

Carlo Maria Mantegazza

Introduzione al Flusso di Ricci



Federico II University Press



fedOA Press

Advanced Topics in Pure and Applied Mathematics:
Doctoral Lecture Series

*Knowledge wants space
and
Books are the space of knowledge*

Direzione editoriale:

Giuseppe Arnone (*Istituto Nazionale di Alta Matematica “Francesco Severi”*),
Giacomo Ascione (*Scuola Superiore Meridionale*),
Carlo Nitsch (*Univ. Napoli Federico II – UniNa*)

Consiglio scientifico:

Florinda Capone (*UniNa*), Salvatore Cuomo (*UniNa*), Paola Festa (*UniNa*),
Davide Franco (*UniNa*), Nicola Fusco (*UniNa*), Marco Lapegna (*UniNa*), Maria
Longobardi (*UniNa*), Eleonora Messina (*UniNa*), Gioconda Moscariello (*UniNa*),
Carmela Musella (*UniNa*), Carlo Nitsch (*UniNa*), Giuseppina Terzo (*UniNa*)
Mladen Savov (*Sofia University*), Brian Straughan (*Durham University*), Paolo
Salani (*Università di Firenze*)

*I contributi originali pubblicati nei volumi di questa collana sono sottoposti a doppia
lettura anonima di esperti (double blind peer review)*

Carlo Maria Mantegazza

Introduzione al Flusso di Ricci

Federico II University Press



fedOA Press

Introduzione al flusso di Ricci / Carlo Maria Mantegazza. –
Napoli : FedOAPress, 2026. - 143 p. - (ATPAM-DLS; Advanced
Topics in Pure and Applied Mathematics: Doctoral Lecture
Series ; n. 3).

Accesso alla versione elettronica:
<http://www.fedoabooks.unina.it>

ISBN: 978-88-6887-451-3

DOI: 10.6093/978-88-6887-451-3

© 2026 FedOAPress - Federico II University Press
Università degli Studi di Napoli Federico II
Centro di Ateneo per le Biblioteche "Roberto Pettorino"
Piazza Bellini 59-60
80138 Napoli, Italy
<http://www.fedoapress.unina.it/>
Published in Italy
Prima edizione: luglio 2026

Gli E-Book di FedOAPress sono pubblicati con licenza Creative Commons
Attribution 4.0 International

PREFAZIONE

Questo testo è una versione espansa delle note del corso di dottorato *Introduzione al Flusso di Ricci* tenuto nell'anno accademico 2025/26 da Carlo Mantegazza al Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli" dell'Università di Napoli Federico II.

Segnalazioni di errori, commenti o suggerimenti sono graditi, nel caso scrivete per favore a carlo.mantegazza@unina.it.

Un ringraziamento particolare va a Nicola Pio Melillo per aver letto con cura e corretto vari errori e imprecisioni durante la stesura di queste note e ad Alvisè Muliari, che ha collaborato all'appendice sul teorema di esistenza per tempi piccoli.

INDICE

INTRODUZIONE	1
1 PRELIMINARI DI GEOMETRIA RIEMANNIANA	3
1.1 Curvatura	4
1.2 Calcolo tensoriale	7
1.3 Operatori differenziali e teorema della divergenza	10
1.4 La seconda identità di Bianchi	12
1.5 Decomposizione del tensore di Riemann	13
1.6 La curvatura in dimensione bassa	15
2 IL FLUSSO DI RICCI	19
2.1 Definizione ed esistenza del flusso	19
2.2 Evoluzione delle quantità geometriche	20
3 IL PRINCIPIO DEL MASSIMO	27
3.1 Il principio del massimo parabolico su varietà	28
3.2 Applicazioni	32
4 EVOLUZIONE DELLE DERIVATE DELLA CURVATURA	35
4.1 Evoluzione delle derivate del tensore di Riemann	37
4.2 Disuguaglianze di interpolazione per tensori	41
4.3 Stime uniformi sulle derivate della curvatura	43
4.4 Il flusso al tempo massimale di esistenza	49
4.5 Le stime di Bernstein–Bando–Shi	50
5 IL PRINCIPIO DEL MASSIMO PER TENSORI	53
5.1 Condizioni di curvatura preservate	56
6 3-VARIETÀ CON TENSORE DI RICCI POSITIVO	65
6.1 Pinching degli autovalori del tensore di Ricci	68
6.2 Stima del gradiente della curvatura scalare	72
6.3 Il controllo del rapporto $R_{\max}/R_{\min}$	77
6.4 Stime per il flusso normalizzato	79
6.5 Convergenza esponenziale	81
7 L'ANALISI DELLE SINGOLARITÀ NEL CASO GENERALE E LA CONGETTURA DI POINCARÉ	87
7.1 Singolarità e blow-up	89
7.2 Classificazione dei blow-up e solitoni di Ricci	93
7.3 I funzionali di Perelman e il noncollasso	99
7.4 Lunghezza e volume ridotti	103
7.5 La procedura di blow-up di Perelman	106
7.6 Il flusso di Ricci con chirurgia	114

7.7	La dimostrazione della congettura di Poincaré	119
APPENDICE	ESISTENZA PER TEMPI PICCOLI	123
A.1	Operatori parabolici nonlineari	123
A.2	Il trucco di DeTurck	127
BIBLIOGRAFIA		133
INDICE ANALITICO		143

INTRODUZIONE

Nel corso vogliamo presentare alcuni risultati di base e una panoramica delle recenti applicazioni del flusso di Ricci per ottenere conclusioni geometriche e topologiche sulle varietà.

L'idea di deformare una struttura geometrica tramite un'equazione di evoluzione parabolica per ottenere possibilmente un limite "ottimale" o semplicemente per migliorarne le proprietà, affonda le proprie radici nei lavori sulle mappe armoniche di Eells e Sampson nel 1964. Tuttavia, l'introduzione esplicita di una famiglia di flussi geometrici di metriche guidati dalla curvatura di Ricci risale a un'intuizione di Jean-Pierre Bourguignon nel 1981 [15, Question 3.24], prendendo le mosse da lavori inediti di André Lichnerowicz degli anni sessanta e dall'articolo di Thierry Aubin [2]. Bourguignon propose lo studio della seguente famiglia di equazioni di evoluzione temporale di metriche riemanniane $g(t)$ su una varietà differenziabile, al variare del parametro reale ρ :

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2(\text{Ric}_{g(t)} - \rho R_{g(t)}g(t))$$

(dove $\text{Ric}_{g(t)}$ e $R_{g(t)}$ sono rispettivamente il tensore di Ricci e la curvatura scalare relativi alla metrica $g(t)$). Tali flussi sono oggi noti in letteratura come *flussi di Ricci-Bourguignon* [25] (*RB-flows*). L'anno successivo Richard Hamilton¹ nel suo celebre articolo del 1982, *Three-manifolds with positive Ricci curvature* (J. Differential Geom. 17, 1982, 255–306), restrinse l'attenzione al caso $\rho = 0$, definendo il *flusso di Ricci*, cioè il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2\text{Ric}_{g(t)}.$$

Dal punto di vista analitico, questo sistema può essere interpretato come una sorta di equazione del calore "geometrica" per la metrica. Infatti, in un'opportuna scelta di coordinate locali (dette *coordinate armoniche*), la "parte principale" del tensore di Ricci assume la forma

$$\text{Ric}_g \approx -\frac{1}{2}\Delta g,$$

¹ Richard S. Hamilton è scomparso il 29 settembre 2024.

cosa che mostra formalmente la natura parabolica del flusso di Ricci. Più precisamente, come vedremo nell'appendice, il flusso è un sistema parabolico quasilineare (degenere) di equazioni alle derivate parziali su una varietà.

Nei primi sei capitoli affronteremo in modo rigoroso i fondamenti analitici e geometrici della teoria: discuteremo l'esistenza e l'unicità del flusso per tempi piccoli su varietà compatte e mostreremo come le quantità geometriche rilevanti evolvano e soddisfino stime sulle derivate del tutto analoghe a quelle delle equazioni paraboliche classiche nello spazio euclideo. Introduciamo vari strumenti tecnici, come le disuguaglianze di interpolazione e il principio di massimo parabolico per funzioni e tensori, allo scopo di studiare il comportamento del flusso al tempo massimale di esistenza. Infine, arriveremo a dimostrare con tutti i dettagli il teorema originale di Hamilton: *la metrica di una varietà tridimensionale compatta con tensore di Ricci positivo viene deformata asintoticamente dal flusso di Ricci normalizzato in una metrica a curvatura sezionale costante positiva, dunque la varietà è un quoziente della sfera.*

Sfortunatamente, senza l'ipotesi di positività della curvatura, questa conclusione non è più valida a causa della possibile formazione di singolarità in tempo finito. Lo studio di tali singolarità costituisce il punto cruciale dell'analisi del flusso di Ricci. Nell'ultimo capitolo, in modo discorsivo e omettendo le dimostrazioni, illustreremo l'architettura generale della teoria sviluppata al riguardo da Hamilton prima e Grisha Perelman poi, nonché la procedura di chirurgia topologica quantitativa che ha condotto quest'ultimo alla dimostrazione della *congettura di Poincaré* e della *congettura di geometrizzazione di Thurston*, di classificazione delle 3-varietà.

Richiamiamo alcune nozioni e fatti di geometria riemanniana che ci serviranno in seguito. Un riferimento per questo capitolo è il libro [48].

In tutto il testo adotteremo la convenzione di Einstein di somma sugli indici ripetuti. Inoltre, a meno che non sia esplicitamente indicato, tutte le varietà, le funzioni, i campi e i tensori considerati saranno di classe C^∞ .

Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione n . In una carta locale, le componenti della metrica sono

$$g_{ij}(x) = g(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

e sia g^{ij} l'inversa della matrice g_{ij} , che dunque soddisfa

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k.$$

La misura riemanniana canonica di (M, g) è data da

$$dV_g = \sqrt{\det g_{ij}} dx.$$

Possiamo estendere la metrica g ai tensori, ottenendo sempre un prodotto scalare: per ogni coppia di tensori T e S dello stesso tipo (p, q) , definiamo

$$g(T, S) = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} S_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p} g_{i_1 k_1} \dots g_{j_1 h_1} \dots$$

ovvero, la contrazione totale di tutti gli indici tramite la metrica o la sua inversa.

In generale, questa operazione di contrarre due indici controvarianti o covarianti di un tensore con la metrica o la sua inversa, rispettivamente, verrà detta “prendere” una *traccia* o “tracciare” il tensore.

Abbiamo dunque una norma sui tensori:

$$|T|^2 = g(T, T)$$

e si vede facilmente che vale la disuguaglianza (di Cauchy–Schwarz)

$$|g(T, S)| \leq |T| |S|.$$

Indicheremo con ∇ la connessione di Levi-Civita di (M, g) , con simboli di Christoffel in una carta coordinata definiti da

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

che possono essere ottenuti esplicitamente dalla metrica g con la formula

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \quad (1.1)$$

1.1 CURVATURA

Definizione 1.1 (Operatore e tensore di Riemann). Per ogni terna di campi vettoriali X, Y, Z , si definisce l'*operatore di Riemann*, che denotiamo con Riem , come il tensore di tipo $(1, 3)$,

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z \quad (1.2)$$

(dove $[X, Y]$ sono le parentesi di Lie di X e Y) e il *tensore di Riemann* (sempre denotato con Riem) di tipo $(0, 4)$,

$$R(X, Y, W, Z) = g(R(X, Y)Z, W)$$

(si noti l'inversione di W e Z), per ogni quaterna di campi vettoriali X, Y, Z, W .

In una carta coordinata, l'operatore di Riemann ha componenti R_{ijk}^h definite da

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = R_{ijk}^h \frac{\partial}{\partial x_h}$$

ed esplicitando la formula in termini dei simboli di Christoffel, si ottiene

$$R_{ijk}^h = \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^h - \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^h + \Gamma_{i\ell}^h \Gamma_{jk}^\ell - \Gamma_{j\ell}^h \Gamma_{ik}^\ell \quad (1.3)$$

Usando la metrica per "abbassare" l'indice di controvarianza in alto, abbiamo le componenti del tensore di Riemann:

$$R_{ij\ell k} = R_{ijk}^h g_{h\ell},$$

dove si noti che tale indice "scende" in terza posizione.

Osservazione 1.2. Sottolineiamo che va prestata molta attenzione alla definizione e alle convenzioni riguardanti l'operatore e il tensore di Riemann nei vari testi e articoli, in quanto non vi è uno standard in letteratura. Per esempio, spesso il primo e il secondo indice sono invertiti rispetto alla nostra definizione (le derivate covarianti in X e Y sono scambiate nella formula (1.2)), dunque l'operatore di Riemann ha segno opposto al nostro.

Per una sfera con la metrica usuale, assumendo le nostre convenzioni, si ha

$$R(X, Y, X, Y) = R_{ijkl}X^iX^kY^jY^\ell > 0,$$

per ogni coppia di vettori linearmente indipendenti X e Y .

Il tensore di Riemann ha le seguenti proprietà di simmetria:

1. *Antisimmetria nella prima coppia* (per definizione):

$$R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W).$$

2. *Antisimmetria nella seconda coppia* (segue dalla compatibilità di ∇ con la metrica g):

$$R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z).$$

3. *I Identità di Bianchi – algebrica* (segue dal fatto che la torsione di ∇ è nulla, cioè $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$):

$$R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0.$$

4. *Simmetria per scambio della prima con la seconda coppia* (segue algebricamente dalle precedenti):

$$R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y).$$

In coordinate locali, queste simmetrie si scrivono:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}, \quad R_{ijkl} = -R_{ijlk},$$

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0, \quad R_{ijkl} = R_{klij},$$

per ogni $i, j, k, \ell \in \{1, \dots, n\}$.

Da queste proprietà di simmetria del tensore di Riemann, si vede che esiste un'unica traccia (a meno del segno) non nulla, infatti,

- La traccia sul 1° e 2° indice è zero ($g^{ij}R_{ijkl} = 0$) per l'antisimmetria e analogamente, la traccia sul 3° e 4° indice è zero.

- La traccia sul 2° e 4° indice è uguale a quella sul 1° e 3° e all'opposto di quella sul 1° e 4° o 2° e 3°.

Definizione 1.3 (Tensore di Ricci). Il tensore di Ricci, che denotiamo con Ric , di tipo $(0, 2)$ è definito in coordinate locali come la traccia

$$R_{ij} = g^{k\ell} R_{ikj\ell}$$

del tensore di Riemann.

Si vede allora facilmente che per le simmetrie del tensore di Riemann, il tensore di Ricci è simmetrico.

Definizione 1.4 (Curvatura scalare). La curvatura scalare $R \in C^\infty(M)$ è la traccia del tensore di Ricci:

$$R = g^{ij} R_{ij} = g^{ij} g^{k\ell} R_{ikj\ell}.$$

Definizione 1.5 (Curvatura sezionale). Sia $\pi \subseteq T_p M$ un piano (un sottospazio di dimensione 2 dello spazio tangente in $p \in M$) e sia $\{u, v\}$ una base che genera tale piano. Definiamo la curvatura sezionale $K(\pi)$ (o $\text{Sec}(\pi)$) di π come

$$K(\pi) = \frac{R(u, v, u, v)}{|u|^2 |v|^2 - g(u, v)^2}$$

(si ha che $K(\pi)$ non dipende dalla scelta della base $\{u, v\}$, dunque questa definizione è ben posta).

La curvatura sezionale in un punto $p \in M$ determina il tensore di Riemann in tale punto (serve conoscere la curvatura sezionale di *tutti* i piani in $T_p M$). Per una sfera con la metrica usuale (con le convenzioni che abbiamo adottato) la curvatura sezionale è positiva (e costante) in ogni punto e per ogni piano.

Definizione 1.6 (Operatore di curvatura). Per le sue simmetrie, il tensore di Riemann può essere visto come una forma bilineare simmetrica $\mathcal{R}$ sullo spazio $\Lambda^2 M$ dei bivettori alternanti, definita come segue:

$$\mathcal{R}(u \wedge v, w \wedge z) = R(u, v, w, z).$$

Essendo $\mathcal{R}$ simmetrica, esiste allora un operatore autoaggiunto $\mathfrak{R} : \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$, detto operatore di curvatura, tale che

$$\mathcal{R}(u \wedge v, w \wedge z) = g(\mathfrak{R}(u \wedge v), w \wedge z).$$

Definizione 1.7 (Varietà flat). Se tutte le curvature sezionali sono nulle, il tensore di Riemann è nullo e viceversa (equivalentemente, l'operatore di curvatura è nullo), dunque anche il tensore di Ricci e la curvatura scalare sono nulli e la varietà si dice "flat" (piatta).

Definizione 1.8 (Varietà con curvatura costante). Se tutte le curvature sezionali sono uguali a una costante, si dice che la varietà ha "curvatura costante".

Definizione 1.9 (Varietà di Einstein). Se esiste una costante $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che in ogni punto di una varietà riemanniana di dimensione $n \geq 3$ si ha $\text{Ric} = \lambda g$, la varietà si dice "di Einstein" (di costante λ),

Se una varietà ha curvatura costante, si mostra che allora il suo tensore di Ricci è proporzionale alla metrica e la curvatura scalare è costante. Vale inoltre il seguente fondamentale teorema.

Teorema 1.10 (Teorema di uniformizzazione – Classificazione delle varietà con curvatura costante). Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione n , connessa e completa, con curvatura costante $K \in \mathbb{R}$. Allora, il suo rivestimento universale riemanniano $\tilde{M}$ è isometrico a uno dei tre seguenti "modelli standard":

1. la sfera $S^n(1/\sqrt{K})$ di raggio $1/\sqrt{K}$, se $K > 0$;
2. lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$, se $K = 0$;
3. lo spazio iperbolico $\mathbb{H}^n$ con la sua metrica canonica riscalata di un fattore $-1/K$, se $K < 0$.

In particolare, M è isometrica al quoziente del relativo modello per un gruppo di isometrie che agisce in modo libero e propriamente discontinuo.

1.2 CALCOLO TENSORIALE

La connessione ∇ si può estendere ai tensori (covarianti e controvarianti) con le seguenti proprietà, per ogni campo vettoriale X :

1. $\nabla_X f = Xf$, se $f \in C^\infty(M)$;
2. $\nabla_X Y$ è la connessione di Levi-Civita, per ogni campo vettoriale Y ;
3. ∇_X commuta con le contrazioni;

4. ∇_X soddisfa la seguente “regola di Leibniz”

$$\nabla_X(T \otimes S) = \nabla_X T \otimes S + T \otimes \nabla_X S,$$

per ogni coppia di tensori T e S .

Per esempio, se ω è una 1-forma, cioè un tensore di tipo $(0, 1)$, si ha

$$\begin{aligned} (\nabla_X \omega)(Y) &= c(\nabla_X \omega \otimes Y) = c(\nabla_X(\omega \otimes Y) - \omega \otimes \nabla_X Y) \\ &= \nabla_X(c(\omega \otimes Y)) - c(\omega \otimes \nabla_X Y) = \nabla_X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y) \\ &= X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y). \end{aligned}$$

Se T è un tensore di tipo (p, q) , allora ∇T è dunque un tensore di tipo $(p, q + 1)$, dato da

$$(\nabla T)(X, X_1, \dots, X_q) = (\nabla_X T)(X_1, \dots, X_q).$$

Inoltre, la compatibilità con la metrica è mantenuta:

$$Xg(T, S) = g(\nabla_X T, S) + g(T, \nabla_X S).$$

Segue che si ha $\nabla g = 0$ (esercizio), il che implica che nei calcoli si può sempre “scambiare” o “portare fuori” il tensore metrico dalla connessione ∇ .

Utilizzeremo spesso la seguente convenzione: per un tensore $T = T_{\dots i \dots}^{\dots j \dots}$, scriveremo $T_{\dots}^{\dots j \dots}$ per il tensore $g^{ij} T_{\dots i \dots}^{\dots j \dots}$, cioè “l’innalzamento” di un indice covariante rappresenterà una contrazione del tensore con l’inversa della metrica su tale indice. Analogamente, se “abbassiamo” un indice a un tensore, stiamo contraendo un indice controvariante con la metrica (formalmente, si tratta dell’applicazione degli *operatori musicali* – si veda [48]). Per la compatibilità con la metrica, queste operazioni commutano con ∇ .

Indichiamo con $\nabla_i \nabla_j T$ o $\nabla_{ij}^2 T$ le componenti della derivata covariante seconda di un tensore T . Per esempio, se T è un tensore di tipo $(0, q)$, abbiamo

$$\nabla_{ij}^2 T_{\dots} = \nabla_i \nabla_j T_{\dots} = (\nabla(\nabla T))_{ij \dots} = (\nabla(\nabla T)) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \dots \right)$$

e si ha, esplicitamente,

$$\begin{aligned}
(\nabla_i \nabla_j T)(X_1, \dots, X_q) &= \left[\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (\nabla T) \right] \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, X_1, \dots, X_q \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \left((\nabla T) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, X_1, \dots, X_q \right) \right) - (\nabla T) \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, X_1, \dots, X_q \right) \\
&\quad - \sum_{k=1}^q (\nabla T) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, X_1, \dots, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X_k, \dots, X_q \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} T(X_1, \dots, X_q) - \sum_{k=1}^q \frac{\partial}{\partial x_i} T(X_1, \dots, \nabla_j X_k, \dots, X_q) \\
&\quad - (\nabla T) \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, X_1, \dots, X_q \right) - \sum_{k=1}^q (\nabla_j T)(X_1, \dots, \nabla_i X_k, \dots, X_q).
\end{aligned}$$

Notiamo dunque che considerando la differenza $\nabla_i \nabla_j T - \nabla_j \nabla_i T$, il primo termine si cancellerà, in quanto simmetrico in i, j , per il teorema di Schwarz e lo stesso vale per il terzo, per la torsione nulla della connessione.

Riguardo al secondo termine, abbiamo

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=1}^q \frac{\partial}{\partial x_i} T(X_1, \dots, \nabla_j X_k, \dots, X_q) &= -\sum_{k=1}^q (\nabla_i T)(X_1, \dots, \nabla_j X_k, \dots, X_q) \\
&\quad - \sum_{k=1}^q T(X_1, \dots, \nabla_i (\nabla_j X_k), \dots, X_q)
\end{aligned}$$

e osserviamo che il primo termine a destra è uguale al quarto sopra, scambiando gli indici i e j , dunque entrambi si cancellano nella differenza $\nabla_i \nabla_j T - \nabla_j \nabla_i T$.

Concludiamo allora che

$$\begin{aligned}
(\nabla_i \nabla_j T - \nabla_j \nabla_i T)(X_1, \dots, X_q) &= - \sum_{k=1}^q T(X_1, \dots, \nabla_i (\nabla_j X_k) - \nabla_j (\nabla_i X_k), \dots, X_q) \\
&= - \sum_{k=1}^q T \left(X_1, \dots, R_{ij\ell}^h X_k^\ell \frac{\partial}{\partial x_h}, \dots, X_q \right),
\end{aligned}$$

dove abbiamo riconosciuto l'operatore di Riemann (poiché $[\partial_i, \partial_j] = 0$). Si ha quindi, per ogni tensore completamente covariante T di tipo $(0, q)$:

$$\begin{aligned}\nabla_i \nabla_j T_{\ell_1 \dots \ell_q} - \nabla_j \nabla_i T_{\ell_1 \dots \ell_q} &= - \sum_{k=1}^q R_{ij\ell_k}^h T_{\ell_1 \dots \ell_{k-1} h \ell_{k+1} \dots \ell_q} \\ &= - \sum_{k=1}^q R_{ijm\ell_k} g^{mh} T_{\ell_1 \dots \ell_{k-1} h \ell_{k+1} \dots \ell_q} \\ &= \sum_{k=1}^q R_{ij\ell_k m} g^{mh} T_{\ell_1 \dots \ell_{k-1} h \ell_{k+1} \dots \ell_q}.\end{aligned}$$

Nel caso di un campo vettoriale, si ha un calcolo analogo,

$$\nabla_i \nabla_j v^k - \nabla_j \nabla_i v^k = R_{ij\ell}^k v^\ell = g^{mk} R_{ijm\ell} v^\ell$$

e in generale, per un tensore T di tipo (p, q) , abbiamo che la differenza

$$\nabla_{ij}^2 T - \nabla_{ji}^2 T = \nabla_i \nabla_j T - \nabla_j \nabla_i T$$

è uguale a una somma di termini come segue:

- per ogni indice di controvarianza (alto) ℓ , si ha un termine del tipo $R_{ij\ell}^k T_{\dots \ell \dots}$;
- per ogni indice di covarianza (basso) h , si ha un termine del tipo $-R_{ijk}^h T_{\dots h \dots}$.

È quindi chiaro che l'operatore (o il tensore) di Riemann ci permette di esprimere l'errore nello "scambio" di derivate covarianti iterate di un tensore. Osserviamo infine che nel caso speciale di una funzione $f \in C^\infty(M)$, cioè un tensore di tipo $(0, 0)$, il suo hessiano $\nabla^2 f$ è simmetrico (per la torsione nulla della connessione), quindi $\nabla_i \nabla_j f = \nabla_j \nabla_i f$.

1.3 OPERATORI DIFFERENZIALI E TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Data una funzione $f \in C^\infty(M)$, il suo gradiente ∇f è l'unico campo vettoriale su M tale che

$$g(\nabla f, X) = df(X) = Xf,$$

per ogni campo vettoriale X su M .

Definiamo l'hessiano di un tensore T come $\nabla_{ij}^2 T$ (ricordando che in generale è simmetrico solo se T è una funzione) e il laplaciano come la traccia dell'hessiano:

$$\Delta T = g^{ij} \nabla_{ij}^2 T.$$

Definiamo la divergenza di un campo vettoriale X come la traccia del tensore ∇X :

$$\operatorname{div} X = \nabla_i X^i = \operatorname{tr} \nabla X = g^{ij} \nabla_i X_j.$$

Analogamente, per una 1-forma ω , la divergenza è definita (coerentemente con la dualità data dalla metrica) come

$$\operatorname{div} \omega = g^{ij} \nabla_i \omega_j.$$

Più in generale, per un tensore T la divergenza $\operatorname{div} T$ è un tensore ottenuto contraendo l'indice di derivazione con uno degli indici (controvarianti o covarianti – solitamente il primo):

$$(\operatorname{div} T)^{\dots} = \nabla_k T^{k\dots} \quad \text{oppure} \quad (\operatorname{div} T)^{\dots} = g^{ij} \nabla_i T_{j\dots}$$

Osserviamo che (come nel caso di $\mathbb{R}^n$), si ha

$$\Delta T = \operatorname{div} \nabla T$$

Si ha il seguente fondamentale teorema della divergenza, perfettamente analogo a quello in $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.11 (Teorema della divergenza). Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta e senza bordo. Allora,

$$\int_M \operatorname{div} X \, dV_g = 0.$$

Corollario 1.12. Per una funzione $f \in C^\infty(M)$, il laplaciano è la divergenza del gradiente. Dunque, su una varietà (M, g) compatta oppure, se f ha supporto compatto,

$$\int_M \Delta f \, dV_g = \int_M \operatorname{div} \nabla f \, dV_g = 0.$$

Dal teorema della divergenza segue la formula di integrazione per parti: poiché

$$\operatorname{div}(fX) = g(\nabla f, X) + f \operatorname{div} X,$$

segue che

$$\begin{aligned}\int_M f \operatorname{div} X dV_g &= \int_M \operatorname{div}(fX) dV_g - \int_M g(\nabla f, X) dV_g \\ &= - \int_M g(\nabla f, X) dV_g.\end{aligned}$$

Questa formula si estende poi ai tensori (almeno uno tra T e S a supporto compatto):

$$\int_M g(T, \operatorname{div} S) dV_g = - \int_M g(\nabla T, S) dV_g,$$

dove T è di tipo (p, q) e S di tipo $(p, q+1)$. In coordinate,

$$\int_M T_{j\dots}^{i\dots} \nabla^k S_{ki\dots}^{j\dots} dV_g = - \int_M \nabla^k T_{j\dots}^{i\dots} S_{ki\dots}^{j\dots} dV_g. \quad (1.4)$$

1.4 LA SECONDA IDENTITÀ DI BIANCHI

Il tensore di Riemann soddisfa un'identità differenziale fondamentale, detta "seconda identità di Bianchi" (differenziale). In coordinate locali, si ha

$$\nabla_i R_{jk\ell m} + \nabla_j R_{ki\ell m} + \nabla_k R_{ij\ell m} = 0. \quad (1.5)$$

Se contraiamo questa identità con g^{im} , tenendo presente le simmetrie del tensore di Riemann, otteniamo la "versione contratta"

$$\nabla^m R_{jk\ell m} + \nabla_j \operatorname{Ric}_{k\ell} - \nabla_k \operatorname{Ric}_{j\ell} = 0, \quad (1.6)$$

da cui

$$\operatorname{div} \operatorname{Riem}_{\ell kj} = \nabla^m R_{m\ell kj} = \nabla_k \operatorname{Ric}_{j\ell} - \nabla_j \operatorname{Ric}_{k\ell}.$$

Contraendo ulteriormente con $g^{j\ell}$ (cioè contraendo due volte l'identità (1.5)), si ha

$$\begin{aligned}0 &= g^{j\ell} g^{im} (\nabla_i R_{jk\ell m} + \nabla_j R_{ki\ell m} + \nabla_k R_{ij\ell m}) \\ &= g^{j\ell} (g^{im} \nabla_i R_{jk\ell m} + \nabla_j \operatorname{Ric}_{k\ell} - \nabla_k \operatorname{Ric}_{j\ell}) \\ &= g^{im} \nabla_i R_{km} + g^{j\ell} \nabla_j R_{k\ell} - \nabla_k R \\ &= 2 \operatorname{div} \operatorname{Ric}_k - \nabla_k R,\end{aligned}$$

cioè,

$$\operatorname{div} \operatorname{Ric} = \frac{dR}{2}. \quad (1.7)$$

Lemma 1.13 (Lemma di Schur). Sia (M, g) una varietà connessa di dimensione $n \geq 3$. Se il tensore di Ricci è proporzionale alla metrica in ogni punto, ovvero

$$R_{ij}(p) = \lambda(p)g_{ij}(p),$$

per ogni $p \in M$, allora la funzione λ è costante, uguale a R/n . Dunque, la varietà (M, g) è di Einstein di costante λ .

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che si ha

$$R = g^{ij}R_{ij} = \lambda g^{ij}g_{ij} = n\lambda,$$

da cui $\lambda = R/n$.

Se prendiamo la divergenza di entrambi i membri dell'equazione $R_{ij} = \lambda g_{ij}$, otteniamo

$$\operatorname{div} \operatorname{Ric}_j = g^{ki} \nabla_k (\lambda g_{ij}) = g^{ik} \nabla_k \lambda g_{ij} = \delta_j^k \nabla_k \lambda = \nabla_j \lambda = \nabla_j R/n,$$

dunque, per la formula (1.7),

$$\nabla_j R/2 = \operatorname{div} \operatorname{Ric}_j = \nabla_j R/n.$$

Poiché $n \geq 3$, deve essere $\nabla R = \nabla \lambda = 0$, ovvero λ è costante su M . $\square$

Osservazione 1.14. In dimensione $n = 2$ vale sempre $R_{ij} = Rg/2$, ma questo non implica che R sia costante.

1.5 DECOMPOSIZIONE DEL TENSORE DI RIEMANN

Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione $n \in \mathbb{N}$. Analizziamo lo spazio vettoriale dei tensori che soddisfano le simmetrie algebriche del tensore di Riemann. Fissato $p \in M$, definiamo $\mathcal{C}(T_p M)$ come lo spazio delle 4-forme covarianti A_{ijkl} su $T_p M$ tali che:

- $A_{ijkl} = -A_{jikl} = -A_{ijlk},$
- $A_{ijkl} = A_{klij},$
- $A_{ijkl} + A_{jkil} + A_{kijl} = 0.$

Date due forme bilineari simmetriche h e k su $T_p M$, definiamo il loro prodotto di Kulkarni–Nomizu $h \otimes k$ come

$$\begin{aligned} (h \otimes k)(X, Y, Z, W) &= h(X, Z)k(Y, W) + h(Y, W)k(X, Z) \\ &\quad - h(X, W)k(Y, Z) - h(Y, Z)k(X, W). \end{aligned}$$

Si vede allora facilmente che $h \oslash k$ è un elemento di $\mathcal{C}(T_p M)$.
In coordinate, si ha

$$(h \oslash k)_{ijkl} = h_{ik}k_{j\ell} + h_{j\ell}k_{ik} - h_{i\ell}k_{jk} - h_{jk}k_{i\ell}.$$

Esercizio 1.15. Si dimostrino le seguenti formule:

$$\begin{aligned} g^{ik}(g \oslash g)_{ijkl} &= 2(n-1)g_{j\ell}, \\ g^{j\ell}g^{ik}(g \oslash g)_{ijkl} &= 2n(n-1). \end{aligned}$$

Esercizio 1.16. Sia S una forma bilineare simmetrica su $T_p M$ con traccia nulla, cioè $g^{ij}S_{ij} = 0$. Si mostri la formula

$$g^{ik}(S \oslash g)_{ijkl} = (n-2)S_{j\ell}$$

e si osservi che dunque $g^{j\ell}g^{ik}(S \oslash g)_{ijkl} = 0$.

Il teorema di decomposizione sotto l'azione del gruppo ortogonale $O(n)$ afferma che lo spazio $\mathcal{C}(T_p M)$ si decompone in tre sottospazi ortogonali e irriducibili:

$$\mathcal{C}(T_p M) = \mathbb{R}(g \oslash g) \oplus^\perp (\mathcal{S}_0 \oslash g) \oplus^\perp \mathcal{W}$$

dove $\mathcal{S}_0$ è lo spazio vettoriale delle forme bilineari simmetriche con traccia nulla e $\mathcal{W}$, detto spazio dei tensori di Weyl, è definito dalla proprietà che per ogni suo elemento W tutte le tracce sono nulle, cioè (tenendo presente le simmetrie degli elementi di $\mathcal{C}(T_p M)$),

$$g^{ik}W_{ijk\ell} = 0,$$

per ogni $j, \ell \in \{1, \dots, n\}$.

Osservazione 1.17. Il termine “irriducibile” si riferisce alla non esistenza di ulteriori sottospazi invarianti per l'azione del gruppo ortogonale $O(n)$ (è la parte difficile del teorema).

Esercizio 1.18. Usando le formule degli Esercizi 1.15 e 1.16, si mostri che i tre sottospazi di $\mathcal{C}(T_p M)$ sono ortogonali tra loro.

Per mezzo di questa decomposizione dello spazio $\mathcal{C}(T_p M)$, se $n \geq 3$, possiamo scrivere il tensore di Riemann come la somma di tre termini ortogonali tra loro, come segue:

$$\text{Riem} = \frac{R}{2n(n-1)}g \oslash g + \frac{1}{n-2}\left(\text{Ric} - \frac{R}{n}g\right) \oslash g + \text{Weyl}. \quad (1.8)$$

Il tensore $\text{Ric} - Rg/n$ è detto tensore di Ricci “tracefree” e denotato con $\overset{\circ}{\text{Ric}}$. Il tensore Weyl è chiamato tensore di Weyl e come detto sopra ha tutte le tracce nulle. Inoltre, si mostra che è invariante per trasformazioni conformi della metrica. Possiamo raggruppare i termini contenenti la metrica per riscrivere la decomposizione in una forma più compatta (spesso usata in letteratura):

$$\text{Riem} = \frac{1}{n-2} \text{Ric} \otimes g - \frac{R}{2(n-1)(n-2)} g \otimes g + \text{Weyl}, \quad (1.9)$$

dove questa volta i primi due termini non sono ortogonali tra loro. Chiaramente, questa decomposizione evidenzia come il tensore di Riemann sia univocamente determinato dai tensori di Ricci e di Weyl.

1.6 LA CURVATURA IN DIMENSIONE BASSA

I casi di dimensione bassa $n = 2, 3$ sono particolari. La formula (1.8) contiene $n - 2$ al denominatore, quindi è valida solo per $n \geq 3$. In dimensione 2, il tensore di Riemann ha essenzialmente una sola componente indipendente. Per le simmetrie di Riem, si ha infatti

$$R_{1212} = -R_{2112} = R_{2121} = -R_{1221}.$$

Lo spazio $\mathcal{C}(T_p M)$ dei tensori di curvatura ha allora dimensione 1 ed è generato interamente da $g \otimes g$. Segue che

$$\text{Riem} = \frac{R}{4} g \otimes g$$

e il tensore di Ricci tracefree è nullo, cioè $\text{Ric} = Rg/2$. Il tensore di Riemann è dunque interamente determinato dalla curvatura scalare.

In dimensione 3, lo spazio dei tensori di Weyl ha dimensione zero (si può dunque dire che il tensore di Weyl è nullo), dunque le formule (1.8) e (1.9) diventano

$$\text{Riem} = \frac{R}{12} g \otimes g + \left(\text{Ric} - \frac{R}{3} g \right) \otimes g, \quad (1.10)$$

$$\text{Riem} = \text{Ric} \otimes g - \frac{R}{4} g \otimes g. \quad (1.11)$$

Esplicitando i prodotti di Kulkarni–Nomizu, in coordinate, abbiamo

$$R_{ijkl} = R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il} - \frac{R}{2}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \quad (1.12)$$

Poiché il tensore di Ricci è simmetrico, possiamo diagonalizzarlo in una base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ di autovettori in un punto $p \in M$. Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono gli autovalori associati, si ha

$$\lambda_i = R_{ii} = \sum_{j=1}^3 R_{ijij} = \sum_{j=1}^3 \text{Sec}(e_i, e_j),$$

per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$. Ponendo $K_{ij} = \text{Sec}(e_i, e_j) = R_{ijij}$ e sostituendo nella formula sopra (ricordando che $g_{ii} = 1$ e $g_{ij} = 0$ per $i \neq j$), otteniamo un legame diretto tra gli autovalori del tensore di Ricci e le curvatures sezionali:

$$\lambda_1 = R_{11} = \text{Sec}(e_1, e_2) + \text{Sec}(e_1, e_3) = K_{12} + K_{13}$$

$$\lambda_2 = R_{22} = \text{Sec}(e_2, e_1) + \text{Sec}(e_2, e_3) = K_{12} + K_{23}$$

$$\lambda_3 = R_{33} = \text{Sec}(e_3, e_1) + \text{Sec}(e_3, e_2) = K_{13} + K_{23}$$

e possiamo poi invertire questo sistema lineare per esprimere le curvatures sezionali in funzione degli autovalori del tensore di Ricci:

$$K_{12} = R_{1212} = \text{Sec}(e_1, e_2) = \frac{1}{2}(R_{11} + R_{22} - R_{33}) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)$$

$$K_{13} = R_{1313} = \text{Sec}(e_1, e_3) = \frac{1}{2}(R_{11} + R_{33} - R_{22}) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2)$$

$$K_{23} = R_{2323} = \text{Sec}(e_2, e_3) = \frac{1}{2}(R_{22} + R_{33} - R_{11}) = \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1)$$

Cerchiamo di esprimere col tensore di Ricci la condizione che la curvatura sezionale di ogni piano di (M, g) sia positiva. Sia $\pi = \langle e_1, e_2 \rangle \subseteq T_p M$ un piano generato da due vettori unitari ortogonali tra loro e sia e_3 un vettore unitario che li completa a una base ortonormale di $T_p M$. Allora, argomentando come sopra (anche se la base e_1, e_2, e_3 non diagonalizza il tensore di Ricci), si ha

$$\text{Sec}(e_1, e_2) = \frac{1}{2}(R_{11} + R_{22} - R_{33}),$$

dunque, la condizione che tutte le curvatures sezionali siano positive è equivalente a richiedere che per ogni base ortonormale e_1, e_2, e_3 , si abbia

$$R_{11} + R_{22} > R_{33} \quad \Longleftrightarrow \quad R = R_{11} + R_{22} + R_{33} > 2R_{33}.$$

Segue allora che tale condizione è data dal fatto che $R/2$ sia maggiore del massimo autovalore del tensore di Ricci (scegliendo la base in modo che e_3 sia un autovettore unitario associato a tale autovalore).

In tutto il seguito del testo, per una forma bilineare simmetrica (o per un tensore simmetrico di tipo $(0,2)$) T , scriveremo $T > 0$ o $T \geq 0$ per indicare che T è definita o semidefinita positiva e analogamente, $T < 0$ o $T \leq 0$, se T è definita o semidefinita negativa. Inoltre, per due forme bilineari, $T < S$ ($T \leq S$) significherà $T - S < 0$ ($T - S \leq 0$).

Con questa convenzione,

$$Rg - 2Ric > 0 \iff \text{curvatura sezionale positiva.} \quad (1.13)$$

Notiamo che $Sec > 0$ implica Ric definito positivo, ma il viceversa non vale, infatti la condizione sopra è più forte che $Ric > 0$. Analogamente, invertendo le disuguaglianze, la condizione per avere curvatura sezionale negativa è data da

$$Rg - 2Ric < 0 \iff \text{curvatura sezionale negativa.}$$

Anche qui, questa è una condizione più forte di Ric definito negativo. Inoltre, allo stesso modo, si ottiene

$$\begin{aligned} Rg - 2Ric \geq 0 &\iff \text{curvatura sezionale nonnegativa,} \\ Rg - 2Ric \leq 0 &\iff \text{curvatura sezionale nonpositiva.} \end{aligned}$$

In ogni dimensione, sappiamo che se tutte le curvatures sezionali sono nulle, la varietà è flat e il tensore di Ricci è nullo. In dimensione 3, per la formula di decomposizione (1.10) (non essendo presente il tensore di Weyl), vale anche l'implicazione inversa: se il tensore di Ricci è nullo, la varietà è flat.

Osservazione 1.19. Questo vale solo in dimensione 3 (e 2). In dimensione $n \geq 4$, esistono varietà con $Ric = 0$ ma $Riem \neq 0$. In tal caso la curvatura è concentrata interamente nel tensore di Weyl.

In generale, vale la seguente proposizione.

Proposizione 1.20. In dimensione 3, una varietà è di Einstein se e solo se ha curvatura sezionale costante.

Dimostrazione. Se la varietà ha curvatura sezionale costante uguale a K , allora è di Einstein, in quanto dalle formule viste sopra i suoi tre autovalori coincidono con $2K$ in ogni punto della varietà (questo vale in ogni dimensione $n \in \mathbb{N}$, in tal caso $Ric = (n-1)Kg$).

Mostriamo l'implicazione inversa usando la formula di decomposizione del tensore di Riemann in dimensione 3. Se $R_{ij} = \lambda g_{ij}$, prendendo

la traccia, si ha $R = g^{ij}R_{ij} = 3\lambda$, quindi $\lambda = R/3$ e $\text{Ric} = Rg/3$ e se sostituiamo nella formula (1.11), otteniamo

$$\text{Riem} = \text{Ric} \oslash g - \frac{R}{4} g \oslash g = \frac{R}{3} g \oslash g - \frac{R}{4} g \oslash g = \frac{R}{12} g \oslash g.$$

Questo implica che la curvatura sezionale è costante e vale $K = R/6 = \lambda/2$. $\square$

Osservazione 1.21. Sottolineiamo che questo risultato è specifico della dimensione 3. Se $n \geq 4$, una varietà di Einstein non ha necessariamente curvatura costante (a meno che il tensore di Weyl non sia nullo).

2.1 DEFINIZIONE ED ESISTENZA DEL FLUSSO

Sia M una varietà differenziabile C^∞ .

Un *flusso di Ricci* su M è una famiglia $g(t)$ di metriche C^∞ su M che soddisfa

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2\text{Ric}_{g(t)}$$

per ogni t in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, dove $\text{Ric}_{g(t)}$ è il tensore di Ricci rispetto alla metrica $g(t)$ e la dipendenza della metrica che evolve dal punto di M e dal tempo $t \in I$ è C^∞ .

Dal punto di vista analitico, questo è un sistema *parabolico quasi-lineare degenere* (il simbolo principale ha degli autovalori nulli dovuti all'invarianza dell'equazione per diffeomorfismi – si veda l'appendice).

