3) la distinzione tra insiemi e regioni;

4) lo psicologismo concernente la nozione di regione.

Rispetto al punto 1), la formulazione canonica data da Aristotele del principio di contraddizione[498] diverge notevolmente da quella esibita da Husik. In quest'ultima manca il riferimento all'unicità della fonte che riceve informazione e produce un'asserzione su di un fatto, cioè a dire manca la restrizione all'unicità del soggetto conoscente, rispetto al quale va relativizzata la formulazione sopra presentata. Tale lacuna aprirebbe alla possibilità di considerare fonti di informazioni differenti, rispetto alle quali potrebbe anche darsi il caso di proposizioni antinomiche[499].

[498] Aristotele formulava il principio di non-contraddizione come segue: «τὸ γὰρ αὐτὸ ἅμα ὑπάρχειν τε καὶ μὴ ὑπάρχειν ἀδύνατον τῷ αὐτῷ καὶ κατὰ τὸ αὐτό». Cfr. Aristotele, *Metafisica*, *libro Γ*, 1005b, 19-20.

[499] Si consentirebbe così la via "discussiva" alle contraddizioni. Inoltre l'esemplificazione offerta da Husik non è così efficace come può sembrare e rivela un approccio inconsapevole di questioni molto più complesse, che presuppongono una distinzione netta tra sintassi e semantica. Prescindendo dal singolare caso di Hilbert, pochi allora avevano chiara questa importante differenza. È piuttosto problematico infatti pensare sullo stesso piano predicati «opposti» come "bianco–non-bianco" e "vero–non-vero": mentre la prima «coppia» potrebbe essere valutata all'interno di una certa teoria formalizzata e dunque su di un piano puramente sintattico, la seconda è discutibile sul piano semantico. Va inoltre osservato che per Husik la dicotomia "vero–non-vero" deve essere interpretata come "vero–falso", intendendo cioè l'equivalenza tra "non-

Il punto 2) ci sembra quello più importante. Husik afferma che il principio, così come formulato in genere, perderebbe la propria validità poiché, intendendo tutto ciò che è nell'universo tranne la proprietà positivamente considerata, si arriverebbe ad escludere tutta una serie di predicati, che invece potrebbero ben attribuirsi al medesimo individuo. Tale considerazione ci pare tuttavia non-condivisibile: infatti gli esempi addotti mostrano che Husik in realtà non ha colto pienamente il concetto di contraddizione aristotelica. Egli asseriva per esempio che una cosa «bianca e non-bianca» poteva voler significare una cosa «bianca e dura»[500], sostituendo il concetto di durezza a quello di non-bianchezza. Così il principio di contraddizione non avrebbe avuto valore generale, se non all'interno della regione di tutti i colori. Tuttavia pensiamo che il filosofo statunitense si ingannasse su questo particolare punto, dal momento che dire di una cosa che è bianca e che è dura rientra semanticamente nel caso dell'intersezione fra due concetti, quello di bianchezza e quello di durezza e non nell'intersezione tra un dato concetto ed il suo complemento. Così il principio aristotelico non verrebbe in realtà falsificato da una simile circostanza: ciò che Aristotele intendeva denotare col principio di non-contraddizione era la negazione del falso, cioè la vacuità risultante dall'intersezione fra un certo concetto ed il suo complemento. Ciò comporterebbe la non-esistenza di un ente per il quale possano attribuirsi due predicati contraddittori.

Ora se un individuo può appartenere ad una data intersezione, allora quell'intersezione non può essere considerata come un caso particolare, in cui il principio di contraddizione risulti violato, poiché le proprietà considerate sarebbero evidentemente compatibili. Per restare sull'esempio di Husik, il principio aristotelico riconduce per forza di cose la propria applicabilità al caso dell'insieme di tutti i colori, individuato dallo storico della filosofia come la regione a cui restringere la nozione di contraddizione, poiché nessuna cosa potrebbe essere bianca e, nel contempo, non-bianca, ossia di un colore differente dal bianco. Il significato dunque della negazione aristotelica è tale da non lasciare spazio ad un'interpretazione nel senso di possedere un'altra proprietà, genericamente intesa, che possa poi scoprirsi in realtà compatibile con quella positivamente indicata – come afferma Husik. L'incompatibilità aristotelica non ci pare possa essere rappresentata correttamente dal caso della bianchezza e della durezza; senza considerare il fatto che l'idea per cui il complemento sia

vero" e "falso". Per l'autore non pare ci fosse interesse ad affrontare la questione dal punto di vista attraverso cui Łukasiewicz ebbe modo di guardare allo stesso problema qualche anno dopo e che diede origine allo studio delle logiche polivalenti. Cfr. Łukasiewicz, J., *O logice trójwartościowej*, «Ruch filozoficzny», vol. 5, 1920, pp. 170-1; trad. ingl., *On Three-Valued Logic*, in Łukasiewicz, J., *Selected Works*, a cura di L. Borkowski, North Holland, Amsterdam, 1970, pp. 87-8. Noto, A., *Logiche non-classiche*, *op. cit.*, pp. 31-59

[500] Husik, I., *Aristotle on the Law of Contradiction and the Basis of the Syllogism*, *op. cit.*, p. 215

considerato in senso assoluto è di per sé un'idea alquanto problematica, come abbiamo avuto modo di vedere.

Per quel che concerne il punto 3) invece, la nostra discussione divergerà dall'opinione di Husik sulla differenza tra un insieme ed una regione. Dal nostro punto di vista ogni regione è anche un insieme e viceversa. È del tutto corretto affermare che un insieme è tale poiché coglie un aspetto comune a tutti i suoi membri. Non è però così scontato affermare che tale aspetto non sia di per sé in grado di determinare la natura dell'incompatibilità fra i suoi elementi. Il fatto che un insieme non possa spiegare esattamente per quale ragione si possa riscontrare un certo grado di incompatibilità tra gli elementi di una regione non dipende dall'insieme in sé: infatti l'insieme in quanto tale non dice nemmeno perché le cose colorate dovrebbero essere nello stesso insieme, dal momento che nessun insieme in astratto fa riferimento ad alcuna proprietà empiricamente data. Ciò che caratterizza un insieme e che è possibile invece determinare *a priori* ci pare essere legato piuttosto ad elementi puramente analitici, poiché di tipo strutturale. Tutto ciò che analiticamente si può stabilire, considerando gli insiemi, è una serie di relazioni che è possibile cogliere mediante deduzione logica da certi assiomi fissati per essi, prescindendo da singoli casi particolari, come quello concernente la classe di tutte le cose colorate. Perciò non vediamo una ragione particolare per affermare una netta distinzione tra insiemi e regioni, fondata su questa osservazione.

Sul punto 4) infine respingiamo l'idea psicologistica, secondo la quale sia l'esperienza a determinare cosa sia effettivamente incompatibile. Ciò per due motivi: primo, la confusione tra insiemistica e teoria dei giudizi è estremamente inopportuna e pericolosa, in quanto le due cose risultano estremamente diverse fra loro. L'idea, che sembra soggiacere a tale concezione, ripete infatti una visione secondo la quale la logica è una teoria rigorosa dei giudizi, mentre l'insiemistica è una forma di logica o, entro questi termini, una teoria rigorosa con cui studiare le forme di concetti possibili. Secondo, la nozione di sistema formale non può essere mescolata in alcun modo ad elementi ad essa esterni: in quanto formale, il sistema non si fonda su contenuti che non siano strettamente legati agli elementi posti in partenza mediante gli assiomi. L'idea secondo cui la considerazione di certi attributi sia da ricercare unicamente nell'esperienza e dunque in un mondo di relazioni *a posteriori*, non rende il sistema meno efficace e non ne intacca il potere euristico-formale. Infatti concordiamo con Husik sul fatto che siano singoli casi a determinare la natura ed i risultati di certe speculazioni. Ma tali casi non derivano a nostro avviso da una mescolanza tra elementi formali ed elementi empirici, esterni alla teoria. Infatti ogniqualvolta si volesse restringere il sistema formale insiemistico ad un caso di studi particolare, all'interno del quale dovessero darsi certi particolari attributi e certi particolari oggetti, sarebbe sufficiente aggiungere ulteriori assiomi alla teoria, in modo tale che le eventuali nuove costanti extralogiche possano essere determinate nel loro comportamento senza equivoci. La relazione dunque tra ciò che è esterno al sistema formale e ciò che è interno passa senz'altro attraverso una decisione del soggetto epistemico, consistente nella volontà di concentrare la propria attenzione su di un determinato caso di studio piuttosto che su di un altro; ma non può prescindere dalla codifica formale degli elementi considerati, poiché non lo esclude – come invece riteneva Husik.

I punti di accordo sono invece sintetizzabili in questo modo:

1) l'idea che le contraddizioni debbano essere ricondotte al concetto di regione;

2) l'idea che una regione possa costituirsi di un numero qualunque di sottoregioni.

Cercando di sviluppare il punto 1), definiremo le regioni come insiemi all'interno dei quali possano essere isolati sottoinsiemi tra loro incompatibili. Così facendo, tenteremo di ricondurre le antinomie entro una determinata collezione, invertendo, in un certo senso, il rapporto immaginato da Husik: infatti mentre per il filosofo statunitense le contraddizioni sono soltanto esterne alle regioni e le incompatibilità ricondotte all'interno di queste, in ZFU_1 le contraddizioni saranno anche interne ad esse.

In merito al punto 2) invece opereremo in maniera tale da rispettare l'idea secondo cui una regione sia composta di sottoinsiemi in linea teorica incompatibili; tuttavia ciò non comporterà per noi una limitazione, quanto invece l'individuazione dello spazio concettuale adeguato, proprio alla disamina delle possibili inconsistenze.

4. *Le regioni in* ZFU_1

4.1 *Definizione generale di regione*

Definiamo di seguito il concetto generale di regione così come lo intenderemo nel nostro sistema formale.

Diremo che X è una regione se e solo se:

Definizione 15.1 $Reg(X) \stackrel{\text{def}}{=}$

1) $[(X \neq^* \emptyset) \wedge$

2) $\wedge \forall m[(m \in X) \rightarrow \exists x(m = x)] \wedge$

3) $\wedge \forall m\big[(m \in X) \rightarrow \exists Z\big((Z \subseteq X) \wedge (m \in Z)\big)\big] \wedge$

4) $\wedge\big[\exists Y\big(OrdIn(Y)\big) \wedge \big((Z_1 \subseteq X) \wedge \ldots \wedge (Z_Y \subseteq X)\big) \wedge (\bigcup\{Z_1, \ldots, Z_Y\} = X)\big] \wedge$

5) $\wedge \Big[\exists Y\big(OrdIn(Y)\big) \wedge \Big(\forall Z(Z \subseteq X) \rightarrow \big(\bigcap_{i=1}^{Y}\{Z_i\} = f(\{Z_1, \ldots, Z_Y\})$[501]$\big)\Big)\Big] \wedge$

Queste cinque condizioni ci sembrano sufficienti allo scopo che intendiamo raggiungere.

La prima di esse intende affermare che una regione è tale se contiene almeno qualche elemento.

La seconda condizione asserisce che ogni elemento della regione X è un individuo non-insiemistico. Dunque le regioni sono sempre e soltanto classi di individui. Così se non ci sono *Urelemente*, allora ogni regione coinciderà con l'insieme vuoto, che è stato definito mediante l'uso della negazione forte ed essi saranno indistinguibili dal semplice concetto di classe.

La terza dice che ogni elemento di X è elemento di una parte o sottoinsieme di X. Come vedremo, definiremo le parti di una regione come "sottoregioni" della regione stessa. La condizione 3) non postula la necessità di dover scomporre una

---

[501] Il termine '$f(\{Z_1, \ldots, Z_Y\})$' indica l'intersezione che si ottiene tra le sottoregioni $Z_1, \ldots, Z_Y$ e che può essere dipendente o meno dagli elementi che lo definiscono. Così o il termine risulterebbe eguale a $\emptyset$ oppure esso risulterebbe eguale agli elementi comuni alle classi $Z_1, \ldots, Z_Y$, che possono anche essere definite in maniera tale da risultare incompatibili tra loro.

regione in altrettante sottoregioni “proprie”. Infatti se una regione fosse banalmente non divisibile in parti, allora l’unica sottoregione possibile sarebbe la regione stessa, che le è contenuta impropriamente, senza per ciò alterare la natura della condizione.

La quarta condizione afferma che la riunione della classe di tutti i sottoinsiemi di una data regione X è eguale a X. Il numero delle sottoregioni è sempre determinato da un ordinale iniziale, cioè da un cardinale, che può essere dunque finito o infinito. La riunione di tali parti deve coincidere con la regione di partenza, cioè deve essere eguale ad essa nel senso in cui è stata indicata tale relazione alla definizione 14.3.

La quinta condizione afferma che l’intersezione tra un numero finito o infinito di sottoinsiemi di X può essere o non essere (fortemente) vuota. Ciò significa che le sottoregioni possono oppure no essere tra loro disgiunte in senso classico. Così se immaginiamo un concetto come scomposto in parti, ad esempio l’“esser-colorato” nell’“essere-di-qualche-colore” (per esempio: m è colorato se e solo m è blu oppure m è rosso oppure m è verde), allora possiamo considerare i rapporti di compatibilità o incompatibilità tra queste parti, così come in qualche modo aveva affermato anche Husik.

Definiamo ora per praticità la nozione di “sottoregione”:

Definizione 15.2 $SottoReg(Z) \overset{\text{def}}{=} \exists X[Reg(X) \wedge (Z \subseteq X)]$

D’ora in avanti ci riferiremo ad una parte o ad un sottoinsieme di una data regione come ad una sottoregione, secondo la definizione 15.2.

Per certi versi esiste una vaga analogia tra il concetto di regione e quello di partizione: entrambi infatti costituiscono una suddivisione in parti di un dato insieme, la cui unione è eguale all’insieme di partenza, che è non-vuoto (per dirsi tale). Tuttavia mentre una partizione ammette come elementi i sottoinsiemi dell’insieme ripartito (cioè le classi di equivalenza), una regione non ammette come elementi i sottoinsiemi considerati poiché essa si identifica con la scomposizione stessa in sottoregioni. Sia il concetto di partizione che quello di regione poi non ammettono l’elemento vuoto come elemento: nel nostro caso banalmente perché questo è una classe pura e ciò risulterebbe contrario alla condizione 2). La differenza più importante però riposa sulla condizione di “disgiunzione a due a due” che è sempre individuabile fra le classi di equivalenza e che può essere rintracciata anche tra alcune sottoregioni in cui viene suddivisa una data regione. Mentre nel primo caso ciò avviene in maniera tale che l’intersezione tra due classi di equivalenza sia costantemente eguale all’insieme fortemente vuoto (e dunque due classi di equivalenza sono sempre disgiunte tra loro in senso classico), nel secondo ciò può non avere validità universale. Non respingiamo *a priori* l'ipotesi che le sottoregioni siano a due a due disgiunte tra loro (in senso classico); ma lasciamo indeterminato questo caso, poiché le sottoregioni possono essere definite anche mediante l'ausilio della negazione debole (conformemente allo schema $\boldsymbol{CP}$) e possono perciò veicolare caratteri inconsistenti, dovuti a sovrapposizioni.

Ad esempio potremmo considerare ancora il caso costituito dal concetto "essere-colorato", espresso da una regione dotata di 3 sottoregioni, e verificare come alla verità che un certo oggetto abbia un colore se e solo se non ne abbia nel contempo un altro, secondo l'esempio dello stesso Husik, possa essere affiancata anche la verita di quest'ultima circostanza, data dal fatto che l'interferenza tra due colori può generarne un terzo. L'esempio addotto da Husik in proposito al fine di specificare un caso all'interno del quale dovrebbe valere sicuramente il principio di non contraddizione è per ciò poco performante. Inoltre, contrariamente a quanto egli riteneva, è falso dire che l'appartenenza ad un insieme non possa spiegare il perché dell'incompatibilità tra concetti. Infatti abbiamo mostrato come definire analiticamente certi rapporti di incompatibilità, non sempre riconducibili all'incompatibilità aristotelica senza fare riferimento nella teoria a casi espliciti. L'esempio della regione "colore" (o, meglio, "essere-colorato") è sì un caso concreto, per il quale solo l'esperienza ed un certo tipo di formalizzazione di essa possono dirci in che modo i colori si oppongano fra loro: ma ciò non costituisce un ostacolo al fissare analiticamente i casi di incompatibilità possibili, che dipendono unicamente dal materiale teorico messo a disposizione dal sistema formale considerato (nel nostro caso ZFU_1).

Inoltre è possibile comprendere meglio anche l'altra obiezione mossa alla concezione di Husik, quella secondo cui sarebbe impossibile indicare *a priori* gli elementi che determinano la compatibilità o meno tra certe proprietà. Il caso della regione "essere-colorato" infatti non costituisce a nostro avviso un esempio di irriducibilità formale, quanto piuttosto un caso esplicito di relativizzazione del sistema formale indagato allo studio di un problema ben preciso, quello in tal caso legato alla formulazione di una certa teoria del colore.

4.2 Regioni di I tipo

Partendo dalla definizione-base di regione, è possibile considerare una serie di casi particolari, che consentono di spiegare meglio certi fatti precedentemente considerati.

Estenderemo quindi la definizione 15.1 per considerare un caso elementare, quello in cui la regione sia consistente sia internamente che esternamente.

Per "coerenza interna" intenderemo il caso di una regione, le cui sottoregioni sono incompatibili fra loro in senso classico e non è possibile immaginare un'intersezione differente dall'insieme fortemente vuoto. Ciò significa che gli *Urelemente* della regione apparterranno o a una sottoregione o ad un'altra, in un rapporto di reciproca esclusione, determinata dal concetto di complementazione classica.

Inoltre veicoleremo l'idea della coerenza esterna di una certa regione, considerando la circostanza in cui la prima regione considerata sia a sua volta sottoregione di una regione più grande e, in questa, non sovrapponibile ad altre parti. Potremmo riprendere l'esempio della regione "essere-colorato" ed osservare che l'esser-colorato rientra nella regione delle cose che sono visibili. Così, in base alle condizioni indicate nella definizione 15.1, risulterebbe che una cosa è colorata se essa ha un determinato colore e che essa è visibile se essa è colorata, rispettando con ciò i rapporti di inclusione tra regioni e sottoregioni: l'essere-di-un-dato-colore $\subseteq$ nell'essere-colorato $\subseteq$ nell'essere-visibile. Pertanto se un cosa è di un dato colore allora essa è visibile. Un'immagine è di un dato colore e dunque è visibile, mentre l'aria non ha alcun colore e pertanto è invisibile.

Formalmente diremo che:

Definizione 15.3 $I - Reg(X) \stackrel{\text{def}}{=}$

$$1)\ \begin{cases} (X \neq^* \emptyset) \\ \forall m[(m \in X) \rightarrow \exists x(m = x)] \\ \forall m\big[(m \in X) \rightarrow \exists Z\big((Z \subseteq X) \wedge (m \in Z)\big)\big] \\ \big[\exists Y\big(OrdIn(Y)\big) \wedge \big((Z_1 \subseteq X) \wedge \ldots \wedge (Z_Y \subseteq X)\big) \wedge (\bigcup\{Z_1, \ldots, Z_Y\} = X)\big] \\ \Big[\exists Y\big(OrdIn(Y)\big) \wedge \Big(\forall Z(Z \subseteq X) \rightarrow \Big(\bigcap_{i=1}^{Y}\{Z_i\} = f(\{Z_1, \ldots, Z_Y\})\Big)\Big)\Big] \end{cases} \wedge$$

$$2)\ \wedge\big[(Z \subseteq X) \rightarrow [(X -^* Z) = \{x | (x \in X) \wedge (x \notin^* Z)\}]\big] \wedge$$

$$3)\ \wedge \exists Y\big[Reg(Y) \wedge (X \subseteq Y) \wedge [(Y -^* X) = \{x | (x \in Y) \wedge (x \notin^* X)\}]\big]$$

Un insieme contenente individui non-insiemistici, che rispetti le 3 condizioni sopra descritte, consente allora di trattare concetti stabili piuttosto comuni nello studio di molti settori.

Il punto 1) asserisce le condizioni strutturali che fanno di una regione di I tipo una regione.

La condizione 2) garantisce la consistenza interna, determinando un'incompatibilità di tipo classico tra le sottoregioni. In tali specifiche classi allora non possono essere trattate proprietà antinomiche di eventuali individui inconsistenti, sebbene ciò non ne escluda la presenza dall'orizzonte teorico. Infatti potrebbe darsi il caso che si stia trattando con oggetti di natura elementare consistenti oppure che si stia trattando con oggetti che hanno tanto caratteri antinomici quanto caratteri tra loro coerenti. Allora tali proprietà potrebbero essere trattate congiuntamente dalle regioni di I tipo e da quelle regioni che definiremo nei prossimi paragrafi.

La condizione 3) infine afferma la consistenza esterna di una regione di I tipo come X. In tal caso si è assunta l'ulteriore ipotesi che esista una classe Y, una regione che sia internamente coerente in virtù del fatto che X non può sovrapporsi ad un'altra sottoregione.

Per esemplificare il caso considerato mediante una regione di I tipo, possiamo prendere in esame il caso della geometria euclidea piana e considerare alcuni dei suoi concetti più elementari, come quello di "essere-di-forma-triangolare". Allora tale concetto potrebbe essere scomposto in tre sottoregioni, ciascuna corrispondente al concetto di "essere-equilatero", "essere-isoscele" ed "essere-scaleno".

I tre sottoconcetti così espressi risultano certamente tra loro incompatibili con riferimento alla teoria euclidea e così l'esame classificatorio delle figure piane aventi tre lati potrebbe essere implementata in una regione di I tipo.