Esempio 2.1. Supponiamo che (M, g_0) sia una varietà di Einstein, ovvero

$$\text{Ric}_{g_0} = \lambda g_0$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ e cerchiamo un flusso di Ricci che faccia variare la metrica solo per un fattore di dilatazione dipendente da t e soddisfi $g(0) = g_0$. Poniamo dunque $g(t) = \alpha(t)g_0$ con la condizione $\alpha(0) = 1$. Sostituendo nell'equazione del flusso e osservando che il tensore di Ricci è invariante per riscalamenti della metrica, otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = \alpha'(t)g_0 = -2\text{Ric}_{\alpha(t)g_0} = -2\text{Ric}_{g_0} = -2\lambda g_0.$$

Si ha dunque,

$$\alpha'(t) = -2\lambda \quad \implies \quad \alpha(t) = 1 - 2\lambda t,$$

da cui la soluzione $g(t) = (1 - 2\lambda t)g_0$.

- Se $\lambda < 0$, la varietà si espande nel tempo. La soluzione esiste per ogni $t \in (1/2\lambda, +\infty)$.
- Se $\lambda = 0$, la metrica è stazionaria, $g(t) = g_0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.
- Se $\lambda > 0$, la varietà si contrae fino a collassare al tempo finito $T = 1/2\lambda$. La soluzione è definita nell'intervallo $(-\infty, 1/2\lambda)$.

Il seguente risultato di esistenza e unicità è dovuto a Hamilton [50]. DeTurck [40] ne ha poi fornito una dimostrazione alternativa più semplice dell'originale, in seguito ulteriormente raffinata dallo stesso DeTurck (si vedano [3, 41]) e da Hamilton [55]. Rimandiamo il lettore all'appendice per tale dimostrazione, essendo questa di natura prettamente analitica e tecnicamente indipendente dallo studio del comportamento a lungo termine del flusso che affronteremo nel seguito.

Teorema 2.2. Per ogni metrica iniziale g_0 di classe C^∞ su una varietà differenziabile compatta M , esiste un unico tempo massimale $T = T(M, g_0) > 0$ e un'unica soluzione regolare $g(t)$ del flusso di Ricci definita per $t \in [0, T)$, tale che $g(0) = g_0$.

Osservazione 2.3. Nel caso in cui la varietà (M, g_0) sia completa ma non compatta, la questione è più delicata. È necessario richiedere che la curvatura sia limitata, cioè $|\text{Riem}| \leq C < +\infty$. Si vedano [88, 89] per l'esistenza del flusso e [30] per l'unicità.

2.2 EVOLUZIONE DELLE QUANTITÀ GEOMETRICHE

Calcoliamo le equazioni di evoluzione per gli oggetti geometrici rilevanti durante il flusso di Ricci, determinate dall'equazione per la metrica g :

$$\partial_t g_{ij} = -2R_{ij}$$

in coordinate locali.

EVOLUZIONE DELL'INVERSA DELLA METRICA. Derivando la relazione $g_{i\ell} g^{\ell j} = \delta_i^j$, otteniamo

$$\partial_t g^{ij} = -g^{i\ell} (\partial_t g_{\ell m}) g^{mj} = -g^{i\ell} (-2R_{\ell m}) g^{mj} = 2R^{ij}, \quad (2.1)$$

dove $R^{ij} = g^{i\ell} g^{jm} R_{\ell m}$.

EVOLUZIONE DEI SIMBOLI DI CHRISTOFFEL. Fissiamo un punto $p \in M$ e calcoliamo in coordinate normali centrate in tale punto, dove quindi la metrica è l'identità, le derivate spaziali della metrica si annullano (si veda [48]) e le derivate covarianti coincidono con le derivate in coordinate. Osserviamo poi che sebbene i simboli di Christoffel Γ_{ij}^k non siano dei tensori, la differenza tra tali simboli di due connessioni lo è. In particolare, i rapporti incrementali e dunque (passando al limite) la loro derivata temporale $\partial_t \Gamma_{ij}^k$ è un tensore. Dunque, il risultato del

calcolo varrà poi per ogni generica carta coordinata.
Si ha quindi, per la formula (1.1)

$$\begin{aligned}
 \partial_t \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \partial_t [g^{k\ell} (\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij})] \\
 &= \frac{1}{2} \partial_t g^{k\ell} (\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}) + \frac{1}{2} g^{k\ell} (\partial_t \partial_i g_{j\ell} + \partial_t \partial_j g_{i\ell} - \partial_t \partial_\ell g_{ij}) \\
 &= \frac{1}{2} g^{k\ell} (\partial_i \partial_t g_{j\ell} + \partial_j \partial_t g_{i\ell} - \partial_\ell \partial_t g_{ij}),
 \end{aligned}$$

da cui concludiamo, per quanto detto sopra, che la variazione dei simboli di Christoffel in una carta locale è data dalla seguente formula generale per una metrica che varia nel tempo:

$$\partial_t \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell} (\nabla_i \partial_t g_{j\ell} + \nabla_j \partial_t g_{i\ell} - \nabla_\ell \partial_t g_{ij}) \quad (2.2)$$

Dunque, nel nostro caso del flusso di Ricci, abbiamo

$$\begin{aligned}
 \partial_t \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{k\ell} (\nabla_i (-2R_{j\ell}) + \nabla_j (-2R_{i\ell}) - \nabla_\ell (-2R_{ij})) \\
 &= -g^{k\ell} (\nabla_i R_{j\ell} + \nabla_j R_{i\ell} - \nabla_\ell R_{ij}) \\
 &= -\nabla_i R_j^k - \nabla_j R_i^k + \nabla^k R_{ij}.
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

EVOLUZIONE DEL TENSORE DI RIEMANN. Seguendo la linea di Hamilton [50], calcoliamo come sopra, in coordinate normali centrate nel punto dove vogliamo calcolare la derivata temporale del tensore di Riemann e dove dunque i simboli di Christoffel sono nulli. Derivando la formula (1.3) per l'operatore di Riemann in termini dei simboli di Christoffel, si ottiene

$$\partial_t R_{ij\ell}^h = \partial_t \partial_i \Gamma_{j\ell}^h - \partial_t \partial_j \Gamma_{i\ell}^h = \partial_i \partial_t \Gamma_{j\ell}^h - \partial_j \partial_t \Gamma_{i\ell}^h,$$

da cui

$$\partial_t R_{ijk\ell} = g_{hk} (\partial_i \partial_t \Gamma_{j\ell}^h - \partial_j \partial_t \Gamma_{i\ell}^h) + \partial_t g_{hk} R_{ij\ell}^h.$$

Sostituendo l'espressione (2.2), per l'evoluzione dei simboli di Christoffel, abbiamo allora

$$\begin{aligned}
\partial_t R_{ijkl} &= g_{hk} \left[\nabla_i \left(\frac{1}{2} g^{hm} (\nabla_j \partial_t g_{\ell m} + \nabla_\ell \partial_t g_{jm} - \nabla_m \partial_t g_{j\ell}) \right) \right. \\
&\quad \left. - \nabla_j \left(\frac{1}{2} g^{hm} (\nabla_i \partial_t g_{\ell m} + \nabla_\ell \partial_t g_{im} - \nabla_m \partial_t g_{i\ell}) \right) \right] \\
&\quad + \partial_t g_{hk} R_{ij\ell}^h \\
&= \frac{1}{2} (\nabla_i \nabla_j \partial_t g_{\ell k} + \nabla_i \nabla_\ell \partial_t g_{jk} - \nabla_i \nabla_k \partial_t g_{j\ell} \\
&\quad - \nabla_j \nabla_i \partial_t g_{\ell k} - \nabla_j \nabla_\ell \partial_t g_{ik} + \nabla_j \nabla_k \partial_t g_{i\ell}) + \partial_t g_{hk} R_{ij\ell}^h \\
&= \frac{1}{2} (\nabla_i \nabla_\ell \partial_t g_{jk} - \nabla_i \nabla_k \partial_t g_{j\ell} - \nabla_j \nabla_\ell \partial_t g_{ik} + \nabla_j \nabla_k \partial_t g_{i\ell}) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\nabla_i \nabla_j \partial_t g_{\ell k} - \nabla_j \nabla_i \partial_t g_{\ell k}) + \partial_t g_{hk} R_{ij\ell}^h.
\end{aligned}$$

Usando la formula per l'errore nello scambio di due derivate covarianti di un tensore, vista nella Sezione 1.2, si ha

$$\begin{aligned}
\partial_t R_{ijkl} &= \frac{1}{2} (\nabla_i \nabla_\ell \partial_t g_{jk} - \nabla_i \nabla_k \partial_t g_{j\ell} - \nabla_j \nabla_\ell \partial_t g_{ik} + \nabla_j \nabla_k \partial_t g_{i\ell}) \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{hq} R_{ijkq} \partial_t g_{h\ell} + \frac{1}{2} g^{hq} R_{ij\ell q} \partial_t g_{hk} + g^{hq} R_{ijq\ell} \partial_t g_{hk} \\
&= \frac{1}{2} (\nabla_i \nabla_\ell \partial_t g_{jk} - \nabla_i \nabla_k \partial_t g_{j\ell} - \nabla_j \nabla_\ell \partial_t g_{ik} + \nabla_j \nabla_k \partial_t g_{i\ell}) \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{hq} (R_{ijkq} \partial_t g_{h\ell} + R_{ijq\ell} \partial_t g_{hk}),
\end{aligned}$$

che è dunque (in una qualunque carta locale) la formula di evoluzione del tensore di Riemann valida per qualsiasi metrica che varia nel tempo. Nel nostro caso del flusso di Ricci, $\partial_t g_{ij} = -2R_{ij}$, abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\partial_t R_{ijkl} &= \nabla_i \nabla_k R_{j\ell} - \nabla_i \nabla_\ell R_{jk} - \nabla_j \nabla_k R_{i\ell} + \nabla_j \nabla_\ell R_{ik} \\
&\quad - g^{hq} (R_{ijkq} R_{h\ell} + R_{ijq\ell} R_{hk}).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Definiamo i tensori

$$B_{ijkl} = g^{mr} g^{qs} R_{miqj} R_{rks\ell}$$

e notiamo che abbiamo le ovvie simmetrie

$$B_{ijkl} = B_{jilk} = B_{klij}.$$

Vale il seguente lemma.

Lemma 2.4. Per ogni metrica g il tensore di curvatura R_{ijkl} soddisfa l'identità

$$\begin{aligned} \Delta R_{ijkl} + 2(B_{ijkl} - B_{ij\ell k} - B_{i\ell jk} + B_{ikj\ell}) \\ = \nabla_i \nabla_k R_{j\ell} - \nabla_i \nabla_\ell R_{jk} - \nabla_j \nabla_k R_{i\ell} + \nabla_j \nabla_\ell R_{ik} \\ + g^{hq} (R_{hjk\ell} R_{qi} + R_{ihk\ell} R_{qj}). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Questa formula è ottenuta dalla seconda identità di Bianchi

$$\nabla_i R_{jk\ell m} + \nabla_j R_{ki\ell m} + \nabla_k R_{ij\ell m} = 0,$$

differenziando, scambiando le derivate, permutando gli indici e contraendo. Per iniziare, si ha

$$\Delta R_{ijkl} = g^{hq} \nabla_h \nabla_q R_{ijkl} = g^{hq} (\nabla_h \nabla_i R_{qjkl} - \nabla_h \nabla_j R_{qik\ell}), \quad (2.5)$$

differenziando la seconda identità di Bianchi e contraendo. Esaminiamo il primo termine, poiché il secondo si ottiene dal primo scambiando i e j . Invertendo l'ordine delle derivate, abbiamo che

$$g^{hq} \nabla_h \nabla_i R_{qjkl} - g^{hq} \nabla_i \nabla_h R_{qjkl}$$

è uguale a

$$g^{hq} g^{ms} (R_{hiqm} R_{sjkl} + R_{hijm} R_{qsk\ell} + R_{hikm} R_{qj\ell s} + R_{hi\ell m} R_{qjks})$$

(sempre per la formula per l'errore nello scambio di due derivate covarianti). Il primo di questi termini si contrae a $g^{hq} R_{hjk\ell} R_{qi}$. Sul secondo termine possiamo usare la prima identità di Bianchi per scriverlo in termini del tensore $B_{ijk\ell}$, quindi

$$g^{hq} g^{ms} R_{hijm} R_{qsk\ell} = -B_{ijk\ell} + B_{ij\ell k}$$

e gli ultimi due termini sono $-B_{ikj\ell} + B_{i\ell jk}$. Inoltre, derivando la seconda identità di Bianchi contratta (1.6), si ha

$$g^{hq} \nabla_i \nabla_h R_{qjkl} = \nabla_i \nabla_k R_{j\ell} - \nabla_i \nabla_\ell R_{jk},$$

da cui otteniamo infine

$$\begin{aligned} g^{hq} \nabla_h \nabla_i R_{qjkl} &= \nabla_i \nabla_k R_{j\ell} - \nabla_i \nabla_\ell R_{jk} - (B_{ijk\ell} - B_{ij\ell k} - B_{i\ell jk} + B_{ikj\ell}) \\ &\quad + g^{hq} R_{hjk\ell} R_{qi}. \end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione nella formula (2.5) per ΔR_{ijkl} e facendo lo stesso per il termine con i e j scambiati, si ottiene la formula del lemma. $\square$

Sostituendo allora l'espressione trovata in questo lemma nella formula (2.4), otteniamo la seguente equazione di evoluzione (chiaramente parabolica) del tensore di Riemann durante il flusso di Ricci:

$$\begin{aligned} \partial_t R_{ijk\ell} = & \Delta R_{ijk\ell} + 2(B_{ijk\ell} - B_{ij\ell k} - B_{i\ell jk} + B_{ikj\ell}) \\ & - g^{hq}(R_{hjk\ell}R_{qi} + R_{ihk\ell}R_{qj} + R_{ijh\ell}R_{qk} + R_{ijkh}R_{q\ell}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

EVOLUZIONE DEL TENSORE DI RICCI. Contraendo la precedente equazione (2.6) e tenendo presente l'equazione di evoluzione dell'inversa della metrica, si ottiene la seguente equazione per l'evoluzione del tensore di Ricci:

$$\partial_t R_{ik} = \Delta R_{ik} + 2g^{j\ell}(B_{ijk\ell} - 2B_{ij\ell k}) + 2g^{hr}g^{qs}R_{hiqk}R_{rs} - 2g^{hq}R_{hi}R_{qk}.$$

Ora, per la prima identità di Bianchi, si ha

$$\begin{aligned} g^{j\ell}B_{ijk\ell} &= g^{j\ell}g^{hr}g^{qs}R_{hiqj}R_{rks\ell} = g^{j\ell}g^{hr}g^{qs}R_{hqi j}R_{rsk\ell} \\ &= g^{j\ell}g^{hr}g^{qs}(R_{hiqj} - R_{hjqi})(R_{rks\ell} - R_{r\ell sk}) = 2g^{j\ell}(B_{ijk\ell} - B_{ij\ell k}), \end{aligned}$$

il che implica

$$g^{j\ell}(B_{ijk\ell} - 2B_{ij\ell k}) = 0.$$

Dunque, il tensore di Ricci soddisfa l'equazione di evoluzione

$$\partial_t R_{ik} = \Delta R_{ik} + 2g^{hr}g^{qs}R_{hiqk}R_{rs} - 2R_{ik}^2,$$

dove con R_{ik}^2 abbiamo indicato il tensore simmetrico $R_{i\ell}R_k^\ell$ ("quadrato" del tensore di Ricci, la cui traccia è uguale a $|\text{Ric}|^2$).

Questa equazione si può ottenere anche direttamente (in particolare, se si è interessati solo al caso di dimensione 3, dove il tensore di Ricci determina il tensore di Riemann). Dalla formula (1.3), si ha la seguente espressione del tensore di Ricci in termini dei simboli di Christoffel:

$$R_{jk} = \partial_i \Gamma_{jk}^i - \partial_j \Gamma_{ik}^i + \Gamma_{jk}^\ell \Gamma_{\ell i}^i - \Gamma_{ik}^\ell \Gamma_{j\ell}^i. \quad (2.7)$$

Come sopra, calcoliamo in coordinate normali centrate nel punto dove vogliamo calcolare la derivata temporale del tensore di Ricci, dove dunque i simboli di Christoffel sono nulli. Allora, derivando questa espressione, otteniamo

$$\partial_t R_{jk} = \partial_i \partial_t \Gamma_{jk}^i - \partial_j \partial_t \Gamma_{ik}^i,$$

dunque, in una carta locale generica,

$$\partial_t R_{jk} = \nabla_i \partial_t \Gamma_{jk}^i - \nabla_j \partial_t \Gamma_{ik}^i$$

e sostituendo l'espressione (2.3) per la variazione dei simboli di Christoffel,

$$\begin{aligned}\partial_t R_{jk} &= -\nabla_i(\nabla_j R_k^i + \nabla_k R_j^i - \nabla^i R_{jk}) + \nabla_j(\nabla_i R_k^i + \nabla_k R_i^i - \nabla^i R_{ik}) \\ &= \Delta R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R - \nabla_i \nabla_j R_k^i - \nabla_i \nabla_k R_j^i.\end{aligned}$$

Usando ora la formula di commutazione delle derivate seconde,

$$\nabla_i \nabla_k R_j^i - \nabla_k \nabla_i R_j^i = R_{ik\ell}^i R_j^\ell + R_{ikj}^\ell R_\ell^i = R_{k\ell} R_j^\ell + R_{ikj\ell} R^{\ell i},$$

per scambiare le derivate covarianti dei due ultimi termini a destra, otteniamo

$$\begin{aligned}\partial_t R_{jk} &= \Delta R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R - \nabla_j \nabla_i R_k^i - \nabla_k \nabla_i R_j^i \\ &\quad - R_{j\ell} R_k^\ell - R_{k\ell} R_j^\ell - R_{ijk\ell} R^{\ell i} - R_{ikj\ell} R^{\ell i} \\ &= \Delta R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R - \nabla_j \nabla_i R_k^i - \nabla_k \nabla_i R_j^i - 2R_{jk}^2 - 2R_{ijk\ell} R^{\ell i}.\end{aligned}$$

Infine, per l'uguaglianza (1.7), si ha $\nabla_i R_k^i = \nabla_k R/2$, dunque

$$\begin{aligned}\partial_t R_{jk} &= \Delta R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R - \nabla_j \nabla_i R_k^i/2 - \nabla_k \nabla_i R_j^i/2 - 2R_{jk}^2 - 2R_{ijk\ell} R^{\ell i} \\ &= \Delta R_{jk} - 2R_{jk}^2 - 2R_{ijk\ell} R^{\ell i}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

In dimensione 3, possiamo esprimere il tensore di Riemann per mezzo del tensore di Ricci con la formula (1.12),

$$R_{ijk\ell} = R_{ik} g_{j\ell} + R_{j\ell} g_{ik} - R_{i\ell} g_{jk} - R_{jk} g_{i\ell} - \frac{R}{2}(g_{ik} g_{j\ell} - g_{i\ell} g_{jk}),$$

vista nella Sezione 1.6. Contraendo questa espressione con $R^{\ell i}$, si ha

$$R_{ijk\ell} R^{\ell i} = 2R_{jk}^2 - |\text{Ric}|^2 g_{jk} - \frac{3}{2} R R_{jk} + \frac{R^2}{2} g_{jk}$$

e sostituendo nell'equazione (2.8), otteniamo l'equazione di evoluzione del tensore di Ricci in dimensione 3.

$$\partial_t R_{jk} = \Delta R_{jk} - 6R_{jk}^2 + 3R R_{jk} + 2|\text{Ric}|^2 g_{jk} - R^2 g_{jk},\tag{2.9}$$

Si osservi che questa equazione è un'equazione (sistema) di reazione-diffusione per il tensore di Ricci.

Calcoliamo anche l'equazione di evoluzione del quadrato della norma del tensore di Ricci, per mezzo delle formule (2.8) e (2.1):

$$\begin{aligned}\partial_t |\text{Ric}|^2 &= \partial_t (R_{jk} g^{jm} g^{ki} R_{mi}) \\ &= 2(\Delta R_{jk} - 2R_{jk}^2 - 2R_{ijk\ell} R^{\ell i}) R^{jk} + 4R_{jk} R^{jm} R_m^k \\ &= \Delta |\text{Ric}|^2 - 2|\nabla \text{Ric}|^2 + 4R_{ij} R_{ikj\ell} R^{\ell i},\end{aligned}$$

che in dimensione 3, diventa

$$\partial_t |\text{Ric}|^2 = \Delta |\text{Ric}|^2 - 2 |\nabla \text{Ric}|^2 + 10R |\text{Ric}|^2 - 2R^3 - 8g^{ij} R_{ij}^3, \quad (2.10)$$

dove R_{ij}^3 è il tensore simmetrico $R_i^k R_k^\ell R_{\ell j}$, “cubo” del tensore di Ricci.

EVOLUZIONE DELLA CURVATURA SCALARE. Per mezzo delle formule (2.8) e (2.1), calcoliamo

$$\partial_t R = \partial_t (g^{jk} R_{jk}) = 2R^{jk} R_{jk} + g^{jk} (\Delta R_{jk} - 2R_{jk}^2 - 2R_{ijk\ell} R^{\ell i})$$

e semplificando, abbiamo l’equazione

$$\partial_t R = \Delta R + 2|\text{Ric}|^2,$$

valida in ogni dimensione $n \in \mathbb{N}$.

EVOLUZIONE DELLA MISURA RIEMANNIANA CANONICA. Consideriamo infine

$$dV_g = \sqrt{\det g} \, dx$$

e calcoliamo la sua derivata temporale:

$$\partial_t dV_g = \partial_t \sqrt{\det g} \, dx = \frac{1}{2\sqrt{\det g}} \partial_t \det g \, dx$$

Usando la formula per la derivata del determinante

$$\partial_t \det g = \det g \, g^{ij} \partial_t g_{ij},$$

otteniamo

$$\partial_t dV_g = \frac{1}{2} \sqrt{\det g} \, g^{ij} (-2R_{ij}) \, dx = -\sqrt{\det g} \, R \, dx = -R \, dV_g.$$

Quindi, nelle regioni dove la curvatura scalare è positiva, il “volume locale” decresce; dove è negativa, aumenta.

Segue che se M è compatta e $f: M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione C^1 , si ha la formula

$$\frac{d}{dt} \int_M f \, dV_g = \int_M (\partial_t f - Rf) \, dV_g.$$

In particolare, se $f = 1$, otteniamo la variazione del volume totale:

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(M, g(t)) = - \int_M R \, dV_g. \quad (2.11)$$

IL PRINCIPIO DEL MASSIMO

Prima di vedere l'enunciato e la dimostrazione della versione del *principio del massimo parabolico* su varietà riemanniane adatto al nostro contesto, discutiamo un esempio in $\mathbb{R}^n$.

Sia $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ una soluzione periodica in $\mathbb{R}^n$ dell'equazione parabolica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \langle X, \nabla u \rangle + f, \quad (3.1)$$

con $X : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ entrambi regolari.

Mostriamo che se $u(x, 0) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e f è positiva dappertutto, allora $u \geq 0$ in $\mathbb{R}^n \times [0, T]$.

Consideriamo la funzione $v = u + \delta$, per $\delta > 0$ e osserviamo che anche v soddisfa l'equazione (3.1), inoltre per ipotesi, $v(x, 0) \geq \delta > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Supponiamo per assurdo che esistano dei punti in $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ dove v si annulla. Sia $t_0 > 0$ il "primo" tempo in cui questo avviene, con $v(x_0, t_0) = 0$, per $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si vede facilmente che tale "primo" tempo esiste per l'ipotesi di periodicità e la sua positività a tempo zero. Segue che

$$\nabla v(x_0, t_0) = 0, \quad \Delta v(x_0, t_0) \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) \leq 0.$$

Dunque, usando l'equazione (3.1), si avrebbe la contraddizione

$$0 \geq \frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) = \Delta v(x_0, t_0) + \langle X(x_0, t_0), \nabla v(x_0, t_0) \rangle + f(x_0, t_0) > 0,$$

essendo $f(x_0, t_0) > 0$, per ipotesi. Dunque, in $\mathbb{R}^n \times [0, T]$, si ha $v > 0$, da cui $u > -\delta$ e per l'arbitrarietà di $\delta > 0$, concludiamo che $u \geq 0$ in ogni punto.

Con un argomento analogo si mostra che $u_{\min}(t) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, t)$ è nondecrecente nel tempo. Inoltre, l'ipotesi di positività di f si può indebolire richiedendo solo $f \geq 0$.

Osservazione 3.1. È importante sottolineare che il principio del massimo vale per equazioni scalari e non per sistemi in generale. Inoltre è peculiare delle equazioni paraboliche (ed ellittiche) del secondo ordine (non vale per equazioni di ordine più alto, come ad esempio $\partial_t u = \Delta \Delta u$).

3.1 IL PRINCIPIO DEL MASSIMO PARABOLICO SU VARIETÀ

Vediamo ora un risultato molto generale, utile nel contesto dei flussi geometrici.

Teorema 3.2 (Principio del massimo parabolico – [69, Teorema 3.1.1]). Sia g_t , per $t \in [0, T]$, una famiglia di metriche riemanniane su una varietà connessa M , con eventuale bordo ∂M , tale che la dipendenza da t sia C^∞ .

Sia $u : M \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^∞ che soddisfa:

$$\partial_t u \leq \Delta_{g_t} u + g_t(X(p, u, \nabla u, t), \nabla u) + b(u),$$

dove X è un campo vettoriale qualunque e b una funzione localmente lipschitziana.

Supponiamo che per ogni $t \in [0, T]$, esista un valore $\delta > 0$ e un sottoinsieme compatto $K \subseteq M \setminus \partial M$ tale che per ogni istante $t' \in (t - \delta, t + \delta) \cap [0, T]$ il massimo di $u(\cdot, t')$ sia raggiunto in almeno un punto di K (questo è chiaramente vero se M è compatta senza bordo). Ponendo

$$u_{\max}(t) = \max_{p \in M} u(p, t),$$

si ha che questa funzione è localmente lipschitziana, quindi differenziabile per quasi ogni tempo $t \in [0, T]$ e per ogni istante di differenziabilità $t \in (0, T)$ vale

$$\frac{du_{\max}(t)}{dt} \leq b(u_{\max}(t)).$$

Di conseguenza, se $h : [0, T'] \rightarrow \mathbb{R}$ è una soluzione dell'ODE

$$\begin{cases} h'(t) = b(h(t)) \\ h(0) = u_{\max}(0) \end{cases}$$

per $T' \leq T$, allora $u \leq h$ in $M \times [0, T']$. Inoltre, se a un certo istante $\tau \in (0, T')$ si ha $u_{\max}(\tau) = h(\tau)$, allora $u = h$ in $M \times [0, \tau]$, ovvero $u(\cdot, t)$ è costante nello spazio.

Corollario 3.3. Nelle stesse ipotesi, se la funzione b è nonpositiva (in particolare se è identicamente nulla), se il massimo di u è nondecrecente in un intervallo temporale $I \subseteq [0, T]$, la funzione u è costante in $M \times I$.

La prima parte del teorema è conseguenza del lemma seguente. L'ultima affermazione, detta *principio del massimo forte*, è più delicata (si

veda il libro di Landis [66] per una dimostrazione e l'ampia discussione in [32, Capitolo 12]).

Lemma 3.4 (Hamilton's trick). Sia $u : M \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^1 tale che per ogni tempo t , esistano un valore $\delta > 0$ e un sottoinsieme compatto $K \subseteq M \setminus \partial M$ tali che per ogni istante $t' \in (t - \delta, t + \delta)$ il massimo $u_{\max}(t') = \max_{p \in M} u(p, t')$ sia raggiunto in almeno un punto di K . Allora, $u_{\max}$ è una funzione localmente lipschitziana in $(0, T)$ e per ogni istante di differenziabilità $t \in (0, T)$ si ha:

$$\frac{du_{\max}(t)}{dt} = \frac{\partial u(p, t)}{\partial t},$$

dove $p \in M$ è un qualsiasi punto non appartenente al bordo di M tale che $u(\cdot, t)$ raggiunga il suo massimo in p .

Dimostrazione. Fissiamo $t \in (0, T)$; abbiamo $\delta > 0$ e K come nelle ipotesi, dunque su $K \times (t - \delta, t + \delta)$ la funzione u è lipschitziana con una certa costante $C > 0$. Consideriamo un valore $0 < \varepsilon < \delta$; allora abbiamo

$$u_{\max}(t + \varepsilon) = u(q, t + \varepsilon) \leq u(q, t) + \varepsilon C \leq u_{\max}(t) + \varepsilon C,$$

per un qualche $q \in K$. Quindi,

$$\frac{u_{\max}(t + \varepsilon) - u_{\max}(t)}{\varepsilon} \leq C.$$

Analogamente,

$$u_{\max}(t) = u(p, t) \leq u(p, t + \varepsilon) + \varepsilon C \leq u_{\max}(t + \varepsilon) + \varepsilon C,$$

per un qualche $p \in K$. Quindi,

$$\frac{u_{\max}(t) - u_{\max}(t + \varepsilon)}{\varepsilon} \leq C \quad \implies \quad \frac{u_{\max}(t + \varepsilon) - u_{\max}(t)}{\varepsilon} \geq -C.$$

Con lo stesso argomento, considerando $-\delta < \varepsilon < 0$, concludiamo che $u_{\max}$ è una funzione localmente lipschitziana in $(0, T)$ e quindi differenziabile quasi ovunque.

Supponiamo ora che t sia uno di tali istanti di differenziabilità e sia p un punto nell'insieme non vuoto

$$\{p \in M \setminus \partial M \mid u(p, t) = u_{\max}(t)\}.$$

Per il teorema di Lagrange, per ogni $0 < \varepsilon < \delta$, abbiamo

$$u(p, t + \varepsilon) = u(p, t) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(p, \xi)$$

per un qualche $\xi \in (t, t + \varepsilon)$, quindi

$$u_{\max}(t + \varepsilon) \geq u(p, t + \varepsilon) = u_{\max}(t) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(p, \xi),$$

il che implica, se scegliamo $\varepsilon > 0$,

$$\frac{u_{\max}(t + \varepsilon) - u_{\max}(t)}{\varepsilon} \geq \frac{\partial u}{\partial t}(p, \xi).$$

Mandando $\varepsilon \rightarrow 0$, otteniamo $u'_{\max}(t) \geq \frac{\partial u}{\partial t}(p, t)$.

Se invece scegliamo $-\delta < \varepsilon < 0$, dalla disuguaglianza

$$u_{\max}(t + \varepsilon) \geq u_{\max}(t) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(p, \xi)$$

dividendo per ε (che è negativo) si inverte il verso della disuguaglianza:

$$\frac{u_{\max}(t + \varepsilon) - u_{\max}(t)}{\varepsilon} \leq \frac{\partial u}{\partial t}(p, \xi)$$

e quando $\varepsilon \rightarrow 0$, abbiamo $u'_{\max}(t) \leq \frac{\partial u}{\partial t}(p, t)$, da cui segue la tesi del lemma. $\square$

Esercizio 3.5. Quando la funzione $u_{\max}$ non è differenziabile in t , si può dire comunque qualcosa usando la *derivata superiore*, ovvero il limite superiore dei rapporti incrementali (denotata con d^+). Si provi infatti che

$$\frac{d^+ u_{\max}(t)}{dt} = \sup_{\{p \in M \mid u(p, t) = u_{\max}(t)\}} \frac{\partial u(p, t)}{\partial t}.$$

Possiamo dunque dire informalmente che gli operatori di sup e di derivata superiore commutano. Lo stesso vale per inf e derivata inferiore.

Dimostrazione del Teorema 3.2 (prima parte). Grazie al lemma precedente, la funzione $u_{\max}$ è localmente lipschitziana. Sia t un istante di differenziabilità per $u_{\max}$. Scegliendo un qualunque punto $p \in M \setminus \partial M$ tale che $u(p, t) = u_{\max}(t)$, si ha:

$$u'_{\max}(t) = \frac{\partial u(p, t)}{\partial t} \leq \Delta_{g_t} u(p, t) + g_t(X, \nabla u(p, t)) + b(u(p, t)).$$

e poiché p è un punto di massimo spaziale, $\nabla u(p, t) = 0$ e $\Delta_{g_t} u(p, t) \leq 0$, di conseguenza:

$$u'_{\max}(t) \leq b(u(p, t)) = b(u_{\max}(t)).$$

Sia ora $h : [0, T'] \rightarrow \mathbb{R}$ come nelle ipotesi. Poiché $u_{\max}$ soddisfa quasi ovunque $u'_{\max}(t) \leq b(u_{\max}(t))$, definiamo per $\varepsilon > 0$, le funzioni approssimanti $h_\varepsilon : [0, T''] \rightarrow \mathbb{R}$ come le soluzioni massimali di:

$$\begin{cases} h'_\varepsilon(t) = b(h_\varepsilon(t)) \\ h_\varepsilon(0) = u_{\max}(0) + \varepsilon \end{cases}$$

È facile vedere che, poiché la funzione b è localmente lipschitziana, si ha $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon = h$ uniformemente sui compatti $[0, T' - \delta]$ (per la dipendenza continua dai dati iniziali, per ε sufficientemente piccolo, $T'' \geq T' - \delta$, per ogni $\delta > 0$ fissato). Supponiamo per assurdo che per un certo tempo positivo $\bar{t}$ si abbia $u_{\max}(\bar{t}) > h_\varepsilon(\bar{t})$ e sia $\bar{t} > 0$ l'estremo inferiore di tali tempi (al tempo zero $u_{\max}(0) = h_\varepsilon(0) - \varepsilon < h_\varepsilon(0)$). Allora $u_{\max}(\bar{t}) = h_\varepsilon(\bar{t})$. Poniamo $H_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t) - u_{\max}(t)$. In ogni tempo t di differenziabilità nell'intervallo $(0, \bar{t}]$, abbiamo allora

$$H'_\varepsilon(t) \geq b(h_\varepsilon(t)) - b(u_{\max}(t)) \geq -C|h_\varepsilon(t) - u_{\max}(t)| = -CH_\varepsilon(t),$$

dove $C > 0$ è una costante di Lipschitz locale per b . Allora,

$$(\log H_\varepsilon)'(t) \geq -C$$

e integrando tra 0 e t ,

$$\log \frac{H_\varepsilon(t)}{H_\varepsilon(0)} \geq -Ct \quad \implies \quad H_\varepsilon(t) \geq H_\varepsilon(0)e^{-Ct} = \varepsilon e^{-Ct}.$$

In particolare, per $t \rightarrow \bar{t}$, concludiamo $H_\varepsilon(\bar{t}) \geq \varepsilon e^{-C\bar{t}} > 0$, il che contraddice $H_\varepsilon(\bar{t}) = 0$. Quindi, $u_{\max}(t) \leq h_\varepsilon(t)$ per ogni t . Mandando $\varepsilon \rightarrow 0$, si ottiene $u_{\max}(t) \leq h(t)$ per ogni $t \in [0, T']$, concludendo la dimostrazione della prima parte del teorema. $\square$

Chiaramente, valgono risultati analoghi per il *minimo* di una soluzione di una disequazione alle derivate parziali. Inoltre, il principio del massimo per equazioni ellittiche segue facilmente come il caso speciale dove le quantità non dipendono dal tempo t .

3.2 APPLICAZIONI

Vediamo alcune applicazioni del principio del massimo all'evoluzione della curvatura durante il flusso di Ricci.

STIME SULLA CURVATURA SCALARE. La curvatura scalare R soddisfa, in ogni dimensione $n \in \mathbb{N}$,

$$\partial_t R = \Delta R + 2|\text{Ric}|^2 \geq \Delta R + 2R^2/n,$$

per la disuguaglianza $|\text{Ric}|^2 \geq R^2/n$, che si ottiene applicando la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz agli autovalori del tensore di Ricci.

Per il Teorema 3.2, otteniamo allora per il minimo della curvatura scalare $R_{\min}(t) = \min_{p \in M} R(p, t)$,

$$R'_{\min}(t) \geq 2R_{\min}^2(t)/n \geq 0$$

per quasi ogni $t \in [0, T)$. Dunque, per confronto con le soluzioni dell'equazione differenziale ordinaria $y' = 2y^2/n$, abbiamo che se $R_{\min}(0) \geq 0$, allora $R(t) \geq 0$ per ogni $t > 0$ (*preservazione della curvatura scalare nonnegativa*). Inoltre, per la seconda parte del Teorema 3.2 (il principio del massimo forte), $R_{\min}(t) > 0$ per ogni $t > 0$, oppure R è identicamente nulla in $M \times [0, T)$, ovvero, se in almeno un punto di M a tempo $t = 0$, la curvatura scalare è positiva, si ha $R > 0$ in ogni punto, per ogni tempo positivo (*preservazione della curvatura scalare positiva*). Se poi la curvatura scalare è positiva per la metrica iniziale, si ha

$$R_{\min}(t) \geq \frac{R_{\min}(0)}{1 - 2R_{\min}(0)t/n},$$

dunque, l'intervallo massimale di esistenza del flusso $[0, T_{\max})$ soddisfa

$$T_{\max} \leq n/2R_{\min}(0). \quad (3.2)$$

Infine, se $R_{\min}(0) < 0$, si ha la stima:

$$R_{\min}(t) \geq -\frac{n}{2t}.$$

STIME SULLA NORMA DEL TENSORE DI RICCI. Dall'equazione (2.10) di evoluzione di $|\text{Ric}|^2$ in dimensione $n = 3$, segue

$$\partial_t |\text{Ric}|^2 \leq \Delta |\text{Ric}|^2 + C|\text{Ric}|^3,$$

dove $C > 0$ è una costante reale. Per il Teorema 3.2, ponendo

$$|\text{Ric}|_{\max}(t) = \max_{p \in M} |\text{Ric}(p, t)|,$$

possiamo confrontare $|\text{Ric}|_{\max}^2$ con le soluzioni dell'ODE $y' = Cy^{3/2}$. Si ottiene allora la stima, per $0 \leq t \leq s < T$,

$$\frac{1}{|\text{Ric}|_{\max}(t)} - \frac{1}{|\text{Ric}|_{\max}(s)} \leq \frac{C}{2}(s - t).$$

Supponendo ora che $\limsup_{s \rightarrow T} |\text{Ric}|_{\max}(s) = +\infty$, cioè che Ric non sia limitato per $s \rightarrow T$, passando al $\limsup$, si ha

$$\frac{1}{|\text{Ric}|_{\max}(t)} \leq \frac{C(T - t)}{2} \quad \text{cioè} \quad |\text{Ric}|_{\max}(t) \geq \frac{2/C}{T - t},$$

per ogni $t \in [0, T)$. In altre parole, in dimensione 3, se la curvatura non è limitata al tendere di t a T , deve avere un tasso minimo di “scoppiamento” dell'ordine di $1/(T - t)$.

Esercizio 3.6. Usando l'equazione (2.6) di evoluzione del tensore di Riemann, si mostri che in generale, si ha

$$\partial_t |\text{Riem}|^2 \leq \Delta |\text{Riem}|^2 + C_n |\text{Riem}|^3,$$

per una costante C_n che dipende solo dalla dimensione $n \in \mathbb{N}$ e ragionando come sopra, se ne deduca l'analoga stima dal basso

$$|\text{Riem}|_{\max}(t) \geq \frac{C_n}{T - t},$$

se la curvatura non è limitata al tendere di t a T .

Inoltre, si provi la stima

$$|\text{Riem}|_{\max}(t) \leq \frac{|\text{Riem}|_{\max}(0)}{1 - C_n |\text{Riem}|_{\max}(0)t}.$$

per una costante C_n che dipende solo dalla dimensione $n \in \mathbb{N}$ e dalla varietà iniziale (M, g_0) .

In questo capitolo analizziamo come evolvono le derivate covarianti del tensore di curvatura lungo il flusso di Ricci. L'obiettivo ultimo, che vedremo più avanti, è dimostrare che se il flusso esiste in un intervallo massimale $[0, T)$ con $T < +\infty$, allora la norma del tensore di curvatura deve "esplodere" avvicinandosi a T :

$$\limsup_{t \rightarrow T} |\text{Riem}|_{\max}(t) = +\infty.$$

Introduciamo una notazione comoda per i calcoli e le stime che seguono: se T e S sono due tensori, indichiamo con $T * S$ una qualsiasi combinazione lineare di tensori formati mediante contrazioni di $T \otimes S$ usando la metrica o la sua inversa.

Si mostra facilmente che vale la formula "di Leibniz"

$$\nabla(T * S) = \nabla T * S + T * \nabla S. \quad (4.1)$$

La proprietà più rilevante di questo prodotto $*$ per i nostri scopi, è che si ha la stima

$$|T * S| \leq C |T| |S|,$$

con una costante $C \in \mathbb{R}$ che dipende solo dalla "struttura algebrica" della combinazione lineare e dalla scelta delle contrazioni.

Dimostriamo un lemma generale sull'evoluzione della derivata covariante di un tensore che soddisfa un'equazione di tipo calore (di reazione-diffusione).

Lemma 4.1. Sia $A(t)$ una famiglia di tensori che evolve secondo l'equazione

$$\partial_t A = \Delta A + B,$$

dove Δ è il laplaciano associato alla metrica $g(t)$ che evolve col flusso di Ricci e B è un tensore. Allora,

$$\partial_t \nabla A = \Delta \nabla A + \nabla \text{Riem} * A + \text{Riem} * \nabla A + \nabla B.$$

Dimostrazione. Calcoliamo l'evoluzione di ∇A in coordinate locali. Si ha

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \nabla_i A_{jk\dots}^{\ell q\dots} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} A_{jk\dots}^{\ell q\dots} - \Gamma_{ij}^s A_{sk\dots}^{\ell q\dots} - \Gamma_{ik}^s A_{js\dots}^{\ell q\dots} - \dots \right. \\
 &\quad \left. + \Gamma_{ip}^\ell A_{jk\dots}^{pq\dots} + \Gamma_{ip}^q A_{jk\dots}^{\ell p\dots} + \dots \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial A_{jk\dots}^{\ell q\dots}}{\partial t} - \Gamma_{ij}^s \frac{\partial A_{sk\dots}^{\ell q\dots}}{\partial t} - \dots - \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial t} A_{sk\dots}^{\ell q\dots} - \dots \\
 &\quad + \Gamma_{ip}^\ell \frac{\partial A_{jk\dots}^{pq\dots}}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \Gamma_{ip}^\ell}{\partial t} A_{jk\dots}^{pq\dots} + \dots \\
 &= \nabla_i \frac{\partial A_{jk\dots}^{\ell q\dots}}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial t} A_{sk\dots}^{\ell q\dots} - \dots + \frac{\partial \Gamma_{ip}^\ell}{\partial t} A_{jk\dots}^{pq\dots} + \dots
 \end{aligned}$$

e ricordando la formula (2.3) per l'evoluzione dei simboli di Christoffel, che può essere scritta come

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial t} = \nabla \text{Ric} * g,$$

abbiamo la seguente formula di commutazione delle derivate covariante e temporale:

$$\partial_t \nabla A = \nabla \partial_t A + \nabla \text{Ric} * A. \quad (4.2)$$

Sostituendo l'ipotesi $\partial_t A = \Delta A + B$, otteniamo

$$\partial_t \nabla A = \nabla(\Delta A + B) + \nabla \text{Ric} * A = \nabla \Delta A + \nabla B + \nabla \text{Ric} * A.$$

Dobbiamo ora commutare la derivata covariante con il laplaciano. Osserviamo che la formula per l'interscambio di due derivate covarianti di un tensore T , calcolata nella Sezione 1.2, può essere espressa come

$$\nabla_i \nabla_j T_{\dots}^{\dots} - \nabla_j \nabla_i T_{\dots}^{\dots} = (\text{Riem} * T)_{ij\dots}^{\dots}$$

dunque,

$$\begin{aligned}
 \nabla_i \nabla_j \nabla_k A_{\dots}^{\dots} &= \nabla_j \nabla_i \nabla_k A_{\dots}^{\dots} + (\text{Riem} * \nabla A)_{ijk\dots}^{\dots} \\
 &= \nabla_j (\nabla_k \nabla_i A_{\dots}^{\dots} + (\text{Riem} * A)_{ik\dots}^{\dots}) + (\text{Riem} * \nabla A)_{ijk\dots}^{\dots} \\
 &= \nabla_j \nabla_k \nabla_i A_{\dots}^{\dots} + (\nabla \text{Riem} * A)_{ijk\dots}^{\dots} + (\text{Riem} * \nabla A)_{ijk\dots}^{\dots},
 \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato la formula (4.1). Contraendo con g^{jk} , si ottiene la formula di interscambio tra derivata covariante e laplaciano:

$$\nabla \Delta A = \Delta \nabla A + \nabla \text{Riem} * A + \text{Riem} * \nabla A. \quad (4.3)$$

Infine, osserviamo che $\nabla \text{Ric} * A = \nabla \text{Riem} * A$ e concludiamo che

$$\begin{aligned}\partial_t \nabla A &= \nabla \Delta A + \nabla B + \nabla \text{Ric} * A \\ &= \Delta \nabla A + \nabla \text{Riem} * A + \text{Riem} * \nabla A + \nabla B + \nabla \text{Ric} * A \\ &= \Delta \nabla A + \nabla \text{Riem} * A + \text{Riem} * \nabla A + \nabla B.\end{aligned}$$

□

4.1 EVOLUZIONE DELLE DERIVATE DEL TENSORE DI RIEMANN

Applicando iterativamente il Lemma 4.1 all'equazione di evoluzione del tensore di Riemann, otteniamo la seguente proposizione.