Come si può osservare, in un ragionamento di questo tipo si ritrova in parte ciò che sosteneva Husik a proposito dell'idea per cui ciò che è oppure no incompatibile derivi sostanzialmente da elementi determinabili, in un certo senso, soltanto *a posteriori*. Infatti in questo esempio risulta soltanto da fatti puramente geometrici e non insiemistici l'incompatibilità dei tre sottoconcetti esaminati. Ad ogni modo le condizioni strutturali di incompatibilità si evincono da elementi dati *a priori*, mediante definizione, ed applicate poi al caso qui considerato. Sarebbe infatti sufficiente estendere il linguaggio ed integrare il sistema in questione con gli assiomi della geometria euclidea piana per poter generare una classificazione di tipo regionale di tutti i suoi oggetti e ciò dipenderebbe allora da fattori puramente formali, analitici. Così eventuali relazioni incompatibili potrebbero essere indagate solo con riferimento a questi, senza dover introdurre elementi allotri.

Osserviamo infine che lo stesso esempio tratto dalla geometria può rappresentare bene anche la condizione di coerenza esterna: potremmo considerare infatti gli oggetti che sono di forma triangolare all'interno di una regione più estesa, corrispondente ad esempio al concetto di "avere-una-somma-degli-angoli-interni-pari-a-n°" e considerarli come inclusi nella sottoregione delle figure piane aventi come somma degli angoli interni 180°. Una tale sottoregione non potrebbe sovrapporsi a quelle delle figure che godono di proprietà diverse, come quella di avere come somma degli angoli interni pari a 360°, poiché in questa sottoregione sarebbero contenute le cose che sono dotate di 4 lati. Se vi fosse sovrapposizione, allora si dovrebbero immaginare anche figure piane aventi 3 lati e 4 lati o aventi entrambe le somme degli angoli interni, il che è incompatibile con i fatti che seguono dagli assiomi della geometria piana.

Diremo per questo che la regione è consistente sia internamente, con riferimento cioè alle proprie sottoregioni, sia esternamente, con riferimento a qualche altra possibile regione Y, di cui X sarebbe una parte.

4.3 Regioni di II tipo

Introdurremo ora un'ulteriore tipo di collezione, che è possibile descrivere partendo dalle sei condizioni di base sopra esaminate, a proposito del concetto generale di regione.

Diremo che un certo insieme è una regione di II tipo se essa è internamente inconsistente mentre risulta essere esternamente consistente.

Formalmente stabiliamo dunque quanto segue:

Definizione 15.4 $II - Reg(X) \stackrel{\text{def}}{=}$

$$1)\ \begin{cases} (X \neq^* \emptyset) \\ \forall m[(m \in X) \rightarrow \exists x(m = x)] \\ \forall m\big[(m \in X) \rightarrow \exists Z\big((Z \subseteq X) \wedge (m \in Z)\big)\big] \\ \big[\exists Y\big(OrdIn(Y)\big) \wedge \big((Z_1 \subseteq X) \wedge \ldots \wedge (Z_Y \subseteq X)\big) \wedge (\bigcup\{Z_1, \ldots, Z_Y\} = X)\big] \\ \Big[\exists Y\big(OrdIn(Y)\big) \wedge \Big(\forall Z(Z \subseteq X) \rightarrow \Big(\bigcap_{i=1}^{Y}\{Z_i\} = f(\{Z_1, \ldots, Z_Y\})\Big)\Big)\Big] \end{cases} \wedge$$

$$2)\ \wedge\big[(Z \subseteq X) \rightarrow [(X - Z) = \{x | (x \in X) \wedge (x \notin Z)\}]\big] \wedge$$

$$3)\ \wedge \exists Y\big[Reg(Y) \wedge (X \subseteq Y) \wedge [(Y -^* X) = \{x | (x \in Y) \wedge (x \notin^* X)\}]\big]$$

La condizione 1) ribadisce le proprietà strutturali, che fanno di una regione del II tipo una regione.

Vale inoltre la condizione 3), che abbiamo già visto a proposito della regione di I tipo e da cui il tipo di classe che qui vogliamo descrivere non si discosta.

La condizione 2) invece presenta caratteri diversi, che rendono il concetto di regione del II tipo un concetto autonomo rispetto a quello precedentemente considerato.

La condizione 2) è stata infatti indebolita rispetto al caso delle regioni di I tipo al fine di consentire alle sottoregioni coinvolte di potersi eventualmente sovrapporre. Per far ciò abbiamo rimpiazzato i concetti definiti mediante la negazione forte del nostro sistema formale con quelli analoghi, ottenuti grazie all'impiego della negazione debole. Ciò non forza in alcun modo le sottoregioni a sovrapporsi tra loro, se non in presenza di *Urelemente* che, rispetto ad una loro data proprietà, inquadrata come una regione di II tipo, risultano essere inconsistenti.

La ragione di questo fatto può comprendersi meglio a partire da un esempio pratico: si immagini di voler studiare la teoria del colore a partire dal modello additivo triangolare, che si fonda sull'idea che almeno un certo numero finito di colori sia ottenibile a partire da tre colori fondamentali, detti anche "colori primari" (in genere il blu, il rosso ed il verde). Allora, calandoci in un modello del genere, potremmo dire che una cosa è colorata se e solo se essa ha almeno uno dei tre colori fondamentali, cioè a dire: m è colorato se e solo se m è rosso oppure m è verde oppure m è blu e che l'unione della classe delle cose blu, delle cose rosse e delle verdi costituisce tutto ciò che risulta essere colorato, perlomeno dal punto di vista del modello considerato. In simili circostanze potremmo considerare la proprietà di avere un colore per certi oggetti elementari in base al modello descritto. Potrebbe dunque essere vero che un certa cosa sia blu oppure che sia rossa o ancora che essa sia verde. Questo sarebbe equivalente all'affermazione per cui di un individuo possa affermarsi la proprietà del colore.

Se utilizzassimo la logica classica, avremmo anche che una cosa non potrebbe essere rossa e al contempo verde, poiché se una cosa fosse rossa, allora il verde apparirebbe come parte complementare. Non sarebbe del resto adeguato utilizzare nemmeno una regione di I tipo, che riprodurrebbe conseguenze analoghe. Per poter inquadrare concettualmente i vantaggi offerti da un modello che restringa a tre sole proprietà il numero di casi da considerare per ottenere i restanti, è opportuno pensare alla possibilità, che di fatto si verifica, di sovrapporre le tre proprietà di base. Così potremmo utilizzare una regione di II tipo. In tal caso potremmo pensare alla proprietà di avere un colore come alla regione nella sua interezza e ai colori primari come alle tre sottoregioni in cui la regione-colore potrebbe essere suddivisa. In questo caso infatti la logica sottostante al sistema formale ZFU_1 consente di sviluppare strumenti adeguati alla trattazione del caso in esame, poiché in grado di tollerare le «contraddizioni» risultanti dalle possibili sovrapposizioni e consentire, da un punto di vista concettuale, di intersecare due proprietà incompatibili, come ad esempio nel caso del rosso e del verde. Queste due sottoregioni si presentrebbero come complementari l'una all'altra; e pur tuttavia la loro mescolanza risulterebbe possibile, poiché da essa avrebbe origine comunque qualcosa, cioè a dire la proprietà di "essere-giallo".

Il vantaggio offerto quindi dall'impiego della logica C_1^* è quello di consentire ad un sistema come ZFU la possibilità di tenere assieme casi in cui sia una proposizione che la sua negata risultino veri, come nel caso sopra esaminato, senza per questo determinare però il collasso dell'intera teoria.

Dal punto di vista di Husik la situazione sopra descritta non sarebbe possibile, in quanto la sua nozione di regione intendeva avvalorare la tesi per cui potessero darsi internamente solo rapporti di incompatibilità classica, che avrebbero escluso il caso di sovrapposizioni fra colori.

Esempi di situazioni che potrebbero essere descritte attraverso l'uso delle regioni di questo tipo sarebbero molte: ad esempio, potremmo considerare la teoria dello stato di aggregazione della materia studiato in chimica.

Normalmente si distinguono tre casi possibili: una sostanza può essere allo stato solido oppure può essere allo stato liquido o ancora allo stato aeriforme. Ciascuno di questi stati è ben determinato e corrisponde all'insieme di coppie di termini costituiti da un certo valore per la pressione e da un certo valore per la temperatura a cui la sostanza è sottoposta. Ciascuna sostanza reagisce ad una determinata coppia di valori in maniera propria ed è possibile per ciò effettuare una classificazione del comportamento delle sostanze in base alle relative trasformazioni. Ciascuna di esse appartiene per certi dati valori all'insieme delle cose solide, liquide o aeriformi e normalmente non si presenta mai la possibilità empirica di verificare che un certo elemento si presenti contemporaneamente in tutti e tre gli stati. Tuttavia esistono certe particolari condizioni, graficamente rappresentabili, in cui per certi valori assunti dalla pressione e dalla temperatura, le sostanze possono assumere tutti e tre gli stati contemporaneamente ed essere così allo stato solido-liquido-aeriforme. Se immaginassimo quindi di considerare l'insieme delle cose che possiedono uno stato fisico, come quelle cose che sono di conseguenza o solide o liquide o aeriformi, allora incontreremmo la difficoltà di non poter ammettere quei particolari casi, in cui – come visto – non è insensato dire che le sostanze si presentino sotto tutte le tre condizioni viste: tale circostanza è definita in chimica "punto triplo" ed esiste tutta una classificazione dei punti tripli in base alle diverse sostanze chimiche. Se utilizzassimo quindi un metodo formale di rappresentazione concettuale (insiemistico) di tipo classico, allora dovremmo escludere il caso in cui una sostanza possa assumere tutti e tre gli stati, poiché dire che una cosa sia allo stato solido comporterebbe automaticamente l'esclusione del caso in cui quella stessa sostanza possa essere anche allo stato liquido e aeriforme. Impiegando invece una regione di II tipo per questo specifico caso, potremmo rappresentare insiemisticamente la circostanza descritta immaginando la classe delle sostanze che possiedono uno "stato" come la regione fondamentale; mentre come sottoregioni potremmo pensare ai singoli stati della materia. Così dire che una cosa possiede uno stato fisico di qualche tipo vorrebbe egualmente affermare che essa è allo stato solido, liquido o aeriforme, cioè che essa appartiene ad una delle tre sottoregioni individuate. Tuttavia potremmo ora considerare senza problemi anche quei casi in cui una certa sostanza possa presentarsi in tutti e tre gli stati contemporaneamente. Infatti le sottoregioni di una regione di II tipo non escludono *a priori* la possibilità di sovrapporsi e così potremmo concettualmente giustificare il fatto che una certa sostanza si trovi nel suo punto triplo, determinato da una specifica coppia di valori assunti dalla pressione e dalla temperatura che questa possiede, ricorrendo semplicemente all'utilizzo di strumenti formali più flessibili, come quelle classi che sono state definite secondo la nozione di complementazione debole e corrispondenti qui alla nozione di sottoregione debolmente incompatibile[502].

Altri esempi potrebbero essere mutuati dalla fisica, specialmente dalla meccanica quantistica. In essa le condizioni paradossali sono numerose e pongono il problema epistemologico di come giustificare il fatto che si lavori con una teoria, che presenta contraddizioni esplicite dal punto di vista concettuale e della quale pur tuttavia nessuno fino ad oggi dubita. Inoltre essa viene utilizzata per spiegare la stragrande maggioranza dei fatti oggetto dell'indagine subatomica e, entro i limiti delle possibilità probabilistiche che la caratterizzano, essa viene normalmente utilizzata per fare previsioni circa l'evoluzione di un certo stato fisico. All'interno di essa si teorizzano inoltre elementi ancora mai osservati, per trovare i quali possono occorrere lunghi periodi di studio. Eppure, come nel caso del bosone di Higgs, tale congerie di apparenti antinomie consente di lavorare senza per ciò dover ammettere qualunque altra verità nella teoria, prevedendo e descrivendo stati di cose concrete, che è possibile effettivamente verificare con un buon margine di successo.

Senza entrare in un settore che non ci compete, possiamo intuitivamente considerare il caso degli "stati" descritti dalla meccanica quantistica: in essa ogni sistema fisico viene sostanzialmente ricondotto e descritto all'interno di uno spazio di Hilbert e così ad ogni stato viene associato un vettore di tale spazio. Dal momento che ciascuno di tali vettori può risultare essere una combinazione lineare di altri vettori, si può avere in certi casi una serie di stati, la cui condizione fisica sia fondamentalmente determinata dalla sovrapposizione di più. Una simile circostanza non è solo un'astrazione matematica ma riguarda molti casi concreti a livello microscopico.

La logica classica non consente per la meccanica quantistica un adeguato sviluppo teorico poiché, ragionando secondo i suoi principi, non sarebbe possibile giustificare talune circostanze. Così sono state messe a punto nel tempo apposite

[502] Di un certo interesse ci sembra anche il caso riguardante le sostanze che ammettono, entro certe determinate condizioni di temperatura e pressione, lo stato "liquido-aeriforme". Si tratta di quella condizione in cui delle sostanze possono passare alla sovrapposizione di due dei tre stati in cui normalmente possono trovarsi, senza assumere per questo anche lo stato solido, come accadeva invece nel caso del punto triplo. Una simile circostanza si verifica quando una sostanza viene portata al proprio "punto critico". Questa circostanza ci pare possa mostrare un caso più complicato, che mette in luce la flessibilità di un oggetto come una regione di secondo tipo, in quanto può accadere di dover classificare le sostanze in maniera tale che esse si presentino eventualmente sovrapposte e dunque in uno stato ontologicamente contraddittorio (sebbene effettivo, positivo), senza per ciò implicare una mescolanza assoluta, alla quale si oppongono fortemente entro certe determinate condizioni. L'uso della negazione debole sembrerebbe essere uno strumento adeguato anche a casi del genere, piuttosto complessi, se pensiamo che due sottoregioni possono in questo caso sovrapporsi pur mantendo esclusa la terza da una possibile interazione entro certe determinate condizioni fisiche.

logiche, che rendessero conto dei fatti per come essi si presentavano e non per come essi avrebbero dovuto mostrarsi all'intuizione, che li considerava se non antinomici, quantomeno controversi e di difficile accettazione. Se consideriamo allora da un punto di vista concettuale la nozione di stato come corrispondente ad una regione di II tipo, potrebbe essere possibile pensare alla decomposizione degli stati come corrispondenti a tutta una serie di sottoregioni, ciascuna dotata di proprie caratteristiche. Così una cosa potrebbe trovarsi in un certo stato o in un altro; ma potrebbe anche essere in entrambi gli stati e ciò non risulterebbe concettualmente triviale, se discusso all'interno di una teoria come ZFU_1.

Fenomeni di questo tipo sono molto noti e sono oggi utilizzati con profitto ad esempio nelle teorie computazionali quantistiche, sviluppatesi, per quanto ne sappiamo, attorno all'idea originaria di Feynman[503]. In esse si fa ricorso al principio di sovrapposizione di stati per sfruttare non più semplicemente il concetto di informazione classica, legata al *bit*, costituito in maniera reciprocamente esclusiva o dallo stato stato 0 o dallo stato 1; ma per esprimere la possibilità di avere entrambi gli stati nello stesso tempo, sfruttando appunto la possibilità di combinare linearmente i due elementi minimi di informazione per ottenerne un terzo (il *qubit*), rappresentante lo stato di sovrapposizione tra i due stati fondamentali.

[503] Feynman, R., *Simulating Physics with Computers*, «International Journal of Theoretical Physics», vol. 21, n. 6/7, 1982, pp. 467-88

4.4 Regioni di III tipo

Si possono esaminare ancora due casi, dovuti alla circostanza in cui la regione sia, per così dire, esternamente incoerente ma internamente coerente oppure incoerente sia esternamente che internamente.

Diremo di "terzo tipo" allora quelle regioni X, le cui sottoregioni Z siano decomponibili in parti tra loro coerenti, sebbene la regione sia essa stessa parte di una regione più estesa Y ed eventualmente in sovrapposizione con altre parti di Y.

In tal caso diremo una regione di terzo tipo se:

Definizione 15.5 $III - Reg(X) \overset{\text{def}}{=}$

$$1)\ \begin{cases} (X \neq^* \emptyset) \\ \forall m[(m \in X) \to \exists x(m = x)] \\ \forall m\big[(m \in X) \to \exists Z\big((Z \subseteq X) \wedge (m \in Z)\big)\big] \\ \big[\exists Y\big(OrdIn(Y)\big) \wedge \big((Z_1 \subseteq X) \wedge \dots \wedge (Z_Y \subseteq X)\big) \wedge (\bigcup\{Z_1, \dots, Z_Y\} = X)\big] \\ \Big[\exists Y\big(OrdIn(Y)\big) \wedge \Big(\forall Z(Z \subseteq X) \to \Big(\bigcap_{i=1}^{Y}\{Z_i\} = f(\{Z_1, \dots, Z_Y\})\Big)\Big)\Big] \end{cases} \wedge$$

$$2)\ \wedge\big[(Z \subseteq X) \to [(X -^* Z) = \{x | (x \in X) \wedge (x \notin^* Z)\}]\big] \wedge$$

$$3)\ \wedge \exists Y\big[Reg(Y) \wedge (X \subseteq Y) \wedge [(Y - X) = \{x | (x \in Y) \wedge (x \notin X)\}]\big]$$

Un esempio relativo ad una simile circostanza potrebbe essere offerto da certi fenomeni studiati in fisica.

Ad esempio potremmo decidere di operare una classificazione dei corpi che possono essere oggetto di attenzione da parte della cinematica ed osservare come sia possibile classificare tali oggetti in base ad un certo numero di caratteristiche, che farebbero di un certo corpo proprio quel corpo.

A questo punto potremmo considerare il caso di un corpo in movimento. Un oggetto che si sposta nello spazio segue senz'altro una traiettoria chiaramente descrivibile. In quanto percorsa da un corpo, tale traiettoria sarà anche in genere univocamente determinata.

Immaginiamo ora di non restringere il nostro campo alla cinematica dei corpi maroscopici e di voler considerare il moto anche delle particelle elementari, ad esempio di un fotone all'interno di un fascio di luce, come nell'esperimento di Young. Allora si potrebbe avere il caso più generico di «corpi» che possono avere una traiettoria ben precisa: ad esempio un sasso scagliato in avanti descriverà un certo moto parabolico ed avrà segnato alla fine del suo percorso un'unica traiettoria; mentre potrebbe darsi il caso che corpuscoli o particelle scagliati in avanti verso un certo obiettivo descrivano più di una traiettoria, se non osservati.

L'esperimento di Young ha infatti dimostrato che un fotone costretto a passare attraverso una doppia fenditura non sceglie un percorso univoco, magari statisticamente determinabile, di avere tante probabilità di attraversare *o* dall'una *o* dall'altra. Se un fotone non viene osservato e con ciò perturbato lungo il suo tragitto, allora esso percorre entrambe le traiettorie contemporaneamente e descriverà alla fine del proprio cammino un doppio percorso, registrato dall'interferenza che apparirà sullo schermo contro il quale era stato proiettato.

Se allora immaginiamo la regione X come la regione scomponibile in sottoregioni ciascuna corrispondente al concetto di essere un certo determinato corpo e la proiettiamo all'interno della classe Y delle cose che hanno un certo tipo di traiettoria, descritta magari da una sequenza ordinata di quadruple a valori reali, allora potremmo dover considerare il caso in cui ci sono almeno dei corpi, i corpuscoli luminosi, che hanno una traiettoria ma non ne hanno una soltanto, contrariamente a quanto comunemente accade. E questo è in contraddizione con la possibilità che ne esista in genere una descrizione spazio-temporale univoca, così come normalmente avviene ad esempio per gli oggetti macroscopici.

Potremmo allora utilizzare una regione di III tipo per classificare tale situazione, pensando al complemento debole dato da $Y - X$ ed avere così un caso di consistenza interna, dato dalla differenza strutturale dei corpi tra loro; ma di inconsistenza esterna, rispetto alla proprietà di avere un certo determinato percorso.

4.5 Regioni di IV tipo

L'ultimo caso combinatoriamente possibile è quello concernente la circostanza in cui una regione risulti incoerente sia internamente che esternamente. Tale caso è formalmente definibile come segue:

Definizione 15.6 $IV - Reg(X) \overset{\text{def}}{=}$

$$1)\ \begin{cases} (X \neq^* \emptyset) \\ \forall m[(m \in X) \to \exists x(m = x)] \\ \forall m\big[(m \in X) \to \exists Z\big((Z \subseteq X) \wedge (m \in Z)\big)\big] \\ \big[\exists Y\big(OrdIn(Y)\big) \wedge \big((Z_1 \subseteq X) \wedge \ldots \wedge (Z_Y \subseteq X)\big) \wedge (\bigcup\{Z_1, \ldots, Z_Y\} = X)\big] \\ \Big[\exists Y\big(OrdIn(Y)\big) \wedge \Big(\forall Z(Z \subseteq X) \to \Big(\bigcap_{i=1}^{Y}\{Z_i\} = f(\{Z_1, \ldots, Z_Y\})\Big)\Big)\Big] \end{cases} \wedge$$

$$2)\ \wedge\big[(Z \subseteq X) \to [(X - Z) = \{x | (x \in X) \wedge (x \notin Z)\}]\big] \wedge$$

$$3)\ \wedge \exists Y\big[Reg(Y) \wedge (X \subseteq Y) \wedge [(Y - X) = \{x | (x \in Y) \wedge (x \notin X)\}]\big]$$

La differenza fondamentale rispetto alle altre 3 regioni sta qui nell'assunzione che entrambe le condizioni 2) e 3) possano venire definite mediante l'uso dell'operatore di negazione debole, applicato a particolari funzioni insiemistiche, come quella di complementazione relativa.

Possiamo fornire un esempio di una simile situazione, immaginando la medesima circostanza esaminata a proposito delle regioni di III tipo e tener dunque presente ancora la situazione che si offrì alla riflessione di Young.

Potremmo pensare di considerare il caso del corpuscolo luminoso, da classificare in base alla sua natura come onda o come particella, e in tal caso valutare per esso ancora la possibilità di descrivere una determinata traiettoria.

Ammettendo come ipotesi quella di non effettuare alcuna osservazione sull'oggetto in questione durante il suo percorso, possiamo immaginare di doverci porre innanzitutto il problema: a quale classe di oggetti appartiene un fotone? È cioè esso assimilabile ad un'onda oppure esso ha comportamenti tipici di una particella? La risposta che dà la fisica al riguardo è, per quanto ne sappiamo, che un fotone è entrambe le cose, poiché in grado di manifestare tanto le caratteristiche di una particella quanto le caratteristiche di un'onda.