Proposizione 4.2. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, la derivata covariante k -esima del tensore di Riemann soddisfa un'equazione di evoluzione della forma:

$$\partial_t \nabla^k \text{Riem} = \Delta \nabla^k \text{Riem} + \sum_{i+j=k} \nabla^i \text{Riem} * \nabla^j \text{Riem}.$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $k \in \mathbb{N}$. Per $k = 0$, l'affermazione è l'equazione (2.6) di evoluzione del tensore di Riemann che può chiaramente essere scritta come

$$\partial_t \text{Riem} = \Delta \text{Riem} + \text{Riem} * \text{Riem}.$$

Supponiamo dunque la formula vera per $k \in \mathbb{N}$ e applichiamo la formula (4.2) di commutazione delle derivate covariante e temporale con $A = \nabla^k \text{Riem}$:

$$\partial_t \nabla^{k+1} \text{Riem} = \partial_t \nabla (\nabla^k \text{Riem}) = \nabla \partial_t (\nabla^k \text{Riem}) + \nabla \text{Ric} * \nabla^k \text{Riem}.$$

Allora, per l'ipotesi induttiva,

$$\begin{aligned}\partial_t \nabla^{k+1} \text{Riem} &= \nabla \left(\Delta \nabla^k \text{Riem} + \sum_{i+j=k} \nabla^i \text{Riem} * \nabla^j \text{Riem} \right) \\ &\quad + \nabla \text{Ric} * \nabla^k \text{Riem} \\ &= \nabla \Delta \nabla^k \text{Riem} + \sum_{i+j=k} \nabla^{i+1} \text{Riem} * \nabla^j \text{Riem} \\ &\quad + \sum_{i+j=k} \nabla^i \text{Riem} * \nabla^{j+1} \text{Riem} \\ &\quad + \nabla \text{Riem} * \nabla^k \text{Riem} \\ &= \nabla \Delta \nabla^k \text{Riem} + \sum_{\ell+m=k+1} \nabla^\ell \text{Riem} * \nabla^m \text{Riem}\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la “regola di Leibniz” per il prodotto $*$ e il fatto che $\nabla \text{Ric} * \nabla^k \text{Riem}$ è della forma $\nabla \text{Riem} * \nabla^k \text{Riem}$.

Applicando poi la formula (4.3) di interscambio tra derivata covariante e laplaciano, otteniamo

$$\nabla \Delta \nabla^k \text{Riem} = \Delta \nabla^{k+1} \text{Riem} + \nabla \text{Riem} * \nabla^k \text{Riem} + \text{Riem} * \nabla^{k+1} \text{Riem}$$

e sostituendo nella formula sopra, concludiamo

$$\partial_t \nabla^{k+1} \text{Riem} = \Delta \nabla^{k+1} \text{Riem} + \sum_{\ell+m=k+1} \nabla^\ell \text{Riem} * \nabla^m \text{Riem},$$

da cui la tesi, per induzione. $\square$

Da questa proposizione possiamo dedurre la struttura delle equazioni di evoluzione per le norme quadratiche delle derivate del tensore di curvatura.

Corollario 4.3. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, vale la seguente equazione di evoluzione:

$$\begin{aligned} \partial_t |\nabla^k \text{Riem}|^2 &= \Delta |\nabla^k \text{Riem}|^2 - 2 |\nabla^{k+1} \text{Riem}|^2 \\ &\quad + \sum_{i+j=k} \nabla^i \text{Riem} * \nabla^j \text{Riem} * \nabla^k \text{Riem}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dimostrazione. La derivata temporale della norma al quadrato di un tensore T che dipende dal tempo, si può esprimere schematicamente come

$$\partial_t |T|^2 = 2g(\partial_t T, T) + \partial_t g * T * T.$$

Nel nostro caso, $T = \nabla^k \text{Riem}$, dunque sostituendo le equazioni di evoluzione per $\nabla^k \text{Riem}$ e per la metrica (e la sua inversa), otteniamo

$$\begin{aligned} \partial_t |\nabla^k \text{Riem}|^2 &= 2g\left(\Delta \nabla^k \text{Riem} + \sum_{i+j=k} \nabla^i \text{Riem} * \nabla^j \text{Riem}, \nabla^k \text{Riem}\right) \\ &\quad + \text{Ric} * \nabla^k \text{Riem} * \nabla^k \text{Riem} \\ &= 2g(\Delta \nabla^k \text{Riem}, \nabla^k \text{Riem}) \\ &\quad + \sum_{i+j=k} \nabla^i \text{Riem} * \nabla^j \text{Riem} * \nabla^k \text{Riem}, \end{aligned}$$

dove abbiamo “assorbito” il termine con Ric nella sommatoria generale, essendo Ric una contrazione di Riem.

Usando infine la seguente identità generale per il laplaciano della norma al quadrato di un tensore,

$$\Delta|T|^2 = 2g(\Delta T, T) + 2|\nabla T|^2,$$

si ha la tesi. $\square$

Per mezzo di queste equazioni di evoluzione, possiamo ottenere delle stime sull'evoluzione degli integrali quadratici delle derivate del tensore di Riemann, se la varietà M è compatta.

Proposizione 4.4. Sia $(M, g(t))$ una soluzione del flusso di Ricci su una varietà compatta. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha la disuguaglianza

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 dV_g + 2 \int_M |\nabla^{k+1} \text{Riem}|^2 dV_g \\ \leq C_k \sum_{i+j=k} \int_M |\nabla^i \text{Riem}| |\nabla^j \text{Riem}| |\nabla^k \text{Riem}| dV_g, \end{aligned}$$

dove C_k è una costante che dipende solo dalla dimensione $n \in \mathbb{N}$ e dall'ordine k .

Dimostrazione. Usando l'equazione (4.4), calcoliamo la derivata temporale dell'integrale di $|\nabla^k \text{Riem}|^2$, ricordando che la forma di volume evolve come $\partial_t dV_g = -R dV_g$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 dV_g &= \int_M \partial_t |\nabla^k \text{Riem}|^2 dV_g + \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 \partial_t dV_g \\ &= \int_M \left(\Delta |\nabla^k \text{Riem}|^2 - 2|\nabla^{k+1} \text{Riem}|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i+j=k} \nabla^i \text{Riem} * \nabla^j \text{Riem} * \nabla^k \text{Riem} \right) dV_g \\ &\quad - \int_M R |\nabla^k \text{Riem}|^2 dV_g. \end{aligned}$$

Per il teorema della divergenza, l'integrale del laplaciano $\Delta|\nabla^k \text{Riem}|^2$ è nullo su una varietà compatta e il termine con la curvatura scalare R può essere assorbito nella sommatoria generale dei termini di reazione (essendo R una traccia di Riem). Portando il termine negativo $-2|\nabla^{k+1} \text{Riem}|^2$ a sinistra e stimando i termini nonlineari con la disuguaglianza $|T * S| \leq C|T||S|$, otteniamo allora la stima nell'enunciato della proposizione. $\square$

Da questa proposizione, possiamo ottenere stime puntuali sulle derivate del tensore di Riemann usando il principio del massimo, se la varietà n -dimensionale M è compatta.

L'equazione (4.4) implica infatti, per le proprietà del prodotto $*$, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \partial_t |\nabla^k \text{Riem}|^2 &\leq \Delta |\nabla^k \text{Riem}|^2 + C \sum_{i+j=k} |\nabla^i \text{Riem}| |\nabla^j \text{Riem}| |\nabla^k \text{Riem}| \\ &\leq \Delta |\nabla^k \text{Riem}|^2 + C_1 \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j < k}} |\nabla^i \text{Riem}|^2 |\nabla^j \text{Riem}|^2 + C_2 |\nabla^k \text{Riem}|^2, \end{aligned}$$

con due costanti C_1, C_2 dipendenti solo da k e n e dove abbiamo utilizzato la disuguaglianza tra media geometrica e media quadratica.

Se dunque supponiamo che per ogni $i < k$, $\nabla^i \text{Riem}$ sia uniformemente limitato nell'intervallo $[0, T)$, allora esiste una costante C tale che

$$\partial_t |\nabla^k \text{Riem}|^2 \leq \Delta |\nabla^k \text{Riem}|^2 + C |\nabla^k \text{Riem}|^2 + C,$$

per ogni $t \in [0, T)$. Quindi, per il principio del massimo, Teorema 3.2, ponendo

$$u_k(t) = |\nabla^k \text{Riem}|_{\max}^2(t) = \max_{p \in M} |\nabla^k \text{Riem}(p, t)|^2,$$

si ha la disuguaglianza differenziale lineare (non omogenea)

$$u'_k \leq C u_k + C,$$

che implica che anche $\nabla^k \text{Riem}$ è uniformemente limitato nell'intervallo $[0, T)$ (in dipendenza da $|\nabla^k \text{Riem}|_{\max}$ al tempo iniziale).

Usando questo argomento come passo induttivo, si ottiene allora la seguente conclusione.

Proposizione 4.5. Se il tensore di Riemann è uniformemente limitato nell'intervallo $[0, T)$, anche tutte le sue derivate (spaziali) lo sono. Più precisamente, se $|\text{Riem}| \leq C_0$, si ha $|\nabla^k \text{Riem}| \leq C_k$, dove le costanti C_k dipendono solo dalla metrica iniziale, dalla dimensione e dalla costante C_0 .

Nelle prossime sezioni, vedremo come riottenere questo risultato attraverso stime integrali che seguono da disuguaglianze di interpolazione del tipo di Gagliardo–Nirenberg per tensori su varietà riemanniane. Oltre a fornire una linea dimostrativa alternativa, vari risultati e tecniche che seguiranno si applicano in generale ai flussi geometrici, non

soltanto al flusso di Ricci, in particolare ai flussi di ordine più alto di due, dove il principio del massimo non è disponibile. Inoltre, le disuguaglianze integrali che otterremo saranno invarianti per riscaldamento, proprietà che è fondamentale nello studio delle singolarità del flusso.

4.2 DISUGUAGLIANZE DI INTERPOLAZIONE PER TENSORI

In questa sezione deriviamo alcune disuguaglianze che permettono di stimare le norme L^p delle derivate di ordine intermedio di un tensore in termini delle norme delle derivate di ordine superiore e del tensore stesso (genericamente, queste sono dette disuguaglianze di interpolazione e nel caso “classico” di $\mathbb{R}^n$, di *Gagliardo–Nirenberg* – si veda [19], per esempio). Queste stime saranno cruciali per controllare i termini nonlineari che appaiono nell’equazione di evoluzione della curvatura.

Sottolineiamo che le costanti che appaiono nelle varie disuguaglianze (Sobolev, Poincaré, interpolazione, etc) che si usano regolarmente per ottenere stime per i flussi geometrici, in genere dipendono dalla varietà (dalle sue proprietà/quantità geometriche associate, come la curvatura, per esempio), dunque prima di utilizzarle va assolutamente mostrato che tali costanti rimangono equilimitate durante il flusso (per esempio, se nello stimare la curvatura usiamo una disuguaglianza la cui costante dipende dalla curvatura stessa, rischiamo di cadere in un circolo vizioso).

In alcuni casi, come quelli che vedremo in questa sezione, tali costanti sono “universali” (in un certo senso, “algebriche”), indipendenti dalla varietà, dunque, le disuguaglianze associate potranno essere utilizzate direttamente. In altri casi, va sviluppata un’analisi preliminare del loro comportamento (si veda [68, Sezione 5], per esempio).

Proposizione 4.6. Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta e senza bordo, di dimensione $n \in \mathbb{N}$. Se

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

con $p, q, r \geq 1$, allora

$$\left(\int_M |\nabla T|^{2r} dV_g \right)^{1/r} \leq (2r - 2 + n) \left(\int_M |\nabla^2 T|^p dV_g \right)^{1/p} \left(\int_M |T|^q dV_g \right)^{1/q}$$

per ogni tensore T su M .

Dimostrazione. Vediamo nel dettaglio il caso in cui T è una 1-forma, il caso generale è solo più elaborato, ma con gli stessi calcoli.

Usando la formula di integrazione per parti (1.4), abbiamo

$$\begin{aligned}
 \int_M |\nabla T|^{2r} dV_g &= \int_M \nabla^i T_j \nabla_i T^j g(\nabla T, \nabla T)^{r-1} dV_g \\
 &= - \int_M T_j \nabla^i (\nabla_i T^j g(\nabla T, \nabla T)^{r-1}) dV_g \\
 &= - \int_M T_j \Delta T^j |\nabla T|^{2r-2} dV_g \\
 &\quad - \int_M T_j \nabla_i T^j [2(r-1)] \nabla^i \nabla_k T_\ell \nabla^k T^\ell |\nabla T|^{2r-4}
 \end{aligned}$$

e osservando che, per la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz e quella tra media aritmetica e quadratica,

$$\begin{aligned}
 |T_j \Delta T^j| &\leq |T| |\Delta T| \leq n |T| |\nabla^2 T|, \\
 |T_j \nabla_i T^j \nabla^i \nabla_k T_\ell \nabla^k T^\ell| |\nabla T|^{2r-4} &\leq |T| |\nabla^2 T| |\nabla T|^2 |\nabla T|^{2r-4},
 \end{aligned}$$

concludiamo

$$\int_M |\nabla T|^{2r} dV_g \leq (2r-2+n) \int_M |T| |\nabla^2 T| |\nabla T|^{2r-2} dV_g.$$

Usiamo ora la disuguaglianza di Hölder per stimare l'integrale a destra con

$$\left(\int_M |T|^q dV_g \right)^{1/q} \left(\int_M |\nabla^2 T|^p dV_g \right)^{1/p} \left(\int_M |\nabla T|^{(2r-2)\frac{r}{r-1}} dV_g \right)^{(r-1)/r},$$

in quanto

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r/(r-1)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{r-1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} + 1 = 1,$$

per l'ipotesi su p, q, r . Quindi

$$\int_M |\nabla T|^{2r} dV_g$$

è minore o uguale di

$$(2r-2+n) \left(\int_M |T|^q dV_g \right)^{1/q} \left(\int_M |\nabla^2 T|^p dV_g \right)^{1/p} \left(\int_M |\nabla T|^{2r} dV_g \right)^{1-1/r}$$

da cui si ha la tesi, dividendo per l'ultimo integrale (se è zero la tesi è ovvia). $\square$

Osservazione 4.7. Sottolineiamo il caso speciale $p = q = 2$ e $r = 1$,

$$\int_M |\nabla T|^2 dV_g \leq n \left(\int_M |\nabla^2 T|^2 dV_g \right)^{1/2} \left(\int_M |T|^2 dV_g \right)^{1/2}. \quad (4.5)$$

Ponendo $q = +\infty$ (o più precisamente, mandando $q \rightarrow +\infty$), si ha $r = p$, da cui il seguente corollario.

Corollario 4.8. Se $p \geq 1$, si ha

$$\left(\int_M |\nabla T|^{2p} dV_g \right)^{1/p} \leq (2p - 2 + n) \max_M |T| \left(\int_M |\nabla^2 T|^p dV_g \right)^{1/p}. \quad (4.6)$$

Ragionando per induzione, usando le disuguaglianze (4.5) e (4.6) come caso iniziale, si ottengono allora facilmente le seguenti due proposizioni (le si mostri per esercizio, oppure si veda [50, Sezione 12]).

Proposizione 4.9. Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta e senza bordo, di dimensione $n \in \mathbb{N}$. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$, esiste una costante $C = C(k, n)$ dipendente solo dalla dimensione e k (indipendente da (M, g)) tale che per ogni $i \in \{0, \dots, k\}$, si ha

$$\int_M |\nabla^i T|^2 dV_g \leq C(k, n) \left(\int_M |\nabla^k T|^2 dV_g \right)^{i/k} \left(\int_M |T|^2 dV_g \right)^{1-i/k}.$$

Proposizione 4.10. Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta e senza bordo, di dimensione $n \in \mathbb{N}$. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$, esiste una costante $C = C(k, n)$ dipendente solo dalla dimensione e k (indipendente da (M, g)) tale che per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$, si ha

$$\int_M |\nabla^i T|^{2k/i} dV_g \leq C(k, n) \max_M |T|^{2(k/i-1)} \int_M |\nabla^k T|^2 dV_g \quad (4.7)$$

4.3 STIME UNIFORMI SULLE DERIVATE DELLA CURVATURA

Utilizzando le disuguaglianze di interpolazione appena dimostrate, possiamo ottenere delle stime per le derivate (spaziali) del tensore di Riemann.

Supponiamo che per un flusso di Ricci $(M, g(t))$ nell'intervallo $[0, T)$, la curvatura sia uniformemente limitata, ovvero esista una costante $K < +\infty$ tale che:

$$\sup_{t \in [0, T)} \max_{p \in M} |\text{Riem}(p, t)| \leq K.$$

Vogliamo mostrare che allora anche tutte le derivate covarianti sono limitate in norma L^2 (si tenga presente la Proposizione 4.5).

Riprendiamo la disuguaglianza differenziale che si ottiene dalla Proposizione 4.4:

$$\frac{d}{dt} \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 dV_g \leq C_k \sum_{i+j=k} \int_M |\nabla^i \text{Riem}| |\nabla^j \text{Riem}| |\nabla^k \text{Riem}| dV_g, \quad (4.8)$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$, dove C_k è una costante che dipende solo dalla dimensione $n \in \mathbb{N}$ di M e dall'ordine k .

Vogliamo stimare il membro destro

$$\sum_{i+j=k} \int_M |\nabla^i \text{Riem}| |\nabla^j \text{Riem}| |\nabla^k \text{Riem}| dV_g,$$

dove osserviamo innanzitutto che per i due termini corrispondenti a $(i, j) = (0, k)$ e $(i, j) = (k, 0)$, usando l'ipotesi $|\text{Riem}| \leq K$, abbiamo immediatamente, se $(i, j) = (0, k)$,

$$\begin{aligned} \int_M |\text{Riem}| |\nabla^k \text{Riem}|^2 dV_g &\leq \max_M |\text{Riem}| \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 dV_g \\ &\leq K \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 dV_g \end{aligned}$$

e analogamente per il termine simmetrico con $(i, j) = (k, 0)$. Pertanto, resta da stimare soltanto la somma sui termini con $1 \leq i, j \leq k-1$, per i quali possiamo applicare la disuguaglianza di Hölder con esponenti coniugati $2k/i$, $2k/j$ e 2, che soddisfano

$$\frac{i}{2k} + \frac{j}{2k} + \frac{1}{2} = 1.$$

Poiché $i + j = k$, stimiamo ogni termine nel membro destro della disuguaglianza (4.8) con

$$\begin{aligned} C \left(\int_M |\nabla^i \text{Riem}|^{2k/i} dV_g \right)^{i/2k} &\left(\int_M |\nabla^j \text{Riem}|^{2k/j} dV_g \right)^{j/2k} \\ &\cdot \left(\int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 dV_g \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

e poi applichiamo le disuguaglianze di interpolazione (4.7) ai primi due integrali:

$$\begin{aligned} \left(\int_M |\nabla^i \text{Riem}|^{2k/i} dV_g \right)^{i/2k} &\leq C \max_M |\text{Riem}|^{1-i/k} \left(\int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 dV_g \right)^{i/2k} \\ \left(\int_M |\nabla^j \text{Riem}|^{2k/j} dV_g \right)^{j/2k} &\leq C \max_M |\text{Riem}|^{1-j/k} \left(\int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 dV_g \right)^{j/2k} \end{aligned}$$

ottenendo che il prodotto (4.9) è minore o uguale di

$$\begin{aligned} C \max_M |\text{Riem}|^{2-i/k-j/k} \left(\int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 dV_g \right)^{i/2k+j/2k+1/2} \\ = C \max_M |\text{Riem}| \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 dV_g, \end{aligned}$$

essendo $i + j = k$.

Dunque, concludiamo che nell'ipotesi che $|\text{Riem}| \leq K$, si ha

$$\frac{d}{dt} \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 dV_g \leq C \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 dV_g,$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$, dove C è una costante che dipende solo da k , dalla dimensione $n \in \mathbb{N}$ di M e dalla costante K .

Osservazione 4.11. Più precisamente, non tralasciando il termine $2 \int_M |\nabla^{k+1} \text{Riem}|^2 dV_g$ nella disuguaglianza della Proposizione 4.4, si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 dV_g &\leq -2 \int_M |\nabla^{k+1} \text{Riem}|^2 dV_g \\ &\quad + C \max_M |\text{Riem}| \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 dV_g. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ponendo $u_k(t) = \int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 dV_g$, si ha la disuguaglianza differenziale lineare $u'_k(t) \leq C u_k(t)$ che implica che la funzione u_k , cioè $\int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 dV_g$, è limitata in $[0, T)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (in dipendenza da $\int_M |\nabla^k \text{Riem}|^2 dV_g$ al tempo iniziale).

Usando poi le disuguaglianze d'interpolazione date dalla Proposizione 4.10 e osservando che il volume di $(M, g(t))$ è uniformemente limitato in $[0, T)$, si ottiene facilmente che per ogni $p \geq 2$ esiste una costante $C_{p,k,n}$ indipendente da $t \in [0, T)$ tale che:

$$\int_M |\nabla^k \text{Riem}|^p dV_g \leq C_{p,k,n}.$$

Quando allora $p > n$, vorremmo concludere, utilizzando le immersioni di Sobolev (si veda [3]), che si ha la stima puntuale

$$|\nabla^k \text{Riem}| \leq \tilde{C}(k, n)$$

con una costante $\tilde{C}(k, n)$ indipendente da $t \in [0, T)$.

Per poter fare questo è necessario che le metriche siano tutte equivalenti, al variare di $t \in [0, T)$ (sempre sotto l'ipotesi che $|\text{Riem}|$ sia limitato).

Lemma 4.12. Sia $g(t)$ una famiglia di metriche definita per $t \in [0, T)$, con T eventualmente uguale a $+\infty$. Supponiamo che

$$\int_0^T \max_M |\partial_t g|_{g(t)} dt \leq C < +\infty.$$

Allora tutte le metriche $g(t)$ sono equivalenti tra loro, ovvero esiste una costante $A > 0$ tale che per ogni vettore $v \in TM$ e per ogni $t, s \in [0, T)$, si ha

$$\frac{1}{A} |v|_{g(s)} \leq |v|_{g(t)} \leq A |v|_{g(s)}.$$

Inoltre, la metrica $g(t)$ converge uniformemente, per $t \rightarrow T$, a una metrica limite $g(T)$ continua e definita positiva, nel senso che in ogni carta locale, le componenti $g_{ij}(t)$ convergono uniformemente sui compatti a $g_{ij}(T)$.

Dimostrazione. Sia $v \in T_p M$ un vettore fissato non nullo (indipendente dal tempo). Calcoliamo la derivata temporale della sua norma al quadrato rispetto alla metrica che evolve,

$$\frac{d}{dt} |v|_{g(t)}^2 = \frac{d}{dt} (g_{ij}(t) v^i v^j) = \partial_t g_{ij}(t) v^i v^j$$

e stimiamo questa quantità, come segue:

$$\left| \frac{d}{dt} |v|_{g(t)}^2 \right| \leq |\partial_t g|_{g(t)} |v|_{g(t)}^2.$$

Dividendo per $|v|_{g(t)}^2$, otteniamo

$$\left| \frac{d}{dt} \log |v|_{g(t)}^2 \right| \leq |\partial_t g|_{g(t)}$$

e integrando in un intervallo $[s, r] \subseteq [0, T)$, concludiamo

$$\left| \log \frac{|v|_{g(r)}^2}{|v|_{g(s)}^2} \right| \leq \int_s^r \left| \frac{d}{dt} \log |v|_{g(t)}^2 \right| dt \leq \int_s^r |\partial_t g|_{g(t)} dt \leq C < +\infty,$$

per ogni $0 \leq s < r < T$. Quindi,

$$e^{-C} |v|_{g(s)}^2 \leq |v|_{g(r)}^2 \leq e^C |v|_{g(s)}^2, \quad (4.11)$$

il che dimostra l'equivalenza delle metriche. Inoltre, fissato un compatto $K \subseteq TM$, da questa stima segue che esiste una costante $C_K > 0$ tale che $|v|_{g(t)}^2 \leq C_K$ per ogni $v \in K$ e per ogni $t \in [0, T]$, dunque

$$\begin{aligned} \left| |v|_{g(r)}^2 - |v|_{g(s)}^2 \right| &\leq \int_s^r \left| \frac{d}{dt} |v|_{g(t)}^2 \right| dt \leq \int_s^r |\partial_t g|_{g(t)} |v|_{g(t)}^2 dt \\ &\leq C_K \int_s^r |\partial_t g|_{g(t)} dt \leq C_K C < +\infty, \end{aligned}$$

per ogni $0 \leq s < r < T$.

Questo argomento implica che le funzioni $v \mapsto |v|_{g(t)}^2$ sono una successione di Cauchy in norma uniforme su ogni compatto di TM , garantendo l'esistenza, per $t \rightarrow T$, di una funzione limite $|\cdot|_{g(T)}$ (che è una norma su tutti gli spazi tangenti di M) delle norme $|\cdot|_{g(t)}$, per $t \rightarrow T$, che soddisfa anch'essa le disuguaglianze (4.11), cioè è una norma equivalente a tutte le $|\cdot|_{g(t)}$, per ogni $t \in [0, T]$.

Utilizzando poi l'identità di polarizzazione, cioè che per ogni coppia di vettori $v, w \in T_p M$, si ha

$$g(t)(v, w) = \frac{1}{4} \left(|v + w|_{g(t)}^2 - |v - w|_{g(t)}^2 \right),$$

abbiamo che anche tutti i prodotti scalari $g(t)(v, w)$ convergono, per $t \rightarrow T$ e determinano un tensore limite $g(T)$ di tipo $(0, 2)$ che genera la norma $|\cdot|_{g(T)}$, dunque è definito positivo ed è quindi una metrica su M (equivalente a tutte le metriche $g(t)$).

Inoltre, segue che in una qualunque carta locale, le componenti $g_{ij}(t)$ convergono uniformemente sui compatti a $g_{ij}(T)$, quindi $g(T)$ è una metrica continua. $\square$

Osservazione 4.13. Sottolineiamo che in generale la metrica limite $g(T)$ in questo lemma potrebbe non essere C^∞ , ma soltanto continua.

Nel caso specifico del flusso di Ricci, si ha $\partial_t g = -2\text{Ric}$ e se dunque assumiamo che la curvatura sia limitata nell'intervallo $[0, T]$, allora anche il tensore di Ricci è limitato, di conseguenza,

$$\int_0^T \max_M |\partial_t g|_{g(t)} dt = 2 \int_0^T |\text{Ric}|_{\max}(t) dt \leq 2 \int_0^T C dt = 2CT < +\infty.$$

La condizione del lemma è quindi soddisfatta e questo dimostra che se la curvatura rimane limitata, la metrica converge a una metrica limite $g(T)$ ben-definita.

Ritornando alle stime, sappiamo che se la curvatura è limitata, abbiamo

$$\int_M |\nabla^k \text{Riem}|^p dV_g \leq C_{p,k,n}$$

per delle costanti $C(p, k, n)$ indipendenti da $t \in [0, T)$.

Ponendo dunque $E_k = |\nabla^k \text{Riem}|^2$, per ogni $p < +\infty$, abbiamo le stime

$$\int_M (|E_k|^p + |\nabla E_k|^p) dV_g \leq \tilde{C}_{p,k,n},$$

poiché anche ∇E_k può essere espresso in termini del tensore di Riemann e delle sue derivate covarianti.

Essendo E_k una funzione, per la disuguaglianza di Sobolev, se $p > n$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, si ha

$$\max_M |f|^p \leq C_t \int_M (|f|^p + |\nabla f|^p) dV_g,$$

con la costante C_t che dipende dalla metrica $g_{ij}(t)$ e quindi dal tempo t , ma non dalle derivate spaziali delle componenti $g_{ij}(t)$, poiché la metrica entra nell'espressione a destra solo attraverso $|\nabla f|^2 = g^{ij} \nabla_i f \nabla_j f$ e la misura $dV_g = \sqrt{\det g_{ij}} dx$, inoltre, la derivata $\nabla_i f = \partial f / \partial x^i$ è indipendente dalla connessione. Quindi, per le funzioni, le costanti di Sobolev C_t sono uniformemente limitate per ogni $t \in [0, T)$, essendo le metriche tutte equivalenti, per il Lemma 4.12. Applicando dunque questa disuguaglianza alla funzione E_k , riotteniamo la conclusione della Proposizione 4.5.

Proposizione 4.14. Se il tensore di Riemann è uniformemente limitato nell'intervallo $[0, T)$, anche tutte le sue derivate (spaziali) lo sono. Più precisamente, se $|\text{Riem}| \leq C_0$, si ha $|\nabla^k \text{Riem}| \leq C_k$, dove le costanti C_k dipendono solo dalla metrica iniziale, dalla dimensione e dalla costante C_0 .

Inoltre, tutte le metriche $g(t)$, per $t \in [0, T)$, sono equivalenti e convergono uniformemente (nelle componenti in ogni carta locale), per $t \rightarrow T$, a una metrica limite equivalente $g(T)$ di classe C^0 .

4.4 IL FLUSSO AL TEMPO MASSIMALE DI ESISTENZA

Supponendo la curvatura uniformemente limitata durante il flusso di Ricci $g(t)$ su una varietà compatta M nell'intervallo $[0, T)$, abbiamo visto che tutte le derivate del tensore di Riemann sono anch'esse limitate, tutte le metriche $g(t)$ sono equivalenti e $g_{ij}(t) \rightarrow g_{ij}(T)$, per $t \rightarrow T$. Abbiamo dunque che

$$|\nabla^k \partial_t g| = |-2\nabla^k \text{Ric}| \leq C |\nabla^k \text{Riem}| \leq C$$

e analogamente, per i simboli di Christoffel, dalla formula (2.3), segue

$$|\nabla^k \partial_t \Gamma| \leq 3 |\nabla^k \nabla \text{Ric}| \leq C |\nabla^{k+1} \text{Riem}| \leq C,$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Con un argomento per induzione, possiamo dimostrare la seguente formula (dove evitiamo di indicare gli indici) che mette in relazione le derivate covarianti iterate e le derivate in coordinate di un tensore S ,

$$\nabla^k S = \partial^k S + \sum_{i=1}^k \sum_{j_1 + \dots + j_i + m \leq k-1} \partial^{j_1} \Gamma \dots \partial^{j_i} \Gamma \partial^m S.$$

Ponendo $S = \partial_t \Gamma$ in questa formula e ragionando sempre per induzione, segue che

$$|\partial_t \partial^k \Gamma_{ij}^\ell| = |\partial^k \partial_t \Gamma_{ij}^\ell| \leq C \quad \implies \quad |\partial^k \Gamma_{ij}^\ell| \leq C,$$

per delle costanti indipendenti da $t \in [0, T)$. Dunque, per mezzo di tale formula, concludiamo che controllare le derivate covarianti di un tensore è equivalente a controllarne quelle in coordinate.

Questo vale in particolare per il tensore metrico, dunque $|\partial^k g_{ij}| \leq C$. Poiché poi

$$|\partial_t^m \partial^k g_{ij}| = |\partial^k \partial_t^m g_{ij}| = |-2\partial^k \partial_t^{m-1} \text{Ric}_{ij}| \leq C |\nabla^k \partial_t^{m-1} \text{Ric}_{ij}|$$

e si vede facilmente che $\partial_t^{m-1} \text{Ric}_{ij}$, per mezzo delle equazioni di evoluzione per il tensore di curvatura e per le sue derivate covarianti, si scrive come un'espressione in tali derivate covarianti (fino all'ordine $2m-2$), si ha $|\partial_t^m \partial^k g_{ij}| \leq C$.

Dunque, tutte le derivate spaziali e temporali in coordinate della metrica che evolve sono equilimitate, indipendentemente da $t \in [0, T)$. Per il teorema di Ascoli–Arzelà (con un'argomento diagonale standard), questo implica che le funzioni $g_{ij}(t)$ convergono a $g_{ij}(T)$ in C^∞ sui

compatti di ogni carta locale, quindi $(M, g(T))$ è ancora una varietà C^∞ e l'equazione $\partial_t g_{ij} = -2\text{Ric}_{ij}$ è soddisfatta nell'intervallo $[0, T]$.

Possiamo allora “far ripartire” il flusso col dato iniziale $g(T)$, per mezzo del teorema di esistenza per tempi piccoli (Teorema 2.2), ottenendo un “prolungamento” C^∞ del flusso oltre il tempo T , da cui T non può essere il tempo massimale di esistenza.

In conclusione, ricordando il risultato dell'Esercizio 3.6, abbiamo il seguente teorema.

Teorema 4.15. Se $T < +\infty$ è il tempo massimale di esistenza di un flusso di Ricci su una varietà compatta M , allora la curvatura non è limitata in $[0, T)$ e

$$|\text{Riem}|_{\max}(t) \geq \frac{2/C_n}{T-t},$$

per una costante C_n che dipende solo dalla dimensione $n \in \mathbb{N}$ di M .

Osservazione 4.16. In dimensione 3, si ha $|\text{Riem}| \leq C|\text{Ric}|$ per una costante C (segue dalla formula (1.12)), quindi nel teorema precedente possiamo sostituire Riem con Ric . In dimensione 2, la stessa conclusione vale con la curvatura scalare.

4.5 LE STIME DI BERNSTEIN-BANDO-SHI

Una delle proprietà fondamentali delle equazioni (strettamente) paraboliche è l'effetto di “regolarizzazione istantanea”: anche se il dato iniziale non è regolare, per ogni tempo positivo la soluzione diventa C^∞ (analitica). Nel caso del flusso di Ricci, in cui l'operatore è parabolico *degenere* (a causa dell'invarianza per diffeomorfismi – si veda l'appendice), questa conclusione è più delicata.

Teorema 4.17 (Bando [9]). Se $(M, g(t))$ è una soluzione del flusso di Ricci su una varietà compatta, esiste un atlante compatibile con la struttura C^∞ di M , tale che nelle coordinate date da ogni carta di tale atlante (che sono *coordinate armoniche* – si veda [84]), le componenti della metrica sono funzioni analitiche nello spazio e nel tempo, per ogni $t > 0$.

L'ingrediente principale per ottenere questo risultato è mostrare che in tali coordinate, se la curvatura è limitata, anche senza richiedere un controllo sulle derivate della curvatura al tempo $t = 0$ (come invece abbiamo assunto nelle sezioni precedenti), il flusso “produce” comunque una soluzione C^∞ (analitica), in quanto tutte tali derivate sono

automaticamente controllate, per ogni tempo $t > 0$ nell'intervallo di esistenza del flusso. Questo si ottiene per mezzo di stime che sono note come “stime di Bernstein–Bando–Shi”.

L'idea, che risale al lavoro di Bernstein sulle equazioni ellittiche e che è stata adattata al flusso di Ricci da Bando e Shi, consiste nell'applicare il principio del massimo a opportune quantità che combinano la norma della curvatura e delle sue derivate. Bando in [9] è stato il primo a introdurre questa tecnica, nel caso di una varietà compatta, mentre Shi in [88, 89] ha esteso i risultati anche a varietà soltanto complete.

Queste stime saranno poi rilevanti anche per il metodo di blow-up, allo scopo di studiare la formazione di singolarità durante il flusso.

Teorema 4.18 (Stime di Bernstein–Bando–Shi). Sia $(M, g(t))$ una soluzione del flusso di Ricci su una varietà compatta n -dimensionale, nell'intervallo $[0, T)$. Supponiamo che esista una costante $C_0 > 0$ tale che

$$|\text{Riem}(p, t)| \leq C_0$$

per ogni $(p, t) \in M \times [0, T)$. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$, esiste una costante C_k che dipende solo da n , T e C_0 , tale che

$$|\nabla^k \text{Riem}(p, t)|^2 \leq C_k / t^k,$$

per ogni $(p, t) \in M \times (0, T)$.

Dimostrazione. Dimostriamo il caso $k = 1$ in dettaglio; il caso generale segue per induzione con una scelta simile delle funzioni test.

Ricordiamo le equazioni di evoluzione per le norme al quadrato di Riem e ∇Riem . Per il Corollario 4.3, abbiamo:

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta)|\text{Riem}|^2 &\leq -2|\nabla \text{Riem}|^2 + c_0|\text{Riem}|^3 \leq -2|\nabla \text{Riem}|^2 + c_0 C_0^3, \\ (\partial_t - \Delta)|\nabla \text{Riem}|^2 &\leq C_2|\text{Riem}||\nabla \text{Riem}|^2 \leq c_1 C_0|\nabla \text{Riem}|^2, \end{aligned}$$

per due costanti c_0 e c_1 che dipendono solo dalla dimensione $n \in \mathbb{N}$ e dove abbiamo usato la stima su $|\text{Riem}|$.

Consideriamo ora la funzione

$$F_1(p, t) = t|\nabla \text{Riem}(p, t)|^2 + \alpha|\text{Riem}(p, t)|^2,$$

dove α è una costante positiva che sceglieremo in seguito e calcoliamo l'equazione di evoluzione di F_1 :

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta)F_1 &= |\nabla \text{Riem}|^2 + t(\partial_t - \Delta)|\nabla \text{Riem}|^2 + \alpha(\partial_t - \Delta)|\text{Riem}|^2 \\ &\leq |\nabla \text{Riem}|^2 + tc_1C_0|\nabla \text{Riem}|^2 + \alpha(-2|\nabla \text{Riem}|^2 + c_0C_0^3) \\ &= (1 + c_1C_0t - 2\alpha)|\nabla \text{Riem}|^2 + \alpha c_0C_0^3 \\ &\leq (1 + c_1C_0T - 2\alpha)|\nabla \text{Riem}|^2 + \alpha c_0C_0^3. \end{aligned}$$

Se dunque scegliamo $\alpha = 1 + c_1C_0T$, abbiamo che

$$(\partial_t - \Delta)F_1 \leq C(n, C_0, T)$$

e applicando il principio del massimo, concludiamo che in $M \times (0, T)$, si ha

$$\begin{aligned} F_1(p, t) &\leq \max_{p \in M} F_1(p, 0) + C(n, C_0, T)T \\ &= \alpha \max_{p \in M} |\text{Riem}(p, 0)|^2 + C(n, C_0, T)T \\ &\leq \alpha C_0^2 + C(n, C_0, T)T = C_1(n, C_0, T). \end{aligned}$$

Dunque, per ogni $(p, t) \in M \times [0, T]$, si ha

$$t|\nabla \text{Riem}|^2(p, t) \leq F_1(p, t) \leq C_1(n, C_0, T)$$

e dividendo per $t > 0$, otteniamo $|\nabla \text{Riem}|^2 \leq C_1/t$, che è quanto volevamo dimostrare, per $k = 1$.

Per il caso generale $k > 1$, si procede per induzione definendo la funzione

$$F_k(t) = t^k |\nabla^k \text{Riem}|^2 + \alpha_{k-1} t^{k-1} |\nabla^{k-1} \text{Riem}|^2 + \dots + \alpha_0 |\text{Riem}|^2$$

e scegliendo (iterativamente) in modo appropriato delle costanti positive $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$, nonché utilizzando le stime ottenute ai passi precedenti (si mostrino i dettagli per esercizio). $\square$

Ovviamente, questo teorema fornisce un'altra dimostrazione della Proposizione 4.5.

Esercizio 4.19. Si applichi questa analisi alle soluzioni dell'equazione del calore standard in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$,

$$\partial_t u = \Delta u,$$

con dato iniziale "periodico" cioè tale che $u(x + \lambda_i e_i, 0) = u(x, 0)$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ e $e_1, \dots, e_n$ una base di $\mathbb{R}^n$.

Si deducano delle stime di decadimento, quando $t \rightarrow +\infty$, per le derivate spaziali di u .

In questo capitolo mostriamo la seguente versione “geometrica”, sviluppata da Hamilton in [50], del principio del massimo, che si applica all’evoluzione di tensori simmetrici.

Teorema 5.1 (Principio del massimo di Hamilton per tensori). Sia $g(t)$ una metrica su una varietà n -dimensionale compatta che evolve in modo C^∞ , per $t \in [0, T]$. Sia L un tensore simmetrico di tipo $(0, 2)$, dipendente dal tempo che soddisfa in coordinate locali, l’equazione di evoluzione:

$$\partial_t L_{ij} = \Delta L_{ij} + X^k \nabla_k L_{ij} + N_{ij}(L, g), \quad (5.1)$$

dove X^k è un campo vettoriale dipendente dal tempo e $N(\cdot, g) = P(\cdot, g)$ è un tensore di tipo $(0, 2)$, polinomiale nel suo argomento e nella metrica, che soddisfa la seguente condizione, detta *di autovalore nullo*: se $v \in T_{p_0}M$ è un autovettore nullo di Z in un punto $(p_0, t_0) \in M \times [0, T]$, cioè $v \neq 0$ e $Z_{ij}(p_0, t_0)v^j = 0$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, si ha

$$N_{ij}(Z, g)(p_0, t_0)v^i v^j \geq 0.$$

Allora, se $L_{ij}(p, 0) \geq 0$ per ogni $p \in M$ (cioè L al tempo $t = 0$ è semidefinito positivo in ogni punto), allora $L_{ij}(p, t) \geq 0$ per ogni $t \in [0, T]$.

Osservazione 5.2. Euristicamente, la condizione di autovalore nullo dice che il termine di reazione $N_{ij}(L, g)$ nell’equazione (sistema parabolico di equazioni) di evoluzione (5.1), “non spinge in basso” nelle direzioni in cui L è nullo.

Sottolineiamo inoltre che è una condizione *sul polinomio P , non sul tensore L* .

Dimostrazione. Consideriamo il tensore perturbato

$$\tilde{L}_{ij} = L_{ij} + \varepsilon(\delta + t)g_{ij},$$

dove $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ è una costante piccola che sceglieremo in seguito. Allora chiaramente, $\tilde{L}_{ij} > 0$ al tempo $t = 0$.

Calcoliamo l'evoluzione di $\tilde{L}_{ij}$:

$$\begin{aligned}\partial_t \tilde{L}_{ij} &= \partial_t L_{ij} + \varepsilon g_{ij} + \varepsilon(\delta + t) \partial_t g_{ij} \\ &= \Delta L_{ij} + X^k \nabla_k L_{ij} + N_{ij}(L, g) + \varepsilon g_{ij} + \varepsilon(\delta + t) \partial_t g_{ij} \\ &= \Delta \tilde{L}_{ij} + X^k \nabla_k \tilde{L}_{ij} + N_{ij}(L, g) + \varepsilon g_{ij} + \varepsilon(\delta + t) \partial_t g_{ij}. \quad (5.2)\end{aligned}$$

Supponiamo per assurdo che esista un "primo" tempo $\theta \in (0, \delta)$ in cui $\tilde{L}_{ij}$ ha un autovettore nullo $v \in T_{p_0} M$ in un punto p_0 (tale "primo" tempo esiste in quanto M è compatta), cioè $\tilde{L}_{ij}(p_0, \theta) v^j = 0$ e definiamo la funzione scalare

$$f(p, t) = \tilde{L}_{ij}(p, t) v^i(p) v^j(p),$$

estendendo il vettore $v \in T_{p_0} M$ a un campo vettoriale $p \mapsto v(p)$ di classe C^∞ su tutta M , tale che

$$\nabla_{g(\theta)} v(p_0) = \nabla_{g(\theta)}^2 v(p_0) = 0$$

(si mostri per esercizio che si può fare).

Poiché $\tilde{L}$ è semidefinito positivo in $M \times [0, \theta]$, la funzione $p \mapsto f(p, \theta)$ ha minimo uguale a zero in p_0 e deve essere $\partial_t f(p_0, \theta) \leq 0$, dunque

$$\begin{aligned}0 &= \nabla_{g(\theta)} f(p_0, \theta) = \nabla \tilde{L}_{ij}(p_0, \theta) v^i v^j, \\ 0 &\leq \Delta_{g(\theta)} f(p_0, \theta) = \Delta \tilde{L}_{ij}(p_0, \theta) v^i v^j, \\ 0 &\geq \partial_t f(p_0, \theta) = \partial_t \tilde{L}_{ij}(p_0, \theta) v^i v^j, \quad (5.3)\end{aligned}$$

per come abbiamo costruito il campo $p \mapsto v(p)$.

Allora, se $|\partial_t g_{ij}(p, t)| \leq C$ per ogni $(p, t) \in M \times [0, T]$, nel punto (p_0, θ) abbiamo, per l'equazione (5.2),

$$\begin{aligned}\partial_t f &= \partial_t \tilde{L}_{ij} v^i v^j = (\Delta \tilde{L}_{ij} + X^k \nabla_k \tilde{L}_{ij} + N_{ij} + \varepsilon g_{ij} + \varepsilon(\delta + t) \partial_t g_{ij}) v^i v^j \\ &\geq \Delta f + X^k \nabla_k f + N_{ij} v^i v^j + \varepsilon |v|^2 - C\varepsilon(\delta + \theta) |v|^2 \\ &\geq N_{ij} v^i v^j + \varepsilon(1 - 2C\delta) |v|^2 \\ &\geq N_{ij} v^i v^j + \varepsilon |v|^2 / 2, \quad (5.4)\end{aligned}$$

se $\delta < 1/4C$ (ricordiamo che $0 < \theta < \delta$).

Se consideriamo $\tilde{N} = P(\tilde{L}, g)$, per la condizione di autovalore nullo, poiché $\tilde{L}_{ij}(p_0, \theta) v^i v^j = 0$, abbiamo

$$\tilde{N}_{ij}(p_0, \theta) v^i v^j \geq 0,$$

inoltre, essendo P polinomiale,

$$|\tilde{N} - N| = |P(\tilde{L}, g) - P(L, g)| \leq \bar{C}|\tilde{L} - L| = |\bar{C}\varepsilon(\delta + t)|g| = \bar{C}\varepsilon(\delta + t)\sqrt{n},$$

in $M \times [0, T]$, per una costante $\bar{C} > 0$ (indipendente da $(p, t) \in M \times [0, T]$), quindi,

$$|\tilde{N} - N| \leq 2\bar{C}\sqrt{n\varepsilon\delta}$$

in $M \times [0, \delta]$.

Allora, concludiamo che in (p_0, θ) , si ha

$$N_{ij}v^i v^j \geq \tilde{N}_{ij}v^i v^j - 2\bar{C}\sqrt{n\varepsilon\delta}|v|^2 \geq -2\bar{C}\sqrt{n\varepsilon\delta}|v|^2,$$

quindi, dalla disuguaglianza (5.4), segue

$$\partial_t f \geq -2\bar{C}\sqrt{n\varepsilon\delta}|v|^2 + \varepsilon|v|^2/2 = \varepsilon(1/2 - 2\bar{C}\sqrt{n\delta})|v|^2.$$

Dunque, scegliendo inizialmente $\delta > 0$ sufficientemente piccolo, tale che $\delta < 1/4 \max_{M \times [0, T]} |\partial_t g_{ij}|$ e $\delta < 1/4\bar{C}\sqrt{n}$, abbiamo che $\partial_t f(p_0, \theta) > 0$ (ricordiamo che $v \neq 0$) e questo è in contraddizione con la disuguaglianza (5.3), da cui un punto dove $\tilde{L}$ ha un autovalore nullo non può esistere in $M \times [0, \delta]$. Quindi $\tilde{L}_{ij} \geq 0$ e facendo tendere $\varepsilon \rightarrow 0$, si conclude che $L_{ij} \geq 0$ in $[0, \delta]$.

Iterando tutto questo argomento su $M \times [\delta, 2\delta]$, $M \times [2\delta, 3\delta]$ e così via, dopo un numero finito di passi, si ottiene la conclusione $L_{ij} \geq 0$ su tutto $M \times [0, T]$ ($\delta > 0$ non dipende da t). $\square$

Questo risultato, come il principio del massimo per equazioni, ha anche una versione “forte”, mostrata da Hamilton in [51, Sezione 8].

Teorema 5.3 (Principio del massimo forte per tensori). Nelle ipotesi del teorema precedente, se M è connessa, si ha:

- Il rango di L è costante su $M \times (0, T]$.
- Il kernel di L , definito come $K_p = \{v \in T_p M \mid L_{ij}v^j = 0\}$, è una distribuzione invariante per trasporto parallelo, per ogni $t \in (0, T]$.
- Se il rango non è massimo, il rivestimento universale della varietà si “spezza” isometricamente come un prodotto riemanniano $(M', h) \times (\mathbb{R}^k, \text{can})$, dove $k \in \mathbb{N}$ è la dimensione del kernel di L .

In particolare, se esiste un punto $p_0 \in M$ e un tempo $t_0 > 0$ tale che $L(p_0, t_0) > 0$, allora $L(p, t) > 0$ per ogni $p \in M$ e per ogni $t > 0$.

5.1 CONDIZIONI DI CURVATURA PRESERVATE

Sappiamo dalla Sezione 3.2 che la nonnegatività o la positività della curvatura scalare si mantengono durante il flusso di Ricci di una varietà compatta (in ogni dimensione). Vediamo altre condizioni sulla curvatura che sono preservate.

DIMENSIONE 3. Sia $(M, g(t))$ un flusso di Ricci su una varietà tridimensionale compatta, per $t \in [0, T]$.

L'equazione di evoluzione (2.9) per il tensore di Ricci in dimensione 3 si può scrivere come

$$\partial_t R_{ij} = \Delta R_{ij} - Q_{ij},$$

dove

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= 6R_{ij}^2 - 3RR_{ij} + (R^2 - 2|\text{Ric}|^2)g_{ij} \\ &= 6S_{ij} - 3RR_{ij} + (R^2 - 2S)g_{ij}, \end{aligned}$$

con $S_{ij} = R_{ik}R_j^k$ e $S = g^{ij}S_{ij} = |\text{Ric}|^2$.

Applicando il Teorema 5.1 al tensore di Ricci, se il tensore $-Q$ soddisfa la condizione di autovalore nullo, concludiamo che se il tensore di Ricci è semidefinito positivo al tempo iniziale, rimane semidefinito positivo durante il flusso.

Sia dunque v^k un vettore tale che $R_{ik}v^k = 0$ (autovettore nullo del Ricci), allora

$$Q_{ij}v^iv^j = 6S_{ij}v^iv^j - 3RR_{ij}v^iv^j + (R^2 - 2S)|v|^2 = (R^2 - 2S)|v|^2,$$

dunque la condizione di autovalore nullo per $-Q$ è verificata se

$$R^2 \leq 2S = 2|\text{Ric}|^2.$$

Siano λ, μ, ν gli autovalori del Ricci, uno dei quali è nullo, diciamo $\lambda = 0$, quindi $R = \mu + \nu$ e $|\text{Ric}|^2 = \mu^2 + \nu^2$ e la disuguaglianza sopra diventa

$$(\mu + \nu)^2 \leq 2(\mu^2 + \nu^2) \iff 0 \leq (\mu - \nu)^2,$$

che è ovviamente soddisfatta.

Teorema 5.4. Se $\text{Ric} \geq 0$ al tempo $t = 0$, allora $\text{Ric} \geq 0$ per ogni $t \in [0, T]$.

Dal principio del massimo forte, Teorema 5.3, segue inoltre la seguente “tricotomia” per ogni $t > 0$:

- Il tensore di Ricci diventa immediatamente definito positivo ovunque.
- Il tensore di Ricci è identicamente nullo (dunque la varietà è flat).
- La varietà ammette un campo vettoriale parallelo globale (corrispondente al kernel del tensore di Ricci), il che implica che il rivestimento universale della varietà è un prodotto riemanniano $(S^2, h) \times (\mathbb{R}, \text{can})$, dove h è una metrica su S^2 con curvatura positiva che evolve per il flusso di Ricci

Si noti che in questa classificazione, apparentemente manca il caso in cui il kernel del tensore di Ricci ha dimensione due. Infatti, questo caso è geometricamente impossibile: se il kernel avesse dimensione 2, sempre per il Teorema 5.3, il rivestimento universale della varietà sarebbe un prodotto riemanniano del piano euclideo con la metrica canonica e di una varietà unidimensionale, che dunque avrebbe curvatura nulla. Quindi, saremmo nel caso in cui la varietà è flat.

Osserviamo pertanto che questo risultato esclude chiaramente la possibilità che la curvatura si annulli in qualche punto senza che vi sia una struttura geometrica globale di prodotto.

Per proseguire l'analisi, abbiamo bisogno del seguente lemma.

Lemma 5.5. Se $R \neq 0$, si ha

$$\partial_t \left(\frac{\text{Ric}_{ij}}{R} \right) = \Delta \left(\frac{\text{Ric}_{ij}}{R} \right) + \frac{2}{R} g^{pq} \nabla_p R \nabla_q \left(\frac{\text{Ric}_{ij}}{R} \right) - \frac{R Q_{ij} + 2S \text{Ric}_{ij}}{R^2}.$$

Dimostrazione. Poiché

$$\partial_t \text{Ric}_{ij} = \Delta \text{Ric}_{ij} - Q_{ij} \quad \text{e} \quad \partial_t R = \Delta R + 2S,$$

abbiamo

$$\partial_t \left(\frac{\text{Ric}_{ij}}{R} \right) = \frac{R(\Delta \text{Ric}_{ij} - Q_{ij}) - \text{Ric}_{ij}(\Delta R + 2S)}{R^2}.$$

D'altra parte

$$\Delta \left(\frac{\text{Ric}_{ij}}{R} \right) = \frac{R \Delta \text{Ric}_{ij} - \text{Ric}_{ij} \Delta R}{R^2} - \frac{2}{R} g^{k\ell} \nabla_k R \nabla_\ell \left(\frac{\text{Ric}_{ij}}{R} \right),$$

da cui segue immediatamente la tesi. $\square$

Teorema 5.6. Se $R \geq 0$ e $\text{Ric}_{ij} \geq \varepsilon R g_{ij}$ per una qualche costante $\varepsilon > 0$ al tempo $t = 0$, allora entrambe le condizioni continuano a valere per ogni $t \in [0, T]$.

Dimostrazione. Se $R > 0$ al tempo $t = 0$, sappiamo che $R > 0$ per ogni $t > 0$. Appliciamo allora il Teorema 5.1 al tensore

$$L_{ij} = \frac{\text{Ric}_{ij}}{R} - \varepsilon g_{ij},$$

con

$$X^k = \frac{2}{R} g^{k\ell} \nabla_\ell R \quad \text{e} \quad N_{ij} = 2\varepsilon \text{Ric}_{ij} - \left(\frac{R Q_{ij} + 2S \text{Ric}_{ij}}{R^2} \right).$$

È una conseguenza immediata del Lemma 5.5 che l'equazione nel Teorema 5.1 è soddisfatta. Consideriamo cosa accade a N_{ij} quando il tensore L ha un autovettore nullo. Si noti che l'analisi è semplice, poiché quando Ric è diagonale, lo sono anche L ed N .

Supponiamo che l'autovalore nullo di L corrisponda all'autovalore λ di Ric (nel senso che sono relativi allo stesso autovettore), allora $\lambda = \varepsilon(\lambda + \mu + \nu)$. L'autovalore relativo di $R^2 N_{ij}$ è quindi

$$2\varepsilon\lambda(\lambda + \mu + \nu)^2 - (\lambda + \mu + \nu)(2\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 - \lambda\mu - \lambda\nu + 2\mu\nu) - 2\lambda(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2).$$

Usando l'identità $\lambda = \varepsilon(\lambda + \mu + \nu)$ per eliminare ε , moltiplicando e raccogliendo i termini, abbiamo che tale autovalore è uguale a

$$(\lambda + \mu + \nu)[\lambda(\mu + \nu) + (\mu - \nu)^2] - 2\lambda(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2),$$

che si semplifica ulteriormente a

$$\lambda^2(\mu + \nu - 2\lambda) + (\mu + \nu)(\mu - \nu)^2.$$

Ora, poiché $\text{Ric}_{ij} \geq \varepsilon R g_{ij}$, tracciando si ha $R \geq 3\varepsilon R$ ed essendo $R > 0$, concludiamo che $\varepsilon \leq 1/3$. Ma allora $\mu + \nu = (1/\varepsilon - 1)\lambda \geq 2\lambda$, quindi $\mu + \nu - 2\lambda \geq 0$.

Pertanto, se v è un autovettore nullo per L , si ha $N_{ij} v^i v^j \geq 0$, cioè la condizione di autovalore nullo è soddisfatta, quindi $L \geq 0$ per ogni tempo positivo, per il Teorema 5.1, il che implica la tesi.

Se a tempo $t = 0$ abbiamo solo $R \geq 0$, sappiamo che o R è identicamente nulla durante il flusso, dunque la conclusione è ovvia, oppure $R > 0$ per ogni tempo positivo. In tal caso, osserviamo che per ogni $\varepsilon' < \varepsilon$,

esiste $t_0 > 0$ piccolo a piacere, tale che $\text{Ric}_{ij} \geq \varepsilon' Rg_{ij}$, per continuità. Se allora consideriamo il flusso nell'intervallo $[t_0, T]$, possiamo applicare quanto appena dimostrato, ottenendo che $\text{Ric}_{ij} \geq \varepsilon' Rg_{ij}$ in $M \times [t_0, T]$ e per l'arbitrarietà di t_0 , in tutto $M \times [0, T]$. Mandando infine $\varepsilon' \rightarrow \varepsilon$, abbiamo la tesi del teorema anche in questo caso. $\square$

Osserviamo che per una varietà riemanniana generale (in ogni dimensione e indipendentemente dal flusso), se $\text{Ric}_{ij} \geq 0$, allora $\text{Ric}_{ij} \leq Rg_{ij}$, in quanto tutti gli autovalori del tensore di Ricci sono nonnegativi e R ne è la somma.

Se allora $\text{Ric} > 0$ al tempo iniziale, si ha $R > 0$ e per la compattezza di M , esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\text{Ric}_{ij} \geq \varepsilon Rg_{ij} > 0$, stima che si mantiene durante il flusso. Quindi Ric rimane definito positivo e abbiamo

$$0 < \varepsilon Rg_{ij} \leq \text{Ric}_{ij} \leq Rg_{ij},$$

dunque i suoi tre autovalori λ, μ, ν soddisfano

$$0 < \varepsilon R = \varepsilon(\lambda + \mu + \nu) \leq \lambda, \mu, \nu \leq (\lambda + \mu + \nu) = R.$$

Una facile conseguenza è un limite uniforme $\lambda/\mu \leq C$ sul rapporto di due qualsiasi autovalori, finché la soluzione esiste.

Teorema 5.7. Se $\varepsilon Rg_{ij} \leq \text{Ric}_{ij} \leq \beta Rg_{ij}$ per delle costanti ε e β con $0 < \varepsilon \leq 1/3 \leq \beta \leq 1$ al tempo $t = 0$, allora tali disuguaglianze continuano a valere per ogni $t \in [0, T]$.

Dimostrazione. La prima disuguaglianza è data dal teorema precedente, dunque dobbiamo dimostrare solo la seconda. Si noti inoltre che se $\varepsilon = 1/3$ o $\beta = 1/3$, allora la varietà ha curvatura costante (lo si mostri per esercizio) e il risultato è banale, mentre se $\beta = 1$, la disuguaglianza vale sempre. Appliciamo il Teorema 5.1 al tensore

$$L_{ij} = \beta g_{ij} - \frac{\text{Ric}_{ij}}{R},$$

con

$$X^k = \frac{2}{R} g^{k\ell} \nabla_\ell R \quad \text{e} \quad N_{ij} = \left(\frac{RQ_{ij} + 2S\text{Ric}_{ij}}{R^2} \right) - 2\beta \text{Ric}_{ij}.$$

Segue immediatamente dal Lemma 5.5 che l'equazione nel Teorema 5.1 è soddisfatta. Consideriamo come sopra, cosa accade a N_{ij} , se L_{ij} acquisisce un autovettore nullo corrispondente all'autovalore λ di Ric .

In questo caso $\lambda = \beta(\lambda + \mu + \nu)$ e l'autovalore relativo di $R^2 N_{ij}$ è dato da

$$(\lambda + \mu + \nu)(2\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 - \lambda\mu - \lambda\nu + 2\mu\nu) + 2\lambda(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - 2\beta\lambda(\lambda + \mu + \nu)^2.$$

Eliminando β con l'identità precedente e raccogliendo i termini, questa espressione si riduce a

$$\lambda^2(2\lambda - \mu - \nu) - (\mu + \nu)(\mu - \nu)^2,$$

che possiamo riordinare come

$$2\lambda^2(\lambda - \mu) + (\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2)(\mu - \nu), \quad (5.5)$$

oppure

$$2\lambda^2(\lambda - \nu) + (\lambda^2 - \nu^2 + \mu^2)(\nu - \mu),$$

da cui segue che è chiaramente nonnegativa se $\lambda \geq \mu \geq \nu \geq 0$ oppure se $\lambda \geq \nu \geq \mu \geq 0$.

Per gestire la possibilità che λ non sia l'autovalore più grande usiamo un argomento di continuità. Sia θ il massimo tempo tale che nell'intervallo $[0, \theta]$ si abbia $\text{Ric}_{ij} \leq (\beta + \delta)Rg_{ij}$, dove $\delta > 0$ sarà scelto piccolo rispetto a β ed ε . Se riusciamo a mostrare che $\text{Ric}_{ij} \leq \beta Rg_{ij}$ fino al tempo θ , segue che dev'essere $\theta = T$. Ora, poiché $\lambda = \beta(\lambda + \mu + \nu)$ e $\beta \geq 1/3$, vediamo che λ non può essere minore degli altri due. Assumiamo $\mu \geq \lambda \geq \nu$. Fino al tempo θ si ha $\mu \leq (\beta + \delta)(\lambda + \mu + \nu)$ e dal Teorema 5.6, $\nu \geq \varepsilon(\lambda + \mu + \nu)$. Poiché

$$\mu \geq \lambda = \beta(\lambda + \mu + \nu) \quad \text{e} \quad \nu \leq (\lambda + \mu + \nu)/3,$$

abbiamo $\mu - \nu \geq (\beta - 1/3)(\lambda + \mu + \nu)$.

Se $\beta = 1/3$ la varietà ha curvatura costante e la tesi segue, dunque assumiamo che $\beta > 1/3$. L'espressione (5.5) si può riscrivere come

$$\nu^2(\mu - \nu) - (\mu - \lambda)[2\lambda^2 + (\lambda + \mu)(\mu - \nu)],$$

che è almeno

$$\{\varepsilon^2(\beta - 1/3) - \delta[2\beta^2 + (2\beta + \delta)(\beta + \delta)]\}(\lambda + \mu + \nu)^3.$$

Questa espressione sarà positiva se $\delta > 0$ è abbastanza piccolo rispetto a β ed ε e questo completa la dimostrazione. $\square$

Corollario 5.8. Se la curvatura sezionale è positiva (o nonnegativa) al tempo $t = 0$, allora rimane tale per ogni $t \in [0, T]$.

Dimostrazione. Abbiamo visto nella Sezione 1.6 (formula (1.13)) che la curvatura sezionale è positiva (che implica $\text{Ric} > 0$) se e solo se $\text{Ric}_{ij} < Rg_{ij}/2$, dunque tale condizione si mantiene, per il Teorema 5.7, in quanto al tempo iniziale possiamo trovare $\varepsilon > 0$ e $\beta < 1/2$ come nelle ipotesi di tale teorema.

La stessa conclusione vale per la curvatura sezionale nonnegativa (che implica $\text{Ric} \geq 0$), considerando $\beta = 1/2$ (e tenendo presente l'argomento nella parte finale della dimostrazione del Teorema 5.6). $\square$

Ricapitolando, in dimensione 3 (grazie alla struttura speciale del tensore di Riemann, che è interamente determinato dal tensore di Ricci), le seguenti proprietà si mantengono durante il flusso:

- Curvatura scalare positiva o nonnegativa.
- Tensore di Ricci definito o semidefinito positivo.
- Curvatura sezionale positiva o nonnegativa.
- *Pinching* del tensore di Ricci: condizioni del tipo $\text{Ric} \geq \varepsilon Rg$.

DIMENSIONE GENERALE. In dimensione superiore a 3, la situazione è radicalmente diversa. La positività o nonnegatività del tensore di Ricci non è generalmente preservata e analogamente, la curvatura sezionale nonnegativa o positiva.

Tuttavia, esistono alcune condizioni “più forti” che sono preservate dal flusso in ogni dimensione.

Sempre per mezzo del Teorema 5.1, in [51] Hamilton ha dimostrato che la positività o la nonnegatività dell'operatore di curvatura $\mathfrak{R} : \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$ (Definizione 1.6), o meglio, della forma bilineare associata $\mathcal{R}$ su $\Lambda^2 M$, si mantengono durante il flusso di Ricci, in ogni dimensione.

Con questo risultato, Hamilton in dimensione 4, sempre in [51] e Böhm e Wilking in ogni dimensione in [13], hanno mostrato che il flusso di Ricci (riscalato dinamicamente) deforma una varietà riemanniana compatta con operatore di curvatura positivo in una varietà con curvatura sezionale costante positiva, cioè un quoziente della sfera standard, per il Teorema 1.10. Ciò ha permesso a Hamilton di classificare completamente le 4-varietà compatte con operatore di curvatura positivo o nonnegativo (utilizzando la versione “forte” del principio di massimo,

Teorema 5.3): se l'operatore di curvatura è positivo, la varietà è diffeomorfa a S^4 oppure a $\mathbb{RP}^4$; se l'operatore è solo semidefinito positivo, il suo rivestimento universale è diffeomorfo a S^4 , oppure isometrico a $\mathbb{CP}^2$ (il piano proiettivo complesso con la metrica di Fubini–Study, che è una metrica di Einstein a curvatura sezionale positiva ma con operatore $\mathfrak{R}$ degenere – si vedano [11, 84], per esempio), $S^2 \times S^2$, $\mathbb{R}^4$, o al prodotto riemanniano di una varietà diffeomorfa a S^3 per $\mathbb{R}$, o di una 2-varietà diffeomorfa a S^2 per $\mathbb{R}^2$. Böhm e Wilking (sfruttando anche vari risultati classici) hanno poi esteso la classificazione in ogni dimensione, ottenendo il seguente teorema strutturale generale.

Teorema 5.9 (Teorema di classificazione di Hamilton/Böhm–Wilking). Sia M una varietà riemanniana compatta di dimensione $n \in \mathbb{N}$ con operatore di curvatura nonnegativo. Allora il suo rivestimento universale è isometrico a un prodotto riemanniano della forma:

$$\mathbb{R}^k \times M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_i,$$

dove ogni M_j è una varietà compatta semplicemente connessa diffeomorfa alla sfera standard S^m oppure uno spazio simmetrico compatto (per esempio $\mathbb{CP}^m$).

Se l'operatore di curvatura è positivo, il rivestimento universale di M è diffeomorfo a S^n , cioè M è un quoziente della sfera standard.

Una condizione intermedia, più debole che richiedere un operatore di curvatura positivo, ma più forte della semplice positività della curvatura scalare, è la proprietà di *curvatura isotropica* positiva (spesso indicata con l'acronimo PIC – positive isotropic curvature – in letteratura). Il concetto di curvatura isotropica è stato introdotto da Micallef e Moore in [73], come segue. Se (M, g) è una varietà Riemanniana di dimensione $n \geq 4$ e $p \in M$, per ogni quaterna di vettori ortonormali $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subseteq T_p M$, si definisce la curvatura isotropica associata a tale quaterna come

$$K_{\text{iso}}(e_1, e_2, e_3, e_4) = R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} - 2R_{1234}.$$

Dunque, una varietà ha curvatura isotropica positiva (PIC) se questa quantità è positiva per qualsiasi scelta di una quaterna di vettori ortonormali in ogni spazio tangente a M .

Hamilton in [56] ha mostrato che in dimensione 4, la condizione PIC è preservata dal flusso di Ricci. Successivamente, questa conclusione è stata mostrata valere in ogni dimensione da Nguyen [79] e indipendentemente, da Brendle e Schoen [18].

La rilevanza di questo risultato è dovuta al fatto che ha permesso a Brendle e Schoen (sempre in [18], sfruttando una tecnica introdotta da Böhm e Wilking in [13]) di dimostrare per mezzo del flusso di Ricci, il famoso *teorema della sfera differenziale*, che era un problema aperto da circa mezzo secolo.

Teorema 5.10 (Teorema della sfera differenziabile). Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta e semplicemente connessa di dimensione $n \geq 4$. Supponiamo che la curvatura sezionale di M sia strettamente $1/4$ -pinched, ovvero che per ogni punto $p \in M$ e per ogni 2-piano $\pi \subseteq T_p M$, si abbia

$$1/4 < \text{Sec}(\pi) \leq 1.$$

Allora M è diffeomorfa a S^n con la sua struttura differenziale standard.

Dopo che Berger e Klingenberg (intorno al 1960) dimostrarono la “versione topologica” del teorema, cioè che nelle stesse ipotesi, M è omeomorfa a S^n , (teorema della sfera topologico), la questione se tale condizione di “pinching” garantisse anche un diffeomorfismo, divenne uno dei problemi centrali della geometria riemanniana globale. La scoperta delle sfere “esotiche” da parte di Milnor nel 1956 aveva infatti reso il problema non banale: esistevano varietà omeomorfe ma non diffeomorfe alla sfera standard.

Micallef e Moore [73] avevano mostrato che se una varietà (M, g) è strettamente $1/4$ -pinched, allora soddisfa la condizione PIC, mentre Brendle e Schoen [18] hanno osservato che è implicata una condizione ancora più forte, cioè che il prodotto $(M, g) \times (\mathbb{R}, \text{can})$ ha curvatura isotropica positiva e che anche questa proprietà si mantiene facendo evolvere (M, g) col flusso di Ricci. Utilizzando poi le tecniche sviluppate da Böhm e Wilking, hanno provato che a meno di “riscaldamento”, tale flusso di Ricci (riscalato) deforma (M, g) in una sfera standard (in virtù della stabilità di tale proprietà), da cui il Teorema 5.10.

Riassumendo, in dimensione arbitraria, le seguenti proprietà si mantengono durante il flusso:

- Curvatura scalare positiva o nonnegativa.
- Operatore di curvatura definito o semidefinito positivo.
- Curvatura isotropica positiva o nonnegativa.

3-VARIETÀ CON TENSORE DI RICCI POSITIVO

Abbiamo visto nel primo capitolo che in dimensione 3 il tensore di Weyl è assente e il tensore di Riemann di una varietà è interamente determinato dal tensore di Ricci. Di conseguenza, studiare l'evoluzione della curvatura durante il flusso di Ricci equivale a studiare l'evoluzione di tale tensore. Questa semplificazione è drastica: il sistema di reazione-diffusione per il tensore di Riemann (un oggetto con 4 indici) si riduce a un sistema per un tensore simmetrico di tipo $(0, 2)$.

Hamilton osservò che se il tensore di Ricci è positivo, i suoi autovalori tendono ad avvicinarsi tra loro, rendendo la metrica asintoticamente "rotonda". Per formalizzare precisamente questo fatto, studiare la geometria della "varietà limite" ed estrarre informazioni topologiche, risulta molto più conveniente modificare dinamicamente la scala spaziale in modo tale che il volume totale rimanga costante durante l'evoluzione. Introduciamo dunque il seguente *flusso di Ricci normalizzato*.

Definizione 6.1. Sia M una varietà riemanniana compatta di dimensione $n \in \mathbb{N}$. Il *flusso di Ricci normalizzato* è una famiglia $g(t)$ di metriche C^∞ su M che soddisfa l'equazione di evoluzione

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\text{Ric}_{g(t)} + 2r(t)g(t)/n,$$

per t in un intervallo I , dove la quantità $r(t)$ rappresenta la *curvatura scalare media* della varietà al tempo t , definita in termini della curvatura scalare R come

$$r(t) = \frac{\int_M R dV_{g(t)}}{\int_M dV_{g(t)}}, \quad (6.1)$$

dove $V_{g(t)}$ è la misura riemanniana canonica della varietà $(M, g(t))$.

L'aggiunta del termine costante in spazio (ma dipendente dal tempo) $2r(t)g(t)/n$ all'equazione del flusso di Ricci agisce come un'omotetia dinamica che bilancia esattamente a ogni tempo, la "perdita di volume"

causata dal termine -2Ric . Infatti, calcolando come abbiamo fatto alla fine della Sezione 2.2 per ottenere l'equazione (2.11), abbiamo

$$\begin{aligned}\partial_t dV_{g(t)} &= \frac{1}{2} \sqrt{\det g(t)} g^{ij}(t) (-2R_{ij}(t) + 2r(t)g_{ij}(t)/n) dx \\ &= -\sqrt{\det g(t)} (R(t) - r(t)) dx = -(R - r) dV_{g(t)},\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(M, g(t)) = - \int_M (R - r) dV_{g(t)} = 0,$$

per l'equazione (6.1), quindi il volume della varietà rimane costante durante l'evoluzione del flusso di Ricci normalizzato.

Sia ora $g(t)$ una soluzione del flusso di Ricci (non normalizzato) su una varietà riemanniana compatta M di dimensione $n \in \mathbb{N}$, definita per $t \in [0, T)$. Indichiamo con $\text{Vol}(t) = \int_M dV_{g(t)}$ il volume e con $r(t)$ la curvatura scalare media della varietà $(M, g(t))$. Durante il flusso, il volume evolve secondo l'equazione (2.11):

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(t) = - \int_M R(g(t)) dV_{g(t)} = -r(t) \text{Vol}(t).$$

Introduciamo un fattore di riscaldamento spaziale $\psi : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$ definito come segue:

$$\psi(t) = \left(\frac{\text{Vol}(0)}{\text{Vol}(t)} \right)^{2/n},$$

che quindi soddisfa

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \frac{2}{n} \left(\frac{\text{Vol}(0)}{\text{Vol}(t)} \right)^{2/n-1} \left(- \frac{\text{Vol}(0)}{\text{Vol}(t)^2} \frac{d}{dt} \text{Vol}(t) \right) \\ &= - \frac{2}{n} \frac{\psi(t)}{\text{Vol}(t)} (-r(t) \text{Vol}(t)) = 2\psi(t)r(t)/n.\end{aligned}\tag{6.2}$$

Definiamo la metrica riscalata $\tilde{g}$ e un nuovo parametro temporale τ come segue:

$$\tilde{g}(\tau) = \psi(t)g(t) \quad \text{e} \quad \tau(t) = \int_0^t \psi(s) ds.$$

Esaminiamo come cambiano le quantità geometriche passando dalla metrica $g(t)$ alla metrica $\tilde{g}(\tau)$. Essendo $\tilde{g}(\tau)$ un riscaldamento omotetico

di $g(t)$, il tensore di Ricci è invariante, ovvero $\text{Ric}_{\tilde{g}(\tau)} = \text{Ric}_{g(t)}$, mentre la curvatura scalare riscalda con l'inverso del fattore di omotetia, per cui la curvatura scalare media $\tilde{r}(\tau)$ rispetto alla metrica $\tilde{g}(\tau)$ è legata a $r(t)$ dalla relazione

$$\tilde{r}(\tau) = \psi(t)^{-1}r(t). \quad (6.3)$$

Calcoliamo l'evoluzione temporale della nuova metrica $\tilde{g}$ rispetto al nuovo tempo τ . Si ha

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{g}(\tau) = \frac{dt}{d\tau}(\tau) \frac{\partial}{\partial t} (\psi(t)g(t)) = \frac{1}{\psi(t)} \left(\psi'(t)g(t) + \psi(t) \frac{\partial g}{\partial t}(t) \right)$$

e sostituendo in questa espressione l'equazione di evoluzione del flusso di Ricci per $g(t)$, ricordando che $g(t) = \psi(t)^{-1}\tilde{g}(\tau)$, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{g}(\tau) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} (\psi(t)^{-1}\tilde{g}(\tau)) + \frac{\partial g}{\partial t}(t) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)^2} \tilde{g}(\tau) - 2\text{Ric}_{\tilde{g}(\tau)}.$$

essendo $\text{Ric}_{g(t)} = \text{Ric}_{\tilde{g}(\tau)}$.

Infine, inserendo l'espressione per la derivata $\psi'(t)$ data dalla formula (6.2), concludiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{g}(\tau) &= 2\psi(t)^{-1}r(t)\tilde{g}(\tau)/n - 2\text{Ric}_{\tilde{g}(\tau)} \\ &= -2\text{Ric}_{\tilde{g}(\tau)} + 2\tilde{r}(\tau)\tilde{g}(\tau)/n, \end{aligned}$$

per la relazione (6.3). Questo dimostra che il flusso così riscaldato è un flusso di Ricci normalizzato e viceversa, si vede facilmente che con un opportuno riscaldamento, da un flusso di Ricci normalizzato si ottiene un flusso di Ricci "standard", mostrando l'equivalenza analitica e geometrica dei due problemi.

Il celebre risultato mostrato da Hamilton nel 1982 per le 3-varietà con tensore di Ricci positivo è il seguente.

Teorema 6.2 (Hamilton [50]). Sia (M, g_0) una 3-varietà Riemanniana compatta con tensore di Ricci definito positivo. Allora il flusso di Ricci *normalizzato* con dato iniziale g_0 esiste per tutti i tempi $t \in [0, +\infty)$ e converge esponenzialmente nella topologia C^∞ a una metrica con curvatura sezionale costante positiva. In particolare, M è diffeomorfa alla sfera S^3 con la sua metrica standard o a un suo quoziente per un gruppo finito di isometrie, per il Teorema 1.10 (e il teorema di Bonnet–Myers).

Le sezioni che seguono sono dedicate a sviluppare in dettaglio i passi della dimostrazione.

Osservazione 6.3. Questo teorema ha rappresentato il primo passo fondamentale verso la dimostrazione della *congettura di Poincaré*, che vedremo nell'ultima sezione del testo. La condizione $\text{Ric} > 0$ assicura che durante il flusso di Ricci (non normalizzato) non si formino singolarità “a collo” (neckpinch) o di altro tipo, ma che l'intera varietà si contragga a un punto diventando sferica. Se la condizione $\text{Ric} > 0$ non è soddisfatta, il flusso può sviluppare singolarità più complesse, che richiedono l'analisi successiva di Perelman in [81, 82, 83] per essere gestite.

6.1 PINCHING DEGLI AUTOVALORI DEL TENSORE DI RICCI

Ricordiamo che il tensore di Ricci tracefree di una varietà tridimensionale è definito come

$$\overset{\circ}{\text{Ric}} = \text{Ric} - Rg/3$$

e osserviamo che

$$\begin{aligned} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 &= |\text{Ric} - Rg/3|^2 = |\text{Ric}|^2 - R^2/3 = S - R^2/3 \\ &= \frac{1}{3} [(\lambda - \mu)^2 + (\lambda - \nu)^2 + (\mu - \nu)^2], \end{aligned}$$

dove $S = \text{tr } R_{ij}^2 = |\text{Ric}|^2$ e λ, μ, ν sono i tre autovalori del tensore di Ricci. Chiaramente si ha $S - R^2/3 \geq 0$ e si annulla solo quando $\lambda = \mu = \nu$. Dunque questa quantità misura quanto gli autovalori divergono l'uno dall'altro.

Supponiamo di avere un flusso di Ricci di una varietà compatta tridimensionale con $\text{Ric} > 0$ in un intervallo temporale $[0, T)$. La seguente stima di Hamilton mostra che gli autovalori del tensore di Ricci si avvicinano tra loro in quei punti in cui la curvatura scalare diventa grande.

Proposizione 6.4. Esistono una costante $\delta > 0$ e una costante $C > 0$ dipendente solo dalla varietà iniziale, tali che per ogni $t \in [0, T)$, si ha

$$S - R^2/3 \leq CR^{2-\delta},$$

in ogni punto di M .

Dimostrazione. Sia $\gamma = 2 - \delta$ con $\gamma \in (1, 2)$. Ricordiamo, per comodità, che

$$\partial_t R_{ij} = \Delta R_{ij} - Q_{ij} \quad \text{e} \quad \partial_t R = \Delta R + 2S,$$

con

$$Q_{ij} = 6S_{ij} - 3RR_{ij} + (R^2 - 2S)g_{ij},$$

e

$$S = |\text{Ric}|^2 = g^{ik}g^{jl}R_{ij}R_{kl} = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2,$$

inoltre, poniamo

$$T = g^{in}g^{jk}g^{lm}R_{ij}R_{kl}R_{mn} = \lambda^3 + \mu^3 + \nu^3$$

e

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}g^{ik}g^{jl}Q_{ij}R_{kl} = \frac{1}{2}(R^3 - 5RS + 6T) \\ &= (\lambda^3 + \mu^3 + \nu^3) - (\lambda^2\mu + \lambda\mu^2 + \lambda^2\nu + \lambda\nu^2 + \mu^2\nu + \mu\nu^2) + 3\lambda\mu\nu, \end{aligned}$$

dove λ , μ e ν sono gli autovalori del tensore di Ricci.

Per il calcolo che porta all'equazione (2.10) per l'evoluzione della norma al quadrato S del tensore di Ricci, segue che

$$\partial_t S = \Delta S - 2|\nabla \text{Ric}|^2 + 4(T - C).$$

Vediamo alcuni "lemmi di calcolo".

Lemma 6.5. Se $R > 0$, allora per ogni γ si ha

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{S}{R^\gamma} \right) &= \Delta \left(\frac{S}{R^\gamma} \right) + \frac{2(\gamma-1)}{R} g^{pq} \nabla_p R \nabla_q \left(\frac{S}{R^\gamma} \right) \\ &\quad - \frac{2}{R^{\gamma+2}} |R \nabla \text{Ric} - \nabla R \text{Ric}|^2 \\ &\quad - \frac{(2-\gamma)(\gamma-1)}{R^{\gamma+2}} S |\nabla R|^2 + \frac{4R(T-C) - 2\gamma S^2}{R^{\gamma+1}}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Dimostrazione. Calcoliamo le derivate

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{S}{R^\gamma} \right) &= \frac{R \frac{\partial S}{\partial t} - \gamma S \frac{\partial R}{\partial t}}{R^{\gamma+1}}, \\ \nabla_q \left(\frac{S}{R^\gamma} \right) &= \frac{R \nabla_q S - \gamma S \nabla_q R}{R^{\gamma+1}}, \end{aligned}$$

$$\Delta\left(\frac{S}{R^\gamma}\right) = \frac{R\Delta S - \gamma S\Delta R}{R^{\gamma+1}} - \frac{2\gamma}{R^{\gamma+1}}g^{pq}\nabla_p R\nabla_q S + \frac{\gamma(\gamma+1)}{R^{\gamma+2}}S|\nabla R|^2.$$

Poiché,

$$g^{pq}\nabla_p R\nabla_q \left(\frac{S}{R^\gamma}\right) = \frac{1}{R^\gamma}g^{pq}\nabla_p R\nabla_q S - \frac{\gamma}{R^{\gamma+1}}S|\nabla R|^2,$$

e vale inoltre l'identità

$$S|\nabla R|^2 = |\nabla R\text{Ric}|^2,$$

si ha che la somma dei termini nell'equazione di evoluzione per S/R^γ che sono quadratici nelle derivate prime della curvatura è uguale a $1/R^{\gamma+2}$ moltiplicato per

$$\begin{aligned} & -2R^2|\nabla\text{Ric}|^2 + 2\gamma Rg^{pq}\nabla_p R\nabla_q S - \gamma(\gamma+1)S|\nabla R|^2 \\ & = -2|R\nabla\text{Ric} - \nabla R\text{Ric}|^2 \\ & \quad + 2(\gamma-1)(Rg^{pq}\nabla_p R\nabla_q S - \gamma S|\nabla R|^2) \\ & \quad + (\gamma-2)(\gamma-1)S|\nabla R|^2, \end{aligned}$$

da cui segue la formula (6.4), sostituendo. $\square$

Lemma 6.6. Se $R > 0$, allora per ogni γ si ha

$$\begin{aligned} \partial_t R^{2-\gamma} &= \Delta R^{2-\gamma} + \frac{2(\gamma-1)}{R}g^{pq}\nabla_p R\nabla_q R^{2-\gamma} \\ &\quad - \frac{(2-\gamma)(\gamma-1)}{R^{\gamma+2}}R^2|\nabla R|^2 + 2(2-\gamma)R^{1-\gamma}S. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Dimostrazione. Calcoliamo le derivate

$$\begin{aligned} \partial_t R^{2-\gamma} &= (2-\gamma)R^{1-\gamma}(\Delta R + 2S), \\ \Delta R^{2-\gamma} &= (2-\gamma)R^{1-\gamma}\Delta R + (2-\gamma)(1-\gamma)R^{-\gamma}|\nabla R|^2, \\ \frac{2(\gamma-1)}{R}g^{pq}\nabla_p R\nabla_q R^{2-\gamma} &= 2(2-\gamma)(\gamma-1)R^{-\gamma}|\nabla R|^2, \end{aligned}$$

da cui segue la formula (6.5). $\square$

Lemma 6.7. Sia $f = S/R^\gamma - R^{2-\gamma}/3$. Allora,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \Delta f + \frac{2(\gamma-1)}{R}g^{pq}\nabla_p R\nabla_q f - \frac{2}{R^{\gamma+2}}|R\nabla\text{Ric} - \nabla R\text{Ric}|^2 \\ &\quad - \frac{(2-\gamma)(\gamma-1)}{R^{\gamma+2}}(S - R^2/3)|\nabla R|^2 \\ &\quad + \frac{2}{R^{\gamma+1}}[(2-\gamma)S(S - R^2/3) - 2P], \end{aligned} \quad (6.6)$$

dove $P = S^2 + R(C - T)$.

Dimostrazione. Questa identità segue direttamente dai Lemmi 6.5 e 6.6, per sottrazione. $\square$

La tesi della Proposizione 6.4 segue dal principio di massimo per la funzione f se i termini di reazione hanno segno nonpositivo. L'unico termine che non è chiaramente tale è l'ultimo, nella formula (6.6), dunque dobbiamo analizzare il termine P , che è un polinomio simmetrico di grado 4 negli autovalori λ , μ e ν del tensore di Ricci. Infatti, utilizzando le formule per S , R , T e C in termini di λ , μ e ν , si ha facilmente

$$\begin{aligned} P &= (\lambda^4 + \mu^4 + \nu^4) - (\lambda^3\mu + \lambda\mu^3 + \lambda^3\nu + \lambda\nu^3 + \mu^3\nu + \mu\nu^3) \\ &\quad + (\lambda^2\mu\nu + \lambda\mu^2\nu + \lambda\mu\nu^2) \\ &= \lambda^2(\lambda - \mu)(\lambda - \nu) + \mu^2(\mu - \lambda)(\mu - \nu) + \nu^2(\nu - \lambda)(\nu - \mu). \end{aligned}$$

Poiché stiamo assumendo $\text{Ric} > 0$ lungo il flusso e M è compatta, esiste una costante $\varepsilon > 0$ tale che $\text{Ric} \geq \varepsilon Rg$ al tempo iniziale e per il Teorema 5.6, questa disuguaglianza si mantiene per ogni $t \in [0, T)$.

Lemma 6.8. Se $R > 0$ e $\text{Ric} \geq \varepsilon Rg$, allora $P \geq \varepsilon^2 S(S - R^2/3)$.

Dimostrazione. Poiché entrambi i membri della disuguaglianza sono polinomi omogenei di grado 4 in λ , μ e ν , possiamo assumere che $S = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ e supponiamo $\lambda \geq \mu \geq \nu > 0$. Poiché

$$(\lambda + \mu + \nu)^2 \geq \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

abbiamo $\nu \geq \varepsilon(\lambda + \mu + \nu) \geq \varepsilon$, essendo $R_{ij} \geq \varepsilon Rg_{ij}$. Riscriviamo P come

$$P = (\lambda - \mu)^2[\lambda^2 + (\lambda + \mu)(\mu - \nu)] + \nu^2(\lambda - \nu)(\mu - \nu),$$

da cui è evidente che

$$P \geq \lambda^2(\lambda - \mu)^2 + \nu^2(\lambda - \nu)(\mu - \nu) \geq \lambda^2(\lambda - \mu)^2 + \nu^2(\mu - \nu)^2$$

e poiché $\lambda \geq \nu \geq \varepsilon$, otteniamo

$$P \geq \varepsilon^2[(\lambda - \mu)^2 + (\mu - \nu)^2].$$

D'altra parte, poiché

$$(\lambda - \nu)^2 = [(\lambda - \mu) + (\mu - \nu)]^2 \leq 2[(\lambda - \mu)^2 + (\mu - \nu)^2],$$

vediamo che

$$S - R^2/3 = \frac{1}{3}[(\lambda - \mu)^2 + (\lambda - \nu)^2 + (\mu - \nu)^2] \leq (\lambda - \mu)^2 + (\mu - \nu)^2$$

e questo conclude la dimostrazione del lemma. $\square$

Da questa stima su P , se $\delta \leq 2\varepsilon^2$, si ha che l'ultimo termine nella formula (6.6) è nonpositivo, dunque dal Lemma 6.7, segue

$$\frac{\partial f}{\partial t} \leq \Delta f + X^k \nabla_k f,$$

dove $X^k = \frac{2(\gamma-1)}{R} g^{kl} \nabla_l R$.