Così avremmo un primo caso di inconsistenza, quella interna, rappresentato dalle classi delle cose che sono classificabili come onde e quelle che lo sono come particelle e che si sovrapporrebbero almeno con riferimento ad un determinato oggetto, il fotone.

Potremmo poi voler classificare le cose che rientrano all'interno di questi due insiemi di cose, come quelle cose che descrivono una traiettoria determinata, in quanto particella, e quelle che al riguardo ammettono un'eccezione, poiché esse descrivono moti caratteristici dei fenomeni ondulatori. Allora anche in tal caso avremmo una contraddizione dovuta al fatto che esistono cose che possono compiere e non compiere una sola traiettoria. Ciò dipenderebbe in tal caso dal fatto che esistono oggetti che assumono entrambi gli stati. Infatti un fotone, se osservato, compirebbe un unico percorso, passando ad esempio dalla fenditura di destra o di sinistra; mentre li compirebbe entrambi, passando cioè da entrambe le fenditure, se non osservato.

Possiamo così immaginare di impiegare il concetto di regione del IV tipo per classificare così questi oggetti: X sarà la classe delle cose che o sono onde (Z_1) o sono particelle (Z_2) e che, in virtù della negazione debole potrebbero essere entrambe, come nel caso del fotone. Mentre Y sarà la classe di quelle cose che intuitivamente o descrivono una traittoria oppure ne descrivono un'altra ma non entrambe, secondo criteri che non ammetterebbero in linea generale deroghe alla loro validità.

4.6 *Regioni di tipo '*'*

4.6.1 *I fuzzy sets*

Tenendo presenti le quattro definizioni di regione combinatoriamente possibili (a prescindere dagli esempi addotti), potremmo riflettere su casi ancor più specifici, ponendoci un problema del seguente tipo: come rappresentare insiemisticamente il caso di proprietà che, contraddittoriamente o meno, possono attribuirsi ad un determinato individuo?

Se immaginassimo infatti dei casi in cui non fosse possibile determinare con certezza l'appartenenza o meno di un individuo ad una certa classe, allora potremmo incontrare la difficoltà risultante dal non poter attribuire correttamente un attributo ad un determinato oggetto. Non sarebbe infatti possibile utilizzare il sistema formale fin qui presentato per affrontare quei casi in cui sarebbe rilevante immaginare la nozione di predicazione, insiemisticamente intesa, come una nozione "graduata", a causa della rigidità della sua relazione fondamentale.

Tali circostanze non sono casi rari, con riferimento soprattutto al mondo esterno, e l'ipotesi di dover gestire l'appartenenza in maniera non perfettamente determinata non è poi così peregrina.

I casi dinanzi ai quali la realtà ci pone risultano essere infatti molto più vicini a quest'ultima condizione, che non a quelle che esprimono assoluta certezza.

Immaginando l'utilizzo del sistema formale qui assiomatizzato per lo studio di casi suggeriti dalle scienze empiriche e naturali, i cui *Urelemente* o "atomi" risultino essere dunque enti del e nel mondo fisico, potrebbe essere importante provare a definire uno strumento che permetta la trattazione dei casi poc'anzi ricordati.

In tal senso uno studio solido, intuitivo e di immediata applicazione è stato elaborato da Lotfi Zadeh nel 1965[504] e sviluppato negli anni successivi. Esso ha consentito per la prima volta l'introduzione rigorosa del concetto di "insieme sfocato" o "*fuzzy set*", attraverso una brillante idea, che passava attraverso una ragionevole modifica da apportare al concetto alternativo a quello di insieme.

In genere, dato un certo sistema di cose e preso un certo predicato su tale sistema, si può indagare il rapporto di inerenza tra la proprietà veicolata dal predicato e le cose del sistema per stabilirne la verità o la falsità.

Tale rspporto potrebbe essere rappresentato in due modi:

[504] Zadeh, L., *Fuzzy Sets*, «Information and Control», vol. 8, 1965, pp. 338-53

1) il primo consiste nel guardare ad un sistema di cose che godono di una certa proprietà, come all'insieme degli elementi per cui è vera quella proprietà. In tal caso si verifica che un dato oggetto m appartiene all'insieme. Questo è il modo in cui abbiamo sin qui lavorato;

2) il secondo invece consiste nell'utilizzo del concetto primitivo di funzione caratteristica, associata ad un certo insieme, che assume valore 1, per quei determinati oggetti di cui la proprietà è vera; mentre assume valore 0, in caso contrario.

Disponendo più in generale di una relazione $R(x_1, \dots, x_n)$, diciamo che $f_R\colon X \rightarrow \{0,1\}$ è la funzione caratteristica associata alla relazione R, in modo che:

$$(*) \quad f_R(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, se\ R\ \text{è}\ vera \\ 0, se\ R\ \text{è}\ falsa \end{cases}$$

L'espediente 2), alternativo a quello degli insiemi, consiste allora nell'impiegare le funzioni caratteristiche. I due metodi sostanzialmente si equivalgono e da entrambi è possibile elaborare i medesimi concetti, seppur con formulazioni diverse. La via delle funzioni caratteristiche fu utilizzata per la prima volta da John von Neumann[505], per quanto ne sappiamo. Fu successivamente rielaborata da Raphael Robinson[506] di nuovo in termini di classi (in seno al sistema NBG) e, sino al 1965, quest'ultima è stata in molti casi privilegiata dalla ricerca in teoria degli insiemi.

La ripresa del primo concetto ha però consentito di poter riflettere in maniera più appropriata e intuitiva sui casi che qui intendiamo discutere, quelli riguardanti cioè una determinazione concettuale di tipo "sfumato", tale per cui un certo attributo possa essere riferito ad un certo oggetto non con la piena determinatezza, mediante cui generalmente si attribuisce o si respinge un certo predicato ad un dato individuo; ma solo con un certo grado di verità.

La rivoluzione rappresentata in tal senso dalla ricerca di Lotfi Zadeh è stata di grande portata. Egli apriva così il suo celebre articolo del 1965:

---

505 Neumann, J. von, *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*, *op. cit*

506 Robinson, R., *The Theory of Classes: A Modification of Von Neumann's System*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 2, n. 1, 1937, pp. 29-36

«Più spesso di quanto non accada, le classi di oggetti incontrate nel mondo fisico reale non hanno criteri di appartenenza precisamente determinati»[507].

Vi sono senz'altro classi pienamente determinate – egli affermava:

«Per esempio la classe degli animali include senza dubbio cani, cavalli, uccelli, ecc.»[508]

Tuttavia esistono anche casi in cui l'appartenenza non è determinata allo stesso modo e può esserlo solo con un certo grado di approssimazione:

«[…] oggetti come stelle marine, batteri, ecc. possiedono uno *status* ambiguo rispetto alla classe degli animali»[509].

Per poter discutere adeguatamente casi indeterminati, occorre indebolire, in un certo senso, proprio la relazione di appartenenza. Disponendo infatti di una relazione più flessibile, dal punto di vista del legame che quest'ultima stabilisce fra un determinato oggetto ed una certa classe, è possibile affrontare questo tipo di problema, facendo sì che casi non perfettamente determinati possano comunque essere rigorosamente esaminati dal punto di vista formale.

L'idea di ritornare all'utilizzo della nozione di funzione caratteristica, in luogo di quella di appartenenza ad un insieme, ci pare costituire un punto di svolta nel lavoro di Zadeh. Ciò che emerge dall'articolo del 1965 è il tentativo di indebolire la relazione fondamentale della teoria degli insiemi:

«Il concetto in questione è quello di *insieme fuzzy*, cioè di una "classe" con un continuo di gradi appartenenza»[510].

Dal punto di vista del linguaggio naturale, l'operazione cui diede vita Zadeh, è paragonabile a quella di sfumare la copula di certe affermazioni. All'interno del discorso insiemistico ciò concerne l'indebolimento della relazione fondamentale considerata.

Il modo più efficace di formalizzare questa intuizione passa tuttavia attraverso il concetto di funzione caratteristica, da sostituire a quello di appartenenza insiemistica[511].

---

[507] Zadeh, L., *Fuzzy Sets*, *op. cit.*, p. 338
[508] *Ibidem*, p. 338
[509] *Ibidem*, p. 338
[510] *Ibidem*, p. 339
[511] Data la funzione caratteristica dell'insieme A, rappresentabile come "$U_A\colon U \to [0,1]$", «The values of U_A are interpreted as degrees of membership of elements of U to the fuzzy set A. The

Così facendo, è sufficiente riflettere sulla definizione di tale funzione per trovare una pratica via attraverso cui sciogliere il problema.

Il grimaldello del ragionamento zadehiano ci pare possa essere sintetizzato in questo passaggio: estendere la definizione di funzione caratteristica, facendo sì che essa non sia più definita sul semplice insieme $\{0,1\}$, indicante intuitivamente l'appartenenza o meno di un certo individuo ad una determinata classe; bensì passare dal canonico insieme $\{0,1\}$, all'intervallo chiuso $[0,1]$, contenente tutti i numeri reali compresi fra 0 (il grado nullo di verità, il falso (in senso classico) ossia la non-appartenenza) e lo 1 (il grado massimo di verità, ossia l'appartenenza).

In tal modo Zadeh formalizzò molto intuitivamente l'idea di «un continuo di gradi appartenenza» in modo da conservare tutti i casi classici, semplicemente considerando l'idea di far corrispondere alla funzione non più due soli gradi di verità fra loro opposti, ma tutto un continuo di gradi verità, infinitamente approssimabili.

Per Zadeh la nozione di funzione caratteristica poteva essere ridefinita come segue:

> «Sia X uno spazio di punti (oggetti), con un elemento di X denotato da x. Così $X = \{x\}$. Un *insieme fuzzy* A in X è caratterizzato da una *funzione* (*caratteristica*) di *appartenenza* $f_A(x)$ che associa a ciascun punto x in X un numero reale nell'intervallo $[0,1]$, con il valore di $f_A(x)$ per x che rappresenta il "grado di appartenenza" di x ad A. Così il valore di $f_A(x)$ più vicino all'unità risulta essere il più alto grado di appartenenza di x ad A. Quando A è una classe nel senso comune del termine, allora la sua funzione di appartenenza può prendere solo due valori, lo 0 e lo 1 con $f_A(x) = 1$ oppure 0, a seconda che x appartenga o non appartenga ad A. In tal caso $f_A(x)$ si riduce alla funzione caratteristica classica di un certo insieme *A*»[512].

Formalmente allora possiamo estendere il concetto espresso in $(*)$ come segue:

$$(**)\ \ f_R(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, se\ R\ \text{è}\ falsa \\ 1, se\ R\ \text{è}\ vera \\ r, dove\ \big(r \in (0,1)\big), altrimenti \end{cases}$$

extreme values of this function, 0 and 1, denote, respectively, not belonging to A and entire membership of *A*». Cfr. Malinowski, G., *Many-Valued Logics*, *op. cit.*, p. 98

[512] Zadeh, L., *Fuzzy Sets*, *op. cit.*, p. 339

Da tali considerazioni Zadeh riuscì a ricavare tutta una serie di concetti fondamentali per un'adeguata trattazione funzionale del «nuovo tipo di appartenenza» ottenuto.

Tra essi egli trovò soddisfacenti definizioni che individuassero il caso dell'"inclusione", dell'"unione", dell'"intersezione" nonché della "complementazione".

Sintetizzando le discussioni in proposito, che esulerebbero dagli scopi della presente ricerca, riportiamo di seguito tre esempi di definizioni «sfumate» di comuni concetti insiemistici, esaminati nel capitolo precedente, in base all'approccio di Zadeh[513]:

Complemento di un *fuzzy set* A:

$$f_{A'} = 1 - f_A$$

Contenimento di un *fuzzy set* A in un altro B:

$$(A \subseteq B) \leftrightarrow (f_A \leq f_B)$$

Unione di due *fuzzy set* A e B:[514]

$$f_{A \cup B} = (f_A \vee f_B)$$

[513] Zadeh, L., *Fuzzy Sets*, *op. cit.*, p. 340

[514] Malinowski sinetizza così i tre concetti definiti da Zadeh: sia U una famiglia di *fizzy sets* di un dato dominio U. Allora: $U_{-A}(x) = 1 - U_A(x)$; $U_{A \cup B}(x) = max\big(U_A(x), U_B(x)\big)$; $U_{A \cap B}(x) = min\big(U_A(x), U_B(x)\big)$. Cfr. Malinowski, G., *Many-Valued Logics*, *op. cit.*, p. 99

4.6.2 Il concetto di vaghezza in ZFU_1

Per poter introdurre il concetto di "vaghezza" all'interno del sistema formale che qui abbiamo presentato, non sarà possibile sfruttare *tout court* la strategia del logico iraniano. Occorrerà invece rielaborare in qualche modo l'idea originaria di Zadeh al fine di renderla compatibile con le scelte sin qui operate.

Se volessimo utilizzare la stessa idea, dovremmo infatti modificare la relazione fondamentale ammessa, cioè quella di appartenenza. Non potremmo ammettere un'unica relazione di appartenenza ma dovremmo esaminarne un "continuo". Inoltre riteniamo che l'ampliamento dei valori di verità, mediante i quali si misura in una funzione caratteristica il grado di appartenenza di un certo elemento ad una determinata classe, comporti una revisione di fondo di quelle che sono le idee fondamentali della logica sottostante, discussa nella prima parte. Per tali ragioni non pensiamo sia direttamente utilizzabile qui lo strumento di fuzzificazione introdotto da Zadeh.

L'idea che discuteremo è dunque alternativa, sotto certi aspetti, a quella del logico iraniano, poiché cercheremo di tener ferma la nozione di insieme, ammessa come primitiva, senza ampliare il numero di relazioni di appartenenza.

Intuitivamente parlando, la differenza fondamentale tra un insieme vago, per come qui sarà inteso, ed un insieme *fuzzy* ci pare sintetizzabile in questo modo: la proposta elaborata da Zadeh è orientata – come visto – in maniera tale da formalizzare rigorosamente proposizioni che non siano più semplicemente valutabili come vere o come false; ma che siano valutabili in modo che esse risultino «vere» anche solo con un certo grado di verità. Ciò significa che esse mirano a catturare asserti, che informalmente potrebbero essere intesi come: "quanto: x è P" o come "x è-quanto P", dove P è un certo predicato vero di x con un qualche grado di verità. Il concetto che invece intendiamo qui adoperare è quello concernente proposizioni del tipo "x è quanto-P". Mentre nel primo caso l'azione «fuzzificatrice» agisce sulla relazione fondamentale, nel secondo la vaghezza sarebbe invece correlata al predicato stesso. Da un punto di vista linguistico potremmo sottolineare la distinzione dicendo che nel primo caso è la copula che viene sfumata; mentre nel secondo è il nome del predicato ad essere sfocato.

La vaghezza, nel senso in cui è stata definita da Zadeh, passa allora ragionevolmente attraverso l'attribuzione di un certo valore di verità rappresentato da un numero reale, poiché nel suo caso la funzione andrebbe calcolata con riferimento al valore di verità da attribuire ad una determinata formula del tipo $(x \in X)$.

Se invece si intendesse la vaghezza come correlata al predicato preso in considerazione, allora non sarebbe più possibile attendersi una valutazione in termini di valori di verità[515].

L'idea alternativa è allora quella di attribuire una misura reale a ciascun predicato, per il quale possa risultare rilevante considerare certe condizioni di vaghezza.

In tal modo il predicato oggetto d'esame risulterebbe essere in un certo senso «sfibrato» in tante parti, quanti sono i diversi gradi con cui esso può essere attribuito.

Passando ad una definizione più rigorosa dei concetti fin qui intuitivamente esposti, l'idea di vaghezza da sfruttare in ZFU_1 potrebbe essere espressa così: ad ogni proprietà intuitivamente considerata, dovrà corrispondere un sottoinsieme. Così non saranno intesi predicati in genere, fatto questo che abbiamo respinto attraverso gli assiomi della teoria; saranno considerati invece sempre e soltanto sottoinsiemi, da intendersi allorquando si parlerà più genericamente di proprietà. Si applicherà poi il concetto di "vaghezza" non alla relazione di appartenenza, ma al predicato preso in considerazione, cioè a dire a un termine della teoria.

Sfruttando l'assioma $\boldsymbol{Pw}$ e la definizione di prodotto cartesiano, «sfibreremo» quindi il termine insiemistico costituente la proprietà considerata, costruendo un continuo di copie dello stesso insieme. Questo procedimento può aver luogo considerando la natura estensionale degli insiemi. Allora, poiché un insieme si identifica con la totalità dei propri elementi, per ottenere una copia di uno stesso insieme, sarà necessario fare una copia di ciscuno dei singoli elementi ad esso appartenenti.

A tale scopo considereremo un prodotto del tipo:

$$X \times \{[r_1, r_2]\}$$

dove X è un certo insieme (una regione o una sottoregione), che esprime una data proprietà valida per certi *Urelemente*, mentre l'intervallo $[r_1, r_2] \in \boldsymbol{R}$ ($[r_1, r_2] = \{r \in \boldsymbol{R} | r_1 \leq r \leq r_2\}$).

Così $X \times \{[r_1, r_2]\} = \{\langle x, r\rangle | (x \in X) \wedge (r \in [r_1, r_2])\}$. In tal modo si ottiene un continuo di copie dello stesso insieme X, il cui numero sarà strettamente determinato dal tipo di intervallo considerato.

Semplificando la scrittura, potremmo allora indicare l'insieme sfibrato in questo modo scrivendo 'X_r' in luogo di '$X \times \{[r_1, r_2]\}$' ed intendere la relazione

[515] Un predicato, inteso come sottoinsieme, sarebbe infatti un termine della teoria.

di appartenenza "$x \in X_r$" tra un elemento ed un insieme così sfumato, come la relazione sussistente con grado r tra l'oggetto $\langle m, r\rangle$ e la classe $X \times \{[r_1, r_2]\}$ $\big((x \in X_r) \leftrightarrow (\langle x, r\rangle \in X \times \{[r_1, r_2]\})\big)$. Intuitivamente ciò dovrebbe significare che un elemento appartiene ad una classe sfumata di questo tipo se e solo se tale oggetto le appartiene con un certo grado.

Costruiamo allora la nozione di regione di tipo '*', partendo dalle seguenti condizioni di base:

Definizione 15.7 $X_r \overset{\text{def}}{=} X \times \{[r_1, r_2]\}$

Definizione 15.8

$$(x \in X \times \{[r_1, r_2]\}) \overset{\text{def}}{=} [(\exists r \in [r_1, r_2])(\langle x, r\rangle \in X \times \{[r_1, r_2]\})]$$

Definizione 15.9 $(x \in X_r) \overset{\text{def}}{=} \big(x \in (X \times \{[r_1, r_2]\})\big)$

Definizione 15.8 $Reg^*(X) \overset{\text{def}}{=} \exists X[Reg(X) \wedge (X = X_r)]$

per qualche r in un dato intervallo reale.

Una regione sfumata sarebbe quindi una classe del tipo: $X = \{\langle x, r_1\rangle, \langle y, r_1\rangle, \langle z, r_1\rangle, \ldots, \langle x_1, r_k\rangle, \langle y_1, r_k\rangle, \langle z_1, r_k\rangle, \ldots\}$, dove $\langle x, r_1\rangle$, ecc. starebbe per la successione continua di coppie determinate dall'intervallo reale preso in considerazione.

Una "fibra" di una regione sfumata potrebbe allora essere considerata come l'insieme di tutti quegli elementi per cui è vero asserire la validità della proprietà fondamentale di una data regione X con un determinato grado di vaghezza r.

Potremmo così dire che:

Definizione 15.9[516]

[516] Ciò significa dunque che una fibra dovrebbe essere l'insieme di tutte quelle coppie ordinate eguali rispetto alla seconda coordinata, costituita dal valore r caratterizzante la singola fibra, e da tutti quegli elementi che hanno il predicato X con quel determinato valore.

$$Fibr(Y) \overset{\text{def}}{\equiv} \left[\exists X_r\big(X_r = (X \times \{[r_1, r_2]\})\big) \wedge (Y \subseteq X) \wedge \right.$$
$$\left. \wedge \big(Y = \big\{x | (\exists r \in [r_1, r_2])\big(\exists\langle x, r\rangle \in (X \times \{[r_1, r_2]\})\big)(\{x\} \in \langle x, r\rangle)\big\}\big)\right]$$

Inoltre si potrebbe affermare a questo punto che dato un certo x, esso possiede la proprietà espressa da X con un determinato grado r se e solo se il suo singoletto appartiene ad una certa coppia ordinata di una fibra di X, cioè:

Definizione 15.10

$$[(x \in Y) \wedge Fibr(Y)] \overset{\text{def}}{\equiv}$$
$$\overset{\text{def}}{\equiv} \left(\left(Y = \left\{y \middle| \begin{matrix} (\exists r \in [r_1, r_2]) \\ \big(\exists\langle x, r\rangle \in (X \times \{[r_1, r_2]\})\big)(\{x\} \in \langle x, r\rangle) \end{matrix}\right\}\right)\right)$$

La proprietà originaria X, dalla quale si era partiti e che si è andati a sfumare in questo modo, potrebbe allora essere ricostituita pensando alla riunione della classe di tutte le fibre definibili:

Definizione 15.11

$$X \overset{\text{def}}{\equiv} \bigcup \{Y | (Fibr(Y))\}$$

Potremmo allora definire il criterio di non-appartenenza ad una determinata regione sfumata come quella relazione che può non valere se un certo elemento x non possiede affatto la proprietà espressa da X per nessun grado r e dunque non esiste coppia in alcun fibra alla quale possa appartenere il singoletto di x.

Così:

Definizione 15.12

$$(x \notin^* X) \overset{\text{def}}{\equiv} \forall Y \forall r \left[\Big(Fibr(Y) \wedge \big(\exists\langle x, r\rangle(\langle x, r\rangle \in Y)\big)\Big) \rightarrow (\{x\} \notin^* \langle x, r\rangle)\right]$$

In base alle definizioni di regioni del tipo I-IV, potremmo qui applicare il concetto di regione di tipo II per indebolire la nozione di appartenenza mediante l'uso della negazione primitiva ammessa dal calcolo C_1^* e definire la non-appartenenza debole come:

Definizione 15.13

$$(x \notin X) \stackrel{\text{def}}{=} \forall Y \forall r \left[\Big(Fibr(Y) \wedge \big(\exists \langle x, r \rangle (\langle x, r \rangle \in Y) \big) \Big) \rightarrow (\{x\} \notin \langle x, r \rangle) \right]$$

Potremmo dunque considerare a questo punto il caso di una regione X, scomponibile in sottoregioni Y, ciascuna delle quali potrebbe essere sfumata seconda la definizione 15.7 e verificare che un certo x potrebbe anche godere delle due proprietà espresse dalle sottoregioni Y_1 e Y_2, in teoria incompatibili tra loro, con grado r rispetto al predicato Y_1 e grado s rispetto al predicato Y_2.

Più in generale potremmo pensare al concetto di intersezione tra regioni del tipo '*' come:

Definizione 15.14

$$\big[(x \in X \cap Y) \wedge \big(Reg^*(X) \wedge Reg^*(Y)\big)\big] \stackrel{\text{def}}{=} [(x \in X_r) \wedge (x \in Y_s)]$$

Il concetto di unione tra regioni sfumate potrebbe corrispondere allora a:

Definizione 15.15

$$\big[(x \in X \cup Y) \wedge \big(Reg^*(X) \wedge Reg^*(Y)\big)\big] \stackrel{\text{def}}{=} [(x \in X_r) \vee (x \in Y_s)]$$

Il caso dell'inclusione potrebbe invece essere definito come:

Definizione 15.15

$$\big[(X \subseteq Y) \wedge \big(Reg^*(X) \wedge Reg^*(Y)\big)\big] \stackrel{\text{def}}{=} \forall x[(x \in X_r) \rightarrow (x \in Y_s)]$$

Possiamo ora fornire anche una definizione di regione di tipo *star* applicata ad una regione di tipo I-IV. Essa ci consentirà di disporre per le collezioni di *Urelemente* precedentemente esaminte di uno strumento attraverso cui estendere il numero di casi da poter prendere in considerazione.

Diciamo allora che X è una regione di primo o secondo o terzo o quarto tipo *star* se e solo se vale la seguente definizione:

Definizione 15.16 $\left[(k \in \{I, II, III, IV\}) \wedge \left(k - Reg^*(X)\right)\right] \overset{\text{def}}{\equiv}$

$$1)\ \begin{cases} (X \neq^* \emptyset) \\ \forall m[(m \in X) \rightarrow \exists x(m = x)] \\ \forall m\left[(m \in X) \rightarrow \exists Z\left((Z \subseteq X) \wedge (m \in Z)\right)\right] \\ \left[\exists Y\left(OrdIn(Y)\right) \wedge \left((Z_1 \subseteq X) \wedge \ldots \wedge (Z_Y \subseteq X)\right) \wedge (\bigcup\{Z_1, \ldots, Z_Y\} = X)\right] \\ \left[\exists Y\left(OrdIn(Y)\right) \wedge \left(\forall Z(Z \subseteq X) \rightarrow \left(\bigcap_{i=1}^{Y}\{Z_i\} = f(\{Z_1, \ldots, Z_Y\})\right)\right)\right] \end{cases} \wedge$$

$$2)\ \wedge\left[\left(I - Reg(X)\right) \vee \left(II - Reg(X)\right) \vee \left(III - Reg(X)\right) \vee \left(IV - Reg(X)\right)\right] \wedge$$

$$3)\ \wedge Reg^*(X)$$

Immaginando di definire una regione sfumata con riferimento all'intervallo $[0,1]$ considerato da Zadeh, sembrerebbe ragionevole pensare ad una loro trattazione in questi termini: la famiglia di sottoinsiemi *fuzzy* di un certo dominio U, potrebbe essere interpretata come una regione di tipo *star*, avente un numero di fibre pari alla cardinalità dell'intervallo considerato, cioè: $|\{Y | Fibr(Y)\}| = |[0,1]|$.

Potremmo poi ridefinire il concetto espresso dalla funzione caratteristica di due insiemi A e B nella famiglia considerata come l'appartenenza a due fibre Y_1 e Y_2, che esprimono rispettivamente il possesso di una certa proprietà X con grado r ed s. Allora si potrebbe dire che:

$$[\![1]\!]\quad x \in X_{[0,1]} \leftrightarrow [(\exists r \in (0,1])(\langle x, r\rangle \in X \times \{[0,1]\})]$$

dove $(0,1] = \{r | 0 < r \leq 1\}$. Nel nostro caso infatti la non-appartenenza non è stata espressa pensando di assegnare, intuitivamente, valore 0 alla relazione di appartenenza, in quanto si è ipotizzato che l'appartenenza veicoli sempre e comunque un minimo grado di inerenza tra un determinato predicato ed un suo possibile soggetto.

Possiamo però ridefinire il concetto su tutta l'ampiezza dell'intervallo, se assumiamo che:

$$[(\langle x, 0\rangle \in X \times \{[0,1]\})] \leftrightarrow \left(x \notin^* X_{(0,1]}\right)$$

Possiamo quindi estendere la condizione ⟦𝟙⟧, stabilendo che:

$$\left(x \in X_{[0,1]}\right) \leftrightarrow [(\exists r \in [0,1])(\langle x, r\rangle \in X \times \{[0,1]\})] \leftrightarrow \left[(x \in X_r) \vee \left(x \notin^* X_{(0,1]}\right)\right]$$

cioè $\left[x \in \left(X_r \cup \overline{X_r}^*\right)\right]$.

Il concetto di inclusione sarebbe abbastanza naturale da ridefinire, pensando che i numeri reali, definiti come sezioni di Dedekind nel paragrafo , sono insiemi di razionali, definibili come semirette destre (o sinistre). Allora due fibre Y_1 e Y_2 sono contenute l'una nell'altra, se la semiretta sinistra associata alla fibra Y_1 è contenuta in quella associata a Y_2, il che corrisponderebbe a dire che $r(Y_1) \leq r(Y_2)$.

Il concetto di intersezione potrebbe essere riletto considerando l'intersezione tra le due sezioni e dunque il più piccolo insieme, corrispondente al più piccolo numero reale tra quelli considerati, ossia $min\left(r(Y_1), r(Y_2)\right)$.

Il concetto di unione potrebbe infine essere presentato considerando l'unione delle rispettive semirette, corrispondente al più grande reali tra quelli considerati, ossia $max\left(r(Y_1), r(Y_2)\right)$.

Conclusioni

La ricerca condotta a proposito di un sistema formale che potesse dar corpo all'idea del Professor Newton Da Costa, ci ha portato allo studio di alcuni peculiari aspetti sia di natura logica sia di natura insiemistica, che ci hanno consentito un'analisi nuova, per certi aspetti, anche di alcuni temi classici della filosofia. Tra essi il problema ad esempio della contraddizione e quello delle ontologie, che da una sua violazione si determinerebbero.

L'obiettivo principale del nostro studio è stato infatti quello di strutturare formalmente un sistema adeguato proprio alla trattazione di domini di discorso in cui potessero darsi individui, ossia sostanze prime, inconsistenti.

In tal senso il calcolo C_1^* si è rivelato di grande flessibilità rispetto al discorso che si è cercato di portare avanti nella ricerca per almeno due motivi fondamentali: in primo luogo esso ci ha consentito di ammettere per gli oggetti primitivi quei casi in cui essi potessero manifestare caratteri antinomici, senza per questo comportare, all'interno della teoria indagata, il rischio di una sua trivializzazione. In secondo luogo esso ha consentito di riflettere su certi particolari casi, in cui la presenza di proprietà teoricamente incompatibili fosse «positivamente» analizzabile.

Rispetto dunque alla scelta della logica, che qui è stata fatta, emergono due elementi teorici che in conclusione ci preme sottolineare: il primo riguarda il nuovo modo in cui la contraddizione è stata riletta grazie alle lenti fornite da un calcolo logico paraconsistente come C_1^*. Il secondo invece riguarda il bilancio che è possibile trarre in termini di vantaggi e differenze rispetto ad altre strategie paraconsistenti.

Sfruttando il calcolo logico elaborato dalla scuola brasiliana, si è potuto disporre di una negazione molto debole, che intuitivamente rispondeva soltanto alla legge del terzo escluso. Questo fatto, esaminato attraverso alcune dimostrazioni condotte nella prima parte, ha chiaramente messo in luce la distanza di questo funtore logico da quello che comunemente si adopera in logica classica.

Abbiamo avuto modo di osservare come le strategie disponibili per la formalizzazione della negazione classica siano varie e ciò ha consentito, soprattutto nella fase di studio, di apprezzare le interdipendenze che emergono tra le leggi logiche riguardanti l'operatore di negazione entro determinate scelte assiomatiche; inoltre ha permesso un'interrogazione più approfondita anche sul significato della negazione paraconsistente, che è a tutt'oggi ancora poco chiaro.

Questo ci porta dunque al secondo punto della questione concernente l'uso della logica, cui poc'anzi facevamo riferimento. Woods ed altri, soprattutto all'interno della scuola australiana, non hanno manifestato particolare soddisfazione per i risultati, cui le "C-*logics*" hanno portato. Ciò è dovuto al fatto che la negazione in esse impiegata non ha – come detto – tutte le caratteristiche della negazione classica e questo fatto ha suscitato un ampio dibattito sulla sua natura.

Ci si è domandato ad esempio se essa sia una "vera negazione", dal momento che questa non è in grado di veicolare la nozione di "incompatibilità", così come essa viene invece normalmente concepita. Alcuni hanno affermato che la negazione di certi calcoli, come quello da noi impiegato, esprimono al più una forma di "subcontrarietà", volendo con ciò sostenere che la negazione debole di C_1^* è tale da non riuscire, quando applicata, ad esprimere la falsità di un certo predicato per tutti gli oggetti coinvolti: al più, in presenza di situazioni contraddittorie, essa esprimerebbe, in qualche modo, il fatto che per alcuni può valere un certo stato di cose, per altri invece no.

Così, in base a tale lettura, la negazione di C_1^* esprimerebbe sempre una qualche forma di compossibilità, donde la non-derivabilità di alcune leggi fondamentali, tra cui quella della non contraddizione o della doppia negazione intuizionista.

Alla luce del lavoro svolto però il rilievo dovuto fondamentalmente a Priest ci è sembrato sì ragionevole; ma di fondo non condivisibile. Priest infatti sembra far propria l'impostazione di Quine, secondo la quale il cambio della "dottrina logica" comporta in fondo un cambio anche degli oggetti in essa formalizzati. Mutando cioè le leggi comunemente accettate per la funzione logica della negazione, muterebbe anche il suo significato, in accordo con l'interpretazione che alcuni ne danno e con il conseguente rischio di non poter più guardare alla contraddizione prodotta in una certa teoria come ad una "vera contraddizione".

Ciò ha determinato una netta presa di distanze, rimarcata dalla ripartizione delle logiche paraconsistenti in due classi: quelle dette "paraconsitenti in senso forte" e quelle "paraconsistenti in senso debole": tra le prime vi sono i calcoli indagati in area australiana; fra le altre vi sarebbero i calcoli riconducibili alla famiglia delle C-*logics*. La differenza di fondo è che le logiche paraconsistenti forti hanno tutte le leggi che comunemente regolano la negazione; mentre – come visto nella prima parte – ciò non è altrettanto vero per quelle deboli, come ad esempio per il calcolo C_1^* da noi utilizzato.

Il lavoro di ricerca ci ha consentito però di maturare una riflessione in proposito, in base alla quale abbiamo comunque ritenuto vantaggioso impiegare un calcolo paraconsistente in senso debole. Essa riguarda le assunzioni extralogiche che spesso si è portati a fare e che non tengono conto del fatto che non esistono interpretazioni privilegiate del concetto di negazione così come non vi sono ragioni assolute in base alle quali considerare un certo operatore, regolamentato dagli assiomi di un dato calcolo, come la "vera negazione". Riteniamo la questione infondata, se non ricondotta all'interno di un determinato fomalismo.

In base allo studio condotto, ci pare di non poter affermare la verità della posizione condivisa da chi è a favore della paraconsistenza forte, per il semplice fatto che non ci pare sensato discutere di "vera negazione". Piuttosto pensiamo che ogni negazione sia *una* negazione e precisamente *la* negazione di cui è possibile disporre a partire da certi assiomi all'interno di una certa logica. Pensare all'esistenza di una "vera negazione" comporterebbe sempre una visione preconcetta del problema, che tuttavia riteniamo mal posta poiché, da un punto di vista esterno ad un dato formalismo, concepito secondo certi canoni, la questione potrebbe perdere la propria sensatezza.

La negazione non può essere – a nostro avviso – che una certa funzione logica all'interno di un certo calcolo, applicato eventualmente ad una certa teoria. Ritenere che la negazione di C_1^* non sia la "vera negazione" (o una vera negazione) equivale a collocarsi all'esterno di esso e a confrontare il funtore logico in questione con una funzione dotata di altre proprietà, alle quali si sta pensando in modo non necessariamente coincidente con l'idea che è invece alla base del calcolo considerato. Questo atteggiamento ci appare poco convincente poiché non esistono oggettivi riferimenti per entrambe le nozioni. Mancano infatti gli elementi per affermare quale sia in assoluto il vero concetto di negazione anche al di là dei problemi che possono sollevarsi in sede algebrica. Dunque una tale visione della questione non può indebolire la linea di pensiero, su cui si muovono i logici della paraconsitenza debole.

In base a tale punto riteniamo che il nostro lavoro sia stato anzi avvantaggiato dalla scelta logica compiuta: la possibilità infatti di avere una negazione primitiva, scevra delle proprietà che comunemente vengono attribuite alla negazione classica, ha permesso di considerare i casi contraddittori da una nuova prospettiva.

Nel sistema formale ZFU_1 abbiamo preso in considerazione il caso di ipotetici oggetti, non meglio specificati, per i quali potessero darsi realizzazioni in cui due proprietà, di cui l'una fosse la negazione dell'altra, potessero entrambe darsi come vere. Da quanto è emerso nella prima parte della nostra ricerca, quella riguardante l'esame della logica C_1^*, è risultata l'esistenza di modelli singolari, nei quali potessero essere soddisfatte tanto una proposizione quanto la sua negata. Così, applicando C_1^* a ZFU, si sono potuti considerare modelli nei quali sia l'appartenenza che la non-appartenenza (in senso debole) ad una certa classe fossero entrambe vere. Ciò ha significato che, in base alla concezione attorno alla quale è stato pensato ZFU_1, una proprietà avrebbe potuto inerire ad un determinato individuo e nel contempo non inerirgli, nel senso che il concetto opposto a quello espresso da una certa classe avrebbe potuto fare riferimento ad una proprietà incompatibile con la prima ma comunque posseduta dall'oggetto considerato.

Nel capitolo XV abbiamo avuto modo di considerare alcuni esempi in proposito. Per tornare allora al discorso dal quale eravamo partiti, il vantaggio sostanziale offerto da un approccio paraconsistente debole in luogo di un approccio paraconsistente forte è stato quello di poter pensare alle contraddizioni come «positivamente» determinate. Fatto questo che non sarebbe stato possibile adottando una logica "dialeteista", in quanto per esse il principio di non contraddizione resta valido e dunque una contraddizione, qualora fosse stata riscontrata, avrebbe dovuto essere riguardata sempre come vera e falsa allo stesso tempo; mentre noi qui abbiamo considerato dei casi in cui una tale prospettiva non sarebbe risultata affatto consona a certi stati di cose, poiché in essi non si verificava la verità e la falsità di una congiunzione di fatti antinomici ma semplicemente la loro verità.

Le logiche dialeteiste dunque non sono sembrate particolarmente performanti nella trattazione delle contraddizioni proprio in virtù del fatto che esse difendono l'idea per la quale ci sia un solo tipo di negazione, la «vera negazione» (quella classica, con tutte le sue proprietà). Una simile accettazione delle questioni logiche avrebbe potuto precludere un certo modo di leggere taluni accadimenti. Nel nostro lavoro abbiamo ad esempio cercato di considerare la possibilità di isolare contraddizioni, come la possibilità di esperire quei casi in cui certe proprietà potessero interferire tra loro in maniera non distruttiva. Le circostanze in cui si verificano sovrapposizioni di tipo non-distruttivo sono molte e riteniamo importante tenerne conto. Soltanto un approccio paraconsistente in grado di operare una scelta rispetto ad una contraddizione, nel senso di accettare il fatto che tanto una proposizione quanto la sua negata siano entrambe semplicemente vere, può dischiudere un simile orizzonte. L'uso di una logica che accetti la verità di una contraddizione, almeno entro un determinato livello coma fa C_1^*, consente di aprire il discorso alla «positività» di quel determinato fatto, che si constata con immediata evidenza, considerando che esso corrisponde realmente a qualcosa; sarebbe pertanto inappropriato immaginare sempre la circostanza per cui una contraddizione reale dovesse risultare falsa allo stesso tempo.

Ciò che abbiamo cercato di mostrare infatti è che proprio ad una contraddizione non corrisponde sempre e necessariamente uno stato di cose che sia vero e falso nello stesso tempo; bensì può corrispondere uno stato di cose in cui sussiste un certo stato di cose e sussiste anche il fatto opposto, espresso dalla realizzazione di uno stato di sovrapposizione fra predicati tra loro incompatibili.

Il precipitato degli studi compiuti nella seconda parte allora sembra confermare questa ipotesi e dischiude così ad un'ulteriore questione, che può sintetizzarsi in relazione ad una domanda posta da Łukasiewicz nel celebre saggio del 1910: «Che cosa ci garantisce che non esistano oggetti contraddittori?»

La domanda ci sembra porre in realtà una duplice questione: 1) esistono oggetti contraddittori? 2) Se la logica può fare a meno del principio di non contraddizione, che ne preclude l'insorgenza, o se comunque esso non dovesse risultare derivabile dagli altri assiomi ammessi, poiché in una certa logica ne è dimostrabilmente indipendente, cosa ci fa presuppore l'esclusione di oggetti effettivamente contraddittori? Cosa può garantircelo, se la validità del «principio più saldo di tutti» può essere messa da parte?

La risposta che potremmo dare, in conseguenza dello studio qui condotto, è che nulla può garantirci da una simile circostanza. Il sistema formale che abbiamo cercato di costruire sembra per certi versi catturare proprio la problematicità della questione posta dal logico polacco. In esso infatti non è stata presupposta l'esistenza di alcun individuo, tantomeno contraddittorio. Ciononostante la teoria è in grado di fare a meno dell'ipotesi ontologica di stabilità generale, tollerando anziché resistere, diciamo così, alle contraddizioni che dovessero presentarsi proprio in relazione all'esistenza eventuale di oggetti inconsistenti.

Imbattersi nella contraddittorietà degli oggetti non è di per sé un problema insormontabile: lo è se si carica l'universo di discorso di tutta una serie di presupposti che magari non si accordano con essi.

Non è possibile pensare alla validità di certe leggi in generale, senza tener conto della situazione entro cui si esamina un certo stato di cose; ciò vorrebbe dire schiacciare il mondo, come totalità di fatti, su leggi e regole che potrebbero non appartenergli, con la conseguente difficoltà di offrirne un'immagina distorta. Così se pensassimo in generale alla validità del principio di non contraddizione, ne conseguirebbe per forza di cose il dover accettare, in presenza di un'antinomia, tanto la verità quanto la falsità della stessa. Il punto di vista invece che abbiamo assunto attraverso la costruzione delle categorie concettuali, che il sistema formale ZFU_1 esprime, muove in senso diametralmente opposto ad esso. Crediamo infatti che la differenza sostanziale sia legata al modo in cui ci si rapporta ai fatti che di volta in volta si presentano.

Come osservato a proposito di certi esempi, derivanti dalla chimica piuttosto che dalla fisica, possono assumersi due tipi di atteggiamento: o si crede nella incompleta e parziale quantità di informazioni che si possiede in relazione ad un fatto classicamente non spiegabile o si crede nella verità del fatto stesso, per come esso si determina, semplicemente perché esso è un fatto. Allora la differenza sostanziale che si determina è che da una parte si nega la veridicità di una circostanza, mentre dall'altra la si accetta e si cerca la migliore rappresentazione di essa. Così nel primo caso si ha la costruzione di formalismi che il più delle volte, non accettando lo stato di cose esaminato, lo nega adducendo carenza di informazioni e lo trattiene fin tanto che nuove scoperte al riguardo non rendano conforme la sua natura a quella che da essa ci si aspetterebbe. Dall'altra si tenta invece di categorizzare o classificare i fatti che sono venuti emergendo semplicemente prendendone atto, una volta che non si sia riusciti a trovarne una rappresentazione meno complessa e in accordo col resto dei fatti riscontrati.

Questa dualità comporta spesso un acceso dibattito sul modo stesso di fare scienza, in quanto si potrebbe ritenere che l'accettazione di un certo stato di cose possa corrispondere alla volontà di non guardare oltre, ad esempio nella ricerca di spiegazioni plausibili per fatti contraddittori.

Da molti casi di studio, attuali o appartenenti alla storia della scienza, si è visto che la differenza di questa impostazione riposa sulla volontà o meno del soggetto conoscente di considerare i fatti per come essi dovrebbero essere, piuttosto che per come essi sono in realtà. Le ricadute in termini formali sono allora le rielaborazioni di intere teorie alla luce non dei fatti bensì dei presupposti esterni all'universo di discorso cui si fa riferimento; con il conseguente svantaggio di utilizzare un gran numero di strumenti e di presupposizioni che rendono qualunque spiegazione farraginosa e formalmente goffa, poiché inelegante e concettualmente dispendiosa.