Se quindi $C > 0$ è una costante tale che

$$f = \frac{S}{R^\gamma} - \frac{1}{3} R^{2-\gamma} \leq C$$

al tempo $t = 0$, allora per il principio del massimo, abbiamo $f \leq C$ per ogni $t \in [0, T)$, cioè $S - R^2/3 \leq CR^{2-\delta}$, come volevamo dimostrare. $\square$

6.2 STIMA DEL GRADIENTE DELLA CURVATURA SCALARE

Come nella sezione precedente, assumiamo che la nostra varietà sia compatta e tridimensionale, che la metrica iniziale abbia curvatura di Ricci positiva e che l'equazione di evoluzione non normalizzata ammetta una soluzione per $t \in [0, T)$.

Proposizione 6.9. Per ogni $\eta > 0$ possiamo trovare una costante $C(\eta)$, dipendente solo da η e dalla metrica al tempo iniziale, tale che per ogni $t \in [0, T)$, si ha

$$|\nabla R|^2 \leq \eta R^3 + C(\eta),$$

in ogni punto di M .

Dimostrazione. Calcoliamo l'equazione di evoluzione per $|\nabla R|^2 = g^{ij} \nabla_i R \nabla_j R$. Si ha

$$\partial_t |\nabla R|^2 = 2g^{ij} \nabla_i \Delta R \nabla_j R + 4g^{pq} \nabla_p R \nabla_q S + 2g^{ik} g^{jl} R_{kl} \nabla_i R \nabla_j R,$$

mentre

$$\Delta |\nabla R|^2 = 2g^{ij} \Delta \nabla_i R \nabla_j R + 2|\nabla^2 R|^2$$

e sfruttando l'identità

$$\Delta \nabla_i R = \nabla_i \Delta R + g^{jk} R_{ij} \nabla_k R,$$

che segue dal contrarre la formula di interscambio di derivate covarianti di ∇R , si ottiene

$$\partial_t |\nabla R|^2 = \Delta |\nabla R|^2 - 2|\nabla^2 R|^2 + 4g^{pq} \nabla_p R \nabla_q S.$$

Segue che abbiamo la seguente equazione di evoluzione:

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{|\nabla R|^2}{R} \right) &= \Delta \left(\frac{|\nabla R|^2}{R} \right) - \frac{2}{R^3} |R \nabla^2 R - \nabla R \otimes \nabla R|^2 \\ &\quad + \frac{4}{R} g^{pq} \nabla_p R \nabla_q S - \frac{2S}{R^2} |\nabla R|^2. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Calcoliamo infatti

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{|\nabla R|^2}{R} \right) &= \frac{R \partial_t |\nabla R|^2 - |\nabla R|^2 \partial_t R}{R^2} \\ &= \frac{R(\Delta |\nabla R|^2 - 2|\nabla^2 R|^2 + 4g^{pq} \nabla_p R \nabla_q S)}{R^2} \\ &\quad - \frac{|\nabla R|^2 (\Delta R + 2S)}{R^2} \\ &= \frac{R\Delta |\nabla R|^2 - |\nabla R|^2 \Delta R}{R^2} \\ &\quad - \frac{2}{R} |\nabla^2 R|^2 + \frac{4}{R} g^{pq} \nabla_p R \nabla_q S - \frac{2S}{R^2} |\nabla R|^2 \\ &= \frac{R\Delta |\nabla R|^2 - |\nabla R|^2 \Delta R}{R^2} \\ &\quad - \frac{2}{R^3} |R \nabla^2 R|^2 + \frac{4}{R} g^{pq} \nabla_p R \nabla_q S - \frac{2S}{R^2} |\nabla R|^2, \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{|\nabla R|^2}{R} \right) &= \frac{R\Delta |\nabla R|^2 - |\nabla R|^2 \Delta R}{R^2} \\ &\quad - \frac{4}{R^2} g^{ik} g^{jl} \nabla_{ij}^2 R \nabla_k R \nabla_l R + \frac{2}{R^3} |\nabla R \otimes \nabla R|^2 \end{aligned}$$

e la formula (6.7) segue.

Ricordiamo le equazioni di evoluzione

$$\partial_t R^2 = \Delta R^2 - 2|\nabla R|^2 + 4RS, \quad (6.8)$$

$$\partial_t S = \Delta S - 2|\nabla \text{Ric}|^2 + 4(T - C),$$

$$\partial_t (S - R^2/3) = \Delta (S - R^2/3) - 2(|\nabla \text{Ric}|^2 - |\nabla R|^2/3) + 4Q, \quad (6.9)$$

dove $Q = T - RS/3 - C$ e vediamo che si ha

$$Q \leq R(S - R^2/3). \quad (6.10)$$

Infatti, dalla sezione precedente, sappiamo che $P = S^2 + R(C - T) \geq 0$ e poiché $S \leq R^2$, otteniamo

$$QR \leq P + QR = S(S - R^2/3) \leq R^2(S - R^2/3),$$

e la formula (6.10) segue dividendo per R .

Poiché $\nabla_i R = g^{jk} \nabla_i R_{jk}$, è immediato osservare che

$$|\nabla R|^2 \leq 3|\nabla \text{Ric}|^2,$$

per la disuguaglianza tra media aritmetica e quadratica. È in realtà piuttosto sorprendente che valga una stima leggermente migliore.

Lemma 6.10. In dimensione 3, si ha la disuguaglianza $|\nabla R|^2 \leq \frac{20}{7} |\nabla \text{Ric}|^2$.

Per un generico tensore simmetrico T_{ij} , la sua derivata covariante $\nabla_i T_{jk}$ (che è un tensore di tipo $(0, 3)$, simmetrico negli ultimi due indici) possiede due contrazioni (tracce) algebricamente indipendenti: la derivata della traccia $g^{jk} \nabla_i T_{jk} = \nabla_i \text{tr } T$ e la divergenza $g^{ij} \nabla_i T_{jk} = \text{div } T_k$. Di conseguenza, la parte di ∇T legata alle tracce dipenderebbe da due campi vettoriali distinti, impedendo di ottenere una stima su un unico scalare.

Nel caso del tensore di Ricci R_{ij} , tuttavia, entra in gioco la seconda identità di Bianchi contratta (1.7), che in coordinate si scrive come

$$g^{ij} \nabla_i R_{jk} = \frac{1}{2} \nabla_k R, \quad (6.11)$$

la quale mostra un legame tra la divergenza e il gradiente della traccia del tensore di Ricci. Grazie a questa identità, entrambe le tracce di ∇Ric sono proporzionali al solo vettore ∇R e questo permette di migliorare la costante nella disuguaglianza, cosa che non si ha per un tensore generico.

Dimostrazione del Lemma 6.10. È sempre una buona idea provare a scrivere un tensore come somma delle sue componenti irriducibili. Decomponiamo quindi ∇Ric come

$$\nabla_i R_{jk} = E_{ijk} + F_{ijk},$$

dove E è un tensore che “raccolge” le parti di traccia di ∇Ric , mentre F è allora totalmente a traccia nulla. Poiché E_{ijk} deve essere simmetrico in negli indici j e k , lo cerchiamo sotto la forma

$$E_{ijk} = g_{ij} A_k + g_{ik} A_j + g_{jk} B_i,$$

per delle costanti A_k e B_i da determinare. Per assicurarci che $F_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - E_{ijk}$ sia a traccia nulla, dobbiamo imporre che le tracce di E_{ijk} coincidano con quelle di $\nabla_i R_{jk}$, dunque:

- contraendo con g^{jk} , si ha

$$g^{jk}E_{ijk} = g^{jk}(g_{ij}A_k + g_{ik}A_j + g_{jk}B_i) = 2A_i + 3B_i = g^{jk}\nabla_i R_{jk} = \nabla_i R,$$

per ogni $i = 1, 2, 3$;

- contraendo con g^{ij} ,

$$g^{ij}E_{ijk} = g^{ij}(g_{ij}A_k + g_{ik}A_j + g_{jk}B_i) = 4A_k + B_k = g^{ij}\nabla_i R_{jk} = \nabla_k R/2,$$

per ogni $k = 1, 2, 3$, per l'identità di Bianchi (6.11).

Risolviendo questo sistema lineare, troviamo immediatamente $A_k = \frac{1}{20}\nabla_k R$ e $B_i = \frac{3}{10}\nabla_i R$, dunque

$$E_{ijk} = \frac{1}{20}(g_{ij}\nabla_k R + g_{ik}\nabla_j R) + \frac{3}{10}g_{jk}\nabla_i R,$$

da cui

$$|E_{ijk}|^2 = \frac{7}{20}|\nabla R|^2.$$

Per costruzione, il tensore $F_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - E_{ijk}$ è a traccia nulla su ogni coppia di indici, ovvero

$$g^{ij}F_{ijk} = 0, \quad g^{ik}F_{ijk} = 0 \quad \text{e} \quad g^{jk}F_{ijk} = 0.$$

Ne consegue che i tensori E ed F sono mutuamente ortogonali rispetto al prodotto indotto dalla metrica:

$$\begin{aligned} g(E, F) &= g^{il}g^{jp}g^{kq}E_{ijk}F_{lpq} \\ &= \left(\frac{1}{20}(g^{lp}\nabla_k R + g^{lq}\nabla_j R) + \frac{3}{10}g^{pq}\nabla_i R \right) F_{lpq} = 0. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$|\nabla \text{Ric}|^2 = |E_{ijk}|^2 + |F_{ijk}|^2 \geq \frac{7}{20}|\nabla R|^2,$$

il che dimostra il lemma. $\square$

Dunque, per la disuguaglianza (6.10) e quella di questo lemma, dall'uguaglianza (6.9) otteniamo

$$\partial_t(S - R^2/3) \leq \Delta(S - R^2/3) - \frac{2}{21}|\nabla \text{Ric}|^2 + 4R(S - R^2/3). \quad (6.12)$$

Tornando all'equazione (6.7) per l'evoluzione di $|\nabla R|^2/R$, l'unico termine di reazione che potrebbe avere segno positivo è $g^{pq}\nabla_p R \nabla_q S$, che stimiamo nel modo seguente:

$$g^{pq}\nabla_p R \nabla_q S = 2g^{pq}g^{il}g^{jk}\nabla_p R R_{ij}\nabla_q R_{lk} \leq 2|\nabla R||\text{Ric}||\nabla \text{Ric}|$$

e quest'ultimo termine è minore o uguale a $4R|\nabla \text{Ric}|^2$ in quanto $|\nabla R|^2 \leq 3|\nabla \text{Ric}|^2 \leq 4|\nabla \text{Ric}|^2$ (l'ultima disuguaglianza è per evitare radici quadrate).

Dunque, usando questa stima per l'equazione (6.7) e ricordando la formula (6.8), si ha per $\eta \leq 1/3$,

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{|\nabla R|^2}{R} - \eta R^2 \right) &\leq \Delta \left(\frac{|\nabla R|^2}{R} - \eta R^2 \right) + 16|\nabla \text{Ric}|^2 - \frac{2S}{R^2}|\nabla R|^2 \\ &\quad + 2\eta|\nabla R|^2 - 4\eta RS \\ &\leq \Delta \left(\frac{|\nabla R|^2}{R} - \eta R^2 \right) + 16|\nabla \text{Ric}|^2 - \frac{4}{3}\eta R^3, \end{aligned} \tag{6.13}$$

in quanto $S \geq R^2/3$ e il termine $2(S/R^2)|\nabla R|^2$ domina $2\eta|\nabla R|^2$ quando $\eta \leq 1/3$.

L'idea ora è di "aggiungere" a $|\nabla R|^2/R$ un multiplo di $S - R^2/3$ tale che il suo termine di reazione $-\frac{2}{21}|\nabla \text{Ric}|^2$ nell'equazione (6.12) (che non sarebbe presente senza l'analisi raffinata del tensore ∇Ric vista sopra nel Lemma 6.10) sia sufficiente a cancellare il termine nonnegativo $|\nabla \text{Ric}|^2$, per poi invocare la Proposizione 6.4 che ci dice che l'altro termine di reazione $R(S - R^2/3)$ è piccolo rispetto a R^3 .

Osserviamo che $168 \frac{2}{21} = 16$ e poniamo

$$F = \frac{|\nabla R|^2}{R} - \eta R^2 + 168(S - R^2/3).$$

Allora, per ogni $\eta \leq 1/3$, esiste una costante $C(\eta)$ dipendente unicamente da η e dal valore iniziale della metrica al tempo iniziale tale che

$$\frac{\partial F}{\partial t} \leq \Delta F + C(\eta). \tag{6.14}$$

Infatti, sommando i contributi forniti dalle stime (6.13) e (6.12), gli unici termini di reazione che non si annullano sono

$$672R(S - R^2/3) - \frac{4}{3}\eta R^3$$

e in virtù della Proposizione 6.4, è possibile determinare una costante $\delta > 0$ e una costante $C > 0$ dipendente solo dalla metrica iniziale, tali che $S - R^2/3 \leq CR^{2-\delta}$. Conseguentemente, per un'opportuna costante $\tilde{C}(\eta)$ dipendente solo da δ , C ed $\eta > 0$, otteniamo

$$672R(S - R^2/3) - \frac{4}{3}\eta R^3 \leq CR^{3-\delta} - \frac{4}{3}\eta R^3 \leq \tilde{C}(\eta),$$

da cui segue la formula (6.14).

Tale formula, per il principio di massimo, implica che

$$\frac{|\nabla R|^2}{R} - \eta R^2 \leq F_{\max}(t) \leq F_{\max}(0) + \tilde{C}(\eta)t \leq F_{\max}(0) + \tilde{C}(\eta)T$$

per ogni $t \in [0, T)$ e in ogni punto di M .

Ricordando la stima (3.2) sul tempo massimale di esistenza del flusso, anch'essa dipendente solo dalla metrica iniziale, si ha $T \leq 3/2R_{\min}(0)$, dunque concludiamo che

$$\frac{|\nabla R|^2}{R} \leq \eta R^2 + \bar{C}(\eta),$$

in $M \times [0, T)$, con $\bar{C}(\eta)$ dipendente solo dalla metrica iniziale. Questo implica che

$$|\nabla R|^2 \leq \eta R^3 + \bar{C}(\eta)R \leq 2\eta R^3 + C(\eta),$$

con $C(\eta)$ dipendente solo dalla metrica iniziale. Dunque, cambiando variabile da η a 2η , poiché $R > 0$ e possiamo scegliere η arbitrariamente piccolo, abbiamo la tesi della Proposizione 6.9. $\square$

6.3 IL CONTROLLO DEL RAPPORTO $R_{\max}/R_{\min}$

Sappiamo che se T è il tempo massimale di esistenza del flusso, $S_{\max} = |\text{Ric}|_{\max}^2 \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow T$, che nel nostro caso di curvatura di Ricci positiva, è equivalente a $R_{\max} \rightarrow +\infty$. Vogliamo studiare il rapporto $R_{\max}/R_{\min}$ all'avvicinarsi a tale tempo massimale.

Proposizione 6.11. Si ha $R_{\max}/R_{\min} \rightarrow 1$, per $t \rightarrow T$.

Dimostrazione. Si vede facilmente che dalla Proposizione 6.9, segue che per ogni $\eta > 0$ possiamo trovare una costante $C(\eta)$ con

$$|\nabla R| \leq \frac{1}{2}\eta^2 R^{3/2} + C(\eta)$$

per ogni $t \in [0, T)$. Poiché $R_{\max} \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow T$, possiamo trovare un tempo θ tale che $C(\eta) \leq \frac{1}{2}\eta^2 R_{\max}^{3/2}$ per ogni $t \in [\theta, T)$, dunque,

$$|\nabla R| \leq \eta^2 R_{\max}^{3/2},$$

per ogni $t \geq \theta$. Fissato allora un tale tempo t e un punto $p \in M$ dove $R(\cdot, t)$ assume il suo massimo spaziale, su qualsiasi geodetica uscente da p di lunghezza $\ell = 1/(\eta R_{\max}^{1/2})$ si ha $R \geq (1 - \eta)R_{\max}$.

Mostriamo che se $\eta > 0$ è sufficientemente piccolo (indipendentemente da t), su tale geodetica vi è un punto coniugato a p . Dunque, per il *teorema di Hopf–Rinow* (si veda [48]), la famiglia di queste geodetiche “copre” tutta M e di conseguenza, la stima $R \geq (1 - \eta)R_{\max}$ vale per ogni punto della varietà. Chiaramente segue che

$$R_{\min} \geq (1 - \eta)R_{\max}.$$

Infatti, poiché sappiamo dal Teorema 5.6 che $\text{Ric} \geq \varepsilon Rg$, per un certo $\varepsilon > 0$, indipendente da t , lungo una tale geodetica si ha

$$\text{Ric} \geq \varepsilon Rg \geq \varepsilon(1 - \eta)R_{\max}g$$

e possiamo applicare la seguente versione del *teorema di Bonnet–Myers* (si veda [48]).

Teorema 6.12. Se $\text{Ric} \geq (n - 1)kg$ lungo una geodetica di lunghezza almeno $\pi/\sqrt{k}$ su una varietà di dimensione n , allora lungo tale geodetica vi sono punti coniugati.

Dunque, se scegliamo η sufficientemente piccolo, tale che

$$\ell = \frac{1}{\eta R_{\max}^{1/2}} \geq \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon(1 - \eta)R_{\max}}}, \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{\eta} \geq \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon(1 - \eta)}},$$

abbiamo la conclusione per ogni $t \geq \theta$.

Segue che

$$\liminf_{t \rightarrow T} R_{\min}/R_{\max} \geq 1 - \eta$$

e per l'arbitrarietà di η , concludiamo che $R_{\max}/R_{\min} \rightarrow 1$, per $t \rightarrow T$. $\square$

Per il Teorema 4.15 e l'Osservazione 4.16, sappiamo non solo che $|\text{Ric}|_{\max} \rightarrow +\infty$, per $t \rightarrow T$, ma anche che per una costante $C > 0$ (che nelle seguenti stime può variare da riga a riga), si ha

$$|\text{Ric}|_{\max}(t) \geq \frac{C}{T - t},$$

per ogni $t \in [0, T)$, dunque nella nostra situazione di $\text{Ric} > 0$, ciò è equivalente a

$$R_{\max}(t) \geq \frac{C}{T-t}.$$

Come facile conseguenza della proposizione appena vista, si ha allora anche

$$R_{\min}(t) \geq \frac{C}{T-t} \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad r(t) \geq \frac{C}{T-t} \rightarrow +\infty, \quad (6.15)$$

per ogni $t \in [0, T)$, dove r è la curvatura scalare media al tempo t (la costante C nelle precedenti stime può variare da riga a riga).

Segue chiaramente che

$$\int_0^T R_{\max} dt = +\infty, \quad \int_0^T R_{\min} dt = +\infty \quad \text{e} \quad \int_0^T r dt = +\infty.$$

Proposizione 6.13. Si ha $S/R^2 - 1/3 \rightarrow 0$, per $t \rightarrow T$.

Dimostrazione. Per la Proposizione 6.4, abbiamo

$$\frac{S}{R^2} - \frac{1}{3} \leq CR^{-\delta} \leq CR_{\min}^{-\delta},$$

e $R_{\min} \rightarrow +\infty$, se $t \rightarrow T$. □

6.4 STIME PER IL FLUSSO NORMALIZZATO

Nelle stesse ipotesi delle sezioni precedenti, consideriamo il flusso di Ricci normalizzato $\tilde{g}(t)$ associato al flusso di Ricci $g(t)$ su M nell'intervallo massimale $[0, T)$, che dunque soddisfa (si veda l'analisi all'inizio del capitolo)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{g}_{ij} = \frac{2}{3} \tilde{r} \tilde{g}_{ij} - 2\tilde{R}_{ij}$$

in un intervallo $[0, \tilde{T})$, dove

$$\tilde{g}(\tau) = \psi(t)g(t) \quad \text{e} \quad \tau(t) = \int_0^t \psi(s) ds, \quad (6.16)$$

con

$$\psi(t) = \left(\frac{\text{Vol}(0)}{\text{Vol}(t)} \right)^{2/3}, \quad (6.17)$$

per ogni $t \in [0, T)$. In particolare, ricordiamo che

$$\tilde{r}(\tau) = \psi(t)^{-1} r(t). \quad (6.18)$$

Per i risultati visti, riscaldando le quantità geometriche, abbiamo allora le seguenti conclusioni:

- $\tilde{R}_{\max}/\tilde{R}_{\min} \rightarrow 1$, per $\tau \rightarrow \tilde{T}$. In particolare, questo rapporto è uniformemente limitato.
- $\tilde{\text{Ric}} \geq \varepsilon \tilde{R} \tilde{g}$, per un certo $\varepsilon > 0$.

Lemma 6.14. Esiste una costante $C > 0$ tale che $\tilde{R}_{\max} \leq C < +\infty$, per ogni $\tau \in [0, \tilde{T})$.

Dimostrazione. Siano $\tilde{\text{Vol}}$ il volume e $\tilde{d}$ il diametro di $(M, \tilde{g}(\tau))$. Avendo tensore di Ricci positivo, il teorema di Bishop–Gromov (si veda [48]) ci dice che i volumi delle palle di $(M, \tilde{g}(\tau))$ sono minori di quelli delle palle euclidee tridimensionali di stesso raggio. Segue che esiste una costante uniforme $\bar{C} > 0$ tale che $\tilde{\text{Vol}} \leq \bar{C} \tilde{d}^3$ e poiché $\tilde{\text{Ric}} \geq \varepsilon \tilde{R}_{\min} \tilde{g}$, si ha $\tilde{d} \leq C_\varepsilon \tilde{R}_{\min}^{-1/2}$, per il teorema di Bonnet–Myers (dove $C_\varepsilon = \pi\sqrt{2/\varepsilon}$). Pertanto, $\tilde{\text{Vol}} \tilde{R}_{\min}^{3/2} \leq \bar{C} C_\varepsilon^3$. Poiché per costruzione $\tilde{\text{Vol}} = \text{Vol}(0)$, concludiamo che $\tilde{R}_{\min} \leq \bar{C} C_\varepsilon^3$. Di conseguenza, si ha anche $\tilde{R}_{\max} \leq C$, per una costante $C > 0$, in quanto $\tilde{R}_{\max}/\tilde{R}_{\min}$ è uniformemente limitato. $\square$

Lemma 6.15. Si ha $\tilde{T} = +\infty$.

Dimostrazione. Poiché $d\tau/dt = \psi$ e $\psi\tilde{r} = r$, si ha

$$\int_0^{\tilde{T}} \tilde{r} d\tau = \int_0^T r dt = +\infty,$$

per le stime (6.15). Ma $\tilde{r} \leq \tilde{R}_{\max} \leq C$, dunque si deve necessariamente avere $\tilde{T} = +\infty$. $\square$

Dalla Proposizione 6.13 segue che (essendo invariante per riscaldamento)

$$\tilde{S}/\tilde{R}^2 - 1/3 \rightarrow 0,$$

per $\tau \rightarrow +\infty$ e poiché abbiamo visto che vale la relazione

$$\tilde{S} - \frac{1}{3}\tilde{R}^2 = \frac{1}{3}[(\tilde{\lambda} - \tilde{\mu})^2 + (\tilde{\lambda} - \tilde{\nu})^2 + (\tilde{\mu} - \tilde{\nu})^2],$$

ne consegue che il rapporto $\tilde{\lambda}/\tilde{\mu}$ tra due qualsiasi autovalori del tensore di Ricci $\tilde{\text{Ric}}$ converge a 1 per $\tau \rightarrow +\infty$ (essendo equilimitati). Dato che anche $\tilde{R}_{\max}/\tilde{R}_{\min} \rightarrow 1$ per $\tau \rightarrow +\infty$, deve inevitabilmente accadere che la curvatura sezionale diventi ad un certo tempo *1/4-pinch*ed,

cioè che il rapporto $\widetilde{\text{Sec}}_{\min}/\widetilde{\text{Sec}}_{\max}$ appartenga all'intervallo $(1/4, 1]$. Dunque, per il *teorema della sfera* (si veda [84, Sezione 12.3]) si ha che il rivestimento universale di M è una sfera. Tuttavia, possiamo evitare di invocare tale teorema e utilizzare soltanto un lemma chiave della sua dimostrazione (detto “del raggio di iniettività di Klingenberg” – si veda [26, Theorem 5.10] per una dimostrazione).

Lemma 6.16 (Klingenberg [63, 64]). Sia M una varietà semplicemente connessa di dimensione maggiore o uguale a 3, tale che tutte le sue curvatures sezionali appartengono all'intervallo $(K/4, K]$. Allora il raggio di iniettività di M è almeno $\pi/\sqrt{K}$.

Applichiamo questo risultato al rivestimento universale riemanniano (compatto) $\tilde{M}$ di M , che ha un numero finito $m \in \mathbb{N}$ di fogli, per il teorema di Bonnet–Myers. Inoltre, se le curvatures sezionali appartengono all'intervallo $(K/4, K]$ (in particolare, sono minori o uguali a K), per il *teorema di Günther* (si veda [48]), il volume di una palla $\tilde{B}$ in $\tilde{M}$ di raggio $\text{inj}(\tilde{M})$ sarà maggiore di quello di una palla B di stesso raggio nella varietà semplicemente connessa con curvatura sezionale costante uguale a K .

Poiché K è limitato dall'alto da una costante (un multiplo fissato di $\tilde{R}_{\min}$ o equivalentemente, di $\tilde{R}_{\max}$, che sono uniformemente limitate per $\tau \in [0, +\infty)$), si ha

$$\text{Vol}^K(B) \geq C_K \text{inj}(\tilde{M})^3,$$

per una qualche costante $C_K > 0$ (si osservi che anche $\text{inj}(\tilde{M})$ è limitato da una costante uniforme, per il teorema di Bonnet–Myers). Dunque, per il Lemma 6.16, si ha

$$\pi^3 K^{-3/2} \leq \text{inj}(\tilde{M})^3 \leq C_K^{-1} \text{Vol}^K(B) \leq C_K^{-1} \text{Vol}(\tilde{B}) \leq C_K^{-1} \text{Vol}(\tilde{M}).$$

Poiché il volume di $\tilde{M}$ è uguale a m volte quello di M , che è uguale a 1 e ricordando che K è minore o uguale a un multiplo (fissato) di $\tilde{R}_{\min}$, otteniamo

$$\tilde{R}_{\min}^{-3/2} \leq CK^{-3/2} \leq C,$$

per una costante $C > 0$, per ogni $\tau \in [0, +\infty)$.

Concludiamo quindi che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\tilde{R}_{\min} \geq \varepsilon$, per ogni $\tau \in [0, +\infty)$.

6.5 CONVERGENZA ESPONENZIALE

Per concludere la dimostrazione del Teorema 6.2, dobbiamo mostrare che le quantità geometriche della metrica normalizzata non solo si

avvicinano a quelle di una sfera, ma lo fanno con una rapidità tale da garantire la convergenza della metrica stessa nella topologia C^∞ . Questo è garantito da delle stime di decadimento esponenziale.

Iniziamo con un principio generale per convertire le quantità dal flusso di Ricci non normalizzato a quello normalizzato. Siano P e Q due espressioni costruite a partire dalla metrica e dai tensori di curvatura e siano $\tilde{P}$ e $\tilde{Q}$ le corrispondenti espressioni per il flusso normalizzato. Poiché differiscono per dilatazioni, differiscono per una potenza di ψ (si ricordino le equazioni (6.16) e (6.17)). Diciamo che P ha grado n se $\tilde{P} = \psi^n P$. Pertanto, g ha grado 1, Ric ha grado 0, R ha grado -1 e S ha grado -2 .

Lemma 6.17. Supponiamo che P soddisfi

$$\partial_t P = \Delta P + Q$$

per il flusso non normalizzato e che P abbia grado n . Allora Q ha grado $n - 1$ e per il flusso normalizzato vale

$$\partial_\tau \tilde{P} = \tilde{\Delta} \tilde{P} + \tilde{Q} + \frac{2}{3} n \tilde{r} \tilde{P}.$$

Dimostrazione. Osserviamo che Q ha grado $n - 1$ poiché $\partial\tau/\partial t = \psi$ e $\Delta = \psi \tilde{\Delta}$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \psi \partial_\tau (\psi^{-n} \tilde{P}) &= \psi \tilde{\Delta} (\psi^{-n} \tilde{P}) + \psi^{-n+1} \tilde{Q}, \\ \partial_\tau \tilde{P} &= \tilde{\Delta} \tilde{P} + \tilde{Q} + \frac{n}{\psi} \frac{d\psi}{d\tau} \tilde{P}. \end{aligned}$$

Poiché dall'equazione (6.2) segue

$$\frac{d \log \psi}{dt} = 2r/3, \quad \text{da cui} \quad \frac{d \log \psi}{d\tau} = \frac{1}{\psi} \frac{d \log \psi}{dt} = 2\psi^{-1}r/3 = 2\tilde{r}/3,$$

per la formula (6.18), abbiamo la tesi del lemma. $\square$

Dalla sezione precedente, sappiamo che il flusso normalizzato soddisfa, per ogni $\tau \in [0, +\infty)$,

$$0 < \varepsilon \leq \tilde{R}_{\min} \leq \tilde{R}_{\max} \leq \tilde{C}, \quad (6.19)$$

$$\varepsilon \tilde{R} \tilde{g} \leq \tilde{\text{Ric}} \leq \tilde{R} \tilde{g},$$

per delle costanti positive $\tilde{C}$ ed ε , inoltre

$$\tilde{R}_{\max}/\tilde{R}_{\min} \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad \tilde{S}/\tilde{R}^2 - 1/3 \rightarrow 0,$$

per $\tau \rightarrow +\infty$.

Lemma 6.18. Possiamo trovare delle costanti $C, \delta > 0$ tali che

$$\tilde{S} - \tilde{R}^2/3 \leq Ce^{-\delta\tau},$$

per ogni $\tau \in [0, +\infty)$.

Dimostrazione. Poniamo $\tilde{f} = \tilde{S}/\tilde{R}^2 - 1/3$ e notiamo che $\tilde{f}$ ha grado 0. Allora, per il Lemma 6.7 con $\gamma = 2$ e il Lemma 6.17, abbiamo

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} \leq \tilde{\Delta} \tilde{f} + \frac{2}{\tilde{R}} \tilde{g}^{pq} \tilde{\nabla}_p \tilde{R} \tilde{\nabla}_q \tilde{f} - 4 \frac{\tilde{P}}{\tilde{R}^3}$$

e dal Lemma 6.8, si ha

$$\tilde{P} \geq \varepsilon^2 \tilde{S} (\tilde{S} - \tilde{R}^2/3) = \varepsilon^2 \tilde{S} \tilde{R}^2 \tilde{f}.$$

Dunque,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} \leq \tilde{\Delta} \tilde{f} + \tilde{X}^q \tilde{\nabla}_q \tilde{f} - \delta \tilde{f},$$

con $\tilde{X}^q = 2\tilde{g}^{qp} \tilde{\nabla}_p \tilde{R}/\tilde{R}$ e $\delta = 4\varepsilon^3/3$, in quanto

$$4 \frac{\tilde{P}}{\tilde{R}^3} \geq 4\varepsilon^2 \frac{\tilde{S} \tilde{f}}{\tilde{R}} \geq 4\varepsilon^2 \tilde{f} \tilde{R}/3 \geq 4\varepsilon^3 \tilde{f}/3 = \delta \tilde{f},$$

essendo $\tilde{S} \geq \tilde{R}^2/3$ e $\tilde{R} \geq \varepsilon$ (disuguaglianze (6.19)). Quindi,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (e^{\delta\tau} \tilde{f}) \leq \tilde{\Delta} (e^{\delta\tau} \tilde{f}) + \tilde{X}^k \tilde{\nabla}_k (e^{\delta\tau} \tilde{f}),$$

e per il principio del massimo segue che $e^{\delta\tau} \tilde{f} \leq C$, per una costante $C > 0$ dipendente dal massimo di $\tilde{f}(\cdot, 0)$ (cioè dalla metrica iniziale). Dunque, $\tilde{f} \leq Ce^{-\delta\tau}$ per ogni $\tau \in [0, +\infty)$ e poiché $\tilde{R}$ è uniformemente limitata dall'alto e positivamente dal basso, questo risulta equivalente alla tesi del lemma. $\square$

Corollario 6.19. Si ha $|\tilde{\text{Ric}} - \tilde{R}\tilde{g}/3| \leq Ce^{-\delta\tau}$, per ogni $\tau \in [0, +\infty)$.

Dimostrazione. Gli autovalori di $\tilde{\text{Ric}} - \tilde{R}\tilde{g}/3$ sono della forma

$$\lambda - (\lambda + \mu + \nu)/3 = [(\lambda - \mu) + (\lambda - \nu)]/3,$$

mentre

$$\tilde{S} - \tilde{R}^2/3 = [(\lambda - \mu)^2 + (\lambda - \nu)^2 + (\mu - \nu)^2]/3,$$

dunque la stima segue immediatamente dal lemma precedente. $\square$

Lemma 6.20. Possiamo trovare delle costanti $C, \delta > 0$ tali che

$$\tilde{R}_{\max} - \tilde{R}_{\min} \leq Ce^{-\delta\tau},$$

per ogni $\tau \in [0, +\infty)$.

Dimostrazione. Poniamo

$$\tilde{F} = \frac{|\tilde{\nabla}\tilde{R}|^2}{\tilde{R}} + 168(\tilde{S} - \tilde{R}^2/3),$$

che ha grado -2 . Dalle formule (6.12) e (6.13) (scegliendo $\eta = 0$) segue

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{F} \leq \tilde{\Delta}\tilde{F} + 672\tilde{R}(\tilde{S} - \tilde{R}^2/3) - \frac{4}{3}\tilde{r}\tilde{F},$$

(il Lemma 6.17 vale anche per le disuguaglianze differenziali). Utilizzando la stima del Lemma 6.18, si ha

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{F} \leq \tilde{\Delta}\tilde{F} + \bar{C}e^{-\delta\tau} - \delta\tilde{F},$$

per delle costanti $\bar{C}, \delta, \varepsilon > 0$, poiché $\tilde{R} \leq \tilde{C}$ e $\tilde{r} \geq \tilde{R}_{\min} \geq \varepsilon > 0$. Dunque,

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(e^{\delta\tau}\tilde{F} - \bar{C}\tau) \leq \tilde{\Delta}(e^{\delta\tau}\tilde{F} - \bar{C}\tau)$$

e dal principio del massimo, concludiamo che $e^{\delta\tau}\tilde{F} - \bar{C}\tau \leq C$, per una costante $C > \bar{C}$ dipendente solo dalla metrica iniziale. Ne deriva che $\tilde{F} \leq C(1 + \tau)e^{-\delta\tau}$ per ogni $\tau \in [0, +\infty)$. Poiché $\tilde{F} \geq |\tilde{\nabla}\tilde{R}|^2/\tilde{R}$ e $\tilde{R}$ è uniformemente limitata superiormente, dalla stima precedente segue che

$$|\tilde{\nabla}\tilde{R}|^2 \leq C(1 + \tau)e^{-\delta\tau}.$$

Riducendo eventualmente il valore di $\delta > 0$, otteniamo quindi

$$|\tilde{\nabla}\tilde{R}| \leq Ce^{-\delta\tau}$$

ed essendo il diametro di $(M, \tilde{g}(\tau))$ uniformemente limitato, si ha

$$\tilde{R}_{\max} - \tilde{R}_{\min} \leq \text{diam}(M, \tilde{g}(\tau)) \max_M |\tilde{\nabla}\tilde{R}| \leq Ce^{-\delta\tau},$$

come volevamo dimostrare. $\square$

Lemma 6.21. Si ha $|\tilde{\text{Ric}} - \tilde{r}\tilde{g}/3| \leq Ce^{-\delta\tau}$, per ogni $\tau \in [0, +\infty)$.

Dimostrazione. Sappiamo che $\tilde{R}_{\min} \leq \tilde{r} \leq \tilde{R}_{\max}$, dunque $|\tilde{R} - \tilde{r}| \leq \tilde{R}_{\max} - \tilde{R}_{\min} \leq Ce^{-\delta\tau}$, per il lemma precedente. Poiché per il Corollario 6.19, abbiamo $|\widetilde{\text{Ric}} - \tilde{R}\tilde{g}/3| \leq Ce^{-\delta\tau}$, la tesi segue dalla disuguaglianza triangolare. $\square$

Per il Lemma 4.12 e le precedenti stime di decadimento esponenziale, si ha il seguente risultato.

Proposizione 6.22. Le metriche $\tilde{g}(\tau)$ sono tutte equivalenti e convergono uniformemente per $\tau \rightarrow +\infty$ a una metrica continua definita positiva $\tilde{g}(\infty)$ su M .

Per stimare le derivate della curvatura, ricordiamo la formula (4.10) nell'Osservazione 4.11 e vediamo che tutti e tre i termini hanno lo stesso grado di omogeneità ($\tilde{\nabla} = \nabla$ e $dV_{\tilde{g}} = \psi^3 dV_g$), di conseguenza la stessa formula vale per il flusso normalizzato. Poiché in dimensione tre il tensore di Riemann è interamente determinato da quello di Ricci, abbiamo la stima

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_M |\tilde{\nabla}^k \widetilde{\text{Ric}}|^2 dV_{\tilde{g}} &\leq -2 \int_M |\tilde{\nabla}^{k+1} \widetilde{\text{Ric}}|^2 dV_{\tilde{g}} \\ &\quad + \tilde{C} \max_M |\widetilde{\text{Ric}}| \int_M |\tilde{\nabla}^k \widetilde{\text{Ric}}|^2 dV_{\tilde{g}} \\ &\leq -2 \int_M |\tilde{\nabla}^{k+1} \widetilde{\text{Ric}}|^2 dV_{\tilde{g}} + \bar{C} \int_M |\tilde{\nabla}^k \widetilde{\text{Ric}}|^2 dV_{\tilde{g}}, \end{aligned} \tag{6.20}$$

in quanto $|\widetilde{\text{Ric}}|$ è uniformemente limitato, per $\tau \in [0, +\infty)$. Introduciamo il tensore $\tilde{E} = \widetilde{\text{Ric}} - \tilde{r}\tilde{g}/3$ e osserviamo che $\tilde{\nabla}^k \widetilde{\text{Ric}} = \tilde{\nabla}^k \tilde{E}$, per $k \geq 1$, dal momento che $\tilde{r}$ è costante in spazio. Quindi, interpolando per mezzo della Proposizione 4.9, si ha

$$\bar{C} \int_M |\tilde{\nabla}^k \widetilde{\text{Ric}}|^2 dV_{\tilde{g}} \leq \hat{C} \left(\int_M |\tilde{\nabla}^{k+1} \widetilde{\text{Ric}}|^2 dV_{\tilde{g}} \right)^{k/(k+1)} \left(\int_M |\tilde{E}|^2 dV_{\tilde{g}} \right)^{1/(k+1)}$$

per $k \geq 1$ e applicando la disuguaglianza di Young, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\bar{C} \int_M |\tilde{\nabla}^k \widetilde{\text{Ric}}|^2 dV_{\tilde{g}} \leq C'\varepsilon \int_M |\tilde{\nabla}^{k+1} \widetilde{\text{Ric}}|^2 dV_{\tilde{g}} + C'\varepsilon^{-k} \int_M |\tilde{E}|^2 dV_{\tilde{g}},$$

per una costante $C' > 0$ dipendente solo da k (e non da ε).

Scegliendo dunque $\varepsilon > 0$ tale che $C'\varepsilon < 2$ e sostituendo questa stima nella formula (6.20), otteniamo

$$\frac{d}{d\tau} \int_M |\tilde{\nabla}^k \widetilde{\text{Ric}}|^2 dV_{\tilde{g}} \leq C'' \int_M |\tilde{E}|^2 dV_{\tilde{g}} \leq Ce^{-2\delta\tau},$$

dove la seconda disuguaglianza segue dal Lemma 6.21. Segue che

$$\int_M |\tilde{\nabla}^k \widetilde{\text{Ric}}|^2 dV_{\tilde{g}} \leq C_k,$$

per ogni $k \geq 1$ e per ogni $\tau \in [0, +\infty)$.

Usiamo poi la stima di interpolazione data dalla Proposizione 4.10, per ottenere, per ogni $k, n \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n$,

$$\int_M |\tilde{\nabla}^k \widetilde{\text{Ric}}|^{2n/k} dV_{\tilde{g}} \leq C \max_M |\tilde{E}|^{2(n/k-1)} \int_M |\tilde{\nabla}^n \widetilde{\text{Ric}}|^2 dV_{\tilde{g}} \leq \tilde{C}_{n,k} e^{-\delta' \tau},$$

per delle costanti $C, \tilde{C}_{n,k} \delta' > 0$ dipendenti da n e k .

Infine, ripetendo l'argomento che conduce alla Proposizione 4.14 (alla fine della Sezione 4.3), essendo tutte le metriche $\tilde{g}(\tau)$ equivalenti tra loro (cioè applicando le immersioni di Sobolev con una costante uniforme), concludiamo che per ogni $k \geq 1$, si ha

$$\max_M |\tilde{\nabla}^k \widetilde{\text{Ric}}| \leq C_k e^{-\delta \tau},$$

per delle costanti $C_k, \delta > 0$, per ogni $\tau \in [0, +\infty)$.

La seguente proposizione conclude la dimostrazione del Teorema 6.2.

Proposizione 6.23. Per $\tau \rightarrow +\infty$, le metriche $\tilde{g}(\tau)$ convergono alla metrica limite $\tilde{g}(\infty)$, data dalla Proposizione 6.22, nella topologia C^∞ . Dunque, $\tilde{g}(\infty)$ è una metrica C^∞ e $\widetilde{\text{Ric}}_{\tilde{g}(\tau)} \rightarrow \widetilde{\text{Ric}}_{\tilde{g}(\infty)}$. Di conseguenza, $(M, \tilde{g}(\infty))$ ha curvatura sezionale costante positiva.

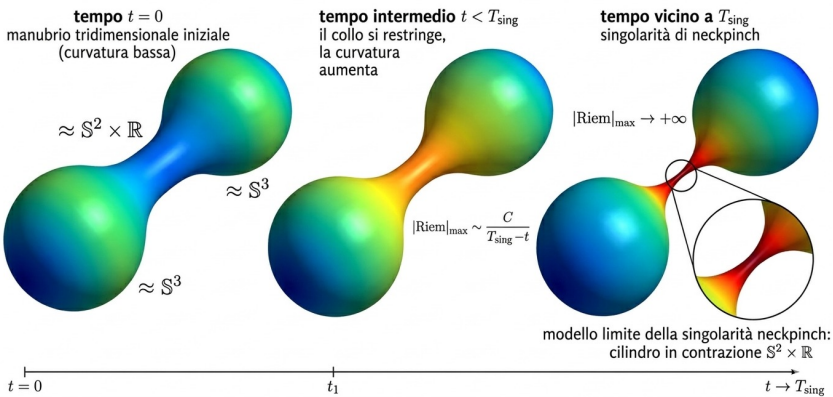
Dimostrazione. La convergenza C^∞ delle metriche a $\tilde{g}(\infty)$ segue dal teorema di Ascoli–Arzelà e dall'equazione del flusso normalizzato, da cui la convergenza delle curvature.

Per il Lemma 6.21, il tensore $\widetilde{\text{Ric}} - \tilde{r}\tilde{g}/3$ converge uniformemente a zero, dunque $(M, \tilde{g}(\infty))$ ha il tensore di Ricci proporzionale alla metrica. Per il lemma di Schur tale fattore di proporzionalità è costante, quindi $(M, \tilde{g}(\infty))$ è una metrica di Einstein. Essendo in dimensione 3, ne consegue che ha curvatura sezionale costante positiva. $\square$

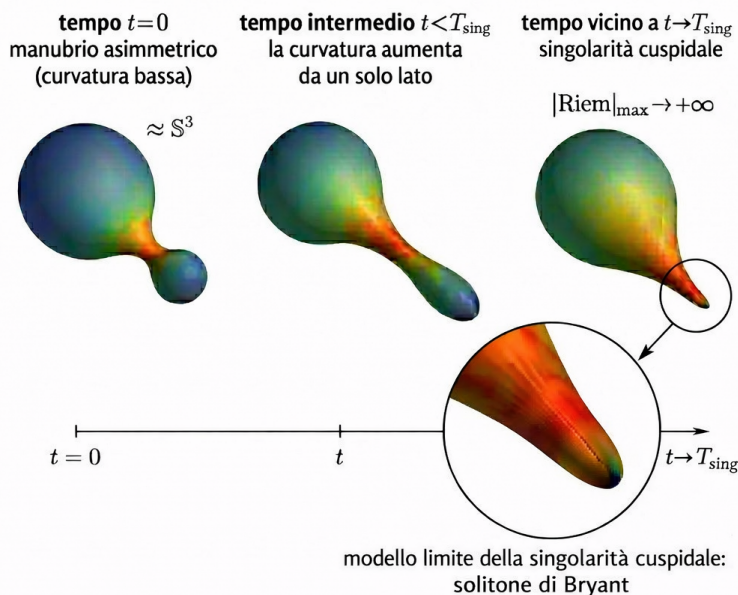
L'ANALISI DELLE SINGOLARITÀ NEL CASO GENERALE E LA CONGETTURA DI POINCARÉ

Nel capitolo precedente abbiamo dimostrato il famoso risultato di Hamilton del 1982: una varietà tridimensionale compatta e semplicemente connessa con curvatura di Ricci positiva, sotto il flusso di Ricci (non normalizzato) “collassa” in tempo finito diventando sempre più “sferica”. Tuttavia, se tale ipotesi di positività viene a mancare, il flusso può sviluppare anche altre singolarità di tipo diverso. Vediamo degli esempi (alcuni dei termini nelle seguenti due figure saranno chiariti nelle prossime sezioni – la singolarità “cuspidale” viene anche detta in letteratura “degenerate neckpinch”).

Sviluppo di una singolarità di Tipo I (neckpinch) in dimensione 3



Sviluppo di una singolarità di Tipo II (cuspidale) in dimensione 3



Si osservi la somiglianza di questi esempi con gli analoghi per il moto per curvatura media di superfici in $\mathbb{R}^3$ (si veda [69], per esempio).

Una congettura “naturale” (di Hamilton) è che a parte la singolarità di “collasso sferico” di un quoziente della 3-sfera, come nel suo teorema 6.2 quando il tensore di Ricci è positivo, questi siano gli unici altri due modi in cui una singolarità si possa formare nel flusso di Ricci di una 3-varietà compatta. La dimostrazione di questo fatto e in generale l’analisi “quantitativa” completa delle possibili singolarità del flusso di Ricci sulle 3-varietà, iniziata da Hamilton e portata a compimento da Perelman, ha rappresentato uno dei capitoli più profondi della matematica contemporanea e ha condotto alla risoluzione della *congettura di Poincaré*. In questo capitolo finale ne descriviamo in modo discorsivo l’architettura logica, illustrando senza dimostrazioni i teoremi e i passi fondamentali. Una trattazione simile che contiene anche un’ampia discussione sulla congettura di Poincaré e sulla topologia delle 3-varietà, si può trovare in [10]. Per approfondire i dettagli tecnici

dei risultati di Perelman, consigliamo al lettore interessato i lavori di Terence Tao [90, 91].

Osservazione 7.1. In dimensione 2, il flusso di Ricci di una superficie compatta tende a “uniformare” globalmente la curvatura. L’equazione di evoluzione si semplifica, in quanto $\text{Ric} = Rg/2$ e dunque diventa

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -Rg.$$

Il comportamento di una superficie compatta e orientabile che evolve dipende soltanto dalla sua caratteristica di Eulero χ , per i lavori di Hamilton [52] e Chow [31].

- *Sfera* ($\chi > 0$): il flusso sviluppa una singolarità in tempo finito. Il flusso normalizzato deforma la superficie nella sfera standard.
- *Toro* ($\chi = 0$): il flusso esiste per ogni tempo, la curvatura decade esponenzialmente a zero e la metrica converge a una metrica piatta.
- *Superfici di genere $g > 1$* ($\chi < 0$): il flusso esiste per ogni tempo e normalizzandolo, la superficie converge a una metrica iperbolica, cioè con curvatura costante negativa.

Per le superfici non orientabili, si hanno conclusioni analoghe, considerando il loro rivestimento a due fogli (orientabile).

L’unica possibile singolarità in dimensione 2 è quindi quella di “collasso sferico”, analoga a quella del flusso di una 3-varietà compatta con tensore di Ricci positivo.

In dimensione $n \geq 4$, le singolarità possono essere molto varie, rendendo la loro analisi al momento fuori portata, senza ipotesi sulla curvatura durante il flusso. Si pensi per esempio alla varietà prodotto $S^2 \times S^2$ che “collassa” in tempo finito ma non forma una singolarità “sferica”.

7.1 SINGOLARITÀ E BLOW-UP

Supponiamo che una soluzione $g(t)$ del flusso di Ricci su una varietà compatta M di dimensione $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\text{Ric},$$

sia definita su un intervallo di esistenza massimale $[0, T)$, con $T < +\infty$. Per i risultati della Sezione 4.4, in particolare il Teorema 4.15, sappiamo che questo implica un'esplosione della curvatura:

$$|\text{Riem}|_{\max}(t) \geq \frac{C_n}{T-t}, \quad (7.1)$$

per una costante C_n che dipende solo dalla dimensione $n \in \mathbb{N}$ di M . Seguendo Hamilton in [55], il cosiddetto "Hamilton's big paper", per studiare la natura della geometria per $t \rightarrow T$, distinguiamo le singolarità a seconda della velocità con cui la curvatura va a $+\infty$.

Definizione 7.2. Una singolarità in tempo finito T è detta di *Tipo I* se esiste una costante $C > 0$ tale che, per ogni $t \in [0, T)$, si ha

$$|\text{Riem}|_{\max}(t) \leq \frac{C}{T-t}. \quad (7.2)$$

Se invece tale quantità non è limitata da $C/(T-t)$ per alcuna costante C , la singolarità è detta di *Tipo II*.

Osservazione 7.3. Euristicamente, le singolarità di Tipo I sono quelle "standard" per la struttura parabolica del flusso di Ricci, in cui il tasso di scoppio della curvatura dell'ordine di $1/(T-t)$ è quello "naturale".

Vediamo ora la cosiddetta *procedura di blow-up* (à la Hamilton) per una singolarità del flusso al tempo massimale di esistenza $T > 0$. Scegliamo una successione di punti $p_i \in M$ e di tempi $t_i \nearrow T$ tali che

$$|\text{Riem}(p_i, t_i)| \geq \alpha_i \sup_{t \leq t_i} |\text{Riem}|_{\max}(t), \quad (7.3)$$

per una certa successione $\alpha_i \in (0, 1]$, con $\liminf_{i \rightarrow \infty} \alpha_i \geq \alpha > 0$. In particolare, si ha chiaramente che $|\text{Riem}(p_i, t_i)| \rightarrow +\infty$.

Definiamo poi la successione di metriche riscalate (riscaldamento parabolico) ponendo

$$g_i(s) = |\text{Riem}(p_i, t_i)| \, g \left(t_i + \frac{s}{|\text{Riem}(p_i, t_i)|} \right). \quad (7.4)$$

Si vede allora facilmente che tutte le metriche $g_i(s)$ evolvono sempre per il flusso di Ricci, nell'intervallo temporale riscaloato

$$I_i = [-t_i |\text{Riem}(p_i, t_i)|, (T - t_i) |\text{Riem}(p_i, t_i)|],$$

inoltre, per costruzione, questa successione gode delle seguenti proprietà:

- nel punto $p_i \in M$ al tempo $s = 0$, il tensore di Riemann ha norma uguale a uno:

$$|\text{Riem}_{g_i(0)}(p_i, 0)| = 1;$$

- per tutti i tempi nonpositivi, $s \leq 0$, si ha definitivamente

$$|\text{Riem}_{g_i}|_{\max}(s) \leq 1/\alpha_i.$$

Per ottenere una stima del tensore di Riemann delle varietà riscalate anche per tempi (piccoli) positivi, si sfrutta la seconda stima dell'Esercizio 3.6:

$$|\text{Riem}_g|_{\max}(t) \leq \frac{|\text{Riem}_g|_{\max}(0)}{1 - C_n |\text{Riem}_g|_{\max}(0)t},$$

che implica

$$|\text{Riem}_{g_i}|_{\max}(s) \leq \frac{2/\alpha}{1 - Cs},$$

definitivamente per ogni $s \in (0, 1/C)$, per una costante $C > 0$ indipendentemente da $i \in \mathbb{N}$.

Queste stime ci garantiscono due fatti fondamentali sugli intervalli di definizione I_i :

- l'estremo inferiore dell'intervallo I_i tende a $-\infty$;
- a meno di sottosuccessione, l'estremo superiore converge a

$$b = \limsup_{i \rightarrow \infty} (T - t_i) |\text{Riem}(p_i, t_i)|, \quad (7.5)$$

e ricordando le stime (7.1) e (7.3),

$$b \geq \limsup_{i \rightarrow \infty} \alpha_i (T - t_i) \sup_{t \leq t_i} |\text{Riem}|_{\max}(t) \geq \limsup_{i \rightarrow \infty} C_n \alpha_i \geq C_n \alpha > 0.$$

Osserviamo che se la singolarità è di Tipo II, per una scelta appropriata dei tempi t_i , si ha $b = +\infty$.

Di conseguenza, in ogni intervallo compatto $K \subseteq (-\infty, b)$, otteniamo una stima uniforme sulla norma del tensore di Riemann delle metriche $g_i(s)$, per $s \in K$.

Vorremmo ora “passare al limite” questa successione di flussi di Ricci, per ottenere quello che viene detto un *blow-up* del flusso originale. Per fare ciò abbiamo bisogno del seguente risultato di Hamilton in [54].

Teorema 7.4 (Teorema di compattezza di Hamilton). Sia $(M_i, g_i(s), p_i)$ una successione di flussi di Ricci completi “puntati” (tutte le varietà sono complete e abbiamo la scelta di un “punto base” per ogni flusso), su un intervallo temporale comune contenente $s = 0$. Se la curvatura e le sue derivate covarianti sono equilimitate e se il raggio di iniettività nei punti base p_i è uniformemente limitato dal basso al tempo $s = 0$, ovvero $\text{inj}_{g_i(0)}(p_i) \geq \delta > 0$, allora esiste una sottosuccessione dei flussi che converge in topologia C^∞ di Cheeger–Gromov (si veda [84]) a un flusso di Ricci limite $(M_\infty, g_\infty(s), p_\infty)$.

Per mezzo delle stime di Bernstein–Bando–Shi viste nella Sezione 4.5 (o di una loro versione “localizzata”), il controllo uniforme sulla curvatura delle soluzioni riscalate $g_i(s)$ in ogni intervallo compatto $K \subseteq (-\infty, b)$, implica un analogo controllo uniforme su tutte le sue derivate covarianti e assumendo una stima dal basso sul raggio di iniettività, possiamo applicare questo teorema, ottenendo che i flussi $g_i(s)$ convergano (passando eventualmente a una sottosuccessione) in topologia C^∞ a un flusso di Ricci limite $g_\infty(s)$ su una varietà completa M_∞ (possibilmente diversa da M), nell'intervallo $(-\infty, b)$.

Su questa varietà limite si avrà allora

$$|\text{Riem}_{g_\infty}|_{\max}(s) \leq 1/\alpha,$$

per ogni $s \leq 0$ e se avessimo scelto $\alpha_i = 1$ o $\alpha_i \rightarrow 1$ (dunque $\alpha = 1$), avremmo che la funzione $|\text{Riem}_{g_\infty}|$, ristretta a $M_\infty \times \{s \leq 0\}$, prende massimo in $(p_\infty, 0)$, dovendo essere $|\text{Riem}_{g_\infty}(p_\infty, 0)| = 1$.

Avere una stima dal basso sul raggio di iniettività delle varietà riscalate in modo da rendere effettiva questa procedura di blow-up fu uno dei punti in cui il programma di Hamilton si arenò, problema che fu successivamente risolto da Perelman, come vedremo.

Osservazione 7.5. Il Teorema di Hamilton 6.2 visto nel capitolo precedente può essere riletto, *ex post*, come il caso base di analisi delle singolarità tramite la procedura di blow-up. Se una varietà riemanniana compatta ha tensore di Ricci positivo, il flusso di Ricci sviluppa una singolarità di Tipo I in tempo finito e se applichiamo tale procedura, per le stime e i risultati che abbiamo visto, si può passare al limite e ottenere un blow-up che non è altro che un quoziente della sfera che si contrae omoteticamente e “collassa”, estinguendosi in tempo finito.

Osservazione 7.6. La *tecnica di blow-up* è uno degli strumenti analitici e geometrici più potenti per lo studio delle singolarità delle soluzioni

delle equazioni a derivate parziali nonlineari, sia di tipo ellittico che parabolico. L'idea di base è di agire come un vero e proprio "microscopio": quando una certa quantità (come la curvatura per il flusso di Ricci, o l'ampiezza o il gradiente di una soluzione di un'equazione differenziale, in generale) tende a esplodere a infinito avvicinandosi a un punto singolare, si effettuano degli "ingrandimenti" attorno a tale punto, di cui poi si studia il limite. A grandi linee, la procedura in generale consiste nei seguenti passi:

1. *Localizzazione e riscaldamento*: si individua una successione di punti p_i (e tempi t_i , se l'equazione è parabolica) lungo cui una quantità associata a una soluzione "esplode" e si introduce una nuova successione di soluzioni per mezzo di un riscaldamento appropriato attorno a tali punti, scelto in modo tale che la quantità interessata relativa alle soluzioni riscalate sia uniformemente limitata.
2. *Passaggio al limite (compattezza)*: si utilizzano teoremi di compattezza (Ascoli-Arzelà, embedding di Sobolev, o teoremi alla Cheeger-Gromov-Hamilton per le varietà) per estrarre una sottosuccessione convergente dalla sequenza delle soluzioni riscalate. In genere, il dominio originario si dilata a ogni passo e la soluzione limite della sottosuccessione risulta definita su uno spazio non limitato (tipicamente l'intero $\mathbb{R}^n$ o una varietà completa non compatta). Per le equazioni paraboliche, usualmente i tempi antecedenti alla singolarità si dilatano verso $-\infty$, dando origine a una cosiddetta *soluzione antica*, definita ad esempio per $s \in (-\infty, 0]$.
3. *Classificazione e conclusioni*: si cerca di dimostrare che le uniche soluzioni globali (o antiche) con le proprietà ereditate dal passaggio al limite, devono avere una forma speciale (per esempio, soluzioni banali, costanti nello spazio o nel tempo, oppure *solitoni*, cioè soluzioni autosimili, dotate di qualche "simmetria"). Se qualche teorema (per esempio, di rigidità o di tipo Liouville) permette di concludere che tali soluzioni limite non possono esistere, si ottiene un assurdo, dimostrando così che la singolarità non poteva formarsi. Se invece dei "modelli" limite esistono (e possibilmente sono classificabili), questi forniscono i possibili "profili asintotici" delle singolarità.

7.2 CLASSIFICAZIONE DEI BLOW-UP E SOLITONI DI RICCI

Assumendo di avere una stima sul raggio di iniettività delle varietà riscalate (che, come detto, Hamilton non aveva) in modo da ottenere

dei blow-up $g_\infty(s)$ con la procedura che abbiamo descritto sopra, si tratta di classificare tali flussi di Ricci limite.

Nel caso delle singolarità di Tipo I, l'intervallo di definizione del flusso limite è $(-\infty, b)$, con $b < +\infty$ dato dalla formula (7.5), per la stima dall'alto (7.2). Tali flussi sono detti *antichi*. Se invece la singolarità è di Tipo II, scegliendo appropriatamente la successione di tempi e punti (p_i, t_i) , il flusso limite è definito per ogni tempo ($b = +\infty$). Tale flusso limite è detto *eterno*. Inoltre, la norma del suo tensore di Riemann assume massimo in $(p_\infty, 0)$.

Hamilton congetturerà che tali blow-up dovessero essere dei *solitoni di Ricci* (gradiente), ovvero delle soluzioni autosimili che evolvono solo per riscaldamento e diffeomorfismi. Di tipo *shrinking*, per le singolarità di Tipo I e *steady*, per le singolarità di Tipo II.

In letteratura, il termine *solitone di Ricci* (o semplicemente *solitone*, in questo contesto) viene usato per indicare sia una particolare varietà/metrica statica, sia per la soluzione dinamica del flusso di Ricci che essa genera. Per essere rigorosi, distinguiamo i due concetti:

- *Varietà*: una varietà riemanniana (M, g) , tale che esista un campo vettoriale X e una costante $\lambda \in \mathbb{R}$ soddisfacenti l'equazione

$$\text{Ric} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_X g = \lambda g, \quad (7.6)$$

dove $\mathcal{L}_X g$ è la derivata di Lie lungo X della metrica g (si veda [48]). Se esiste una funzione $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $X = \nabla f$, detta *potenziale*, la struttura prende il nome di *solitone gradiente* e l'equazione si riduce a

$$\text{Ric} + \nabla^2 f = \lambda g,$$

dove ricordiamo che $\nabla^2 f$ è l'hessiano di f .

- *Flusso*: una soluzione $g(t)$ del flusso di Ricci che evolve unicamente tramite omotetie (riscaldamenti spaziali) e diffeomorfismi. Ovvero, che ha la forma

$$g(t) = \sigma(t) \psi_t^* g_0,$$

dove $\sigma(t)$ è una funzione scalare dipendente dal tempo e ψ_t è una famiglia a un parametro di diffeomorfismi di M .

Si ha che un flusso di Ricci $g(t)$ è un solitone se e solo se la varietà $(M, g(t))$ lo è, per ogni tempo t (da cui l'ambiguità in letteratura sul termine "solitone").

In base al segno della costante λ , il solitone viene classificato in:

- *shrinking* (contrattivo), se $\lambda > 0$;
- *steady* (stazionario), se $\lambda = 0$;
- *expanding* (espansivo), se $\lambda < 0$.

I solitoni gradiente *shrinking*, come la sfera S^n con la sua metrica standard o i “cilindri” $S^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ (con i loro quozienti sul fattore sferico e i loro riscamenti), sono dei “modelli” di singolarità di Tipo I, mentre i solitoni gradiente *steady* sono legati alle singolarità di Tipo II, come vedremo.

Un altro esempio di solitone gradiente *shrinking* è il *solitone gaussiano* dato da $\mathbb{R}^n$ con la sua metrica standard piatta g_{eucl} : è il modello “banale”, si considera come potenziale la funzione radiale $f(x) = \lambda|x|^2/2$ che, valendo chiaramente $\text{Ric} = 0$ e $\nabla^2 f = \lambda g_{\text{eucl}}$, soddisfa l’equazione dei solitoni gradiente $\text{Ric} + \nabla^2 f = \lambda g_{\text{eucl}}$ con $\lambda > 0$ (si noti che questo solitone *non* sviluppa singolarità evolvendo, in quanto è “statico”).

Esempi importanti di solitoni *steady* (oltre a quello banale dato da $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea, che è anche *shrinking*) sono il *sigaro di Hamilton* e il *solitone di Bryant*.

- Il *sigaro di Hamilton*, spesso indicato con Σ^2 , è il solitone gradiente *steady* 2-dimensionale dato dal piano $\mathbb{R}^2$ con la metrica

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}.$$

La sua curvatura è ovunque positiva, assume massimo nell’origine e decade rapidamente a zero all’infinito. Geometricamente, si apre come un paraboloide vicino all’origine, ma all’infinito diviene asintotico a un “cilindro euclideo” di raggio 1 (da cui il nome “sigaro”).

- Il *solitone di Bryant* è l’analogo n -dimensionale, per $n \geq 3$, del sigaro di Hamilton. Scoperto da Robert Bryant (senza mai pubblicarlo – si veda [20]), è l’unico solitone gradiente *steady* completo su $\mathbb{R}^n$ rotazionalmente simmetrico con curvatura sezionale positiva. A differenza del sigaro, il solitone di Bryant non ha una forma asintoticamente cilindrica: il suo profilo si apre indefinitamente all’infinito come un paraboloide in cui l’ampiezza cresce come la radice della distanza r dall’origine/vertice e la curvatura decade come $1/r$.

Invitiamo il lettore a riesaminare le figure all’inizio del capitolo con gli esempi di formazione di singolarità alla luce di quanto visto sopra e nella sezione precedente.

Un'altra congettura di Hamilton era che in dimensione tre gli unici solitoni shrinking che potevano apparire come blow-up fossero la sfera S^3 e il "cilindro" $S^2 \times \mathbb{R}$ (a meno di quozienti delle sfere e omotetie), mentre l'unico steady fosse il solitone di Bryant. In particolare, che il prodotto riemanniano del sigaro di Hamilton per $\mathbb{R}$ (che è chiaramente un solitone steady tridimensionale) non potesse essere ottenuto come flusso limite. Ciò era legato anche alla sua procedura di "chirurgia" per "passare oltre" le singolarità, che non era in grado di gestire una singolarità che avesse come blow-up tale solitone.

Tuttavia, Hamilton riuscì a dimostrare che i blow-up erano solitoni solo nel caso delle singolarità di Tipo II in dimensione 2 e 3, arenandosi per le singolarità di Tipo I (e per le dimensioni superiori alla terza). Inoltre, non aveva un argomento né per escludere il solitone "cattivo", prodotto del sigaro di Hamilton per $\mathbb{R}$, né per dimostrare che l'unico solitone con curvatura sezionale positiva e limitata era il solitone di Bryant (mostrato da Brendle nel 2013 [16] – si veda l'Osservazione 7.7).

In dimensione 2, non è difficile mostrare che se una soluzione antica ha curvatura scalare limitata, allora questa è positiva, oppure identicamente nulla dappertutto (dunque è un quoziente di $\mathbb{R}^2$ con la sua metrica standard, che non evolve), mentre, in dimensione 3, Hamilton aveva a disposizione la *stima di pinching di Hamilton-Ivey* (si vedano [55, 60]) che garantisce la nonnegatività delle curvature sezionali delle soluzioni antiche con curvatura uniformemente limitata per $t \rightarrow -\infty$ (in particolare i blow-up di flussi di Ricci su varietà compatte). L'ipotesi di curvatura limitata per queste conclusioni è stata successivamente rimossa da Hamilton [52, 55] e Chen [28] in dimensione 2 e da Ni-Wallach [80] e Naber [78] in dimensione 3, per i solitoni gradiente (shrinking o steady, per i quali viene mostrato che tale ipotesi è soddisfatta, cioè *devono* avere curvatura limitata) e infine sempre da Chen [28] per ogni soluzione antica, in massima generalità. Tale proprietà di nonnegatività della curvatura e quelle relative ai blow-up per le singolarità di Tipo II (il fatto che il flusso è eterno e che $|\text{Riem}|$ assume massimo assoluto in $(p_\infty, 0)$), per mezzo di un'applicazione estremamente raffinata del principio di massimo forte in combinazione con la *disuguaglianza di Harnack*, che Hamilton aveva mostrato in [53], gli permisero di ottenere la conclusione che tali blow-up sono dei solitoni gradiente steady. Per esempio il sigaro di Hamilton in dimensione 2 e il solitone di Bryant oppure il prodotto del sigaro di Hamilton per $\mathbb{R}$, in dimensione 3.

Al contrario, i blow-up per le singolarità di Tipo I sono solo dei

flussi antichi, non eterni, definiti su intervalli superiormente limitati $(-\infty, b)$ e con $|\text{Riem}|$ non limitato. Dunque, sebbene la proprietà di nonnegatività delle curvature sezionali continui a valere, non è possibile concludere che si abbia un solitone gradiente shrinking, secondo la stessa linea dimostrativa. In dimensione $n \geq 4$, nemmeno la stima di Hamilton–Ivey vale, dunque anche in questo caso l’argomento non è generalizzabile.

Il *programma di Hamilton* aveva dunque vari punti “mancanti” da completare, solo congetturali, per poter applicare delle procedure di “chirurgia topologica” per “passare oltre” le singolarità del flusso di Ricci e ottenere conclusioni geometriche (come nel caso in cui il tensore di Ricci è positivo). A sbloccare questa impasse fu il lavoro di Perelman, più basato su tecniche variazionali (del calcolo delle variazioni) che sul principio di massimo, che era stato lo strumento principe per i risultati di Hamilton.

Malgrado tale programma fosse incompleto, assumendo la validità delle sue congetture, Hamilton sviluppò comunque un algoritmo di chirurgia nel 1997 in [56] (e lo usò per dimostrare che ogni 4-varietà compatta e semplicemente connessa con curvatura isotropica positiva è diffeomorfa alla sfera standard S^4 – si veda la discussione alla fine della Sezione 5.1) che però aveva una lacuna: un’asserzione non giustificata, come evidenziato da Perelman nel suo secondo articolo del 2003 [83], che lo costrinse a dover riprogettare l’intera procedura di chirurgia di Hamilton (e a modificare anche la tecnica di blow-up). L’errore in tale algoritmo, nel caso delle 4-varietà PIC, era “riparabile”, cioè il problema che comportava era aggirabile con alcune modifiche tecniche (in [29], sfruttando le proprietà della curvatura date dalla condizione PIC e usando dei risultati di Perelman), ma invece era insanabile nel caso tridimensionale generale (“... *which I was unable to fix.*” – Perelman [83]).

Osservazione 7.7. Concludiamo questa sezione presentando brevemente l’attuale *stato dell’arte* della classificazione delle soluzioni antiche (ed eterne), tenendo presente che alla luce della stima di Hamilton–Ivey, lo studio dei blow-up del flusso di varietà compatte bidimensionali o tridimensionali riduce allo studio delle soluzioni antiche complete con curvatura sezionale limitata e nonnegativa. Lo spartiacque fondamentale in questa teoria è la nozione di soluzione *noncollassata*, introdotta da Perelman e che vedremo nella prossima sezione, cioè che il volume di ogni palla di raggio $r > 0$ è limitato dal basso da una costante uniforme moltiplicata per r^n , in dimensione $n \in \mathbb{N}$.

Per le soluzioni antiche noncollassate, che Perelman chiamò κ -soluzioni e mostrò che devono avere curvatura uniformemente limitata per $t \rightarrow -\infty$, la classificazione è oggi completa in dimensione 2 e 3, dove per quanto detto sopra, hanno curvatura nonnegativa.

In dimensione 2, in [35] è mostrato che le uniche soluzioni antiche noncollassate sono (a meno di quozienti, isometrie e omotetie): il piano $\mathbb{R}^2$ con la metrica piatta standard (solitone gradiente shrinking o steady), la sfera standard S^2 (solitone gradiente shrinking) e l'ovale bidimensionale o soluzione di King–Rosenau (nota in fisica teorica come “modello di Fateev–Onofri–Zamolodchikov”), che è una soluzione antica compatta su S^2 che non è un solitone. Per $t \rightarrow -\infty$, questa soluzione è “vicina” a due sigari di Hamilton “uniti” lungo i loro cilindri asintotici. Al trascorrere del tempo, la soluzione si “arrotonda” e converge asintoticamente alla sfera (normalizzando il volume) prima di “collassare”. Si noti che il sigaro di Hamilton (solitone gradiente steady) manca in questa lista, in quanto è *collassato*, come vedremo ed è l'unica soluzione antica collassata con curvatura limitata [36].

Menzioniamo infine che se togliamo anche l'ipotesi di curvatura limitata, esistono altre varie famiglie di soluzioni antiche che non rientrano nei casi precedenti.

In dimensione 3, la classificazione delle soluzioni antiche noncollassate annovera esattamente quattro varietà, oltre a $\mathbb{R}^3$, a meno di quozienti dei fattori sferici, isometrie e omotetie:

- *Non compatte*: lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ con la metrica piatta standard (solitone gradiente shrinking o steady), il cilindro standard $S^2 \times \mathbb{R}$ (solitone gradiente shrinking) e il solitone di Bryant (solitone gradiente steady). La prova che il solitone di Bryant sia l'unico solitone gradiente steady noncollassato (a parte ovviamente $\mathbb{R}^3$) è stata ottenuta da Brendle nel 2013 [16]. Questo era l'ultimo tassello mancante al lavoro precedente di Chen e Zhu [30] per completare la classificazione.
- *Compatte*: la sfera standard S^3 (solitone gradiente shrinking) e l'ovale di Perelman, che non è un solitone, asintotico per $t \rightarrow -\infty$ a un cilindro chiuso da due calotte modellate sul solitone di Bryant (è l'analogo tridimensionale dell'ovale visto sopra). La congettura di Perelman che questi fossero gli unici due modelli compatti è stata risolta affermativamente nel 2021 da Brendle, Daskalopoulos e Sesum [17].

Come il sigaro di Hamilton Σ^2 in dimensione due, anche il suo prodotto con $\mathbb{R}$ è collassato, dunque non sta in questa classificazione. Senza l'ipotesi di noncollasso (che è ciò che può accadere per blow-up di flussi di varietà non compatte o per soluzioni antiche in generale), anche assumendo la curvatura limitata (dunque nonnegativa), non vi è una classificazione completa. Ecco alcuni esempi, oltre a $\Sigma^2 \times \mathbb{R}$:

- *Varietà/flussi “a pancake” o “a salsiccia”*: costruiti originariamente da Fateev [45], sono flussi che per $t \rightarrow -\infty$ si appiattiscono “schiacciandosi” su spazi di dimensione inferiore (non solo solitoni).
- *Le “ali volanti” (flying wings)*: nel 2022, Lai [65] ha risolto un problema aperto posto da Hamilton, dimostrando non solo l'esistenza di solitoni gradiente steady tridimensionali collassati che “tendono” a settori angolari piani per $t \rightarrow -\infty$, ma provando l'esistenza di un'intera famiglia continua non numerabile di tali soluzioni.

In dimensione $n \geq 4$ la classificazione è al momento molto lontana, anche assumendo il noncollasso e un operatore di curvatura nonnegativo (cosa che non è garantita da stime del tipo di Hamilton–Ivey, non presenti in dimensione maggiore di tre). Oltre a sfere e cilindri, in dimensione pari $n = 2m$, vi sono i *solitoni di Kähler–Ricci* (si veda [22] e anche [14, 21]), ad esempio, lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^m$ equipaggiato con la metrica di Fubini–Study è un solitone shrinking compatto [22]. Inoltre, esistono molte *varietà di Fano* (si veda [37]) che ammettono metriche solitoniche. Il solitone di Bryant [16] è l'unico modello rotazionalmente simmetrico con curvatura sezionale positiva, tuttavia, nel 2017 Appleton [1] ha costruito nuove famiglie esplicite di solitoni steady noncollassati in dimensione $n = 2m \geq 4$ aventi come gruppo di simmetria $U(m)$ invece che $O(n)$.

7.3 I FUNZIONALI DI PERELMAN E IL NONCOLLASSO

Nel suo famoso lavoro [81] del 2002, Grisha Perelman scoprì dei funzionali monotoni lungo il flusso di Ricci, rivelandone l'aspetto variazionale: a meno di diffeomorfismi, il flusso di Ricci è infatti il flusso gradiente di opportune quantità scalari. Questo punto di vista variazionale ha permesso a Perelman di completare i punti “mancanti” del programma di Hamilton. Gran parte del materiale di questa e delle sezioni seguenti è contenuto nei suoi tre famosi preprint (mai sottomessi a una rivista) [81, 82, 83]. Essendo estremamente sintetici, densi e piuttosto complessi tecnicamente, immediatamente dopo la loro pubblicazione

su ArXiv, Kleiner e Lott scrissero delle note esplicative, aggiornate quotidianamente e disponibili online, in cui colmavano anche molti dettagli delle dimostrazioni che erano soltanto accennate (queste note sono ora un articolo [62] fondamentale per lo studio dei tre lavori di Perelman). Altre possibili referenze sono il libro di Morgan e Tian [76] e quello di Topping [94].

Data una varietà riemanniana compatta n -dimensionale (M, g) , Perelman definisce il funzionale energia $\mathcal{F}$ associando alla metrica g una funzione $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, che svolge il ruolo di “potenziale”, in modo da “pesare” la misura di volume dV_g :

$$\mathcal{F}(g, f) = \int_M (R + |\nabla f|^2) e^{-f} dV_g.$$

Accoppiando l'evoluzione della metrica g secondo il flusso di Ricci all'evoluzione del potenziale f secondo un'equazione *antiparabolica*, si ottiene il seguente risultato.

Teorema 7.8 (Monotonia dell'energia $\mathcal{F}$). Sia $g(t)$ una soluzione del flusso di Ricci su una varietà M in un intervallo $[0, T)$ e sia $f(t)$ una soluzione dell'equazione antiparabolica

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Delta f + |\nabla f|^2 - R.$$

Allora l'energia $\mathcal{F}(g(t), f(t))$ è nondecreciente nel tempo. Infatti, la sua derivata temporale è nonnegativa e si annulla se e solo se il flusso è un solitone gradiente steady:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(g(t), f(t)) = 2 \int_M |\text{Ric} + \nabla^2 f|^2 e^{-f} dV_g \geq 0.$$

Il funzionale $\mathcal{F}$ presenta tuttavia un difetto tecnico ai fini dell'applicazione all'analisi dei blow-up del flusso di Ricci: non è invariante per riscalamenti parabolici. Perelman introduce dunque un altro funzionale $\mathcal{W}$, detto *entropia*:

$$\mathcal{W}(g, f, \tau) = \int_M \left[\tau(R + |\nabla f|^2) + f - n \right] \frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{n/2}} dV_g$$

e mostra un'analogia formula di monotonia.

Teorema 7.9 (Monotonia dell'entropia $\mathcal{W}$). Sia $g(t)$ una soluzione del flusso di Ricci su una varietà n -dimensionale M in un intervallo $[0, T)$,

$\tau(t) = T - t$ e sia $f(t)$ una soluzione dell'equazione antiparabolica (una "perturbazione" di quella per il funzionale $\mathcal{F}$)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Delta f + |\nabla f|^2 - R + \frac{n}{2(T-t)}.$$

Allora l'entropia $\mathcal{W}(g(t), f(t), \tau(t))$ è nondecrecente nel tempo. Infatti, la sua derivata temporale è nonnegativa e si annulla se e solo se il flusso è un solitone gradiente shrinking:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{W}(g(t), f(t), \tau(t)) = 2 \int_M \tau \left| \text{Ric} + \nabla^2 f - \frac{1}{2\tau} g \right|^2 \frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{n/2}} dV_g \geq 0. \quad (7.7)$$

Osservazione 7.10. La definizione del funzionale $\mathcal{W}$ può apparire a prima vista come un coniglio estratto dal cilindro di un prestigiatore. In realtà è il risultato di una raffinata analisi dimensionale per ottenere un analogo del funzionale $\mathcal{F}$ che sia invariante per riscaldamento parabolico. L'apparizione del termine τ serve per rendere invariante l'integrando $R + |\nabla f|^2$, mentre il termine $\frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{n/2}}$ è la modifica per avere l'invarianza della misura di volume pesata. L'aggiunta poi del termine $f - n$ è un correttivo per "completare il quadrato" nell'espressione della derivata nella formula di monotonia (7.7). In sintesi, l'entropia $\mathcal{W}$ non è altro che l'energia $\mathcal{F}$ "forzata" a essere invariante per riscaldamento parabolico.

Infine, per liberarsi della dipendenza dalla scelta specifica della funzione potenziale f , Perelman passa all'estremo inferiore su tutte le funzioni f ammissibili che rispettino un vincolo di "normalizzazione" della misura di volume pesata, definendo la μ -entropia come segue:

$$\mu(g, \tau) = \inf_f \left\{ \mathcal{W}(g, f, \tau) \mid \int_M (4\pi\tau)^{-n/2} e^{-f} dV_g = 1 \right\}.$$

Essendo l'estremo inferiore di una famiglia di funzioni monotone nondecrecenti lungo il flusso, nonché invarianti per riscaldamento parabolico, anche la μ -entropia risulta avere le stesse proprietà.

L'osservazione chiave successiva è che la limitatezza inferiore di μ impedisce il "collasso geometrico" locale. Più precisamente, se $\mu(g, \tau) \geq \mu_0 > -\infty$ per ogni $\tau \in (0, C]$ (per una qualche costante $C > 0$), esiste una costante $\kappa = \kappa(\mu_0, C) > 0$ con la seguente proprietà: per ogni palla B_r di raggio $r \leq r_0$ (con r_0 fissato) in (M, g) su cui la curvatura soddisfa la stima $|\text{Riem}| \leq 1/r^2$, si ha

$$\text{Vol}_g(B_r) \geq \kappa r^n. \quad (7.8)$$

Tali varietà vengono dette κ -noncollassate (o semplicemente *noncollassate*, se il valore di κ non è rilevante). Se invece un tale $\kappa > 0$ non esiste la varietà è detta *collassata*. Analogamente, si dice che un flusso di Ricci (o una soluzione) è κ -noncollassato se questa proprietà vale per ogni varietà del flusso.

Per una varietà compatta (M, g) , la μ -entropia è finita, cioè

$$\inf_{\tau \in (0, C]} \mu(g, \tau) = \mu_0 > -\infty,$$

infatti, Perelman mostra che se $\tau \rightarrow 0$ si ha $\mu(g, \tau) \rightarrow 0$, mentre la stima per $\tau \rightarrow C$ si ottiene per minimizzazione con il metodo diretto del calcolo delle variazioni e l'applicazione del principio di massimo forte ellittico (si veda [43] per una dimostrazione esplicita completa). La conclusione segue allora dalla continuità di $\mu(g, \tau)$ in τ . Dunque, essendo la varietà iniziale (M, g_0) del flusso compatta, la monotonia della μ -entropia implica che sarà uniformemente limitata dal basso per ogni tempo positivo e lo stesso varrà per ogni blow-up del flusso, per la sua invarianza sotto riscalamenti parabolici. Da quanto detto sopra segue allora che ogni blow-up di un flusso di Ricci di una varietà compatta (M, g_0) sarà κ -noncollassato, per un certo $\kappa > 0$ dipendente solo dalla varietà iniziale. Inoltre, la stima di densità (7.8) varrà per ogni $r > 0$, in quanto espandendo le varietà, il parametro r_0 va a $+\infty$. Precisamente, in generale, Perelman mostrò il seguente risultato.

Teorema 7.11 (Teorema di noncollasso locale). Sia $g(t)$ una soluzione del flusso di Ricci su una varietà compatta M in $[0, T)$ e sia $r_0 > 0$. Allora esiste $\kappa > 0$, dipendente solo da $g(0)$, r_0 e T , tale che per ogni $r \in (0, r_0)$ per il quale $|\text{Riem}| \leq 1/r^2$ su una palla B_r di raggio r in $(M, g(t))$, si ha

$$\text{Vol}_{g(t)}(B_r) \geq \kappa r^n,$$

per ogni $t \in [0, T)$.

La relazione tra la stima sui volumi delle palle e il raggio di iniettività è poi conseguenza del seguente *lemma di Cheeger* [27] (si veda anche [84] o [94])

Lemma 7.12 (Lemma di Cheeger). Per ogni intero $n \geq 2$ e per ogni coppia di costanti $C > 0$ e $\kappa > 0$, esiste $\delta = \delta(n, C, \kappa) > 0$ con la seguente proprietà: se (M, g) è una varietà riemanniana completa n -dimensionale, $p \in M$ e $r > 0$, la palla $B_r(p)$ ha chiusura compatta e valgono le stime

$$|\text{Riem}| \leq C/r^2 \text{ su } B_r(p) \quad \text{e} \quad \text{Vol}_g(B_r(p)) \geq \kappa r^n,$$

allora il raggio di iniettività nel punto p soddisfa $\text{inj}(p) \geq \delta r$.

L'applicazione di questo lemma garantisce che il raggio di iniettività delle varietà κ -noncollassate non decada più velocemente della radice della curvatura. Segue che il raggio di iniettività delle varietà riscalate nella procedura di blow-up di Hamilton è uniformemente limitato dal basso, permettendo dunque l'applicazione del Teorema 7.4, da cui l'esistenza dei blow-up limite. Ciò risolve uno dei problemi aperti più complessi del programma di Hamilton.

Segue inoltre, che ogni blow-up che si ottiene deve essere anch'esso κ -noncollassato e soddisfare la stima di densità (7.8) per ogni $r > 0$. Il solitone dato dal sigaro di Hamilton Σ^2 in dimensione 2 è asintotico a un cilindro di raggio unitario, dunque ha curvatura che tende a zero all'infinito e volume delle palle con crescita lineare. Più precisamente (lo si provi per esercizio), esiste una costante $C > 0$ e $r_0 > 0$ tale che per ogni punto $p \in \Sigma^2$ e $r > r_0$, si ha

$$\text{Vol}^{\Sigma^2}(B_r(p)) \leq Cr.$$

Se dunque consideriamo $r > r_0$ e una successione di punti p_i che vanno all'infinito, prima o poi la norma della curvatura nelle palle $B_r(p_i)$ sarà minore di $1/r^2$ e

$$\frac{\text{Vol}^{\Sigma^2}(B_r(p_i))}{r^2} \leq C/r.$$

Segue che non esiste $\kappa > 0$ che limiti uniformemente dal basso la densità delle palle del sigaro di Hamilton, cioè Σ^2 è *collassato*. Con lo stesso argomento, si deduce che anche il suo prodotto per $\mathbb{R}$ è collassato, quindi $\Sigma^2 \times \mathbb{R}$ è escluso dai possibili blow-up del flusso di Ricci di una 3-varietà compatta. Questo “chiude” un altro punto “mancante” del programma.

7.4 LUNGHEZZA E VOLUME RIDOTTI

Una delle congetture di Hamilton era che i blow-up antichi provenienti dalle singolarità di Tipo I fossero dei solitoni gradiente shrinking, per poterli poi possibilmente classificare. Perelman introduce due strumenti che sono fondamentali nell'affrontare questo problema. Ispirandosi alla *geometria del confronto* e sempre con un approccio variazionale (prendendo anche spunto dal lavoro di Li e Yau [67], dove viene sviluppata una costruzione analoga a quella che segue per l'equazione del calore),

definisce una sorta di “distanza spazio-temporale”, chiamata *distanza ridotta* (o anche *lunghezza ridotta* in letteratura) e l'associato *volume ridotto*, un'altra quantità monotona durante il flusso di Ricci, oltre al funzionale energia $\mathcal{F}$ e all'entropia $\mathcal{W}$.

Sia $g(t)$ un flusso di Ricci su una varietà M (anche non compatta) in un intervallo $[0, T)$ e consideriamo il flusso (di Ricci retrogrado) $\tilde{g}(\tau) = g(T - \tau)$ con $\tau \in (0, T]$. Data una curva $\gamma: [0, \tau] \rightarrow M$, definiamo

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^\tau \sqrt{\sigma} \left(\tilde{R}(\gamma(\sigma), \sigma) + |\dot{\gamma}(\sigma)|_{\tilde{g}(\sigma)}^2 \right) d\sigma,$$

dove $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{d\sigma}$ è il vettore tangente alla curva γ e $\tilde{R}$ è la curvatura scalare del flusso $\tilde{g}(\sigma)$ (calcolata in un punto dello “spazio-tempo” $(\gamma(\sigma), \sigma)$, dunque uguale a $R(\gamma(\sigma), T - \sigma)$ per il flusso di Ricci $g(t)$).

Fissato un “punto base” $p \in M$, si definisce la *distanza ridotta* $\ell(q, \tau)$ tra i punti $(p, 0)$ e (q, τ) minimizzando il funzionale $\mathcal{L}$ sulla famiglia $\mathcal{C}$ delle curve $\gamma: [0, \tau] \rightarrow M$ che congiungono i due punti p e q di M , come segue:

$$\ell(q, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \inf_{\gamma \in \mathcal{C}} \mathcal{L}(\gamma).$$

La funzione $\ell: M \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfa, nel senso delle distribuzioni e quasi ovunque (e anche nel *senso della viscosità*), uguaglianze e disuguaglianze differenziali analoghe a quelle della distanza standard nella geometria riemanniana, ma “adattate” alla struttura parabolica del flusso (della varietà “spazio-tempo”).