L'impostazione di accettare invece fatti apparentemente controintuitivi e sviluppare strumenti formali adeguati per la loro trattazione coincide con quella adottata nella strutturazione del nostro sistema formale. Il modo in cui abbiamo cercato di concepirlo si è rivelato in sintonia con l'idea secondo la quale l'inamovibilità dei propri presupposti concettuali rischia talvolta di caricare i fatti, che si vuol descrivere, di elementi che con essi non hanno probabilmente nulla a che fare.

La costruzione quindi di un sistema formale come ZFU_1 costituisce a nostro avviso una sorta di risposta anche a questo tipo di questione. Poiché nulla ci garantisce dalla contraddittorietà di una certa porzione del mondo, potrebbero darsi casi contraddittori reali; e l'unico modo per rendere ragion di ciò è lasciare semplicemente che essi si manifestino in quanto tali. Diversamente si opererebbe una distorsione ed una forzatura di certi eventi, semplicemente perché si finirebbe per adottare strumenti formali meno adeguati e si imprimerebbe a certi stati di cose un carattere ontologico che essi non hanno.

La logica in questo gioca un ruolo-cardine, come si è potuto constatare nel corso della ricerca. È utile abbandonare certi presupposti, quando questi si rivelano inefficaci, poiché la logica non può determinare né predeterminare la struttura ontologica del mondo, ma deve limitarsi a descriverla.

Una seconda ed ultima questione, alla quale il nostro studio potrebbe indicare un ulteriore percorso, concerne il rapporto tra la teoria degli insiemi ed i problemi che è possibile riscontrare nel mondo empirico e dunque nelle scienze che tentano di descriverli.

Yuri Mani pose nel 1976 il problema se la teoria degli insieme potesse essere utilizzata per trattare in maniera adeguata alcuni problemi della fisica, specialmente quei problemi che concettualmente risultano essere più spinosi. Décio Krause rispose alla questione costruendo un sistema formale all'interno del quale potesse trovare adeguata trattazione il problema concernente l'indistinguibilità di certe particelle, che nonostante ciò risultano essere non identificabili tra loro. Dunque una risposta affermativa alla questione sollevata è evidentemente possibile. È chiaro che il problema posto dal Professor Manin è un problema di ben più ampia portata, che affonda le proprie radici nel sesto problema di Hilbert, in base al quale si richiedeva l'assiomatizzazione delle teorie fisiche.

Le risposte alla sfida posta dal celebre matematico tedesco non sono mancate, soprattutto ad opera di alcuni esponenti del Circolo di vienna. Tuttavia oggi sappiamo che una completa e soddisfacente risposta al problema non è possibile, perlomeno non nel senso auspicato dallo stesso Hilbert. Nessun sistema concepito per descrivere assiomaticamente i fatti indagati dalla fisica potrebbe godere di quelle proprietà che un formalista si aspetterebbe. Tuttavia ciò non ostacola tentativi parziali e mirati, soprattutto se si lavora pensando a classi di strutture piuttosto che a meri sistemi formali. Così ha grande rilievo ad esempio la proposta delle *Quantum Set Theories* poiché queste consentono la giustificazione di fatti concettualmente difficili da gestire, come il problema dell'"individuazione".

In connessione con tali questioni il nostro studio potrebbe allora fornire, nel suo piccolo, un contributo a questo tipo di approccio, rafforzando gli argomenti addotti dal Professor Krause per ritenere che in effetti la teoria degli insiemi può rispondere positivamente alla richiesta avanzata dal Professor Yuri Manin. Utilizzando infatti un sistema formale come quello qui presentato, sarebbe possibile ad esempio giustificare altre circostanze problematiche oltre quelle riguardanti il problema dell'individuazione semplicemente adottando alcune delle definizioni discusse nell'ultimo capitolo. Così potrebbero considerarsi nuovi casi di studio entro cui l'applicazione della teoria degli insiemi risultasse di qualche efficacia nel superare certe difficoltà, soprattutto se in relazione a casi contraddittori, che troverebbero accoglimento e giustificazione proprio attraverso l'indebolimento dei presupposti logici e attraverso la duttilità ontologica che questo indurrebbe. In tal senso si potrebbero considerare in prospettiva ulteriori estensioni del sistema ZFU_1, dettate magari da esigenze legate a particolari strutture di riferimento; o ancora si potrebbero considerare integrazioni fra le teorie finora elaborate e quella qui presentata al fine di estendere il numero dei casi problematici da trattare all'interno di un unico sistema formale.

Bibliografia

Abian, A., *The Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, Saunders Company, Philadelphia, 1965

Åberg, C., *Relativity Phaenomena in Set Theory*, «Synthese», vol. 27, n. 1-2, 1974, pp. 189-98

Abrusci, V., *Autofondazione della matematica. Le ricerche di Hilbert sui fondamenti della matematica*, in Hilbert, D., *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di V. Abrusci, Bibliopolis, Napoli, 1978, pp. 15-131

Ackermann, W., *Mengentheoretische Begründung der Logik*, «Mathematische Annalen», 1937, vol. 115, pp. 1-22

Ackermann, W., *Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie*, «Mathematische Annalen», vol. 117, 1940, pp. 162-94

Ackermann, W., Hilbert, D., *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, Berlin, 1928

Aczel, P., *Non-Well Founded Sets*, CSLI, Stanford, 1988

Addison, J., Henkin, L., Tarski, A., *The Theory of Models : Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley*, North Holland, Amsterdam, 1965

Agazzi, E., *Introduzione ai problemi dell'assiomatica*, Vita e Pensiero, Milano, 1961

Agazzi, E., Palladino, D., *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Edizioni Scientifiche e Tecniche Mondadori, Milano, 1978

Altea, F., Berto, F., (eds.), *Scenari dell'impossibile*, Il Poligrafo, Padova, 2007

Alves, E., *Paraconsistent Logic and Model Theory*, «Studia Logica», vol. 43, n. 1/2, 1984, pp. 17-32

Alves, E., Moura, J., *On Some Higher Order Paraconsistent Calculi*, in Arruda, A. I., Da Costa, N. C. A., Chuaqui, R., *Mathematical Logic: Proceedings of the First Brazilian Conference*, Marcel Dekker, 1978, pp. 1-8

Anderson, A., Belnap, N., Jr., *Entailment*, Princeton University Press, Princeton, 1975

Andrews, P., *An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory: to Truth through Proof*, Kluwer Academic Press, Boston, 1986; 2002[2]

Aristotele, *Il principio di non contraddizione*, a cura di E. Severino, La Scuola, Brescia, 1959

Aristotele, *Metafisica*, a cura di G. Reale, Bompiani, Milano, 2000

Aristotele, *Organon*, a cura di G. Colli, Adelphi, Milano, 2003

Arruda, A. I., *Aspects of the Historical Development of Paraconsistent Logic*, in Priest, G., Routley, R., Norman, J., (eds.), *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*, Philosophia, München, 1989, pp. 99-130

Arruda, A. I., *A Survey of Paraconsistent Logic*, in Arruda, A. I., Chuaqui, R., Da Costa, N. C. A., (eds.), *Mathematical Logic in Latin America*, North Holland, Amsterdam, 1980, pp. 1-41

Arruda, A. I., *Le schéma de la séparation dans les sytèmes* NF_n, «Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris», vol. 280, 1975, pp. 1341-4

Arruda, A. I., Da Costa, N. C. A., *On the Relevant Systems P and* P^* *and Related Systems*, «Studia Logica», vol. 43, n. 1/2, 1984, pp. 33-49

Arruda, A. I., *Remarques sue les systèmes* C_n, «Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris», vol. 280, 1975, pp. 1253-6

Arruda, A. I., *Remarks on Da Costa's Paraconsistent Set Theories*, in Caicedo, X., Da Costa, N. C. A., Chuaqui, R., *Proceedings of the Fifth Latin American Symposium on Mathematical Logic*, SCM, Bogotá, 1985, pp.

Arruda, A. I., *Sur certaines hiérarchies de calculs de prédicats* C_n, «Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris», vol. 268, 1969, pp. 629-32

Arruda, A. I., *Sur certaines hiérarchies de calculs propositionnels* C_n, «Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris», vol. 265, 1967, pp. 641-4

Arruda, A. I., *Sur certaines hiérarchies de calculs propositionnels* C_n, «Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris», vol. 266, 1968, pp. 37-9

Arruda, A. I., *Sur certaines hiérarchies de calculs propositionnels* C_n, «Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris», vol. 266, 1968, pp. 897-900

Arruda, A. I., *Sur les systèmes* NF_i *de Da Costa*, «Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris», vol. 270, 1970, pp. 1081-4

Arruda, A. I., *The Paradox of Russell in the Systems* NF_n, in Arruda, A., Da Costa, N. C. A., Sette, A., (eds.), *Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic*, Sociedade Brasileira de Lógica, 1980, pp. 1-12

Arruda, A. I., Chuaqui, R., Da Costa, N. C. A., (eds.), *Mathematical Logic in Latin America*, North Holland, Amsterdam, 1980

Arruda, A. I., Chuaqui, R., Da Costa, N. C. A., (eds.), *Non-Classical Logics, Model Theory, and Computability*, North Holland, Amsterdam, 1980

Arruda, A. I., Da Costa, N. C. A., *Sur une hiérarchie de systèmes formels*, «Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris», vol. 259, 1964, pp. 2943-5

Arruda, A. I., Da Costa, N. C. A., *Sur le schéma de la séparation*, «Nagoya Mathematical Journal», vol. 38, 1970, pp. 71-84

Arruda, A. I., Da Costa, N. C. A., *Une sémantique pour le calcul* $C_1^=$, «Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris», vol. 284, 1977, pp. 279-82

Arruda, A. I., Da Costa, N. C. A., Chuaqui, R., *Mathematical Logic: Proceedings of the First Brazilian Conference*, Marcel Dekker, 1978

Arruda, A. I., Da Costa, N. C. A., Sette, A., (eds.), *Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic*, Sociedade Brasileira de Lógica, 1980

Arruda, A. I., Miró Quesada, F., Da Costa, N. C. A., Chuaqui, R., *Meeting of the Association for Symbolic Logic: Campinas, Brazil 1976*, «The Journal of Symbolic Logic», vol. 43, n. 2, 1978, pp. 352-64

Asenjo, F., *A Calculus of Antinomies*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», vol. 7, n. 1, 1966, pp. 103-5

Asenjo, F., Tamburino, J., *Logic of Antinomies*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», vol. 16, n. 1, 1975, pp. 17-44

Bachmann, H., *Transfinite Zahlen*, Springer, Heidelberg, 1955; 1967[2]

Bagni, G., Gorla, D., Labella, A., *Introduzione alla logica e al linguaggio matematico*, McGraw-Hill, Milano, 2010

Barcan Marcus, R., *Classes, Collections and Individuals*, «American Philosophical Quarterly», vol. 11, n. 3, 1974, pp. 227-32

Bar-Hillel, Y., Poznanski, M., Rabin, O., Robinson, A., (eds.), *Essays on the Foundations of Mathematics*, Magnes, Jerusalem, 1961

Barwise, J., *Admissible Sets and Structures*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1975

Barwise, J., (ed.), *Mathematical logic*, North Holland, Amsterdam, 1977

Barwise, J., Keisler, H. J., Kunen, K., (eds.), *The Kleene Symposium*, North Holland, Amsterdam, 1980

Batens, D., *Paraconsistent Extensional Propositional Logics*, «Logique et Analyse», vol. 90/91, 1980, pp. 195-234

Batens, D., Mortensen, C., Priest, G., Bendegem, J. van, (eds.), *Frontiers of Paraconsistent Logic*, Research Studies Press, Baldock, 2000

Bays, T., *Reflections on Skolem's Paradox*, PhD. Thesis, UCLA, 2000

Behmann, H., *Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem*, «Mathematische Annalen», vol. 86, 1922, pp. 163-229

Behmann, H., *Zu den Widersprüchen der Logik und der Mengenlehre*, «Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung», vol. 40, 1931, pp. 37-48

Bell, J., Machover, M., *A Course in Mathematical Logic*, North Holland, Amsterdam, 1977

Bellissima, F., Pagli, P., *Consequentia mirabilis: una regola logica fra matematica e filosofia*, Olschki, Firenze, 1996

Bellotti, L., *Naturalismo e realismo nella teoria degli insiemi*, «Rivista di filosofia», vol. 89, n. 3, 1998, pp. 445-75

Bellotti, L., Moriconi, E., Tesconi, L., *Computabilità*, Carocci, Roma, 2001

Benacerraf, P., Putnam, H., (eds.), *Philosophy of Mathematics*, Blackwell, Oxford, 1964; Cambridge University Press, New York, 1983[2]

Bernays, P., *A System of Axiomatic Set Theory, Parts I-VII*; *Part I*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 2, n. 1, 1937, pp. 65-77; *Part II*, *Ibidem*, vol. 6, n. 1, 1941, pp. 1-17; *Part III*, *Ibidem*, vol. 7, n. 2, 1942, pp. 65-89; *Part IV*, *Ibidem*, vol. 7, n. 4, 1942, pp. 133-45; *Part V*, *Ibidem*, vol. 8, n. 4, 1943, pp. 89-106; *Part VI*, *Ibidem*, vol. 13, n. 2, 1948, pp. 65-79; *Part VII*, *Ibidem*, vol. 19, n. 2, 1954, pp. 81-96

Bernays, P., *Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalküls der „Principia Mathematica“*, «Mathematische Zeitschrift», vol. 25, 1926, pp. 305-20

Bernays, P., *Sur le platonisme dans les mathématiques*, «Enseignement mathématique», vol. 34, 1935, pp. 52-69

Bernays, P., *Zur Frage der Unendlichkeitsschemata in der axiomatischen Mengenlehre*, in Bar-Hillel, Y., Poznanski, M., Rabin, O., Robinson, A., (eds.), *Essays on the Foundations of Mathematics*, Magnes, Jerusalem, 1961, pp. 3-49

Bernays, P., Fraenkel, A., *Axiomatic Set Theory*, North Holland, Amsterdam, 1958

Berto, F., *How to Sell a Contradiction: the Logic and the Metaphysics of Inconsistency*, College Publications, London, 2007

Berto, F., *Teorie dell'Assurdo*, Carocci, Roma, 2006

Beth, E., *Les fondements logiques des mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1950; 1955[2]

Beth, E., *The Foundations of Mathematics*, North Holland, Amsterdam, 1959; 1965[2]

Béziau, J.-Y., *Are Paraconsistent Negations Negations?*, in Carnielli, W., Coniglio, M., D'Ottaviano Loffredo, I., (eds.), *Paraconsistency. The Logical Way to the Inconsistent*, Marcel Dekker, Basel, 2002, pp. 465-86

Béziau, J.-Y., *Idempotent Full Paraconsistent Negations are not Algebraizable*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», vol. 39, n. 1, 1998, pp. 135-9

Béziau, J.-Y., *S5 is a Paraconsistent Logic and so is First-Order Classical Logic*, «Logical Studies», vol. 9, 2002, pp. 1-9

Blanché, R., *L'axiomatique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1955

Blok, W., Pigozzi, D., *Algebraizable Logics*, Memoirs AMS, vol. 77, n. 396, 1989

Bobenrieth Miserda, A., *Inconsistencias ¿Por qué no?*, Tercer Mundo, Bogotá, 1996

Bochvar, D., *On a Three-valued Logical Calculus and Its Application to the Analysis of the Paradoxes of the Classical Extended Functional Calculus*, a cura di M. Bergmann, «History and Philosophy of Logic», vol. 2, n. 1-2, 1981, pp. 87-112

Bocheński, J., *Formale Logik*, Alber, Freiburg-München, 1956; trad. it., *Logica formale*, a cura di A. G. Conte, 2 voll., Einaudi, Torino, 1972

Bolzano, B., *Die Paradoxien des Unendlichen*, Reclan, Leipzig, 1851; trad. it., *I paradossi dell'infinito*, a cura di A. Conte, Silva, Milano, 1965; Bollati Boringhieri, Torino, 2003

Boole, G., *An Investigation of the Laws of Thought*, Walton & Maberly, London, 1854; trad. it., *Indagine sulle leggi del pensiero*, a cura di M. Trinchero, Einaudi, Torino, 1976

Boolos, G., *Computability and Logic*, Cambridge University Press, Cambridge, 1974; 2003[4]

Boolos, G., *The Logic of Provability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993

Borgers, A., *Development of the Notion of Set and of the Axioms for Sets*, «Synthese», vol. 7, n. 6-A, 1948/49, pp. 374-90

Bottazzini, U., *Gödel e gli sviluppi recenti della logica*, in Rossi, P., a cura di, *Storia della scienza moderna e contemporanea*, 3 voll. in 6 tomi, UTET, Torino, 1988; TEA, Milano, 2000, pp. 731-50

Bottazzini, U., *Il problema dei fondamenti e le teorie logiche*, in Rossi, P., a cura di, *Storia della scienza moderna e contemporanea*, 3 voll. in 6 tomi, UTET, Torino, 1988; TEA, Milano, 2000, pp. 689-729

Bourbaki, N., *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1960; 1969[2]

Bourbaki, N., *Théorie des ensembles*, Hermann, Parigi, 1970

Boyer, C., *History of Mathematics*, Wiley, New York, 1968; 1991^2

Bozzi, S., Mangione, C., *Storia della logica*, 2 voll., CUEM, Milano, 2004

Bremer, M., *Introduction to Paraconsistent Logic*, Peter Lang, Frankfurt a. M., 2005

Brunner, N., *The Fraenkel-Mostowski Method Revised*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», vol. vol. 31, n. 1, 1989, pp. 64-75

Brouwer, L., *Collected Works*, 2 voll., a cura di A. Heyting, A. Freudenthal, North Holland, Amsterdam, 1975-1976

Bunder, M., *A New Hierarchy of Paraconsistent Logics*, in Arruda, A., Da Costa, N. C. A., Sette, A., (eds.), *Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic*, Sociedade Brasileira de Lógica, 1980, pp. 13-22

Bunder, M., *Some Definitions of Negation Leading to Paraconsistent Logics*, «Studia Logica», vol. 43, n. 1/2, 1984, pp. 75-8

Bunge, M., *Treatise on Basic Philosophy*, 8 voll., Reidel, Boston-Dordrecht, 1974-1989

Caiero, R., Souza, E., *A New Paraconsistent Set Theory:* ML_1, «Logique et Analyse», vol. 157, 1997, pp. 115-41

Cantor, G., *Gesammelte Abhandlungen*, a cura di E. Zermelo, Springer, Berlin, 1932

Cantor, G., *La formazione della teoria degli insiemi*, a cura di G. Rigamonti, Sansoni, Firenze, 1992

Cantor, G., *Über eine elementare Frage der Männigfaltigkeitslehre*, «Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung», vol. 1, 1892, pp. 75-8; trad. it., *Sopra una questione elementare della teoria degli aggregati*, a cura di G. Vivanti, «Rivista di matematica», vol. 2, 1892, pp. 165-7

Carnap, R., *Abriß der Logistik*, Springer, Wien, 1929

Carnap, R., *Formalization of logic*, Harvard University Press, Cambridge, 1943

Carnap, R., *Einfuhrung in die symbolische Logik mit besonderer Beruchsichtigung ihrer Anwendungen*, Springer, Wien, 1954

Carnap, R., *Logische Syntax der Sprache*, Springer, Wien, 1934

Carnielli, W., Coniglio, M., D'Ottaviano Loffredo, I., (eds.), *Paraconsistency. The Logical Way to the Inconsistent*, Marcel Dekker, Basel, 2002

Carnielli, W., Alcântara, L., *Paraconsistent Algebras*, «Studia Logica», vol. 43, n. 1/2, 1984, pp. 79-88

Carnielli, W., Marcos, J., *A Taxonomy of C-Systems*, in Carnielli, W., Coniglio, M., D'Ottaviano Loffredo, I., (eds.), *Paraconsistency. The Logical Way to the Inconsistent*, Marcel Dekker, Basel, 2002

Casalegno, P., Mariani, M., *Teoria degli insiemi*, Carocci, Roma, 2004

Casari, E., *Axiomatical and Set-Theoretical Thinking* , «Synthese», vol. 27, n. 1-2, 1974, pp. 49-61

Casari, E., (ed.), *Dalla logica alla metalogica. Scritti fondamentali della logica matematica*, Sansoni, Firenze, 1979

Casari, E., *Introduzione alla logica*, UTET, Torino, 1997

Casari, E., (ed.), *La filosofia della matematica del '900*, Sansoni, Firenze, 1973

Casari, E., *La matematica della verità*, Bollati Boringhieri, Torino, 2006

Casari, E., *Lineamenti di logica matematica*, Feltrinelli, Milano, 1959; 1982[7]

Casari, E., *Logiche del non-essere*, «Rivista di Filosofia», vol. 100, n. 1, 2009, pp. 43-66

Casari, E., *Questioni di filosofia della matematica*, Feltrinelli, Milano, 1964; 1976[2]

Casari, E., *Universali e insiemi, I & II*; *Part I*, «Rivista di filosofia», vol. 60, n. 1, 1969, pp. 24-48; *Part II*, *Ibidem*, vol. 60, n. 3, pp. 433-62

Cellucci, C., *Concezioni di insiemi*, «Rivista di filosofia», vol. 62, 1971, pp. 123-54

Cellucci, C., (ed.), *Il paradiso di Cantor*, Bibliopolis, Napoli, 1978

Cellucci, C., (ed.), *La filosofia della matematica*, Laterza, Roma-Bari, 1967

Cellucci, C., *La filosofia della matematica del Novecento*, Laterza, Roma-Bari, 2007

Cellucci, C., *Qualche problema di filosofia della matematica*, «Rivista di filosofia», vol. 60, n. 2, 1969, pp. 135-60

Cellucci, C., *Skolem's Paradox and Platonism*, «Critica», vol. 4, 1970, pp. 43-54

Cellucci, C., Agazzi, E., (eds.), *Logiche moderne*, 2 voll., Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma, 1981

Chang, C. C., Keisler, J. H., *Model Theory*, North Holland, Amsterdam, 1973; 1990[3]

Chuaqui, R., *Axiomatic Set Theory. Impredicative Theory of Classes*, North Holland, Amsterdam, 1981