Si introduce poi il *volume ridotto*

$$\tilde{V}(\tau) = \int_M \frac{e^{-\ell(q, \tau)}}{(4\pi\tau)^{n/2}} dV_{\tilde{g}(\tau)}(q),$$

che, per costruzione, è invariante per riscaldamento parabolico.

Osservazione 7.13. Rispetto all'articolo originale di Perelman, abbiamo introdotto il fattore di normalizzazione $(4\pi)^{-n/2}$ nella definizione. In questo modo, il nucleo di integrazione mima esattamente la soluzione fondamentale dell'equazione del calore in $\mathbb{R}^n$, garantendo che se $p \in M$ è un punto regolare dove la curvatura è uniformemente localmente limitata per ogni $t \in [0, T)$, si abbia $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \tilde{V}(\tau) = 1$.

Infatti, per lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ con la sua metrica piatta standard (che è un flusso di Ricci “statico”), si ottiene

$$\ell(q, \tau) = \frac{|q - p|^2}{4\tau}$$

e la funzione integranda è la gaussiana standard

$$\frac{e^{-\frac{|q-p|^2}{4\tau}}}{(4\pi\tau)^{n/2}}.$$

Di conseguenza, il volume ridotto è costante uguale a 1 per ogni $\tau > 0$. La condizione di uguaglianza nel teorema di monotonia è dunque soddisfatta e lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ è il più “elementare” dei solitoni gradiente shrinking col potenziale $f(x) = |x|^2/4\tau$ che risolve l’equazione dei solitoni gradiente

$$\text{Ric} + \nabla^2 f - \frac{1}{2\tau}g = 0.$$

Per un flusso di Ricci generico, il fatto che $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \tilde{V}(\tau) = 1$ se $p \in M$ è un punto dove non si sviluppa una singolarità (punto regolare) è dovuto all’invarianza per riscaldamento parabolico del volume ridotto e al fatto che dilatando indefinitamente il flusso attorno a tale punto si ottiene come limite il flusso “statico” di $\mathbb{R}^n$.

Osservazione 7.14. Il termine “distanza ridotta” (o “lunghezza ridotta”), sebbene ormai universalmente adottato in letteratura, seguendo la nomenclatura originale di Perelman, può essere fuorviante. Come si evince dal caso modello in $\mathbb{R}^n$, dove $\ell(q, \tau) = \frac{|q-p|^2}{4\tau}$, la funzione ℓ non si comporta come una distanza (ad esempio, non soddisfa la disuguaglianza triangolare), bensì come il *quadrato* di una distanza (per un fattore dipendente dal “tempo”).

Il risultato fondamentale, che si ottiene integrando le disuguaglianze differenziali soddisfatte dalla distanza ridotta, è il seguente teorema di monotonia.

Teorema 7.15 (Monotonia del volume ridotto). Sia $g(t)$ un flusso di Ricci su una varietà M compatta. Il volume ridotto $\tilde{V}(\tau)$ è una funzione noncrescente rispetto a τ , ovvero

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{V}(\tau) \leq 0,$$

dunque è nondecrecente durante il flusso di Ricci $g(t)$. Inoltre, $\tilde{V}(\tau)$ è costante su un intervallo se e solo se la soluzione è un solitone gradiente shrinking.

Osservazione 7.16. Sebbene sia enunciato per varietà compatte, la definizione del volume ridotto e questo teorema si estendono al caso non compatto sotto opportune ipotesi di regolarità all'infinito. In particolare, se la varietà è completa e ha curvatura limitata (o più in generale soddisfa stime di crescita del volume compatibili con il decadimento gaussiano dell'integranda), la funzione $\tilde{V}(\tau)$ rimane ben definita e monotona.

Poichè, come detto nell'Osservazione 7.13, nei punti regolari del flusso si ha $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \tilde{V}(\tau) = 1$, calcolando il volume ridotto rispetto al punto (p, δ) dello "spazio-tempo" e poi mandando $\delta \rightarrow 0$, per la semicontinuità inferiore dell'integrale che definisce il volume ridotto, si ottiene che $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \tilde{V}(\tau) \leq 1$ per ogni punto base $p \in M$ (il limite esiste sempre per la monotonia). La monotonia implica quindi che $\tilde{V}(\tau) \leq 1$ per ogni $\tau > 0$, in particolare, il volume ridotto è uniformemente limitato, essendo nonnegativo e converge per $\tau \rightarrow +\infty$, cioè per $t \rightarrow -\infty$, se il flusso di Ricci $g(t)$ è antico.

7.5 LA PROCEDURA DI BLOW-UP DI PERELMAN

Il volume ridotto e la sua monotonia sono lo strumento che permette a Perelman di mostrare un'altra delle congetture di Hamilton, cioè che i blow-up per le singolarità di Tipo I (a meno di sottosuccessioni) sono dei solitoni gradiente shrinking (si veda anche [44, 71]). Infatti, senza discutere i dettagli tecnici e semplificando l'argomento, assumendo che il punto base dei riscaldamenti parabolici sia fissato, se consideriamo un blow-up per una singolarità di Tipo I, il volume ridotto sul flusso limite è ben definito e a causa della sua proprietà di invarianza per riscaldamento, è dato da un limite di "riscaldamenti temporali" verso $-\infty$ della funzione volume ridotto per il flusso di Ricci originale in cui il suo intervallo di definizione e il suo grafico si sono "dilatati" (solo) temporalmente verso $-\infty$, infatti l'intervallo limite (si ricordi la Sezione 7.1) è dato da $(-\infty, b)$ per un qualche $b > 0$ che "corrisponde" al tempo singolare T . Ciò comporta che il volume ridotto del blow-up deve essere costante e dunque il Teorema 7.15 (nella sua estensione discussa nell'Osservazione 7.16) implica che è un solitone gradiente shrinking.

A questo punto, Perelman classifica i solitoni gradiente shrinking noncollassati, confermando l'intuizione di Hamilton che questi sono soltanto lo spazio $\mathbb{R}^3$ e a meno di quozienti dei fattori sferici, isometrie e omotetie, la sfera $\mathbb{S}^3$ e il cilindro $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (Hamilton in dimensione 2

in generale e Ivey [60] in dimensione 3, nel caso compatto, avevano già mostrato che vi erano solo gli spazi euclidei e i quozienti delle sfere).

Malgrado questo risultato e anche se Perelman avesse avuto la dimostrazione che il solitone di Bryant era l'unico solitone gradiente steady noncollassato (come afferma, senza darne dimostrazione, nel suo primo lavoro [81, Remark 11.9] – risultato poi mostrato da Brendle [16] nel 2013), vi era comunque il problema della lacuna apparentemente incolmabile nella procedura di chirurgia di Hamilton, che abbiamo menzionato nella parte finale della Sezione 7.2.

Perelman dunque sviluppa una differente chirurgia per “passare oltre” le singolarità del flusso di Ricci e nel fare ciò modifica e rielabora anche la procedura di blow-up.

- Si prende una qualunque successione di punti e tempi (p_i, t_i) tali che $t_i \rightarrow T$ (tempo singolare) e $R(p_i, t_i) \rightarrow +\infty$ (si osservi che R è la curvatura scalare, mentre nei blow-up à la Hamilton si considera $|\text{Riem}|$ che va a $+\infty$).
- Si utilizza poi un “lemma di selezione” (il *point-picking lemma* [81, Theorem 10.1, Claim 1] oppure [62, Lemma 31.1]) per sostituire (se necessario) questi punti con dei punti “vicini”, che continuiamo a chiamare (p_i, t_i) , tali che la curvatura sia localmente controllata $R(p, t) \leq 4R(p_i, t_i)$ in un intorno parabolico di raggio $r_i = \alpha / \sqrt{R(p_i, t_i)}$, per una costante $\alpha > 0$ fissata.
- Si definisce la successione di flussi riscaldati puntati $(M, g_i(s), p_i)$ (riscaldamento parabolico) ponendo, similmente alla formula (7.4),

$$g_i(s) = R(p_i, t_i) g \left(t_i + \frac{s}{R(p_i, t_i)} \right).$$

Si noti che dunque la curvatura nel punto base $p_i \in M$ al tempo riscaldato $s = 0$ è normalizzata: $R_i(p_i, 0) = 1$.

- Per il teorema di noncollasso locale, che implica il controllo dal basso sul raggio di iniettività e le stime di Bernstein–Bando–Shi, come nella procedura di Hamilton, possiamo applicare il teorema di compattezza di Hamilton 7.4, prima localmente e poi con un procedimento diagonale (eventualmente modificando di nuovo i punti p_i con il *point-picking lemma*), per passare al limite (a meno di una sottosuccessione) nella sequenza dei flussi riscaldati, ottenendo un flusso di Ricci limite antico $(M_\infty, g_\infty(t), p_\infty)$, definito almeno sull'intervallo $(-\infty, 0]$ e κ -noncollassato, blow-up à la Perelman del flusso originale $g(t)$ su M .

Malgrado questi flussi antichi non abbiano a priori curvatura limitata, Perelman (con un argomento basato sulla stima di Hamilton–Ivey) prova che devono avere curvatura sezionale nonnegativa. Chiama dunque κ -soluzioni i flussi di Ricci con queste proprietà e dimostra un teorema di compattezza (il *teorema di compattezza delle κ -soluzioni*) per tale famiglia (a meno di riscaldamento). Segue che le κ -soluzioni che sono ottenute per blow-up, avendo $R(p_\infty, 0) = \lim_{i \rightarrow \infty} R_i(p_i, 0) = 1$, sono una famiglia compatta di flussi di Ricci non piatti. Infine, mostra che ogni κ -soluzione ha curvatura limitata.

Uno strumento fondamentale per questi risultati e per il *teorema dell'intorno canonico* che vedremo è il *teorema di pseudolocalità* di Perelman: in termini informali (ovviamente l'enunciato è estremamente preciso quantitativamente), asserisce che nel flusso di Ricci le singolarità non possono propagarsi a velocità infinita. Se a un dato istante una regione spaziale presenta una geometria locale “quasi euclidea” (ovvero con curvatura non troppo negativa e costante isoperimetrica vicina a quella di $\mathbb{R}^3$), allora la curvatura in una regione leggermente più piccola non potrà “esplodere” istantaneamente, ma rimarrà controllata per un intervallo di tempo ben definito. Questo impedisce che la formazione di una singolarità in una zona lontana della varietà possa “corrompere” istantaneamente le regioni regolari. Osserviamo che questa proprietà non vale, per esempio, per l'equazione del calore che è lineare: è legata alla nonlinearità dell'equazione del flusso di Ricci.

Osservazione 7.17. Si noti che in questa procedura di blow-up il massimo della norma della curvatura o di R non interviene, a differenza di quella di Hamilton, ma semplicemente si “produce” una κ -soluzione ogni volta che si ha una sequenza di punti nello “spazio-tempo” su cui la curvatura “esplode”. In particolare, il tasso di “esplosione” potrebbe essere anche minore di $C/(T - t_i)$ lungo una sequenza (p_i, t_i) . Ciò significa che qui (e nel seguito) non si fa particolare distinzione tra singolarità di Tipo I e di Tipo II.

Una volta ottenuto un blow-up che è una κ -soluzione, si tratta di studiarne la struttura. Per fare ciò si considera il suo limite per $t \rightarrow -\infty$, il cosiddetto *solitone shrinking asintotico* (*asymptotic shrinking soliton*). Infatti, sempre grazie alla formula di monotonia del volume ridotto, Perelman dimostra che estraendo un opportuno limite di riscaldamenti “all'indietro nel tempo” (cioè un *blow-down*), ogni κ -soluzione tridimensionale converge a un solitone gradiente shrinking non piatto, per $t \rightarrow -\infty$, che per la classificazione vista sopra in dimensione 3, deve essere uno tra $\mathbb{S}^3$ o $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, eventualmente quozientato sul fattore sferico.

Osserviamo qui, in modo informale, che “un blow-up o blow-down di un blow-up è un blow-up”, cioè si può ottenere comunque come limite di riscaldamenti appropriati (per mezzo di un procedimento diagonale), ovvero, c’è una successione di varietà riscaldate che vi converge.

Procedendo nell’analisi, Perelman osserva che se una κ -soluzione non è globalmente isometrica all’evoluzione del cilindro standard $S^2 \times \mathbb{R}$ o al suo quoziente $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{R}$, la sua curvatura sezionale deve essere ovunque positiva, per il principio di massimo forte. Di conseguenza, se la soluzione è compatta, per il Teorema di Hamilton 6.2, è diffeomorfa a un quoziente della 3-sfera standard e produrrà un “collasso sferico” in tempo finito. Se invece non è compatta, dovendo essere asintotica al cilindro, non può avere due estremità illimitate: se così fosse, per il *teorema di splitting* di Cheeger–Gromoll (si veda [84]), la varietà sarebbe isometrica a $S^2 \times \mathbb{R}$ o a $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{R}$, in contraddizione con la curvatura positiva. Pertanto, la soluzione dovrà essere un cilindro con un’estremità aperta e una chiusa da una “calotta” (che Perelman chiama *cap*), risultando di fatto diffeomorfa a un cilindro $S^2 \times \mathbb{R}$ “chiuso” a un’estremità. Ciò può accadere soltanto incollando lungo i bordi una palla tridimensionale, ottenendo dunque una varietà diffeomorfa a $\mathbb{R}^3$, oppure “chiudendolo” con lo spazio proiettivo $\mathbb{RP}^3$ privato di una palla, ottenendo sempre lo stesso spazio $\mathbb{RP}^3$ globalmente. Qui Perelman congetturò (e noi oggi sappiamo che è effettivamente così – si veda l’Osservazione 7.7) che questa soluzione fosse in realtà il solitone di Bryant e che nel caso compatto, se la soluzione non fosse isometrica a un quoziente di S^3 , allora dovesse essere l’ovale – appunto – di Perelman, asintotico per $t \rightarrow -\infty$ a un cilindro chiuso da due calotte modellate sul solitone di Bryant.

Osservazione 7.18. In questo quadro di Perelman, il Teorema di Hamilton 6.2 implica che una varietà compatta con tensore di Ricci positivo, prendendo un blow-up vicino a un qualunque punto (la curvatura “esplode” dappertutto), produce un solitone gradiente shrinking dato da un quoziente di S^3 . In realtà, considerando il solitone asintotico che una tale varietà produce con la procedura di blow-up di Perelman, il teorema di Hamilton si “riduce” a mostrare che tale solitone è un quoziente della sfera. Poiché si ha (come abbiamo dimostrato) la disuguaglianza $\text{Ric} \geq \varepsilon Rg$ e questa passa chiaramente al limite nei blow-up, osserviamo che solo la sfera tra i solitoni shrinking la soddisfa (alla luce della loro classificazione da parte di Perelman), dunque si ha la conclusione.

La conseguenza locale della classificazione vista sopra delle κ -

soluzioni è che se un flusso di Ricci non si estingue in un “collasso sferico”, ogni suo punto con curvatura alta ha necessariamente un intorno che è diffeomorfo a un “collo” (o “tubo”) $S^2 \times (-1, 1)$, oppure una “calotta” diffeomorfa a una palla tridimensionale oppure a uno spazio proiettivo senza una palla. Ovviamente, questa conclusione è *quantitativa* (cioè porta con sé delle stime uniformi) e conduce al seguente fondamentale risultato, detto *teorema dell'intorno canonico* (*canonical neighborhood theorem*), che è la chiave per la procedura di chirurgia di Perelman che vedremo nella prossima sezione. Sottolineiamo che tutto quanto visto mostra che la visione geometrica originaria di Hamilton riguardo alla formazione delle singolarità nel flusso di Ricci era infine essenzialmente corretta.

Teorema 7.19 (Teorema dell'intorno canonico). Sia $g(t)$ un flusso di Ricci su una varietà tridimensionale compatta M , per $t \in [0, T)$. Fissato un parametro $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, esistono costanti $R_0 > 0$ e $C > 0$ (dipendenti solo da ε e dalla metrica iniziale) che soddisfano la seguente proprietà: se in un punto $p \in M$ a un istante t la curvatura scalare R è sufficientemente grande, ovvero $R(p, t) \geq R_0$, allora il punto p ammette un *intorno canonico* in M che appartiene a una delle seguenti tre categorie:

1. Un ε -neck (collo): un intorno $U \subseteq M$ contenente p , tale che esista un diffeomorfismo

$$\Phi: S^2 \times \left(-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right) \rightarrow U$$

per cui, indicando con $\tilde{g} = \Phi^*g(t)$ la metrica pull-back, si abbia la stima

$$\left\| R(p, t)\tilde{g} - (g_{S^2(\sqrt{2})} + ds^2) \right\|_{C^{1/\varepsilon}} < \varepsilon,$$

dove $g_{S^2(\sqrt{2})}$ è la metrica standard sulla sfera di raggio $\sqrt{2}$ (ovvero con curvatura scalare costante $R = 1$).

In questo caso si può anche mostrare che (p, t) appartiene a uno *strong ε -neck* (collo che evolve), cioè un intorno parabolico $U \times [t - 1/R(p, t), t]$ tale che esista un diffeomorfismo

$$\Psi: S^2 \times \left(-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right) \times [-1, 0] \rightarrow U \times [t - 1/R(p, t), t]$$

per cui, indicando con $\tilde{g}(\tau) = \Psi^*g(t + \tau/R(p, t))$ la metrica pull-back al tempo riscaldato $\tau \in [-1, 0]$, si abbia la stima

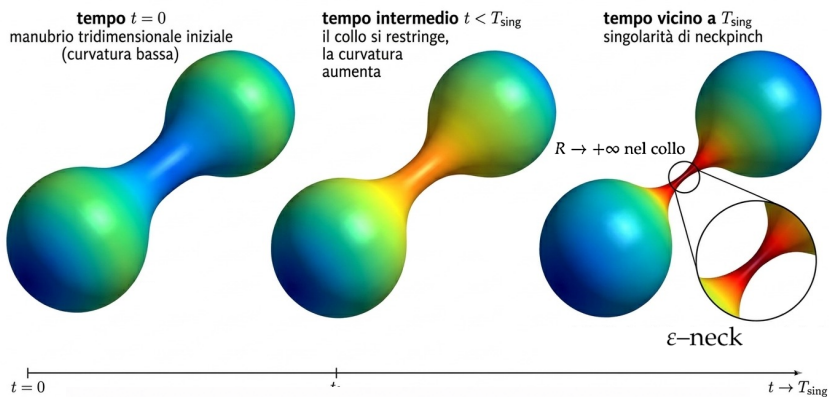
$$\sup_{\tau \in [-1, 0]} \left\| R(p, t)\tilde{g}(\tau) - ((1 - \tau)g_{S^2(\sqrt{2})} + ds^2) \right\|_{C^{1/\varepsilon}} < \varepsilon.$$

2. Un ε -cap (calotta): un intorno $\mathcal{C} \subseteq M$ contenente p , diffeomorfo a una palla aperta o allo spazio proiettivo reale senza una palla e che contiene un ε -neck come sopra, "chiuso" da una calotta. Inoltre, riscaldando parabolicamente il flusso attorno a (p, t) del fattore $R(p, t)$, si ottiene un flusso ε -vicino in norma $C^{[1/\varepsilon]}$ a una "porzione" del flusso di una κ -soluzione antica, non compatta e non piatta.
3. Un *quoziente sferico*: l'intera componente connessa di M contenente p , compatta (senza bordo) e con curvatura sezionale positiva, dunque diffeomorfa a un quoziente della sfera S^3 , per il Teorema di Hamilton 6.2. Questo "pezzo" di varietà produrrà quindi un "collasso sferico" in tempo finito, estinguendosi.

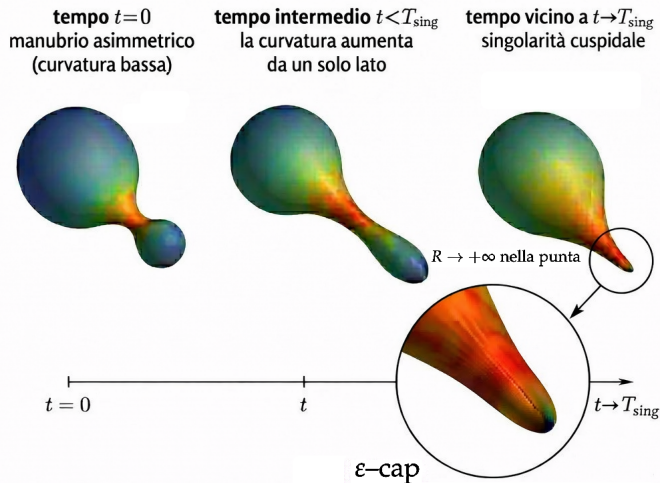
Inoltre, in tutti e tre i casi, la geometria locale è uniformemente controllata: le derivate della curvatura scalare soddisfano delle stime uniformi “universali”:

$$|\nabla R| \leq CR^{3/2} \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial R}{\partial t} \right| \leq CR^2.$$

Formazione di un ε -neck



Formazione di un ε -cap



Osservazione 7.20. Per completezza, concludiamo la sezione presentando l'attuale *stato dell'arte* della classificazione dei solitoni di Ricci, come abbiamo fatto per le soluzioni antiche nell'Osservazione 7.7.

La classificazione di Perelman dei solitoni gradiente shrinking tridimensionali ($\mathbb{R}^3$ e a meno di riscalamenti e quozienti, S^3 e $S^2 \times \mathbb{R}$) e quella di Hamilton e Ivey degli analoghi in dimensione 2 ($\mathbb{R}^2$, S^2 e $\mathbb{RP}^2$, a meno di riscalamenti) sono valide anche senza l'ipotesi di noncollasso (non esistono solitoni gradiente shrinking collassati in dimensione 2 e 3), grazie ai lavori successivi di Ni–Wallach [80], Naber [78] e Chen [28].

Come detto, Brendle [16] ha mostrato che il Bryant è l'unico solitone gradiente steady tridimensionale noncollassato (oltre a $\mathbb{R}^3$ e i suoi quozienti). Il sigaro di Hamilton Σ^2 in dimensione 2 e $\Sigma^2 \times \mathbb{R}$ sono esempi di solitoni gradiente steady collassati. Mentre Hamilton aveva provato che in dimensione 2 non ve n'erano altri, le “ali volanti” o “flying wings” (si veda l'Osservazione 7.7), da lui congetturate e la cui esistenza è stata provata nel 2022 da Lai [65], sono altri esempi di solitoni gradiente steady collassati. Si congettura che non ve ne siano altri.

La classificazione dei solitoni gradiente expanding è probabilmente impossibile, dati i molteplici esempi che si possono costruire (si vedano i lavori di Deruelle [38] e Feldman–Ilmanen–Knopf [46]).

Anche in dimensione 2, mentre c'è un solo solitone steady (il sigaro di Hamilton) e un solo solitone shrinking non compatto (il piano piatto), esiste, per esempio, un'intera famiglia continua a un parametro di solitoni gradiente expanding, rotazionalmente simmetrici, che hanno la forma di “imbuto” (o coni) che si aprono verso l'infinito.

Se si rimuove l'ipotesi che il solitone sia gradiente, dunque soddisfa (solo) la formula (7.6), al momento non è noto un esempio di solitone shrinking non-gradiente. I lavori di Naber [78] e Petersen–Wylie [85, 86] (si veda anche [43]) mostrano che imponendo condizioni non particolarmente stringenti sul comportamento asintotico del volume o della curvatura, il solitone shrinking deve essere gradiente. La congettura ampiamente accettata è che ogni solitone shrinking sia in realtà gradiente. Tra i solitoni steady ed expanding, invece vi sono molti esempi non-gradiente, dati da metriche su gruppi di Lie (solitoni omogenei).

Infine, sottolineiamo che Perelman ha dimostrato che in ogni dimensione, un solitone shrinking compatto è necessariamente un solitone gradiente, mentre Ivey [60] che i solitoni steady o expanding compatti sono varietà di Einstein (in dimensione 2 e 3 a curvatura costante), dunque ovviamente gradiente. Si veda [43] per una dimostrazione

basata puramente sull'analisi della PDE (7.6) soddisfatta dai solitoni.

7.6 IL FLUSSO DI RICCI CON CHIRURGIA

Il teorema dell'intorno canonico 7.19 fornisce una descrizione estremamente precisa della topologia e della geometria locale della varietà vicino ai punti in cui la curvatura diverge. Perelman sfrutta questa descrizione per definire una procedura geometrica e analitica detta *chirurgia (surgery)*, la quale permette di definire un *flusso di Ricci con chirurgia* e di prolungare la soluzione oltre le singolarità in tempo finito. Sottolineiamo che questa parte del lavoro di Perelman, così come la precedente che conduce al teorema dell'intorno canonico, è estremamente tecnica e complessa. La illustreremo dunque in modo molto qualitativo, rimandando il lettore interessato ai suoi articoli originali e alle note esplicative di Kleiner e Lott [62].

Assumiamo che M sia orientabile e che $T > 0$ sia un tempo singolare di un flusso di Ricci. Prima di descrivere la procedura di chirurgia, analizziamo il comportamento della varietà per $t \rightarrow T$.

Se in una componente connessa di M la curvatura rimane limitata, per $t \rightarrow T$, la chirurgia la lascerà inalterata. Tale componente infatti non sta sviluppando alcuna singolarità.

Possiamo escludere dall'analisi che segue i punti dove la curvatura scalare "esplode" per $t \rightarrow T$ e che appartengono (nel teorema dell'intorno canonico) a componenti connesse di M date da quozienti sferici. Queste componenti svilupperanno un "collasso sferico".

Consideriamo quindi una componente connessa M_i di M dove la curvatura scalare "esplode" per $t \rightarrow T$ e definiamo $\Omega_i \subseteq M_i$ come il sottoinsieme strettamente contenuto in M_i dei punti p tali che $R(p, t)$ rimane limitata, per $t \rightarrow T$. Se Ω_i è vuoto, si mostra (per le stime e l'analisi della sezione precedente) che esiste un tempo t arbitrariamente vicino a T , tale che M_i è tutta coperta da ε -neck e ε -cap. Con (facili) argomenti topologici, segue allora che tale componente deve essere diffeomorfa a S^3 , $\mathbb{RP}^3$, $S^2 \times S^1$ o $\mathbb{RP}^3 \# \mathbb{RP}^3$ (si noti che l'unica varietà semplicemente connessa tra queste è S^3).

Sia ora M_i una componente connessa di M tale che $\Omega_i \subseteq M_i$, definito come sopra, sia non vuoto e non coincida con M_i . Fissato un parametro $\rho > R_0$, dove la "soglia" $R_0 > 0$ è data dal teorema dell'intorno canonico, sia

$$\Omega_\rho = \{p \in M_i \mid R(p, t) \leq \rho \text{ definitivamente, per } t \rightarrow T\} \subseteq \Omega_i,$$

che chiaramente, se ρ è abbastanza grande, è un insieme non vuoto. Si mostra che Ω_i è aperto e che per le stime di Bernstein–Bando–Shi (localizzate), la metrica $g(t)$ converge in C^∞ a una metrica $g_i(T)$ su Ω_i , per $t \rightarrow T$. Inoltre, che Ω_ρ è compatto e che per ogni tempo t sufficientemente vicino a T , la curvatura scalare è maggiore di R_0 (e uguale al massimo a ρ) nei punti del suo bordo $\partial\Omega_\rho$ (non vuoto), dunque tutti tali punti hanno un intorno canonico. Segue, di nuovo con argomenti topologico/geometrici, che tale bordo è composto da una famiglia finita di sfere S^2 disgiunte tra loro e che da ognuna di esse “parte un tubo”, composto di incollamenti di ε -neck che o si “richiude” su Ω_ρ , oppure viene “chiuso” all’altra estremità da un ε -cap. Pertanto, essendo orientabile, la componente M_i è diffeomorfa a una somma connessa delle componenti connesse dell’insieme Ω_ρ (a rigore, i cui bordi sferici vengono preventivamente “chiusi” incollandovi delle palle), di un numero finito di $S^2 \times S^1$ (che corrispondono all’incollamento di un tubo $S^2 \times [-1, 1]$ a due componenti di bordo di una singola componente connessa di Ω_ρ) e di un numero finito di $\mathbb{RP}^3$ (dati dagli ε -cap diffeomorfi a $\mathbb{RP}^3$ privati di una palla che “chiudono” le estremità dei tubi che non “tornano” su Ω_ρ). Osserviamo che i tubi “chiusi” da ε -cap diffeomorfi a una palla non danno contributo alla topologia. Si vede allora facilmente che se M_i è semplicemente connessa, deve essere diffeomorfa alla somma connessa delle componenti connesse di Ω_ρ (i cui bordi sferici sono preventivamente “chiusi” da palle).

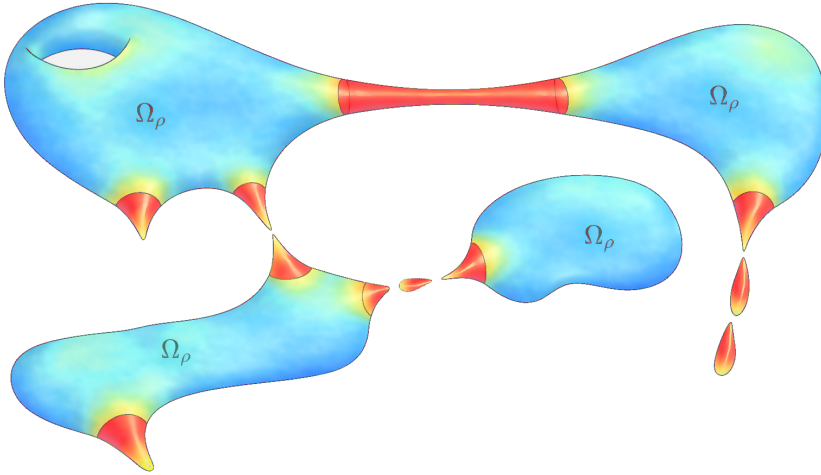
Dopo questa analisi preliminare, vediamo dunque come si definisce la chirurgia. Si fissa un parametro $\Theta > R_0$ tale che se $R_{\max}(t)$ lo raggiunge, si procede come segue su $(M, g(t))$, tenendo presente quanto visto sopra:

- le componenti connesse di M dove la curvatura non “esplode” per $t \rightarrow T$ vengono lasciate inalterate;
- le componenti connesse che sono quozienti sferici che stanno estinguendosi, vengono semplicemente rimosse;
- le componenti connesse dove la curvatura scalare non è limitata in alcun punto per $t \rightarrow T$, vengono anch’esse rimosse, tenendone presente la topologia;
- infine, consideriamo le componenti connesse di M che sono, come descritto sopra, l’insieme Ω_ρ con incollati un numero finito di tubi composti da ε -neck e “chiusi” da ε -cap oppure che si “richiudono”

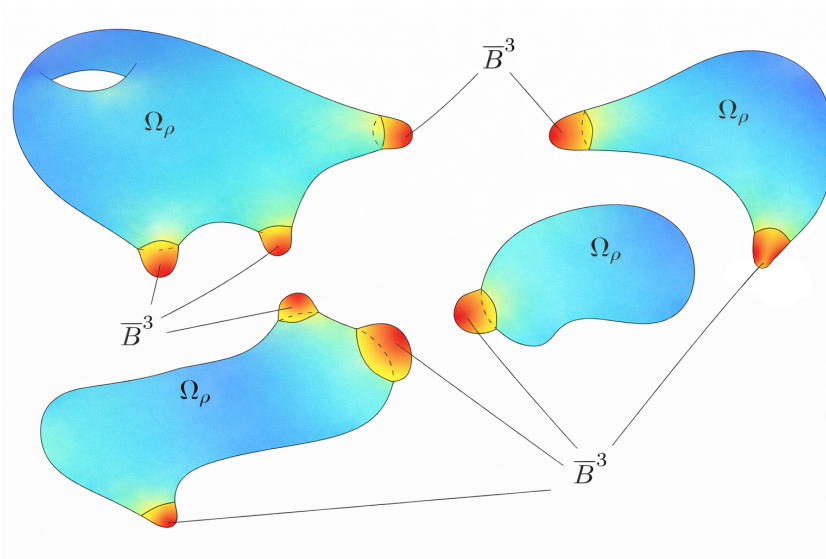
su Ω_ρ . Per ogni tubo in ognuna di tali componenti, si “opera” individuando, rispettivamente nei due casi, una o due sfere S^2 scelte appropriatamente vicine ai bordi sferici di Ω_ρ , in modo da avere un controllo sulla curvatura in un loro intorno e si “taglia” lungo tali sfere. Nel primo caso si “recide” dunque una “punta” con alta curvatura e si incolla sulla sfera lungo cui si è “tagliato” una palla chiusa $\bar{B}^3$ con una particolare metrica rotazionalmente simmetrica con curvatura positiva controllata e molto minore di quella della “punta recisa”, chiamata *soluzione standard* da Perelman. Successivamente, per approssimazione, si rende questo incollamento liscio (di classe C^∞), sempre mantenendo la curvatura sotto controllo. Facendo questa operazione, la topologia rimane inalterata se l' ε -cap era una palla, oppure la varietà “perde” un $\mathbb{R}P^3$, nel senso dell'inversa dell'operazione di somma connessa, se l' ε -cap era $\mathbb{R}P^3$ senza una palla.

Nel secondo caso, si procede analogamente a eliminare il “cilindro” $S^2 \times [-1, 1]$ con alta curvatura che si sconnette in seguito ai tagli lungo le due sfere e si “chiudono” queste ultime con delle soluzioni standard, rendendo l'incollamento liscio. In questo caso, la varietà “perde” un $S^2 \times S^1$, nello stesso senso detto sopra, se le due sfere appartengono alla stessa componente connessa di Ω_ρ , oppure si disconnette in due componenti connesse, altrimenti.

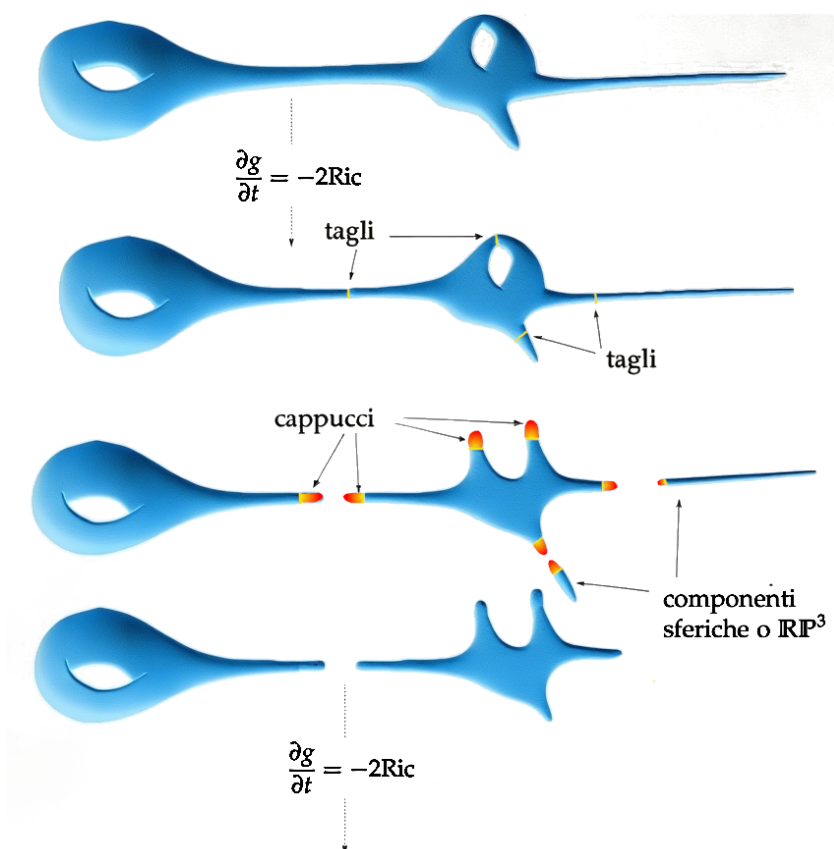
Nella figura che segue, vediamo un esempio di insieme Ω_i con la metrica limite $g_i(T)$ e del suo sottoinsieme Ω_ρ .



Mentre, in quest'altra figura, il risultato dell'operazione di chirurgia.



Una volta eseguita la chirurgia su tutte le componenti connesse, si ottiene una nuova varietà riemanniana tridimensionale compatta, la cui topologia (delle componenti, in quanto l'eventuale connessione di M potrebbe "perdersi") è più semplice dell'originale. A questo punto, si fa ripartire il flusso di Ricci prendendo questa nuova varietà come dato iniziale.



La procedura di chirurgia, nella sua versione precisa e quantitativa, è sviluppata in modo molto accurato al fine di preservare delle proprietà fondamentali del flusso, in particolare, il fatto che sia $R_{\min}$ che il funzionale entropia $\mathcal{W}$ non decrescano nel "salto" alla varietà "operata". Quindi, la stima di κ -noncollasso si mantiene (quantitativamente) inalterata. Queste proprietà e il modo in cui la procedura è

definita, permettono a Perelman di mostrare che ogni chirurgia “elimina” dalla varietà una quantità di volume (in dipendenza dalla varietà iniziale) uniformemente limitata dal basso da una costante positiva. Ciò chiaramente implica l’impossibilità dell’accumulazione dei tempi di singolarità (e quindi degli istanti in cui bisogna effettuare le chirurgie). Di conseguenza, il *flusso di Ricci con chirurgia* di una varietà riemanniana compatta (M, g_0) è ben definito in un intervallo di tempo “massimale” $[0, T)$, con $T > 0$ possibilmente uguale a $+\infty$. Nel caso $T < +\infty$, la varietà deve dunque “estingersi” dopo un numero finito di singolarità/chirurgie, mentre nel caso $T = +\infty$, Bamler nel 2018, nella serie di lavori [4, 5, 6, 7, 8], ha mostrato che dopo un numero finito di chirurgie, il flusso non sviluppa più singolarità.

7.7 LA DIMOSTRAZIONE DELLA CONGETTURA DI POINCARÉ

L’impianto analitico–geometrico fin qui sviluppato fornisce tutti gli strumenti necessari per giungere al risultato culmine della teoria: la dimostrazione della congettura di Poincaré, chiudendo uno dei problemi aperti più importanti e famosi della geometria del Novecento (nonché uno dei sette “Millennium Problems” selezionati dal *Clay Mathematics Institute* nel 2000, con un premio di un milione di dollari per ognuno di essi).

Teorema 7.21 (Congettura di Poincaré – Perelman, 2003). Ogni varietà topologica tridimensionale, compatta e semplicemente connessa, è omeomorfa alla sfera S^3 .

La congettura venne formulata da Henri Poincaré nel 1904 nel quinto e ultimo “complemento” alla sua opera *Analysis Situs* del 1895, pubblicato sui *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* [87]. Malgrado molteplici sforzi, che hanno comunque portato allo sviluppo di una mole imponente di idee, tecniche e risultati, la sua dimostrazione è arrivata soltanto un secolo dopo per mezzo del flusso di Ricci. Vediamo infatti come questa segua dai risultati visti nella sezione precedente.

Sia M una varietà topologica tridimensionale, compatta e semplicemente connessa. Per i classici risultati di Moise [74, 75], è ben noto che in dimensione tre ogni varietà topologica ammette una struttura differenziabile (unica); pertanto, è possibile dotare M di una metrica riemanniana g_0 .

Facciamo dunque evolvere (M, g_0) secondo il flusso di Ricci con chirurgia. Un risultato cruciale, stabilito da Perelman nel suo terzo e

ultimo lavoro [82], mostra che per una varietà con gruppo fondamentale banale, il tempo massimale T di esistenza del flusso deve essere finito (successivamente, una dimostrazione alternativa e tecnicamente più semplice è stata fornita da Colding e Minicozzi in [34]). Questo significa che l'intera varietà deve estinguersi al tempo T , scomparendo del tutto dopo un numero finito di tempi di chirurgia. Osserviamo che durante l'evoluzione, i numerosi tagli lungo i tubi possono disconnettere la varietà in un numero finito di componenti connesse, le quali continueranno a evolvere indipendentemente una dall'altra, fino alla loro estinzione. Leggendo l'intero processo a ritroso nel tempo, la topologia di M si può allora "ricostruire" tramite operazioni di somma connessa di tali componenti estinte e di quelle eliminate.

Essendo la varietà M semplicemente connessa, esaminando i vari casi della procedura di chirurgia, vediamo che o abbiamo eliminato delle 3-sfere topologiche (non quozientate, né $\mathbb{RP}^3$, per l'assunzione di semplice connessione), dunque la topologia rimane invariata, oppure la varietà si è disconnessa in un numero finito di componenti ognuna delle quali è sempre semplicemente connessa. Ciò è garantito dal *teorema di Seifert-van Kampen* (si veda [58]) sul gruppo fondamentale di una somma connessa, che dice che tale gruppo è il prodotto libero dei gruppi fondamentali delle varietà. Dunque, chiaramente, questa conclusione si ripete per ogni tempo di chirurgia.

Nel momento di estinzione di una o più di queste varietà o in quello finale di estinzione completa, l'analisi di Perelman assicura che tutte queste componenti sono di nuovo delle 3-sfere topologiche (per gli stessi motivi di cui sopra, non possono esserne dei quozienti). Ricostruendo dunque la topologia a ritroso, la varietà originaria M risulta essere la somma connessa di un numero finito di 3-sfere e poiché l'operazione di somma connessa tra sfere non altera la topologia, cioè $S^3 \# S^3 \cong S^3$, concludiamo che M è diffeomorfa (e quindi omeomorfa) alla sfera S^3 , dimostrando quindi la congettura di Poincaré.

Il grosso lavoro di controllo e comprensione dei tre preprint [81, 82, 83] di Perelman ha mobilitato i massimi esperti mondiali. Nel volgere di pochi anni, questo sforzo collettivo si è concretizzato in tre esposizioni che hanno verificato e dettagliato l'intera teoria: le note esplicative di Bruce Kleiner e John Lott [62], il trattato patrocinato dal *Clay Mathematics Institute* a firma di John Morgan e Gang Tian [76] e l'articolo di Huai-Dong Cao e Xi-Ping Zhu [23]. Quest'ultimo fu inizialmente al centro di accese polemiche, tanto da spingere gli autori, a fine 2006, a depositare sul preprint server ArXiv una versione rivista [24] recante un titolo e

un abstract decisamente ridimensionati, volti a riconoscere in modo inequivocabile l'assoluta paternità della dimostrazione a Hamilton e Perelman.

L'applicazione di questo metodo di analisi topologica basato sul flusso di Ricci non si esaurisce con la dimostrazione della congettura di Poincaré, ma si estende all'intera classe delle varietà tridimensionali. Se rimuoviamo l'ipotesi che M sia semplicemente connessa, il flusso può "sopravvivere" per tempo infinito e in tale scenario, la linea d'analisi era già stata tracciata da Hamilton nel 1999 [57]. Hamilton aveva infatti dimostrato che se un flusso di Ricci esiste per tutti i tempi positivi senza mai sviluppare singolarità e se la sua curvatura decade come C/t , per $t \rightarrow \infty$, allora asintoticamente la varietà si decompone canonicamente in due regioni: una parte "spessa" (*thick*), la cui geometria converge verso una metrica iperbolica e una parte "sottile" (*thin*) che collassa. In questo solco si inserisce il terzo lavoro di Perelman [82] che intuì che, pur in presenza di un numero infinito di chirurgie, la dinamica a lungo termine del flusso si sarebbe potuta ricollegare a questo risultato di Hamilton. Fornì dunque uno schema di dimostrazione (di difficile comprensione) del fatto che la varietà si sarebbe comunque asintoticamente decomposta in una parte "spessa" regolare e una parte "sottile" topologicamente assimilabile a una *varietà grafo* (*graph manifold* – si veda [59]), tuttavia, molti dettagli erano mancanti.

Questa conclusione avrebbe implicato la famosa *congettura di geometrizzazione* di Thurston [92], della quale la congettura di Poincaré è un caso speciale. Tale congettura asserisce la possibilità di decomporre "canonicamente" ogni 3-varietà in "pezzi geometrizzabili", cioè con "geometrie" ben conosciute (precisamente, esattamente 8 di esse – si vedano [72, 93] per approfondire).

Il gruppo di matematici composto da Bessi eres, Besson, Boileau, Maillot e Porti, semplificando la linea di Perelman, ha dimostrato in [12] che, ad un tempo sufficientemente grande, la varietà risulta topologicamente decomposta nelle parti "spessa" e "sottile", rendendo quindi inutile proseguire il flusso e studiarne il comportamento asintotico, nell'ottica di mostrare la congettura di geometrizzazione. Invece, Morgan e Tian, nel loro secondo volume [77], hanno colmato i dettagli mancanti e formalizzato rigorosamente la dimostrazione di Perelman, a cui dunque è attribuita anche la prova di tale congettura.