Church, A., *A Formulation of the Simple Theory of Types*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 5, n. 2, 1940, pp. 56-68

Church, A., *A Note on the Entscheidungsproblem*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 1, n. 1, 1936, pp. 40-1

Church, A., *An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory*, «American Journal of Mathematics», vol. 58, n. 2, 1936, pp. 345-63

Church, A., *A Set of Postulates for the Foundation of Logic*, «The Annals of Mathematics», vol. 34, n. 4, 1933, pp. 839-64

Church, A., *Introduction to Mathematical Logic, vol. 1*, Princeton University Press, Princeton, 1956

Church, A., *On the Law of Excluded Middle*, «Bulletin of the American Mathematical Society», vol. 34, n. 1, 1928, pp. 75-8

Church, A., *Set Theory with a Universal Set*, in Henkin, L., (ed.), *Proceedings of the Tarski Symposium*, AMS, Providence, 1974, pp. 297-308

Church, A., *The Constructive Second Number Class*, «Bulletin of the American Mathematical Society», vol. 44, n. 3, 1938, pp. 224-32

Church, A., *The Richard Paradox*, «The American Mathematical Monthly», vol. 41, n. 6, 1934, pp. 356-61

Church, A., Kleene, S., *Formal Definitions in the Theory of Ordinal Numbers*, «Fundamenta Mathematicae», vol. 28, 1936, pp. 11-21

Chwistek, L., *Neue Grundlagen der Logik und Mathematik*, «Mathematische Zeitschrift», vol. 30, 1929, pp. 704-24

Chwistek, L., *Über die Antinomien der Prinzipien der Mathematik*, «Mathematische Zeitschrift», vol. 14, 1922, pp. 236-43

Chwistek L., *Über die Hypothesen der Mengenlehre*, «Mathematische Zeitschrift», vol. 25, 1926, pp. 439-73

Ciesielski, K., *Set Theory for the Working Mathematician*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997

Clark, M., *Paradoxes from A to Z*, Routledge, London, 2002; 2007[2]

Cocchiarella, N. B., *Cantor's Power Set Theorem versus Frege's Double Correlation Thesis*, «History and Philosophy of Logic», vol. 13, n. 2, 1992, pp. 179-201

Cocchiarella, N. B., *Formal Ontology and Conceptual Realism*, Springer, Dordrecht, 2007

Cocchiarella, N. B., *Logical Investigations of Predication Theory and the Problem of Universals*, Bibliopolis, Napoli, 1986

Coffa, J., *The Humble Origins of Russell's Paradox*, «The Journal of Bertrand Russell Studies», vol. 99, 1979, pp. 31-7

Coffa, J., *The Semantic Tradition from Kant to Carnap*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991

Cohen, P., *Set Theory and the Hypothesis of the Continuum*, Benjamin, Amsterdam-New York, 1966; trad. it., *La teoria degli insiemi e l'ipotesi del continuo*, a cura di G. Lolli, Feltrinelli, Milano, 1973

Cohen, P. J., *The Independence of the Axiom of Choice*, mimeographed, Stanford University, 1963

Cohen, P., *The Independence of the Continuum Hypothesis, I & II*; *Part I*, «Proceedings of the Nations Academy of Sciences», vol. 50, 1963, pp. 1143-8; *Part II*, *Ibidem,* vol. 51, 1964, pp. 105-10

Cori, R., Lascar, D., *Mathematical Logic*, 2 voll., Oxford University Press, New York, 2001

Crossley, J. N., Dummett, M., (eds.), *Formal Systems and Recursive Functions*, North Holland, Amsterdam, 1965

Curry, H., *Foundations of Mathematical Logic*, McGraw-Hill, New York, 1963

Curry, H., *Leçons de logique algébrique*, Gauthier-Villars, Paris, 1952

Curry, H., *Some Aspects of the Problem of Mathematical Rigor*, «Bulletin of the American Mathematical Society», vol. 47, n. 4, 1941, pp. 221-41

Curry, H., *The Incosistency of Certain Formal Logic*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 7, n. 3, 1942, pp. 115-7

Curry, H., Feys, R., Craig, W., *Combinatory Logic*, 2 voll., North Holland, Amsterdam, 1958-1972

Da Costa, N. C. A., *Calculs de prédicats pour les systèmes formels inconsitants*, «Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris», vol. 258, 1964, pp. 27-9

Da Costa, N. C. A., *Calculs propositionnels pour les systèmes formels inconsitants*, «Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris», vol. 257, 1963, pp. 3790-3

Da Costa, N. C. A., *Conhecimento científico*, Discurso, São Paulo, 1997; 1999^2

Da Costa, N. C. A., *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*, Hucitec-EdUSP, São Paulo, 1980

Da Costa, N. C. A., *Lógica indutiva e probabilidade*, HUCITEC, São Paulo, 1993; 2008^2

Da Costa, N.C.A., *Logique classique et non-classique*, Paris, Masson, 1997

Da Costa, N.C.A., *Nota sôbre a lógica de Brouwer-Heyting*, «Anuário da Sociedade Paranaense de Matématica», vol. 1, 1958, pp. 9-10

Da Costa, N.C.A., *Nota sôbre o conceito de contradiçao*, «Anuário da Sociedade Paranaense de Matématica», vol. 1, 1958, pp. 6-8

Da Costa, N. C. A., *On Paraconsistent Set Theory*, «Logique et Analyse», vol. 115, 1986, pp. 361-71

Da Costa, N. C. A., *On the Theory of Inconsistent Formal Systems*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», vol. 15, n. 4, 1974, pp. 497-510

Da Costa, N. C. A., *Opérations non-monotones dans les treillis*, «Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris», vol. 263, 1966, pp. 429-32

Da Costa, N. C. A., *Sistemas formais inconsistentes*, NEPE, Rio De Janeiro, 1963; UFPR, Curitiba, 1993

Da Costa, N. C. A., *Sur un système inconsistant de la théorie des ensembles*, «Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris», vol. 258, 1964, pp. 3144-7

Da Costa, N. C. A., *The Philosophical Import of Paraconsistent Logic*, «Journal of Non-Classical Logic», vol. 1, 1982, pp. 1-19

Da Costa, N.C.A., *Uma questão de filosofia da matemática*, «Anuário da Sociedade Paranaense de Matématica», vol. 1, 1958, pp. 21-7

Da Costa, N.C.A., Alcântara, L., *On Paraconsistent Set Theories*, «Boletim da Sociedade Paranaense de Matématica», vol. 12/13, n. 1/2, 1991/1992, pp. 78-81

Da Costa, N. C. A., Alves, E. H., *A Semantical Analysis of the Calculi* C_n, «Notre Dame Journal of Formal Logic», vol. 18, n. 4, 1977, pp. 621-30

Da Costa, N. C. A., Alves, E. H., *Une sémantique pour le calcul* C_1, «Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris», vol. 283, 1976, pp. 729-31

Da Costa, N. C. A., Béziau, J.-Y., Bueno, O., *Aspects of Paraconsistent Logic*, «Bulletin of the IGPL», vol. 3, n. 4, 1995, pp. 597-614

Da Costa, N. C. A., Béziau, J.-Y., Bueno, O., *Paraconsistent Logic in a Historical Perspective*, «Logique et Analyse», vol. 150/151/152, 1995, pp. 111-25

Da Costa, N. C. A., Béziau, J.-Y., Bueno, O., *Elementos de teoria paraconsistente de conjunctos*, CLE, Campinas, 1998

Da Costa, N. C. A., Bueno, O., French, S., *The Logic of Pragmatic Truth*, «Journal of Philosophical Logic», vol. 27, n. 6, 1998, pp. 603-20

Da Costa, N. C. A., French, S., *Science and Partial Truth*, Oxford University Press, Oxford, 2003.

Da Costa, N. C. A., Guillaume, M., *Négations composées et la loi de Peirce dans les systèmes* C_n, «Portugalia Mathematicae», vol. 24, 1965, pp. 201-10

Da Costa, N. C. A., Grana, N., *Il recupero dell'inconsistenza*, L'Orientale, Napoli, 2009

Da Costa, N. C. A., Krause, D., *Complementarity and Paraconsistency*, in Rahman, S., Symons, J., Gabbay, D., Bendegen, J.-P. van, (eds.), *Logic, Epistemology, and the Unity of Science*, Kluwer, Dordrecht, 2004, pp. 557-68

Da Costa, N. C. A., Krause, D., *The Logic of Complementarity*, in Benthem, J. van, Heinzmann, G., Rebuschi, M., Visser, H., (eds.), *The Age of Alternative Logics: Assessing Philosophy of Logic and Mathematics Today*, Springer, Berlin, 2006, pp. 103-20

Da Costa, N. C. A., Lombardi, O., Lastiri, M., *A Modal Ontology of Properties for Quantum Mechanics*, «Synthese», vol. 190, n. 17, 2013, pp. 3671-93

Da Costa, N. C. A., Marconi, D., *An Overview of Paraconsistent Logic*, «Journal of Non-Classical Logic», vol. 6, n. 1, 1989, pp. 5-32

Da Costa, N. C. A., Subrahmanian, V. S., *Paraconsistent Logic as a Formalism for Reasoning about Inconsistent Knowledge Bases*, «Artificial Intelligence in Medicine», vol. 1, n. 4, 1989, pp. 167-74

Da Costa, N. C. A., Wolf, R., *Studies in Paraconsistent Logic, I & II*; *Part I*, «Philosophia», vol. 9, n. 2, 1980, pp. 189-217; *Part II*, «Revista Colombiana de Matemáticas», vol. 19, 1985, pp. 59-67

Dalla Chiara, M. L., *Istanti e individui nelle logiche temporali*, «Rivista di filosofia», vol. 64, 1973, pp. 95-122

Dalla Chiara, M. L., *Modelli sintattici e semantici delle teorie elementari*, Feltrinelli, Milano, 1968

Dalla Chiara, M. L., Giuntini, R., *Paraconsistent Ideas in Quantum Logic*, «Synthese», vol. 125, n. 1/2, 2000, pp. 55-68

Dalla Chiara, M. L., Giuntini, R., *Paraconsistent Quantum Logic*, «Foundations of Physics», vol. 19, 1989, pp. 891-904

Dalla Chiara, M. L., Toraldo Di Francia, G., *Le teorie fisiche*, Boringhieri, Torino, 1981

Dana Scott, S., *Axiomatizing Set Theory*, in Dana Scott, S., Jech, T., (ed.), *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. XIII, parte 2, American Mathematical Society, Providence, 1974, pp. 207-8

Dana Scott, S., *Quine's Individuals*, in Nagel, E., Suppes, P., Tarski, A., *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Proceedings of the 1960 International Congress, Stanford University Press, Stanford, 1962, pp. 111-5

Dana Scott, S., Jech, T., (eds.), *Axiomatic Set Theory*, 2 voll., AMS, Providence, 1971

Dauben, J., *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, Princeton, 1990

Davis, M., (ed.), *The Undecidable*, Raven, New York, 1965; Dover, New York, 2004

Dedekind, R., *Gesammelte mathematische Werke*, 3 voll., a cura di R. Fricke, E. Noether, Ö. Ore, Vieweg, Braunschweig, 1930-1932

Dedekind, R., *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Vieweg, Braunschweig, 1888

Dedekind, R., *Scritti sui fondamenti della matematica*, a cura di F. Gana, Bibliopolis, Napoli, 1982

De Florio, C., *Categoricità e modelli intesi*, Franco Angeli, Milano, 2007

Devlin, K., *Constructibility*, Springer, Berlin-Heidelberg, 1984

Devlin, K., *Sets, Functions, and Logic*, Chapman & Hall, London-New York, 1981; 2004[3]

Devlin, K., *The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory*, Springer, New York, 1979

Donati, S., *I fondamenti della matematica nel Logicismo di Bertrand Russell*, Atheneum, Firenze, 2006

Drake, F., *Set Theory. An Introduction to Large Cardinals*, North Holland, Amsterdam, 1974

Dubikajtis, L., Dudek, E., Konior, J., *On Axiomatics of Jaśkowski Discussive Propositional Calculus*, in Arruda, A., Da Costa, N. C. A., Sette, A., (eds.), *Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic*, Sociedade Brasileira de Lógica, 1980, pp. 109-17

Dugac, P., *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Vrin, Paris, 1976

Dummett, M., *A Propositional Calculus with Denumerable Matrix*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 24, n. 2, 1959, pp. 97-106

Dummett, M., *Elements of Intuitionism*, Clarendon Press, Oxford, 1977; 2000[2]

Duns Scotus, I., *In Universam Aristotelis Logicam Exactissimae Quaestiones*, apud Franciscum Franciscium, Venezia, rist. 1591

Ebbinghaus, H.-D., *Ernst Zermelo. An Approach to His Life and Work*, Springer, Berlin, 2007

Ebbinghaus, H.-D., *et alii*, *Zahlen*, Springer, Berlin, 1983; 1991[2]; trad. ingl., *Numbers*, a cura di K. Lamotke, H. Orde, J. Ewing, Springer, Berlin *et alii*, 1991

Enderton, H., *A Mathematical Introduction to Logic*, Harcourt/Academic Press, San Diego, rist. 2001

Enderton, H., *Elements of Set Theory*, Academic Press, New York, 1977

Enriques, F., *Per la storia della logica*, Zanichelli, Bologna, 1922

Enriques, F., (ed.), *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, 2 voll., Zanichelli, Bologna, 1912

Ewald, W., (ed.), *From Kant to Hilbert*, 2 voll., Oxford University Press, New York, 1996

Feferman, S., *Arithmetization of Metamathematics in a General Setting*, «Fundamenta Mathematicae», vol. 49, 1960, pp. 35-92

Feferman, S., *In the Light of Logic*, Oxford University Press, New York, 1998

Feferman, S., *The Number Systems*, Chelsea, New York, 1964; 1989[2]

Felgner, U., *Models of ZF-Set Theory*, Springer, Berlin, 1971

Fenstad, J., Frolov, I., Hilpinen, R., (eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science, VIII*, North Holland, Amsterdam, 1989

Fenstad, J., (ed.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, North Holland, Amsterdam, 1971

Ferreirós, J., *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*, Birkhäuser, Boston, 1999; 2007[2]

Feynman, R., *Simulating Physics with Computers*, «International Journal of Theoretical Physics», vol. 21, n. 6/7, 1982, pp. 467-88

Feys, R., Fitch, F., *Dictionary of Symbols of Mathematical Logic*, North Holland, Amsterdam, 1969

Fidel, M., *An Algebraic Study of Logic with Constructible Negation*, in Arruda, A., Da Costa, N. C. A., Sette, A., (eds.), *Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic*, Sociedade Brasileira de Lógica, 1980, pp. 119-29

Fidel, M., *The Decidability of the Calculi C_n*, «Reports on Mathematical Logic», vol. 8, 1977, pp. 31-40

Finsler, P., *Finsler Set Theory: Platonism and Circularity*, a cura di D. Booth, R. Ziegler, Birkhäuser, Basel, 1996

Fitting, M., *Intuitionistic Logic Model Theory and Forcing*, North Holland, Amsterdam, 1969

Forster, T., *Set Theory with a Universal Set*, Oxford University Press, Oxford, 1992; 1995[2]

Fraenkel, A., *Abstract Set Theory*, North Holland, Amsterdam, 1953; 1976[4]

Fraenkel, A., *Axiomatische Begründung der geordneten Mengen*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», vol. 155, 1926, pp. 129-58

Fraenkel, A., *Axiomatische Theorie der Wohlordnung*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», vol. 167, 1932, pp. 1-11

Fraenkel, A., *Über den Begriff „definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlsaxioms*, 1922, «Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalische-mathematische Klasse», 1922, pp. 253-7

Fraenkel, A., *Einleitung in die Mengenlehre*, Springer, Berlin, 1919; 1928[3]

Fraenkel, A., *Mengenlehre und Logik*, Duncker & Humblot, Berlin, 1959; 1968[2]

Fraenkel, A., *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, «Mathematische Zeitschrift», vol. 22, 1925, pp. 250-73

Fraenkel, A., *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*, «Mathematische Annalen», vol. 86, 1922, pp. 230-7

Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., *Foundations of Set Theory*, North Holland, Amsterdam, 1958; 1973[2]

Fraassen, B. van, *Quantum Mechanics: An Empiricist View*, Oxford University Press, Oxford, 1991

Frege, G., *Begriffsschrift*, Nebert, Halle, 1879

Frege, G., *Grundgesetze der Arithmetik*, 2 voll., Hermann Pohle, Jena, 1893-1903

Frege, G., *Grundlagen der Arithmetik*, Koebner, Breslau, 1884

Frege, G., *Über Sinn und Bedeutung*, «Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik», vol. 100/1 (Neue folge), 1892, pp. 25-50

Frege, G., *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, G. Gabriel *et alii* (eds.), Meiner, Hamburg, 1976

French, S., Krause, D., *Identity in Physics*, Oxford University Press, Oxford, 2006

Gabbay, D., Guenthner, F., (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, 16 voll., Springer, Dordrecht, 2001-2011

Gabbay, D., Wansing, H., (eds.), *What is Negation?*, Kluwer, Dordrecht, 1999

Gabbay, D., Woods, J., (eds.), *Handbook of History of Logic*, 11 voll., North Holland, Amsterdam, 2004-2012

Gaifman, H., *Naming and Diagonalization, from Cantor to Gödel to Kleene*, «Logic Journal of the IGPL», vol. 14, n. 5, 2006, pp. 709-28

Galvan, S., *Logiche intensionali*, Franco Angeli, Milano, 1991

Galvan, S., *Non contraddizione e Terzo escluso*, Franco Angeli, Milano, 1997

Galvan, S., *Sistemi dell'aritmetica. Da Q a PA*, ISU Editrice, Milano, 2007

Gandy, O., *On the Axiom of Extensionality, I & II*; *Part I*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 21, n. 1, 1956, pp. 36-48; *Part II*, *Ibidem*, vol. 24, n. 4, 1959, pp. 287-300

Garavaso, P., *Filosofia della matematica*, Guerini e Associati, Milano, 1998

Gentzen, G., *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*, «Mathematische Annalen», vol. 112, 1936, pp. 493-565

Gentzen, G., *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, a cura di M. E. Szabó, North Holland, Amsterdam, 1969

Gerla, G., *Tentativi di fondare la matematica*, Gruppo Editoriale L'Espresso, Roma, 2010

Geymonat, L., (ed.), *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, 6 voll. in 11 tomi, Garzanti, Milano, 1970-1976

Geymonat, L., *Storia e filosofia dell'Analisi infinitesimale*, Levrotto & Bella, Torino, 1947; Bollati Boringhieri, Torino, 2008

Gillispie, C. *et alii*, (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*, 16 voll., Scribner's Sons, New York, 1981

Gilson, E., *La philosophie au moyen âge*, Payot, Paris, 1952 ; trad. it., *La filosofia nel Medioevo*, a cura di M. A. Del Torre, La Nuova Italia, Firenze, 1973

Giusti, E., *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Bollati Boringhieri, Torino, 1999

Gödel, K., *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, «Monatshefte für Mathematik und Physik», vol. 37, 1930, pp. 349-60

Gödel, K., *Über formal unentscheidbare Sätze der „Principia Mathematica" und verwandter Systeme I*, «Monatshefte für Mathematik und Physik», vol. 38, 1931, pp. 173-98

Gödel, K., *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis*, «Proceedings of the National Academy of Sciences», vol. 24, 1938, pp. 556-7

Gödel, K., *Collected Works*, 5 voll., a cura di S. Feferman, J. W, Dawson, Jr., W. Goldfarb, C. Parsons, W. Sieg, Clarendon Press, Oxford, 1986-2003; trad. it., *Opere*, a cura di E. Ballo *et alii,* 5 voll., Bollati Boringhieri, Torino, 1999-2009

Goldrei, D., *Propositional and Predicate Calculus*, Springer, New York, 2005

Goodstein, R. L., *Recursive Number Theory*, North Holland, Amsterdam, 1957

Grana, N., *Contraddizione e incompletezza*, Liguori, Napoli, 1990

Grana, N., *Dalla logica classica alla logica non-classica*, L'Orientale, Napoli, 2007

Grana, N., *Dalla ontologia alla logica. Una ricerca filosofica*, L'Orientale, Napoli, 2004

Grana, N., *Epistemologia della matematica*, L'Orientale, Napoli, 2001

Grana, N., *Ermeneutica della matematica*, L'Orientale, Napoli, 2006

Grana, N., *Filosofia della logica*, Loffredo, Napoli, 1983

Grana, N., *Logica deontica paraconsistente*, Liguori, Napoli, 1990

Grana, N., *Logica paraconsistente*, Loffredo, Napoli, 1983

Grana, N., *Sulla teoria delle valutazioni di N. C. A. da Costa*, Liguori, Napoli, 1990

Grana, N., *Uno sguardo sull'abisso*, L'Orientale, Napoli, 2013

Grant, J., Sbrahmanian, V., *Applications of Paraconsistency in Data and Knowledge Basis*, «Synthese», vol. 125, n. 1/2, 2000, pp. 121-32

Grattan-Guinness, I., *The Search for Mathematical Roots, 1870-1940*, Princeton University Press, Princeton, 2000

Griss, G. F. C., *Sur la négation (dans les mathématiques et la logique)*, «Synthese», vol. 7, n. 1/2, 1948/49, pp. 71-4

Hallett, M., *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Oxford University Press, Oxford, 1984

Hailperin, T., *Quantification Theory and Empty Individual-Domains*, «Journal of Symboli Logic», vol. 19, n. 1, 1954, pp. 197-200

Hailperin, T., *Remarks on Identity and Description in First-Order Axiom Systems*, «Journal of Symboli Logic», vol. 18, n. 3, 1953, pp. 14-20

Halmos, P. R., Givant, S., *Logic as Algebra*, MAA, Washington, 1998

Hartogs, F., *Über das Problem der Wohlordnung*, «Mathematische Annalen», vol. 76, 1915, pp. 436-43

Hasenjaeger, G., *Eine Bemerkung zu Henkin's Beweis für die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls der Ersten Stufe*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 18, n. 1, 1953, pp. 42-8

Hatcher, W. S., *Foundations of Mathematics*, Saunders, Philadelphia, 1968; trad. it., *Fondamenti della matematica*, a cura di M. L. Dalla Chiara, Boringhieri, Torino, 1973

Hausdorff, F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Von Veit, Leipzig, 1914

Heijenoort, J. van, (ed.), *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge, 1967

Henkin, L., (ed.), *Proceedings of the Tarski Symposium*, AMS, Providence, 1974

Henkin, L., *The Completeness of First-Order Functional Calculus*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 14, n. 3, 1949, pp. 159-66

Henkin, L., *Completeness in the Theory of Types*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 15, n. 2, 1950, pp. 81-91

Henkin, L., *The Discovery of My Completeness Proofs*, «Bulletin of Symbolic Logic», vol. 2, n. 2, 1996, pp. 127-58

Herbrand, J., *Logical Writings*, a cura di W. Goldfarb, Reidel, Dordrecht, 1971

Hermes, H., *Zur Theorie der aussagenlogischen Matrizen*, «Mathematische Zeitschriften», vol. 53, 1951, pp. 414-18

Hermes, H., Scholz, H., *Mathematische Logik*, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band 1, 1. Teil, Heft 1, Teil I., Teubner, Leipzig, 1952

Hermes, H., *Einführung in die mathematische Logik*, Teubner, Stuttgart, 1963

Herrlich, H., *Axiom of Choice*, Springer, Berlin-Heidelberg, 2006

Hessenberg, G., *Grundbegriffe der Mengenlehre*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1906

Heyting, A., *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, I & II*; *Part I*, «*Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*», 1930, pp. 42-71; *Part II*, *Ibidem*, pp. 158-169

Heyting, A., *Intuitionism. An Introduction*, North Holland, Amsterdam, 1956

Heyting, A., *Sur la logique intuitionniste*, «Académie Royale de Belgique. Bulletin de la Classe des Sciences», vol. 16, 1930, pp. 957-63

Hilbert, D., *Axiomatisches Denken*, «Mathematische Annalen», vol. 78, 1918, pp. 405-15

Hilbert, D., *Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre*, «Mathematische Annalen», vol. 104, 1931, pp. 485-94

Hilbert, D., *Die logischen Grundlagen der Mathematik*, «Mathematische Annalen», vol. 88, 1923, pp. 151-65

Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1899; trad. it., *Fondamenti della geometria; con i supplementi di Paul Bernays*, a cura di P. Canetta, Feltrinelli, Milano, 1970; Franco Angeli, Milano, 2009

Hilbert, D., *Gesammelte Abhandlungen*, 3 voll., Springer, Berlin, 1932-1935

Hilbert, D., *Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung*, «Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität», vol. 1, 1922, pp. 157-77

Hilbert, D., *Probleme der Grundlegung der Mathematik*, «Mathematische Annalen», vol. 102, 1929, pp. 1-9

Hilbert, D., *Über das Unendliche*, «Mathematische Annalen», vol. 95, 1926, pp. 161-90

Hilbert, D., *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*, in *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongress in Heidelberg vom 8. Bis 17. August 1904*, Teubner, Leipzig, 1905, pp. 174-85

Hilbert, D., *Über den Zahlbegriff*, «Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung», vol. 8, 1900, pp. 180-4

Hilbert, D., Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik*, 2 voll., Springer, Berlin, 1934-1939; 1968-1970[2]

Hinman, P., *Foundamentals of Mathematical Logic*, A K Peters, Wellesley, 2005

Hintikka, J., (ed.), *Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1969

Hintikka, J., *Vicious Circle Principle and the Paradoxes*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 22, n. 3, 1957, pp. 245-9

Husik, I., *Aristotle on the Law of Contradiction and the Basis of the Syllogism*, «Mind», vol. 15, n. 58, 1906, pp. 215-22

Hutton, R., *Number Systems*, Intext, Scranton-Toronto-London, 1971

Jacquette, D., (ed.), *A Companion to Philosophical Logic*, Blackwell, Oxford, 2002

Jacquette, D., (ed.), *Philosophy of Logic*, North Holland, Amsterdam, 2006

Jacquette, D., (ed.), *Philosophy of logic. An Anthology*, Blackwell, Oxford, 2002

Jané, I., *The Role of the Absolute Infinite in Cantor's Conception of Set*, «Erkenntnis», vol. 42, 1995, pp. 375-402

Jaśkowski, S., *Investigations into the System of Intuitionistic Logic*, «Studia Logica», vol. 34, n. 2, 1975, pp. 117-20

Jaśkowski, S., *On the Rules of Suppositions in Formal Logic*, «Studia Logica», vol. 1, n. 1, 1934, pp. 5-32

Jaśkowski, S., *Rachunek zdań dla sustemóv dedukcyjnych sprezecznych*, «Studia Societatis Scientiarum Torunensis», Sectio A, vol. 1, n. 5, 1948; trad. ingl., *Propositional Calculus for Contradictory Deductive Systems*, «Studia Logica», 1969, vol. 24, 1969, p. 145

Jech, T., *Lectures in Set Theory*, Springer, Heidelberg, 1971

Jech, T., *Set Theory*, Springer, Berlin, 1978; 2003[3]

Jech, T., *The Axiom of Choice*, North Holland, Amsterdam, 1973

Jech, T., Hrbacek, K., *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekker, New York, rist. 1999

Johansson, I., *Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus*, «Compositio Mathematica», vol. 4, 1937, pp. 119-136

Kalmár, L., *Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer Einzigen, Binären, Funktionsvariablen*, «Compositio Mathematica», vol. 4, 1937, pp. 137-44

Kanamori, A., *The Higher Infinte*, Springer, Heidelberg, 1994; 2003[2]

Kanamori, A., Foreman, M., (eds.), *Handbook of Set Theory*, 3 voll., Springer, Dordrecht, 2010

Karpenko, A., *Jaśkowski's Criterion and Three-Valued Paraconsistent Logics*, «Logic and Logical Philosophy», vol. 7, 1999, pp. 81-6

Karpenko, A., *Paraconsistent Structure Inside of Many-Valued Logic*, «Synthese», vol. 66, n. 1, 1986, pp. 63-9

Kaye, R., *The Mathematics of Logic*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007

Kelley, J. L., *General Topology*, Van Nostrand, Toronto-Princeton-London, 1955; Springer, New York, 1975

Kemeny, J., *A New Approach to Semantic*, *I & II*; *Part I*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 21, n. 1, 1956, pp. 1-27; *Part II*, *Ibidem*, vol. 21, n. 2, 1956, pp. 149-61

Kemeny, J. G., *Models of Logical Systems*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 13, n. 1, 1948, pp. 16-30

Kleene Cole, S., *Introduction to Metamathematics*, North Holland, Amsterdam, 1952

Kleene Cole, S., *Mathematical Logic*, John Wiley & Sons, New York, 1967; Dover, New York, 2002

Kleene Cole, S., *On Notation for Ordinal Numbers*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 3, n. 4, 1938, pp. 150-5

Kleene Cole, S., Vesley, R. E., (eds.), *The Foundations of Intuitionistic Mathematics*, North Holland, Amsterdam, 1965

Kline, M., *Mathematics in Western Culture*, Oxford University Press, New York, 1953

Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, 3 voll., Oxford Uniersity Press, New York, 1972

Kneale, W., Kneale, M., *The Development of Logic*, Clarendon, Oxford, 1962; trad. it., *Storia della logica*, a cura di A. Conte, Einaudi, Torino, 1972

Kneebone, G. T., *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics*, Van Nostrand, London, 1963; Dover, New York, 2001

Kolmogorov, A. N., *Zur Deutung der intuitionistischen Logik*, «Mathematische Zeitschrift», vol. 35, n. 1, 1932, pp. 58-65

Kossak, R., (ed.), *Nonstandard Models of Arithmetic and Set Theory*, AMS, Providence, 2004

Kotas, J., *Discussive Sentential Calculus of Jaśkowski*, «Studia Logica», vol. 34, n. 1/2, 1984, pp. 149-68

Kotas, J., Da Costa, N. C. A., *Some Problems on Logical Matrices and Valorizations*, in Arruda, A., Da Costa, N. C. A., Sette, A., (eds.), *Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic*, Sociedade Brasileira de Lógica, 1980, pp. 131-46

Kotas, J., Da Costa, N. C. A., *A New Formulation of Discussive Logic*, «Studia Logica», vol. 38, 1979, pp. 429-45

Krause, D., *On a Quasi Set Theory*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», vol. 33, n. 3, 1992, pp. 402-11

Kreisel, G., *A Survey of Proof Theory*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 33, 1968, pp. 321-88

Kreisel, G., *Hilbert's Programme*, «Dialectica», vol. 12, 1958, pp. 346-72

Kreisel, G., Krivine, J., *Elements of Mathematical Logic*, North Holland, Amsterdam, 1967; 1971[2]

Kripke, S., *Admissible Ordinals and the Analytic Hierarchy*, «The Journal of Symbolic Logic», vol. 29, n. 3, 1964, p. 162

Kripke, S., *Outline of a Theory of Truth*, «The Journal of Philosophy», vol. 72, n. 19, 1975, pp. 690-716

Krivine, J., *Introduction to Axiomatic Set Theory*, Reidel, Dordrecht, 1971

Kunen, K., *Set Theory*, North Holland, Amsterdam, 1980

Kunen, K., *The Foundations of Mathematics*, College Publications, London, 2009

Kunen, K., Tall, F., *The Real Line in Elementary Submodels of Set Theory*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 65, n. 2, 2000, pp. 683-91

Kuratowski, K., *Sur la notion d'ordre dans la théorie des ensembles*, «Fundamenta Mathematica», vol. 2, 1921, pp. 161-71

Kuratowski, K., Mostowski, A., *Set Theory*, North Holland, Amsterdam, 1968

Kuyk, W., *Complementarity in Mathematics*, Reidel, Dordrecht-Boston, 1977; trad. it., *Il discreto e il Continuo. Complementarità in matematica*, a cura di S. Panattoni, Boringhieri, Torino, 1982

Ladrière, J., *Les limitations internes des formalismes*, Gauthier-Villars, Paris, 1957

Lakatos, I., (ed.), *Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science, London, 1965*, 3 voll., North Holland, Amsterdam, 1967-1968

Landau, E., *Grundlagen der Analysis*, Akademische Verlagsesellschaft, Leipzig, 1930; Chelsea Publishing, New York, 1948

Lane, R., *Peirce's "Entanglement" with the Principles of Excluded Middle and Contradiction*, «Transactions of the Charles S. Peirce Society», vol. 33, n. 3, 1997, pp. 680-703

Langford, C., *On the Paradoxes of the Type of the Epimenides*, «Mind», vol. 56, n. 224, 1947, p. 350

Langford, C., *The Paradoxes*, «The Journal of Philosophy», vol. 47, n. 26, 1950, pp. 777-8

Leibniz, G., *Die Philosophischen Schriften*, 7 voll., cura di C. I. Gerhardt, Weidmann, Berlin, 1880

Lévy, A., *Basic Set Theory*, Springer, New York, 1979; Dover, New York, 2002

Lévy, A., *Principles of Reflection in Axiomatic Set Theory*, «Fundamenta Mathematicae», vol. 49, 1960, pp. 1-10

Lévy, A., *The Fraenkel-Mostowski Method for Independence Proofs in Set Theory*, in Addison, J., Henkin, L., Tarski, A., *The Theory of Models : Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley*, North Holland, Amsterdam, 1965, pp. 221-8

Lévy, A., *The Interdependence of Certain Consequences of the Axiom of Choice*, «Fundamenta Mathematica», vol. 54, 1964, pp. 135-57

Lewin, R., Mikenberg, I., Schwarze, M., *Algebraization of Paraconsistent Logic* P^1, «Journal of Non-Classical Logic», vol. 7, n. 1/2, 1990, pp. 145-54

Lewin, R., Mikenberg, I., Schwarze, M., C_1 *is not Algebraizable*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», vol. 32, n. 4, 1991, pp. 609-11

Libert, T., *Models for a Paraconsistent Set Theory*, «Journal of Applied Logic», vol. 3, n. 1, 2005, pp. 15-41

Link, G., (ed.), *One Hundred Years of Russell's Paradox*, De Gruyter, New York, 2004

Lipschutz, S., *Theory and Problems of Finite Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1966

Lolli, G., *Categorie, universi e principi di riflessione*, Boringhieri, Torino, 1977

Lolli, G., *Dagli insiemi ai numeri*, Bollati Boringhieri, Torino, 1994

Lolli, G., *Filosofia della matematica*, Il Mulino, Bologna, 2002

Lolli, G., *La guerra dei trent'anni*, ETS, Pisa, 2011

Lolli, G., *Lezioni di logica matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, 1978

Lolli, G., *Storia e filosofia della teoria degli insiemi*, "http://homepage.sns.it/lolli/dispense08.htm"

Lolli, G., *Teoria assiomatica degli insiemi*, Boringhieri, Torino, 1974

Lombardo Radice, L., *L'infinito*, Editori Riuniti, Roma, 1981; 1983[3]

Loparić, A., *Une étude sémantique de quelques calculs propositionnels*, «Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris», vol. 284, 1977, pp. 835-8

Loparić, A., Alves, H., *The Semantics of the Systems C_n of Da Costa*, in Arruda, A., Da Costa, N. C. A., Sette, A., (eds.), *Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic*, Sociedade Brasileira de Lógica, 1980, pp.161-72

Löwenheim, L., *Über Möglichkeiten im Relativkalkül*, «Mathematische Annalen», vol. 76, 1915, pp. 447-70

Łukasiewicz, J., *O logice trójwartościowej*, «Ruch filozoficzny», vol. 5, 1920, pp. 170-1; trad. ingl., *On Three-Valued Logic*, in Łukasiewicz, J., *Selected Works*, a cura di L. Borkowski, North Holland, Amsterdam, 1970, pp. 87-8

Łukasiewicz, J., *Selected Works*, a cura di L. Borkowski, North Holland, Amsterdam, 1970

Łukasiewicz, J., *O zasadzie sprzecznosci u Arystotelesa*, Polska Akademia Umiejętności, Kraków, 1910; trad. fr., *Du principe de contradiction chez Aristote*, a cura di D. Sikora, R. Pouivet, L'éclat, Paris, 2000

Łukasiewicz, J., *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenklküls*, «Comptes Rendus Séances Société des Sciences et Lettres Varsovie. Cl. III», vol. 23, 1930, pp. 51-77

Łukasiewicz, J., *Zur Geschichte der Aussagenlogik*, «Erkenntnis», vol. 5, 1935, pp. 111-31

Łukasiewicz, J., Anscombe, E., Popper, K., *Symposium: The Principle of Individuation*, «Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volumes», vol. 27, 1953, pp. 69-120

Łukasiewicz, J., Tarski, A., *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*, «Comptes Rendus Séances Société des Sciences et Lettres Varsovie. Cl. III», vol. 23, 1930, pp. 30-50

Machover, M., *Set Theory, Logic and Their Limitations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996

Magnani, L., Gennari, R., *Manuale di logica: logica classica e del senso comune*, Guerini Scientifica, Milano, 1997

Makinson, D., *Topics in Modern Logic*, Metheun, London, 1973

Malatesta, M., *Classical Logic with Indeterminate Sentences*, «Metalogicon», vol. 22, n. 2, 2009, pp. 107-22

Malatesta, M., *Dialettica e logica formale*, Liguori, Napoli, 1982

Malatesta, M., *Identity and Individual Definite Descriptions: is the Identity a Relation?*, «Metalogicon», vol. 4, n. 2, 1991, pp. 89-102

Malatesta, M., *La logica primaria*, LER, Roma-Napoli, 1988

Malatesta, M., *Logica pragmatica transculturale, I*, Nova Millennium Romae, Roma, 2006

Malatesta, M., *Logistica e filosofia, vol. 1*, Libreria Scientifica Editrice, Napoli, 1974

Malatesta, M., *Logistica, vol. 2. Le tautologie. L'interdefinibilità dei funtori*, LER, Roma-Napoli, 1978

Malatesta, M., *On the Unique Formulation of the Principles of Identity, Non-Contradiction and Excluded Middle, I & II*; *Part I*, «Metalogicon», vol. 3, n. 2, 1990, pp. 65-84; *Part II*, vol. 4, n. 1, 1991, pp. 1-33

Malinowski, *Many-Valued Logics*, Oxford University Press, Oxford, 1993

Manin, Y., *A Course in Mathematical Logic*, Spriger, New York-Heidelberg-Berlin, 1977

Marconi, D., *A Decision-Method for the Calculus* C_1, in Arruda, A., Da Costa, N. C. A., Sette, A., (eds.), *Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic*, Sociedade Brasileira de Lógica, 1980, pp. 211-23

Marconi, D., (ed.), *La formalizzazione della dialettica. Hegel, Marx e la logica contemporanea*, Rosenberg & Sellier, Torino, 1979

Mariani, M., Moriconi, E., *Coerenza e completezza delle teorie elementari*, ETS, Pisa, 1984

Mates, B., *Elementary Logic*, Oxford University Press, New York, rist. 1972

McCall, S., *Polish Logic 1920-1939*, Oxford University Press, New York, 1967

Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, Van Nostrand, Princeton, 1964; Chapman & Hall, London, 1997[4]

Mendelson, E., *Number Systems and the Foundations of Analysis*, Krieger, Malabar, 1973; Dover, New York, 2008

Mendelson, E., *The Axiom of Fundierung and the Axiom of Choice*, «Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung», vol. 4, 1958, pp. 67-70

Mill, J. S., *Collected Works of John Stuart Mill*, 8 voll., a cura di J. M. Robson, University of Toronto Press, Toronto, 1973

Mirimanoff, D., *Les Antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles*, «Enseignement Mathématique», vol. 19, 1917, pp. 37-52

Mirimanoff, D., *Remarques sur la théorie des ensembles et les antinomies cantoriennes, I & II*; *Part I*, «Enseignement Mathématique», vol. 19, 1917, pp. 209-17 ; *Part II*, *Ibidem*, vol. 21, 1920, pp. 29-52

Monk, D., *Introduction to Set Theory*, McGraw-Hill, New York, 1969

Monk, D., *Mathematical Logic*, Springer, New York-Heidelerg-Berlin, 1976

Montague, R., *Fraenkel's Addition to the Axioms of Zermelo*, in Bar-Hillel, Y., Poznanski, E., Rabin, M., Robinson, A., (eds.), *Essays on the Foundations of Mathematics*, Magnes, Jerusalem, 1961, pp. 91-114

Montague, R., *On the Paradox of Grounded Classes*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 20, n. 2, 1955, p. 140

Montague, R., Henkin, L., *On the Definition of "Formal Deduction"*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 21, n. 2, 1956, pp. 129-36

Montague, R., Vaught, R., *Natural Models of Set Theory*, «Fundamenta Mathematicae», vol. 47, 1959, pp. 219-42

Moore, G., *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence*, Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1982

Moriconi, E., *La teoria della dimostrazione di Hilbert*, Bibliopolis, Napoli, 1988

Moriconi, E., Bellotti, L., Tesconi, L., *Computabilità*, Carocci, Roma, 2001

Moro, A., *Breve storia del verbo essere*, Adelphi, Milano, 2010

Mortensen, C., *Every Quotient Algebra for C_1 is Trivial*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», vol. 21, n. 4, 1980, pp. 694-700

Mortensen, C., *Inconsistent Mathematics*, Kluwer, Dordrecht, 1995

Mostowski, A., *Constructible Sets with Applications*, North Holland, Amsterdam, 1969

Mostowski, A., *Foundational Studies. Selected Works*, 2 voll., a cura di K. Kuratowski *et alii*, North Holland, Amsterdam, 1979

Mostowski, A., *Über die Unabhängigkeit des Wohlordungssatzes von Ordnungsprinzip*, «Fundamenta Mathematicae», vol. 32, 1939, pp. 201-52

Müller, G., (ed.), *Sets and Classes. On the Work by Paul Bernays*, North Holland, Amsterdam, 1976

Myhill, J., *Towards a Consistent Set Theory*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 16, n. 2, 1951, pp. 130-6

Nagel, E., Suppes, P., Tarski, A., (eds.), *Logic, methodology, and philosophy of science, Proceedings of the 1960 International Congress*, Stanford University Press, Stanford, 1962

Neumann, J. von, *Collected Works*, 6 voll., a cura di A. H. Taub, Pergamon, Oxford-New York-Toronto-Sydney-Paris-Frankfurt, 1961

Neumann, J. von, *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», vol. 154, 1925, pp. 219-40; *Corrections*, *Ibidem*, vol. 155, 1926, p. 128

Neumann, J. von, *Über die Definition durch transfinite Induktion undverwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre*, «Mathematische Annalen», vol. 99, 1928, pp. 373-91

Neumann, J. von, *Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», vol. 160, 1929, pp. 227-41

Neumann, J. von, *Zur Einführung der transfiniten Zahlen*, «Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio scientiarum mathematicarum», vol. 1, 1923, pp. 199-208

Neumann, J. von, *Zur Hilbertschen Beweistheorie*, «Mathematische Zeitschrift», vol. 26, 1927, pp. 1-46

Nidditch, P.H., *The Development of Mathematical Logic*, Routledge & Kegan Paul, London, 1962

Noto, A., *Le logiche non classiche*, Bulzoni, Roma, 1975

Oberschelp, A., *Allgemeine Mengenlehre*, Mannheim, Leipzig, 1994

Oberschelp, A., *Eigentliche Klassen als Urelemente in der Mengenlehre*, «Mathematische Annalen», vol. 157, 1969, pp. 234-60

Oberschelp, A., *On Pairs and Tuples*, «Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik», vol. 37, 1991, pp. 55-6

Odifreddi, P. G., *Classical Recursion Theory*, 2 voll., North Holland, Amsterdam, 1989-1999

Palladino, D., *Logica e teorie formalizzate*, Carocci, Roma, 2004

Palladino, D., Palladino, C., *Logiche non classiche*, Carocci, Roma, 2007

Panza, M., *Nombres: éléments de mathématiques pour philosophes*, Diderot, Lyon, 1999; ENS, Lyon, 2007[2]