A completamento del quadro, Bamler nel 2018, nella serie di lavori [4, 5, 6, 7, 8], ha infine mostrato che le chirurgie si arrestano effettivamente dopo un tempo finito (dunque sono in numero finito) e che la curvatura

decade esattamente come richiesto dalle ipotesi per poter applicare il risultato di decomposizione di Hamilton.

In definitiva, il flusso di Ricci ha permesso di connettere due mondi fino ad allora considerati distanti: l'analisi delle PDE nonlineari e la topologia in dimensione bassa. Questo straordinario cammino intellettuale, delineato da Hamilton e completato da Perelman, ha scritto a tutti gli effetti una delle pagine più belle e profonde della storia della matematica.

ESISTENZA PER TEMPI PICCOLI

Il primo problema nello studio di un'equazione di evoluzione geometrica consiste nel dimostrare l'esistenza e l'unicità di una soluzione per tempi piccoli.

In questa appendice vogliamo appunto provare tale risultato nel nostro caso del flusso di Ricci, cioè che data una varietà riemanniana compatta (M, g_0) , la soluzione del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\text{Ric}_{g(t)} \\ g(0) = g_0 \end{cases}$$

esiste ed è unica in un intervallo di tempo positivo (massimale) $[0, T)$, come enunciato nel Teorema 2.2.

A tale scopo, ricordando l'analogia formale tra il tensore di Ricci e (meno $1/2$) il laplaciano della metrica discussa nell'introduzione, il quadro teorico naturale è costituito dalla teoria delle equazioni paraboliche nonlineari per sezioni di fibrati vettoriali su varietà riemanniane, che accenneremo brevemente nella sezione che segue. Sfortunatamente, poiché il tensore di Ricci è invariante per diffeomorfismi, si ha una degenerazione analitica intrinseca dell'operatore associato $g \mapsto -2\text{Ric}_g$, il che preclude l'applicazione diretta della teoria parabolica standard al flusso di Ricci. Per ovviare a tale problema, nella Sezione A.2 verrà illustrato il cosiddetto *trucco di DeTurck* (*DeTurck's trick*): una procedura analitica che permette di "eliminare" tale invarianza, garantendo esistenza e unicità per tempi piccoli delle soluzioni.

Un riferimento per il materiale di questa appendice è il libro di Bennett Chow e Dan Knopf [33, Capitolo 3].

A.1 OPERATORI PARABOLICI NONLINEARI

Siano E e F due fibrati vettoriali su una varietà n -dimensionale M e indichiamo con $\Gamma(E)$ e $\Gamma(F)$ i rispettivi spazi delle loro sezioni.

Definizione A.1. Un'applicazione lineare $L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ è un *operatore differenziale lineare di ordine k* se, in un sistema di coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ e trivializzazioni locali per E e F , l'azione di L su una sezione $u \in \Gamma(E)$ si esprime nella forma

$$Lu(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} L^\alpha(x) \partial_\alpha u,$$

dove per ogni multiindice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, definiamo $\partial_\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ e $x \mapsto L^\alpha(x) : E_x \rightarrow F_x$ sono mappe locali C^∞ a valori in applicazioni lineari tra le fibre vettoriali dei due fibrati.

A titolo esemplificativo, un operatore differenziale lineare del second'ordine $L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ si scrive localmente nella forma

$$Lu = A^{ij} \partial_{ij}^2 u + B^i \partial_i u + Cu,$$

dove A^{ij}, B^i e C sono mappe locali C^∞ a valori negli endomorfismi lineari delle fibre vettoriali di E .

Osservazione A.2. Sebbene la formulazione geometrica intrinseca di un operatore differenziale richieda usualmente l'impiego di una connessione (quale, ad esempio, la connessione di Levi-Civita indotta da una metrica), i termini differenziali di ordine massimo sono invarianti rispetto alla specifica connessione adottata. Di conseguenza, l'impiego delle derivate parziali standard delle componenti di una sezione in una carta locale è sufficiente per determinare l'ordine dell'operatore e il suo *simbolo principale* (che ora andiamo a definire), limitando la dipendenza dalla connessione ai soli termini di ordine inferiore.

Definizione A.3. Dato un covettore $\xi \in T_p^*M$, il *simbolo principale* dell'operatore differenziale L di ordine k nella direzione ξ in $p \in M$ è l'applicazione lineare tra le fibre vettoriali E_p e F_p definita da

$$\sigma_\xi(L) = \sum_{|\alpha|=k} L^\alpha(p) \xi^\alpha,$$

dove $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$, se $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i dx^i$.

Poiché le regole di trasformazione delle derivate di ordine massimo coincidono con quelle dei tensori, la definizione del simbolo principale è intrinseca e indipendente dalla scelta delle coordinate.

Definizione A.4. Un operatore differenziale lineare L di ordine k di un fibrato E in se stesso è detto *ellittico* in $p \in M$ se, per ogni covettore non nullo $\xi \in T_p^*M$, l'omomorfismo $\sigma_\xi(L)$ risulta essere un isomorfismo. In presenza di una struttura metrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sul fibrato E , l'operatore è definito *fortemente ellittico* o *strettamente ellittico* (uniformemente su M), se esiste una costante $\delta > 0$ tale che, per ogni $u \in \Gamma(E)$ e per ogni $\xi \in \Gamma(T^*M)$, valga la disuguaglianza

$$\langle \sigma_\xi(L)u, u \rangle \geq \delta |\xi|^k |u|^2. \quad (\text{A.1})$$

Questa condizione implica necessariamente che k sia un intero pari e che lo spettro di $\sigma_{\zeta}(L)$ sia contenuto nel semipiano complesso a parte reale positiva. Se la disuguaglianza (A.1) è soddisfatta unicamente per $\delta = 0$, l'operatore è denominato *debolmente ellittico*.

Sia ora $L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ un operatore differenziale *nonlineare* di ordine k , esprimibile localmente nella forma

$$Lu = F(x, u, \dots, \partial^k u)$$

con $|\alpha| \leq k$ e dove F è una funzione C^∞ nei suoi argomenti. Si definisce *linearizzato* di L in una sezione fissata $u_0 \in \Gamma(E)$, l'operatore differenziale lineare $DL_{u_0} : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ generato dalla derivata direzionale:

$$DL_{u_0}v = \left. \frac{d}{dt} L(u_0 + tv) \right|_{t=0}.$$

Applicando la regola della catena, il linearizzato assume la forma esplicita

$$DL_{u_0}v = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial F}{\partial (\partial_\alpha u)}(x, u_0, \dots, \partial^k u_0) \partial_\alpha v.$$

Si definisce allora (*fortemente*) *ellittico* l'operatore nonlineare L se il linearizzato DL_u risulta (*fortemente*) ellittico per ogni sezione u .

L'esistenza e l'unicità (e la regolarità) delle soluzioni dei sistemi di equazioni di evoluzione, che tipicamente assumono la forma del seguente problema (di Cauchy),

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} = Lg \\ g(0) = g_0 \end{cases}$$

sono legate al simbolo principale del linearizzato dell'operatore L (che potrebbe dipendere anche dal tempo). Se il linearizzato di L è *fortemente ellittico*, uniformemente nello spazio e nel tempo, questo sistema (o equazione) alle derivate parziali è detto *strettamente parabolico*. In tali ipotesi, la teoria "classica" dei sistemi parabolici quasilineari garantisce l'esistenza e l'unicità di una soluzione regolare per tempi piccoli, cioè in un intervallo di tempo $[0, T)$ (si vedano [47, 70], per esempio).

Nel caso del flusso di Ricci, l'operatore L nel sistema sopra è dato da $Lg = -2\text{Ric}_g$ che agisce sulle forme bilineari simmetriche su M ; una volta espresso in coordinate il tensore di Ricci in termini delle derivate seconde della metrica, si vede che tale operatore *non è ellittico*, in quanto il simbolo principale del suo linearizzato è un'applicazione

lineare sul fibrato delle forme bilineari simmetriche in se stesso che *non* è un isomorfismo.

Vediamo esplicitamente questa degenerazione (i seguenti calcoli ci saranno utili anche in seguito). Per mezzo della formula (2.7), il tensore di Ricci si esprime in coordinate come

$$R_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_{ik}^2 g_{jl} + \partial_{jl}^2 g_{ik} - \partial_{il}^2 g_{jk} - \partial_{kj}^2 g_{il}) + S_{jk}(g),$$

dove $S_{jk}(g)$ è una forma quadratica in g e nelle derivate del prim'ordine della metrica. Se dunque calcoliamo il linearizzato dell'operatore $Lg = -2\text{Ric}_g$ e ne ricaviamo il simbolo principale, otteniamo che l'azione di $\sigma_{\xi}(L)$ su una forma bilineare simmetrica h è data da

$$[\sigma_{\xi}(L)h]_{jk} = -g^{il} (h_{jl}\xi_i\xi_k + h_{ik}\xi_j\xi_l - h_{jk}\xi_i\xi_l - h_{il}\xi_k\xi_j). \quad (\text{A.2})$$

Osserviamo allora immediatamente che questa espressione si annulla identicamente scegliendo $h_{ij} = \xi_i\xi_j$ (con $\xi \neq 0$). Infatti, tutti e quattro i termini all'interno della parentesi si riducono al prodotto $\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l$, sommandosi a zero. Questo mostra costruttivamente che il simbolo principale $\sigma_{\xi}(L)$ ha un kernel non banale.

Inoltre, la forma quadratica associata a $\sigma_{\xi}(L)$,

$$Q(h) = g(\sigma_{\xi}(L)h, h)$$

non è semidefinita positiva, dunque l'operatore non è nemmeno debolmente ellittico nel senso della nonnegatività di Q (non vi sono comunque autovalori negativi di $\sigma_{\xi}(L)$ – non essendo un operatore autoaggiunto, il segno della forma quadratica Q non è direttamente legato allo spettro dell'operatore).

La ragione profonda della non-ellitticità dell'operatore -2Ric_g risiede nell'invarianza del tensore di Ricci (e dunque dell'equazione del flusso) rispetto all'azione del gruppo dei diffeomorfismi $\text{Diff}(M)$ della varietà M in sé, cioè il fatto che

$$\varphi^* \text{Ric}_g = \text{Ric}_{\varphi^*g}$$

per ogni $\varphi \in \text{Diff}(M)$. Infatti, come originariamente evidenziato da Hamilton, la degenerazione del flusso di Ricci è una manifestazione analitica della seconda identità di Bianchi contratta (si veda [33]), la quale a sua volta discende direttamente dall'invarianza per diffeomorfismi del tensore di curvatura (si veda [61]). Si tratta di un fenomeno strutturale comune a ogni operatore differenziale geometrico invariante

sotto l'azione di $\text{Diff}(M)$: si può mostrare che tale invarianza implica che il simbolo principale del linearizzato possiede un nucleo non banale di dimensione almeno uguale a quella della varietà, precludendo così l'ellitticità.

Di conseguenza, l'equazione del flusso di Ricci non è strettamente parabolica, dunque la teoria "standard" non si applica, come osservato da Hamilton [50], il quale, per ovviare a questo problema, impiegò il piuttosto complesso (anche nella sua applicazione) *teorema della funzione implicita di Nash–Moser* (si veda [49], dove Hamilton rivisita il teorema), per la dimostrazione dell'esistenza e unicità del flusso per tempi piccoli. Successivamente, Dennis DeTurck [40] sviluppò un approccio strutturalmente più diretto, introducendo un flusso ausiliario strettamente parabolico e dimostrandone l'equivalenza analitica e geometrica con il flusso di Ricci originario. Negli anni a seguire, tale metodo è stato poi ulteriormente raffinato e semplificato dallo stesso DeTurck (si vedano [3, 41]) e da Hamilton [55].

A.2 IL TRUCCO DI DETURCK

L'idea alla base del metodo sviluppato da DeTurck [40], noto in letteratura come *trucco di DeTurck* (*DeTurck's trick*), adattando la tecnica sviluppata in un precedente lavoro [39] per il problema "statico" (ellittico) di trovare metriche con tensore di Ricci assegnato, consiste nel "rompere" l'invarianza per diffeomorfismi che causa la degenerazione dell'equazione, aggiungendo un termine che la renda strettamente parabolica e che dunque produca un flusso ausiliario (per mezzo della teoria standard) da cui poi si possa ottenere una soluzione del flusso di Ricci originale.

Nell'articolo originale di DeTurck [40], il flusso di Ricci viene sostituito da un problema parabolico quasilineare equivalente a meno di diffeomorfismi. La presentazione originale è piuttosto computazionale, mentre la dimostrazione che presenteremo nel seguito è la formulazione "moderna" e geometricamente più trasparente dell'approccio, dovuta sempre a DeTurck in una successiva rivisitazione del suo lavoro (rimasta a lungo inedita e poi pubblicata in [41]) e ad Hamilton [55].

La linea dimostrativa prevede di aggiungere all'equazione di evoluzione la derivata di Lie della metrica lungo un opportuno campo

vettoriale dipendente dal tempo $V(t)$. Si ottiene così un'equazione di evoluzione ausiliaria, nota come *flusso di Ricci-DeTurck*:

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2\text{Ric}_{g(t)} + \mathcal{L}_{V(t)}g(t). \quad (\text{A.3})$$

Definendo tale campo in modo opportuno (tipicamente confrontando la connessione della metrica evolvente $g(t)$ con quella di una metrica "di background" fissata $\tilde{g}$), le derivate seconde presenti nella derivata di Lie $\mathcal{L}_{V(t)}g$ cancellano esattamente i termini misti dell'espressione in coordinate del tensore di Ricci che ne inficiano l'ellitticità.

Il risultato di questa cancellazione è un operatore differenziale il cui termine di ordine massimo coincide, a meno di costanti, con il laplaciano della metrica, dunque il nuovo sistema (A.3) risulta così essere strettamente parabolico, permettendo l'applicazione dei teoremi classici che ne garantiscono l'esistenza e l'unicità per tempi piccoli.

Infine, l'equivalenza geometrica tra i due flussi viene recuperata a posteriori: integrando il campo vettoriale dipendente dal tempo $-V(\tilde{g}(t))$ per generare una famiglia di diffeomorfismi φ_t , è possibile effettuare il pull-back della soluzione del flusso ausiliario per ottenere una soluzione del flusso di Ricci originario.

Nelle prossime pagine formalizzeremo questa procedura, calcolando esplicitamente l'espressione del campo vettoriale e dimostrando la forte ellitticità dell'operatore (spaziale) modificato.

Prima di concentrarci sulla definizione esplicita del campo vettoriale di DeTurck, calcoliamo due identità fondamentali che legano campi vettoriali dipendenti dal tempo, tensori e diffeomorfismi generati.

Lemma A.5. Denotiamo con $\mathcal{L}$ l'operatore derivata di Lie su una varietà differenziabile M . Valgono i seguenti fatti:

- sia $V(t)$ un campo vettoriale dipendente dal tempo e $A(t)$ un tensore covariante dipendente dal tempo. Allora,

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta_t^* A(t) = \theta_t^* \left(\frac{\partial}{\partial t} A(t) + \mathcal{L}_{V(t)} A(t) \right),$$

dove θ_t è la famiglia a 1-parametro di diffeomorfismi da M in sé generata dal campo vettoriale $V(t)$;

- sia V un campo vettoriale, A un 2-tensore covariante e $\varphi : M \rightarrow M$ un diffeomorfismo. Allora,

$$\varphi^* \mathcal{L}_V A = \mathcal{L}_{\varphi_*^{-1} V} \varphi^* A.$$

Dimostrazione. La relazione al primo punto deriva dal seguente calcolo diretto:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial}{\partial t} \theta_t^* A(t) \right|_{t=t_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta_{t_0+h}^* A(t_0+h) - \theta_{t_0}^* A(t_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta_{t_0+h}^* (A(t_0+h) - A(t_0))}{h} \\
 &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta_{t_0+h}^* A(t_0) - \theta_{t_0}^* A(t_0)}{h} \\
 &= \theta_{t_0}^* \left. \frac{\partial}{\partial t} A(t) \right|_{t=t_0} + \theta_{t_0}^* \mathcal{L}_{V(t_0)} A(t_0).
 \end{aligned}$$

Riguardo al secondo punto, se θ_t è la famiglia generata da V , allora $\psi_t = \varphi^{-1} \circ \theta_t \circ \varphi$ è generata da $\varphi_*^{-1} V$, dunque

$$\varphi^* \mathcal{L}_V A = \varphi^* \left. \frac{d}{dt} \theta_t^* A \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \psi_t^* \varphi^* A \right|_{t=0} = \mathcal{L}_{\varphi_*^{-1} V} \varphi^* A.$$

□

Siamo ora in grado di definire formalmente il campo vettoriale di DeTurck per “rompere” l’invarianza per diffeomorfismi dell’equazione e di analizzare il simbolo principale.

Lemma A.6. Sia $V : \Gamma(S^2 M) \rightarrow \Gamma(TM)$ il campo vettoriale di DeTurck, definito localmente da

$$\begin{aligned}
 V^j(g) &= g_0^{jk} g^{pq} \nabla_p \left(\frac{1}{2} g^{i\ell} (g_0)_{i\ell} g_{qk} - (g_0)_{qk} \right) \\
 &= \frac{1}{2} g_0^{jk} g^{pq} (\nabla_k (g_0)_{pq} - \nabla_p (g_0)_{qk} - \nabla_q (g_0)_{pk}),
 \end{aligned}$$

dove g_0 è una metrica di background fissata. Allora valgono i seguenti fatti.

- Il simbolo principale del linearizzato $(D\mathcal{L}_V)_{g_0}$ nella direzione $\zeta \in T_p^* M$, rispetto a una base g_0 -ortonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ di $T_p M$ tale che $e_1 = \zeta^\sharp / |\zeta|_{g_0}$ e nelle coordinate

$$(h_{11}, \dots, h_{nn} \mid h_{12}, \dots, h_{1n} \mid h_{23}, h_{24}, \dots, h_{n-1,n}),$$

è espresso dalla matrice

$$\sigma_{\xi}((D\mathcal{L}_V)_{g_0}) = |\xi|^2 \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & -1 & \dots & -1 & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & \\ \hline & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline & & & & \text{Id}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right). \quad (\text{A.4})$$

- Se $\varphi : (M, g) \rightarrow (M, g_0)$ è un diffeomorfismo, allora

$$V((\varphi^{-1})^*g) \circ \varphi = -\Delta_{g, g_0} \varphi,$$

o equivalentemente,

$$V((\varphi^{-1})^*g) = -(\Delta_{g, g_0} \varphi) \circ \varphi^{-1},$$

dove $\Delta_{g, g_0} \varphi$ è il laplaciano della mappa φ , dato localmente da

$$(\Delta_{g, g_0} \varphi)^\alpha = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \varphi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma(g)_{ij}^k \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^k} + \Gamma(g_0)_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^j} \right).$$

Dimostrazione. L'espressione del simbolo al primo punto segue dalla formula per il linearizzato del campo vettoriale di DeTurck in g_0 :

$$[DV_{g_0} h]_k = \nabla^p h_{pk} - \frac{1}{2} \nabla_k \text{tr}_{g_0} h,$$

dove ∇ è la connessione di Levi-Civita di g_0 .

Poiché

$$\begin{aligned} [(D\mathcal{L}_V)_{g_0} h]_{ik} &= \nabla_i [DV_{g_0} h]_k + \nabla_k [DV_{g_0} h]_i \\ &\quad + \text{termini di ordine inferiore,} \end{aligned}$$

il simbolo principale nella direzione ξ è allora dato da

$$[\sigma_{\xi}((D\mathcal{L}_V)_{g_0}) h]_{ik} = -\xi_i \xi_k g_0^{m\ell} h_{m\ell} + \xi_i \xi^p h_{pk} + \xi_k \xi^p h_{pi}.$$

In una base ortonormale adattata a ξ , cioè come nell'enunciato, valutando questa espressione per i vari indici si ottengono esattamente i coefficienti della matrice (A.4).

La dimostrazione del secondo punto si ottiene confrontando l'espressione locale del campo vettoriale di DeTurck associato alla metrica $(\varphi^{-1})^*g$

con la formula locale del laplaciano della mappa $\varphi : (M, g) \rightarrow (M, g_0)$. Si verifica infatti che

$$V((\varphi^{-1})^*g) \circ \varphi = -\Delta_{g, g_0} \varphi$$

(per il calcolo esplicito si veda [33, Capitolo 3]). $\square$

Osservazione A.7. È fondamentale osservare che, affinché il trucco di DeTurck abbia successo, il campo vettoriale V *non deve essere* “geometrico”, ovvero non deve commutare con l’azione dei diffeomorfismi. Se V fosse un operatore geometrico, l’operatore modificato $Lg + \mathcal{L}_V g$ preserverebbe l’invarianza per diffeomorfismo e il nucleo del suo simbolo principale rimarrebbe inalterato. È proprio l’introduzione di una struttura rigida esterna (in questo caso, la metrica di background g_0 e la sua connessione) a permettere la “rottura dell’invarianza” e a garantire la stretta parabolicità.

Grazie a questi preliminari analitici, possiamo procedere alla dimostrazione dell’esistenza e unicità per tempi piccoli del flusso di Ricci, provando dunque il Teorema 2.2.

Proposizione A.8 (Esistenza). Sia (M, g_0) una varietà riemanniana compatta. Il flusso di Ricci ammette una soluzione regolare su un intervallo $[0, T)$, data da

$$g(t) = \varphi_t^* \tilde{g}(t),$$

dove $\tilde{g}(t)$ è l’unica soluzione di

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{g} = -2\text{Ric}_{\tilde{g}} + \mathcal{L}_{V(\tilde{g})} \tilde{g} \quad \text{con} \quad \tilde{g}(0) = g_0 \quad (\text{A.5})$$

e φ_t è la famiglia di diffeomorfismi generata dal campo vettoriale dipendente dal tempo $-V(\tilde{g}(t))$.

Dimostrazione. Poiché dalla formula (A.2) abbiamo che il simbolo principale del linearizzato di -2Ric in g_0 è dato da

$$[\sigma_{\tilde{\zeta}}(D(-2\text{Ric})_{g_0})h]_{ik} = |\tilde{\zeta}|^2 h_{ik} + \tilde{\zeta}_i \tilde{\zeta}_k \text{tr}_{g_0} h - \tilde{\zeta}_i \tilde{\zeta}^p h_{pk} - \tilde{\zeta}_k \tilde{\zeta}^p h_{pi},$$

mentre, per il Lemma A.6,

$$[\sigma_{\tilde{\zeta}}((D\mathcal{L}_V)_{g_0})h]_{ik} = -\tilde{\zeta}_i \tilde{\zeta}_k \text{tr}_{g_0} h + \tilde{\zeta}_i \tilde{\zeta}^p h_{pk} + \tilde{\zeta}_k \tilde{\zeta}^p h_{pi},$$

si ottiene

$$[\sigma_{\tilde{\zeta}}(D(-2\text{Ric} + \mathcal{L}_V)_{g_0})h]_{ik} = |\tilde{\zeta}|^2 h_{ik}.$$

Dunque, il linearizzato di $-2\text{Ric} + \mathcal{L}_V$ è fortemente ellittico. Per continuità del simbolo principale rispetto alla metrica, tale proprietà permane per tutte le metriche sufficientemente vicine a g_0 , così che il problema ausiliario (A.5) risulta strettamente parabolico. La teoria classica dei sistemi parabolici quasilineari garantisce allora esistenza e unicità di una soluzione regolare $\tilde{g}(t)$ su un intervallo $[0, T)$ (si vedano [47, 70], per esempio).

Sia ora φ_t la famiglia di diffeomorfismi generata dal campo vettoriale $-V(\tilde{g}(t))$ e poniamo

$$g(t) = \varphi_t^* \tilde{g}(t).$$

Allora, per il primo punto del Lemma A.5,

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = \varphi_t^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}(t) + \mathcal{L}_{-V(\tilde{g}(t))} \tilde{g}(t) \right) = \varphi_t^* (-2\text{Ric}_{\tilde{g}(t)}) = -2\text{Ric}_{g(t)}.$$

Quindi $g(t)$ è una soluzione del flusso di Ricci con dato iniziale g_0 . $\square$

Proposizione A.9 (Unicità). La soluzione del flusso di Ricci con dato iniziale g_0 è unica.

Dimostrazione. Siano $g_1(t)$ e $g_2(t)$ due soluzioni definite sul medesimo intervallo. Per $i = 1, 2$, sia $\varphi_i(t)$ la soluzione del problema

$$\partial_t \varphi_i = \Delta_{g_i, g_0} \varphi_i \quad \text{con} \quad \varphi_i(0) = \text{Id}_M,$$

la cui esistenza e unicità per tempi piccoli seguono dalla teoria ormai “classica” del flusso delle mappe armoniche tra varietà compatte, sviluppata da Eells e Sampson [42].

Poniamo quindi

$$\tilde{g}_i = (\varphi_i^{-1})^* g_i.$$

Per il secondo punto del Lemma A.6 e il primo punto del Lemma A.5, ogni metrica $\tilde{g}_i$ soddisfa l’equazione di Ricci–DeTurck (A.5) con dato iniziale g_0 . Per l’unicità delle soluzioni di sistemi strettamente parabolici, si ha dunque

$$\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2.$$

Ma allora le equazioni soddisfatte da φ_1 e φ_2 coincidono, perché

$$\partial_t \varphi_i = \Delta_{g_i, g_0} \varphi_i = -V((\varphi_i^{-1})^* g_i) \circ \varphi_i = -V(\tilde{g}_i) \circ \varphi_i,$$

e quindi, essendo $\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2$ e avendo la stessa condizione iniziale, si ottiene $\varphi_1 = \varphi_2$. Di conseguenza,

$$g_1 = \varphi_1^* \tilde{g}_1 = \varphi_2^* \tilde{g}_2 = g_2.$$

$\square$

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. Appleton, *A family of non-collapsed steady Ricci solitons in even dimensions greater or equal to four*, ArXiv Preprint Server – <http://arxiv.org>, 2017.
- [2] T. Aubin, *Métriques riemanniennes et courbure*, J. Differential Geom. **4** (1970), 383–424.
- [3] ———, *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*, Springer-Verlag, 1998.
- [4] R. H. Bamler, *Long-time behavior of 3-dimensional Ricci flow: A: Generalizations of Perelman’s long-time estimates*, Geom. Topol. **22** (2018), 775–844.
- [5] ———, *Long-time behavior of 3-dimensional Ricci flow: B: Evolution of the minimal area of simplicial complexes under Ricci flow*, Geom. Topol. **22** (2018), 845–892.
- [6] ———, *Long-time behavior of 3-dimensional Ricci flow: C: 3-manifold topology and combinatorics of simplicial complexes in 3-manifolds*, Geom. Topol. **22** (2018), 893–948.
- [7] ———, *Long-time behavior of 3-dimensional Ricci flow: D: Proof of the main results*, Geom. Topol. **22** (2018), 949–1068.
- [8] ———, *Long-time behavior of 3-dimensional Ricci flow: Introduction*, Geom. Topol. **22** (2018), 757–774.
- [9] S. Bando, *Real analyticity of solutions of Hamilton’s equation*, Math. Z. **195** (1987), 93–97.
- [10] R. Benedetti and C. Mantegazza, *La congettura di Poincaré e il flusso di Ricci*, Rivista UMI – Matematica, Cultura e Società **2** (2017), 245–289.
- [11] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, 2008.
- [12] L. Bessi eres, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot, and J. Porti, *Geometrisation of 3-manifolds*, EMS Tracts in Mathematics, vol. 13, Eur. Math. Soc., 2010.

- [13] C. Böhm and B. Wilking, *Manifolds with positive curvature operators are space forms*, Ann. of Math. (2) **167** (2008), 1079–1097.
- [14] S. Boucksom, P. Eyssidieux, and V. Guedj, *An introduction to the Kähler–Ricci flow*, Lecture Notes in Math., vol. 2086, Springer, 2013.
- [15] J.-P. Bourguignon, *Ricci curvature and Einstein metrics*, Global differential geometry and global analysis (Berlin, 1979), Lecture Notes in Math., vol. 838, Springer, 1981, pp. 42–63.
- [16] S. Brendle, *Rotational symmetry of self-similar solutions to the Ricci flow*, Invent. Math. **194** (2013), 731–764.
- [17] S. Brendle, P. Daskalopoulos, and N. Sesum, *Uniqueness of compact ancient solutions to three-dimensional Ricci flow*, Invent. Math. **226** (2021), 579–651.
- [18] S. Brendle and R. Schoen, *Manifolds with $1/4$ -pinched curvature are space forms*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), 287–307.
- [19] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, 1983.
- [20] R. L. Bryant, *Ricci flow solitons in dimension three with $SO(3)$ -symmetries*,
<http://www.math.duke.edu/~bryant/3DRotSymRicciSolitons.pdf>, 2005.
- [21] H.-D. Cao, *Deformation of Kähler metrics to Kähler–Einstein metrics on compact Kähler manifolds*, Invent. Math. **81** (1985), 359–372.
- [22] ———, *Recent progress on Ricci solitons*, Recent advances in geometric analysis **11** (2009), 1–38.
- [23] H.-D. Cao and X.-P. Zhu, *A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures – Application of the Hamilton–Perelman theory of the Ricci flow*, Asian J. Math. **10** (2006), 165–492.
- [24] ———, *Hamilton–Perelman’s proof of the Poincaré conjecture and the geometrization conjecture*, ArXiv Preprint Server – <http://arxiv.org>, 2006.
- [25] G. Catino, L. Cremaschi, Z. Djadli, C. Mantegazza, and L. Mazziere, *The Ricci–Bourguignon flow*, Pacific J. Math. **287** (2017), 337–370.

- [26] J. Cheeger and D. G. Ebin, *Comparison theorems in Riemannian geometry*, Amer. Math. Soc., 2008, Revised reprint of the 1975 original.
- [27] J. Cheeger, M. Gromov, and M. Taylor, *Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **17** (1982), 15–53.
- [28] B.-L. Chen, *Strong uniqueness of the Ricci flow*, J. Differential Geom. **82** (2009), 363–382.
- [29] B.-L. Chen and X.-P. Zhu, *Ricci flow with surgery on four-manifolds with positive isotropic curvature*, J. Differential Geom. **74** (2006), 177–264.
- [30] ———, *Uniqueness of the Ricci flow on complete noncompact manifolds*, J. Differential Geom. **74** (2006), 119–154.
- [31] B. Chow, *The Ricci flow on the 2-sphere*, J. Differential Geom. **33** (1991), 325–334.
- [32] B. Chow, S.-C. Chu, D. Glickenstein, C. Guenther, J. Isenberg, T. Ivey, D. Knopf, P. Lu, F. Luo, and L. Ni, *The Ricci flow: techniques and applications. Part II. Analytic aspects*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 144, Amer. Math. Soc., 2008.
- [33] B. Chow and D. Knopf, *The Ricci flow: an introduction*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 110, Amer. Math. Soc., 2004.
- [34] T. H. Colding and W. P. Minicozzi II, *Estimates for the extinction time for the Ricci flow on certain 3-manifolds and a question of Perelman*, J. Amer. Math. Soc. **18** (2005), 561–569.
- [35] P. Daskalopoulos, R. S. Hamilton, and N. Sesum, *Classification of compact ancient solutions to the curve shortening flow and the Ricci flow*, J. Differential Geom. **84** (2010), 455–464.
- [36] P. Daskalopoulos and N. Sesum, *Eternal solutions to the Ricci flow on $\mathbb{R}^2$* , Int. Math. Res. Not. (2006), Art. ID 83610, 20.
- [37] O. Debarre, *Higher-dimensional algebraic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, 2001.
- [38] A. Deruelle, *Smoothing out positively curved metric cones by Ricci expanders*, Geom. Funct. Anal. **22** (2012), 142–176.

- [39] D. M. DeTurck, *Existence of metrics with prescribed Ricci curvature: local theory*, *Invent. Math.* **65** (1981), 179–207.
- [40] ———, *Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors*, *J. Differential Geom.* **18** (1983), 157–162.
- [41] ———, *Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors (improved version)*, *Collected Papers on Ricci Flow* (H.-D. Cao, B. Chow, S.-C. Chu, and S.-T. Yau, eds.), *Series in Geometry and Topology*, vol. 37, *Int. Press*, 2003, pp. 163–165.
- [42] J. Jr. Eells and J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, *Amer. J. Math.* **86** (1964), 109–160.
- [43] M. Eminenti, G. La Nave, and C. Mantegazza, *Ricci solitons: the equation point of view*, *Manuscripta Math.* **127** (2008), 345–367.
- [44] J. Enders, R. Müller, and P. M. Topping, *On Type-I singularities in Ricci flow*, *Comm. Anal. Geom.* **19** (2011), 905–922.
- [45] V. A. Fateev, *The sigma model (dual) representation for a two-parameter family of integrable quantum field theories*, *Nuclear Physics B* **473** (1996), 509–538.
- [46] M. Feldman, T. Ilmanen, and D. Knopf, *Rotationally symmetric shrinking and expanding gradient Kähler–Ricci solitons*, *J. Differential Geom.* **65** (2003), 169–209.
- [47] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, *Prentice–Hall Inc.*, 1964.
- [48] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, third ed., *Universitext*, *Springer–Verlag*, 2004.
- [49] R. S. Hamilton, *The inverse function theorem of Nash and Moser*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **7** (1982), 65–222.
- [50] ———, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, *J. Differential Geom.* **17** (1982), 255–306.
- [51] ———, *Four-manifolds with positive curvature operator*, *J. Differential Geom.* **24** (1986), 153–179.
- [52] ———, *The Ricci flow on surfaces*, *Mathematics and general relativity* (Santa Cruz, CA, 1986), *Contemp. Math.*, vol. 71, *Amer. Math. Soc.*, 1988, pp. 237–262.

- [53] ———, *The Harnack estimate for the Ricci flow*, J. Differential Geom. **37** (1993), 225–243.
- [54] ———, *A compactness property for solutions of the Ricci flow*, Amer. J. Math. **117** (1995), 545–572.
- [55] ———, *The formation of singularities in the Ricci flow*, Surveys in differential geometry, Vol. II, Int. Press, 1995, pp. 7–136.
- [56] ———, *Four-manifolds with positive isotropic curvature*, Comm. Anal. Geom. **5** (1997), 1–92.
- [57] ———, *Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds*, Comm. Anal. Geom. **7** (1999), 695–729.
- [58] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [59] ———, *Notes on basic 3-manifold topology*, <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3Mnotes.pdf>, 2007.
- [60] T. Ivey, *Ricci solitons on compact three-manifolds*, Differential Geom. Appl. **3** (1993), 301–307.
- [61] J. L. Kazdan, *Another proof of Bianchi's identity in Riemannian geometry*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 341–342.
- [62] B. Kleiner and J. Lott, *Notes on Perelman's papers*, Geom. Topol. **12** (2008), 2587–2855.
- [63] W. Klingenberg, *Contributions to Riemannian geometry in the large*, Ann. of Math. (2) **69** (1959), 654–666.
- [64] ———, *Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung*, Comment. Math. Helv. **35** (1961), 47–54.
- [65] Y. Lai, *A family of 3d steady gradient Ricci solitons that are flying wings*, Ann. of Math. (2) **196** (2022), 381–415.
- [66] E. M. Landis, *Second order equations of elliptic and parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 171, Amer. Math. Soc., 1998.
- [67] P. Li and S.-T. Yau, *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator*, Acta Math. **156** (1986), 153–201.
- [68] C. Mantegazza, *Smooth geometric evolutions of hypersurfaces*, Geom. Funct. Anal. **12** (2002), 138–182.

- [69] ———, *Lecture notes on mean curvature flow*, Progress in Mathematics, vol. 290, Birkhäuser/Springer, 2011.
- [70] C. Mantegazza and L. Martinazzi, *A note on quasilinear parabolic equations on manifolds*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **11** (2012), 857–874.
- [71] C. Mantegazza and R. Müller, *Perelman's entropy functional at Type I singularities of the Ricci flow*, J. Reine Angew. Math. **703** (2015), 173–199.
- [72] B. Martelli, *An introduction to geometric topology*, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2016.
- [73] M. J. Micallef and J. D. Moore, *Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes*, Ann. of Math. (2) **127** (1988), 199–227.
- [74] E. E. Moise, *Affine structures in 3-manifolds: V. The triangulation theorem*, Ann. of Math. (2) **56** (1952), 96–114.
- [75] ———, *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 47, Springer-Verlag, 1977.
- [76] J. Morgan and G. Tian, *Ricci flow and the Poincaré conjecture*, Clay Mathematics Monographs, vol. 3, Amer. Math. Soc., 2007.
- [77] ———, *The geometrization conjecture*, Clay Mathematics Monographs, vol. 5, Amer. Math. Soc., 2014.
- [78] A. Naber, *Noncompact shrinking four solitons with nonnegative curvature*, J. Reine Angew. Math. **645** (2010), 125–153.
- [79] H. T. Nguyen, *Isotropic curvature and the Ricci flow*, Int. Math. Res. Notices (2010), 536–558.
- [80] L. Ni and N. Wallach, *On a general gradient Ricci soliton*, Math. Res. Lett. **15** (2008), 473–484.
- [81] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, ArXiv Preprint Server – <http://arxiv.org>, 2002.
- [82] ———, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, ArXiv Preprint Server – <http://arxiv.org>, 2003.

- [83] ———, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, ArXiv Preprint Server – <http://arxiv.org>, 2003.
- [84] P. Petersen, *Riemannian geometry*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 171, Springer, 2016.
- [85] P. Petersen and W. Wylie, *Rigidity of gradient Ricci solitons*, Pacific J. Math. **241** (2009), 329–345.
- [86] ———, *On the classification of gradient Ricci solitons*, Geom. Topol. **14** (2010), 2277–2300.
- [87] H. Poincaré, *Cinquième complément à l'analysis situs*, Rend. Circ. Mat. Palermo **18** (1904), 45–110.
- [88] W.-X. Shi, *Deforming the metric on complete Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **30** (1989), 223–301.
- [89] ———, *Ricci deformation of the metric on complete noncompact Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **30** (1989), 303–394.
- [90] T. Tao, *Perelman's proof of the Poincaré conjecture: a nonlinear PDE perspective*, Math. Res. Lett. **13** (2006), 587–607.
- [91] ———, *Poincaré's legacies. Part II: Pages from year two of a mathematical blog*, Amer. Math. Soc., 2009.
- [92] W. P. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 357–381.
- [93] ———, *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- [94] P. M. Topping, *Lectures on the Ricci flow*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 325, Cambridge University Press, 2006.

INDICE ANALITICO

ali volanti (flying wings), 99

blow-down, 108

blow-up, 92

di Hamilton, 89

di Perelman, 106

campo di DeTurck, 129

chirurgia

di Hamilton, 97

di Perelman, 114

condizione di autovalore nullo, 53

congettura di Poincaré, 119

connessione di Levi-Civita, 4

sui tensori, 7

curvatura, 4

isotropica, 62

positiva, 62

scalare, 6

media, 66

sezionale, 6

derivata covariante, 4

seconda, 8

sui tensori, 7

DeTurck's trick, *vedi* trucco di

DeTurck

distanza ridotta, 104

disuguaglianza

di Harnack, 96

disuguaglianze

di interpolazione, 41

divergenza, 11

entropia, 100, 101

ε -cap, 110

ε -neck, 110

equazione

parabolica, 125

strettamente, 125

flusso

di Ricci, 19

κ -noncollassato, 102

antico, 94

collassato, 102

con chirurgia, 119

di superfici, 89

eterno, 94

noncollassato, 102

normalizzato, 65

pancake, 99

salsiccia, 99

di Ricci-Bourguignon, 1

di Ricci-DeTurck, 128

funzionale

energia $\mathcal{F}$, 100

entropia $\mathcal{W}$, 100

gradiente, 10

Hamilton's trick, *vedi* trucco di

Hamilton

hessiano, 11

identità di Bianchi

prima, 5

seconda, 12

κ -soluzione, 108

laplaciano, 11

lemma

di Cheeger, 102

di Klingenberg, 81

di Schur, 13

point-picking, 107

- μ -entropia, 101
- metrica
 - limite, 92
 - riemanniana, 3
 - risalata, 90
- neckpinch, *vedi* singolarità
 - neckpinch
 - degenerate, *vedi* singolarità
 - degenerate neckpinch
- operatore
 - di curvatura, 6
 - di Riemann, 4
 - differenziale, 123
 - debolmente ellittico, 124
 - ellittico, 124
 - fortemente ellittico, 124
 - lineare, 123
 - linearizzato, 125
 - nonlineare, 125
 - simbolo principale, 124
 - strettamente ellittico, 124
- ovale
 - bidimensionale, 98
 - di Perelman, 98
- PIC, *vedi* curvatura isotropica
 - positiva
- pinching
 - degli autovalori, 68
 - di Hamilton-Ivey, *vedi* stima
 - di Hamilton-Ivey
- potenziale
 - di un solitone, 94
 - funzione, 100
- principio
 - del massimo, 28
 - forte, 28
 - del minimo, 31
- prodotto di Kulkarni-Nomizu, 13
- riscaldamento parabolico, 90
- sigaro di Hamilton, *vedi* solitone
 - sigaro di Hamilton
- simboli di Christoffel, 4
- simbolo principale, *vedi* operatore
 - differenziale, simbolo
 - principale
- singolarità, 87, 89, 90
 - cuspidale, 87
 - di "collasso sferico", 87
 - di Tipo I, 90
 - di Tipo II, 90
 - neckpinch, 87
 - degenerate, 87
- sistema
 - parabolico, 125
 - strettamente, 125
- solitone, 94
 - asintotico, 108
 - di Bryant, 95
 - di Kähler-Ricci, 99
 - expanding, 95
 - gaussiano, 95
 - gradiente, 94
 - potenziale di un, 94
 - shrinking, 95
 - asintotico, 108
 - sigaro di Hamilton, 95
 - steady, 95
- solitone di Ricci, *vedi* solitone
- soluzione
 - κ -noncollassata, 102
 - antica, 94
 - autosimile, 94
 - collassata, 102
 - di King-Rosenau, 98
 - eterna, 94
 - limite, 92
 - noncollassata, 102
 - risalata, 90
- stima
 - di Hamilton-Ivey, 96
- stime di Bernstein-Bando-Shi, 50
- tensore
 - di Ricci, 6
 - tracefree, 15

- di Riemann, 4
 - di Weyl, 14
- teorema
 - dell'intorno canonico, 110
 - della divergenza, 11
 - della sfera, 63
 - di compattezza
 - delle κ -soluzioni, 108
 - di Hamilton, 92
 - di noncollasso locale, 102
 - di pseudolocalità, 108
 - di uniformizzazione, 7
- traccia di un tensore, 3

- trucco
 - di DeTurck, 127
 - di Hamilton, 29
- varietà
 - κ -noncollassata, 102
 - collassata, 102
 - con curvatura costante, 7
 - di Einstein, 7
 - flat, 7
 - limite, 92
 - noncollassata, 102
- volume ridotto, 104

**Advanced Topics in Pure and Applied Mathematics:
Doctoral Lecture Series**

1. M. Trombetti, *Non-Abelian Groups with Many Abelian Subgroups* (2025)
2. D. Castorina, F. Cassanello, M. Casula & A. Columbu, *Il metodo di Alexandrov-Bakelman-Pucci e le sue applicazioni* (2026)
3. C. M. Mantegazza, *Introduzione al flusso di Ricci* (2026)

Questo testo è una versione espansa delle note del corso di dottorato Introduzione al Flusso di Ricci, tenuto nell'anno accademico 2025/26 da Carlo Mantegazza presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli" dell'Università degli Studi di Napoli Federico II.

Carlo Mantegazza, dopo essere stato ricercatore presso la Scuola Normale Superiore di Pisa, è attualmente professore ordinario di Analisi Matematica presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli" dell'Università degli Studi di Napoli Federico II. La sua attività di ricerca riguarda principalmente il calcolo delle variazioni e l'analisi geometrica. Collabora inoltre a iniziative di didattica e divulgazione della matematica. È autore di cinque libri e di circa sessanta pubblicazioni scientifiche. Ha vinto le Olimpiadi Italiane della Matematica nel 1989 ed è stato insignito del Premio "Giuseppe Bartolozzi" dell'Unione Matematica Italiana e del Ferran Sunyer i Balaguer Prize del Centre de Recerca Matemàtica di Barcellona.

ISBN: 978-88-6887-451-3