Panza, M., Sereni, A., *Il problema di Platone*, Carocci, Roma, 2010

Pasquinelli, A., (ed.), *Neoempirismo*, UTET, Torino, 1969

Peano, G., *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Bocca, Torino, 1889

Peano, G., *Formulario Mathematico*, a cura di U. Cassina, Cremonese Editore, Roma, ristampa anastatica 1960

Peano, G., *Opere scelte*, 3 voll., a cura di U. Cassina, Cremonese, Roma, 1957-9

Peano G., *Super theorema de Cantor-Bernstein et additione*, «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», vol. 21, 1906, pp. 360-366

Pedeferri, A., (ed.), *Frege e il Neologicismo*, Franco Angeli, Milano, 2005

Peirce, C. S., *Collected Papers*, 8 voll., a cura di C. Hartshorne, P. Weiss, A. W. Burks, Harvard University Press, Cambridge, 1965-7

Peña, L., *Contradiction et vérité*, PhD Thesis, Université de Liège, 1979

Pincus, D., *ZF Consistency Results by Fraenkel-Mostowski Methods*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 37, n. 4, 1972, pp. 721-43

Platone, *Fedone*, a cura di B. Centrone, Laterza, Roma-Bari, 2000; 2003[3]

Platone, *Filebo*, a cura di M. Migliori, Bompiani, Milano, 2000

Platone, *Parmenide*, a cura di F. Ferrari, BUR, Milano, 2004

Platone, *Sofista*, a cura di F. Fronterotta, BUR, Milano, 2007

Poincaré, H., *Les mathématique et la logique*, «Revue de métaphysique et de morale», vol. 14, 1906, pp. 294-317

Poincaré, H., *Œuvres*, 10 voll., a cura di J. Gabay, Gauthier-Villars, Paris, 1916-1956

Popper, K., *What is Dialectic?*, «Mind», New Series, vol. 49, n.196, 1940, pp. 403-26

Posa, D., De Iaco, S., Palma, M., *Elementi di calcolo combinatorio e teoria della probabilità*, Giappichelli, Torino, 2009

Post, L., *Introduction to a General Theory of Elementary Propositions*, «American Journal of Mathematics», vol.43, 1921, pp. 163-85

Post, L., *Solvability, Provability, Definability : The Collected Works of Emil L. Post*, a cura di M. Davis, Birkhäuser, Boston, 1994

Post, L., *The Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic*, Princeton University Press, Princeton, 1941

Potter, M., *Reason's Nearest Kin. Philosophies of Arithmetic from Kant to Carnap*, Oxford University Press, Oxford, 2000

Potter, M., *Set Theory and Its Philosophy*, Oxford University Press, Oxford, 2004

Prantl, K., *Geschichte der Logik im Abendlande*, 4 voll., Hirzel, Leipzig, 1861

Presburger, M., *Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt*, in *Comptes-rendus du I Congrés des Mathématiciens des Pays Slaves*, Varsovie 1929, pp. 92-101

Priest, G., *An Introduction to Non-Classical Logic*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001; 2008[2]

Priest, G., *In Contradiction*, Oxford University Press, Oxford, 2006

Priest, G., (ed.), *The Law of Non-Contradiction*, Oxford University Press, Oxford, 2006

Priest, G., *The Logic of Paradox*, «Journal of Philosophical Logic», vol. 8, n. 1, 1979, pp. 219-41

Priest, G., *The Structure of the Paradoxes of Self-Reference*, «Mind», vol. 103, n. 409, 1994, pp. 25-34

Priest, G., *What is so Bad about Contradictions?*, «Journal of Philosophy», vol. 94, 1998, pp. 410-26

Priest, G., Routley, R., Norman, J., (eds.), *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*, Philosophia, München, 1989

Quine, W., *Completeness of the Propositional Calculus*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 3, n. 1, 1938, pp. 37-40

Quine, W., *Elementary Logic*, Harvard University Press, Cambridge, 1941

Quine, W., *From a Logical Point of View*, Harvard University Press, Cambridge, 1953; 1964^2

Quine, W., *Mathematical Logic*, Harvard University Press, Cambridge,1940; 1951^2

Quine, W., *Methods of Logic*, Holt, New York, 1955

Quine, W., *New Foundations for Mathematical Logic*, «American Mathematical Monthly», vol. 44, 1937, pp. 70-80

Quine, W., *On Cantor's Theorem*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 2, n. 3, 1937, pp. 120-4

Quine, W., *On Existence Conditions for Elements and Classes*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 7, n. 4, 1942, pp. 157-9

Quine, W., *On the Theory of Types*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 3, n. 4, 1938, pp. 125-39

Quine, W., *Philosophy of Logic*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1970; Harvard University Press, Cambridge, 1986^2

Quine, W., *Quantification and Empty Domain*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 19, n. 3, 1954, pp. 177-9

Quine, W., *Set-Theoretic Foundations for Logic*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 1, n. 2, 1936, pp. 45-57

Quine, W., *Set Theory and Its Logic*, Harvard University Press, Cambridge, 1963

Quine, W., *The Way of Paradoxes and Other Essays*, Random House, New York, 1966

Quine, W., *Towards a Calculus of Concepts*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 1, n. 1, 1936, pp. 2-25

Quine, W., *Unification of the Universes in Set Theory*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 21, n. 3, 1956, pp. 267-79

Rahman, S., Symons, J., Gabbay, D., Bendegen, J.-P. van, (eds.), *Logic, Epistemology, and the Unity of Science*, Kluwer, Dordrecht, 2004

Ramsey, F. P., *The Foundations of Mathematics*, «Proceedings of the London Mathematical Society», serie 2, vol. 25, parte 5, 1926, pp. 338-384

Raja, N., *A Negation-free of Cantor's Theorem*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», vol. 46, n. 2, 2005, pp. 231-33

Rasiowa, H., *An Algebraic Approach to Non-Classical Logics*, North Holland, Amsterdam, 1974

Rasiowa, H., Sikorski, R., *The Mathematics of Metamathemtics*, PWN, Warszawa, 1963

Reichenbach, H., *Elements of Symbolic Logic*, McMillan, New York, 1948

Resnik, M., *Frege and the Philosophy of Mathematics*, Cornell University Press, Ithaca, 1980

Restall, G., *On Logics without Contradiction*, PhD. Thesis, University of Queensland, 1994

Rieger, L., *A Contribution to Gödel's Axiomatic Set Theory, I-III*; *Part I*, «Czechoslovak Mathematical Journal», vol. 7, n. 3, 1957, pp. 323-57; *Part II*, *Ibidem*, vol. 9, n. 1, 1959, pp. 1-49; *Part III*, *Ibidem*, vol. 13, n. 1, 1963, pp. 51-88

Rivetti Barbò, F., *L'antinomia del mentitore nel pensiero contemporaneo*, Vita e Pensiero, Milano, 1961

Robbin, J., *Mathematical Logic. A First Course*, Benjamin, New York, 1969; Dover, New York, 2006

Robinson, A., *Complete Theories*, North Holland, Amsterdam, 1956

Robinson, A., *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra*, trad. it, *Introduzione alla teoria dei modelli e alla metamatematica dell'algebra*, a cura di S. Bozzi, Boringhieri, Torino, 1975

Robinson, A., *Non Standard Analysis*, North Holland, Amsterdam, 1966

Robinson, A., *On the Independence of the Axioms of Definiteness (Axiome der Bestimmtheit)*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 4, n. 2, 1939, pp. 69-72

Robinson, R., *The Theory of Classes: a Modification of von Neumann's System*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 2, n. 1, 1937, pp. 29-36

Robinson, R., *An Essentially Undecidable Axiom System*, in Graves, L. *et alii*, (eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, vol. 1, AMS, Providence, 1952, pp. 749-50

Rosers, H., Jr., *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill, New Yrok, 1967

Rogers, R., *Mathematical Logic and Formalized Theories*, North Holland, Amsterdam, 1971

Rosenbloom, P., *The Elements of Mathematical Logic*, Dover, New York, 1950

Rosser, J. B., *An Informal Exposition of Proofs of Gödel's Theorems and Church's Theorem*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 4, n. 2, 1939, pp. 53-60

Rosser, J. B., *Extensions of Some Theorems of Gödel and Church*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 1, n. 3, 1936, pp. 87-91

Rosser, J. B., *Logic for Mathematicians*, McGraw-Hill, New York, 1953; Dover, New York, 2009

Rosser, J. B., *The Axiom of Infinity in Quine's New Foundations*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 17, n. 4, 1952, pp. 238-42

Rosser, J. B., *The Paradox of Burali-Forti*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 7, n. 1, 1942, pp. 1-17

Rosser, J. B., Wang, H., *Non-Standard Models for Formal Logics*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 15, n. 2, 1950, pp. 113-29

Rosser, J. B., Wang, H., *The Relative Strength of Zermelo's Set Theory and Quine's New Foundations*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 37, n. 4, 1972, pp. 721-43

Rossi, P., (ed.), *Storia della scienza moderna e contemporanea*, 3 voll. in 6 tomi, UTET, Torino, 1988; TEA, Milano, 2000

Rubin, J., *Set Theory for the Mathematician*, Holden-Day, San Francisco, 1967

Rubin H., Rubin. J., *Equivalents of the Axiom of Choice, I & II*, North Holland, Amsterdam, 1963; 1970[2]; 1985

Rucker, R., *Infinity and the Mind*, Birkhäuser, Boston,1982

Runes, D., (ed.), *The Dictionary of Philosophy*, Owen, London, 1970

Russell, B., *Introduction to Mathematical Philosophy*, Allen & Unwin-MacMillan, London, 1919; 1920[2]

Russell, B., *Mathematical Logic as Based on the Theory of Types*, «American Journal of Mathematics», vol. 30, n. 3, 1908, pp. 222-62

Russell, B., *On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types*, «Proceedings of the London Mathematical Society», serie 2, vol. 4, 1906, pp. 29-53

Russell, B., *Principles of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1903; Allen & Unwin, London, 1956[2]

Russell, B., Whitehead, A. N., *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge, 1910-1913[1]; 1925-1927[2]

Rybakov, V. V., *Admissibility of Logical Inference Rules*, North Holland, Amsterdam, 1997

Scholz, H., *Geschichte der Logik*, Junker und Dünnhaupt, Berlin, 1931; trad. it., *Storia della logica*, a cura di C. Cellucci, Laterza, Roma-Bari, 1983

Scholz, H., Hasenjaeger, G., *Grundzüge der mathematischen Logik*, Springer Berlin, 1961

Sette, A., *On the Propositional Calculus* P^1, «Mathematica Japonicae», vol. 16, 1973, pp. 173-80

Shapiro, S., *The Lindenbaum Construction and Decidability*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», vol. 29, n. 2, 1988, pp. 208-13

Shaw-Kwei, M., *A Note on the Theory of Quantification*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 17, n. 4, 1952, pp. 243-4

Shaw-Kwei, M., *A Paradox for Many-Valued Systems*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 19, n. 1, 1954, pp. 37-40

Sheffer, H., *A Set of Five Postulates for Boolean Algebras, with Application to Logical Constants*, «Transactions of the American Mathematical Society», n. 14, 1913, pp. 481-8

Shepherdson, J., *Inner Models for Set Theory, I-III*; *Part I*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 16, n. 3, 1951, pp. 161-90; *Part II*, *Ibidem*, vol. 17, n. 4, 1952, pp. 225-374; *Part III*, *Ibidem*, vol. 18, n. 2, 1953, pp. 145-67

Shoenfield, J., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, Boston, 1967; trad. it., *Logica matematica*, a cura di D. Cagnoni, Boringhieri, Torino, 1980

Sierpiński, W., *Hypothèse du Continu*, Chelsea Publishing Company, New York, 1956

Sierpiński, W., *Leçons sur les Nombres Transfinis*, Gauthier-Villars, Parigi, 1928

Sikorski, R., *Boolean Algebra*, Springer, Berlin-Heidelberg, rist. 1969

Skolem, T., *Abstract Set Theory*, Notre Dame University Press, Notre Dame, 1962

Skolem, T., *Einige Bemerkungen zu der Abhandlung von E. Zermelo „Über die Definitheit der Axiomatik“*, «Fundamenta Mathematica», vol. 15, 1930, pp. 337-41

Skolem, T., *Selected Works*, a cura di J. Fenstad, Universitetsforlaget, Oslo, 1970

Skolem, T., *Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktations- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen*, «Videnskapsselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse», n. 3. Skolem, T., Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer

Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen, «Videnskapsselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse», n. 4

Smullyan, R., *Diagonalization and Self-Reference*, Oxford University Press, Oxford, 1994

Smullyan, R., *Gödel's Incompleteness Theorems*, Oxford University Press, Oxford, 1992

Smullyan, R., *Languages in Which Self-Reference is Possible*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 22, n. 1, 1957, pp. 55-67

Smullyan, R., *Recursion Theory for Metamathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1993

Smullyan, R. M., *Theory of Formal Systems*, Princeton University Press, Princeton, 1961

Smullyan, R., Fitting, M., *Set Theory and the Continuum Problem*, Oxford University Press, Oxford, 1996; Dover, New York, 2010

Sobociński, B., *A Note on Certain Set-Theoretical Formulas*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», vol. 6, n. 2, 1965, pp. 157-60

Sobociński, B., *A Note on the Generalized Continuum Hypothesis, I & II*; *Part I*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», vol. 3, n. 4, 1962, pp. 274-8; *Part II*, *Ibidem*, vol. 4, n. 1, 1963, pp. 67-79

Sobociński, B., *A Set-Theoretical Formula Equivalent to the Axiom of Choice*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», vol. 3, n. 3, 1962, pp. 167-9

Sobociński, B., *A Theorem on Hartogs' Alephs*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», vol. 2, n. 4, 1961, pp. 255-8

Specker, E., *The Axiom of Choice in Quine's New Foundations for Mathematical Logic*, «Proceedings of the National Academy of Science», vol. 39, 1953, pp. 972-5

Spector, C., *Recursive Well-Orderings*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 20, n. 2, 1955, pp. 151-63

Suppes, P., *Axiomatic Set Theory*, Van Nostrand, New York, 1960; Dover, New York, 1972

Suppes, P., *Introduction to Logic*, Van Nostrand, New York, 1957

Takeuti, G., Zaring, W., *Introduction to Axiomatic Set Theory*, Springer, Berlino, 1971

Takeuti, G., Zaring, W., *Axiomatic Set Theory*, Springer, Berlino, 1973

Tarski, A., *Collected Papers*, 4 voll., a cura di S. Givant, R. McKenzie, Birkhäuser, Basel, 1986

Tarski, A., *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, «Studia Philosophica», vol. 1, 1936, pp. 261-405

Tarski, A., *Logic, Semantics, Metamathematics*, a cura di J. Woodger, Hackett Publishing Company, Indianapolis, 1983

Tarski, A., *Sur les ensembles finis*, «Fundamenta Mathematicae», vol. 6, 1924, pp. 45-95

Tarski, A., *Über einige fundamentalen Begriffe der Metamathematik*, «Comptes rendus de séances de la Société des Sciences et Lettres de Varsovie (Classe III)», vol. 23, 1930, pp. 22-9

Tarski, A., *Collected Papers*, 4 voll., a cura di S. Givant, R. McKenzie, Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgart, 1986

Tarski, A., Mostowski, A., Robinson, R. M., *Undecidable Theories*, North Holland, Amsterdam, rist. 1971

Thiele, E., *Ein axiomatisches System der Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel*, «Zeitschrift für mathematische Logik», vol. 1, 1955, p. 175

Tiles, M., *The Philosophy of Set Theory*, Basil Blackwell, Oxford, 1989; Dover, New York, 2004

Toffalori, C., Cintioli, P., *Logica matematica*, McGraw-Hill, Milano, 2000

Toffalori, C., Corradini, F., Leonesi, S., Mancini, S., *Teoria della computabilità e della complessità*, McGraw-Hill, Milano, 2005

Torretti, R., *El paraìso de Cantor*, Editorial Universitaria, Santiago de Chile, 1998

Troelstra, A., *Principles of Intuitionism*, Springer, Berlin-Heidelberg, 1969

Turing, A., *Collected Works of A. M. Turing. Mathematical Logic*, a cura di R. Gandy, C. Yates, North Holland, Amsterdam, 2001

Turing, A., *On Computable Numbers, with an Application to Entscheidungsproblem*, «Proceedings of London Mathematical Society», vol. 42, 1937, pp. 230-65; *A Correction*, «Proceedings of London Mathematical Society», vol. 43, 1937, pp. 544-6

Ulam, S., *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, «Fundamenta Mathematicae», vol. 16, 1930, pp. 140-50

Urbas, I., *Paraconsistency and C-Systems of da Costa*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», vol. 30, n. 4, 1989, pp. 583-97

Varzi, A., (ed.), *Metafisica*, Laterza, Roma-Bari, 2008

Vaught, R., *Set Theory. An Introduction*, Birkhäuser, Boston, rist. 1995

Vilenkin, N., *In Search of Infinity*, Birkhäuser, Berlin, 1995

Vieler, H., *Untersuchungen über Unabhängigkeit und Tragweite der Axiome der Mengenlehre in der Axiomatik Zermelos und Fraenkels*, (Dissertation) Kaestner, Göttingen, 1926

Yrjönsuuri, M., *Medieval Formal Logic*, Kluwer, Dordrecht, 2001

Wajsberg, M., *Untersuchungen über den Funktionenkalkül für Unendliche Individuenbereiche*, «Mathematische Annalen», vol. 108, 1933, pp. 218-28

Wang, H., *A Formal System of Logic*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 15, n. 1, 1950, pp. 25-32

Wang, H., *A Logical Journey: from Gödel to Philosophy*, MIT Press, Cambridge (MA), rist. 1997

Wang, H., *A Survey of Mathematical Logic*, North Holland, Amsterdam, 1963

Wang, H., *From Mathematics to Philosophy*, Routledge & Kegan Paul, New York, 1974; trad. it., *Dalla matematica alla filosofia*, a cura di A. Giacomelli, Boringhieri, Torino, 1974

Wang, H., *Logic of Many-Sorted Theories*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 17, n. 2, 1952, pp. 105-16

Wang, H., *On Zermelo's and von Neumann's Axioms for Set Theory*, «Proceedings of the National Academy of Sciences», vol. 35, 1949, pp. 150-5

Wang, H., *Remarks on the Comparison of Axiom Systems*, «Proceedings of the National Academy of Sciences», vol. 36, 1950, pp. 448-53

Wang, H., *Set-Theoretical Basis for Real Numbers*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 15, n. 4, 1950, pp. 241-7

Wang, H., *The Axiomatization of Arithmetic*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 22, n. 2, 1957, pp. 145-58

Wang, H., *The Formalization of Mathematics*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 19, n. 4, 1954, pp. 241-66

Weber, Z., *Transfinite Numbers in Paraconsistent Set Theory*, «Review of Symbolic Logic», vol. 3, n. 1, 2010, pp. 71-92

Weyl, H., *Gesammelte Abhandlungen*, 4 voll., a cura di K. Chandrasekharan, Springer, Berlin, 1968

Weyl, H., *Über die Definition der mathematischen Grundbegriffe*, «Mathematisch-naturwissenschaftliche Blätter», vol. 7, 1910, pp. 93-5; pp. 109-13

Whitehead, A. N., *A Treatise on Universal Algebra with Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1898

Wiener, N., *A Simplification of the Logic of Relations*, «Proceedings of the Cambridge Philosophical Society», vol. 17, 1914, pp. 387-90

Wittgenstein, L., *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, a cura di G. Anscombe, R. Rhees e G. H. von Wright, Oxford 1956; trad. it., *Osservazioni sopra I fondamenti della matematica*, a cura di M. Trinchero, Einaud, Torino, 1971

Wittgenstein, L., *Philosophische Bemerkungen*, a cura di R. Rhees, Frankfurt a. M., 1964; trad. it., *Osservazioni filosofiche*, a cura di M. Rosso, Einaudi, Torino, 1976

Wittgenstein, L., *Logisch-philosophische Abhandlung*, a cura di W. Ostwald, «Annalen der Naturphilosophie», vol. 14, 1921; trad. ingl., *Tractatus Logico-Philosophicus*, a cura di F. P. Ramsey, C. Ogden, London, 1922; trad. it., *Tractatus logico-philosophicus*, a cura di A. Conte, Einaudi, Torino, 1989

Wolf, F., *Number Systems and Their Uses*, Xerox, Waltham-Toronto, 1971

Wójcicki, R., *Theory of Logical Calculi*, Kluwer, Dordrecht, 1988

Woods, J., *Paradox and Paraconsistency*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003

Wright, G. H. von, *Logical Studies*, Routledge & Kegan Paul, London, 1957

Wright, G. H. von, *Truth, Negation, and Contradiction*, «Synthese», vol. 66, n. 1, 1986, pp. 3-14

Yuting, S., *Paradox of the Class of All Grounded Classes*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 18, n. 2, 1953, p. 114

Yuting, S., *Two Semantical Paradoxes*, «Journal of Symbolic Logic», vol. 20, n. 2, 1955, pp. 119-20

Zadeh, L., *Fuzzy Sets*, «Information and Control», vol. 8, 1965, pp. 338-53

Zadeh, L., *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Systems. Selected Papers*, Scientific World, Singapore, 1996

Zermelo, E., *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann*, «Mathematische Annalen», vol. 59, 1904, pp. 514-6

Zermelo, E., *Collected Works*, 2 voll., a cura di H.-D. Ebbinghaus, C. Fraser, A. Kanamori, Springer, Heidelberg, 2010-2013

Zermelo, E., *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*, «Mathematische Annalen», vol. 65, 1908, p. 116

Zermelo, E., *Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik*, «Fundamenta Mathematica», vol. 14, 1929, pp. 339-44

Zermelo, E., *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche*, «Fundamenta Mathematicae», vol. 16, 1930, pp. 29-47

Zermelo, E., *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, «Mathematische Annalen», vol. 65, 1908, pp. 261-81

Zorn, M., *A Remark on Method in Transfinite Algebra*, «Bulletin of American Mathematical Society», vol. 41, 1935, pp. 667-70